Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«Задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною»**

Виконала: студентка II курсу, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Смірнова Анастасія Романівна

Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Гудима У.В.**

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Сорич В.А.**

Кам’янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Досить часто ми зіштовхуємося з ситуаціями, коли з деякої сукупності можливих варіантів своєї поведінки або прийняття рішень в якій-небуть області діяльності необхідно обрати один. Вибір здійснюється шляхом порівняння різних варіантів за допомогою деякої кількісної їх оцінки. В цьому випадку говорять про необхідність розв'язання оптимізаційної задачі, яка полягає у побудові оптимального розв'язку для математичної моделі, при цьому саме вид моделі визначає методи, що використовуються при її розв'язанні.

Зрозуміло, що для розв'язання задачі необхідно, в першу чергу, формалізувати об'єкт оптимізації і подати його у вигляді математичної моделі. Математична модель не є точною копією, вона є ідеалізацією досліджуваного процесу.

Теорія оптимізації представляє собою сукупність фундаментальних математичних результатів та чисельних методів, які орієнтовані на відшукання та ідентифікацію найкращого варіанту з множини альтернатив, які дозволяють уникнути перебору і оцінювання всіх можливих варіантів.

Оптимізаційні задачі знаходять своє застосування в прикладних інженерних, економічних задачах, техніці та в будь-якій іншій області людського життя.

Стандартна задача оптимізації полягає в знаходженні такої точки на множині X евклідового простору R^n ($n \geq 1$), в якій досягається екстремальне значення функції $f(x)$, заданої на множині $X \subset R^n$ [14].

Класифікація екстремальних задач здійснюється за властивостями та способами подання допустимої множини X і цільової функції $f(x)$. Без урахування специфіки цільової функції $f(x)$ вони поділяються на задачі бузумовної та задачі умовної оптимізації [13]:

– задачі безумовної оптимізації, в яких не існує обмежень на можливі зміни x, тобто множина X збігається з простором R^n;

– задачі умовної оптимізації, в яких X є власною підмножиною простору R^n, яка не співпадає з R^n.

Одним із найважливіших типів задач умовної оптимізації є задача математичного програмування. Вона має такий загальний вигляд:

$$f\left(x\right)\to\min\left(\max\right) \tag{0.1}$$

при обмеженнях

$$g_i\left(x\right)\le 0,\ i=\overline{1,k}; \tag{0.2}$$

$$g_i\left(x\right)\ge 0,\ i=\overline{k+1,m}; \tag{0.3}$$

$$g_i\left(x\right)=0,\ i=\overline{m+1,s}; \tag{0.4}$$

$$x\in P, \tag{0.5}$$

де $P\subset R^n$.

Залежно від специфіки цільової функції $f\left(x\right)$ та функцій $g_i\left(x\right)$, $i=\overline{1,s}$, у (0.1)-(0.5) серед задач математичного програмування виділяються різні типи задач, які потребують спеціальних методів дослідження.

Останнім часом математичне програмування розвивається у напрямку дослідження все більш класів спеціальних екстремальних задач, що зумлено інтенсивним розвитком теорії функції дійсної та комплексної змінної, теорії оптимізації, опуклого аналізу. Серед них особливе значення займають задачі кусково-лінійного програмування. Одна із таких задач розглядається у роботі.

Нехай Y – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, Y^*- простір, спряжений з Y, c_k, $k=\overline{1,m}$; y_j, $j=\overline{1,n}$; x_i, $i=\overline{1,l}$; – фіксовані елементи простору Y, $\varphi\in Y^*$, $d_k\in R,\ k=\overline{1,m};\ t_j\in R,\ j=\overline{1,n};\ p_i\in R,\ i=\overline{1,l};$ A – опукла слабко* компактна множина простору Y^*.

Розглянемо задачу відшукання величини

$$\inf\max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k), \tag{0.6}$$

при умовах

$$\varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{0.7}$$

$$\varphi(x_i)=p_i,\ i=\overline{1,l}, \tag{0.8}$$

$$\varphi\in A. \tag{0.9}$$

Задачу (0.6)-(0.9) будемо називати задачею мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається опуклою слабко* компактною множиною.

У випадку, коли $A = \left\{ \varphi \in Y^* : \|\varphi\| \le \theta \right\}$, де θ – фіксоване додатне число, одержимо задачу мінімізації опуклої кусково-афінної функції в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з обмеженнями типу лінійних рівнянь та нерівностей і додатковим обмеженням на норми її допустимих розв’язків, яка розглядалась у працях [1; 7; 5].

Мета, об’єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є: розглянути властивості множини M допустимих розв’язків для задачі (0.6)-(0.9); встановити умови при яких $M \ne \varnothing$ та критерій оптимальності допустимого розв’язку для задачі (0.6)-(0.9); довести співвідношення двоїстості для задачі (0.6)-(0.9).

Об'єктом дослідження є задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною.

Предметом дослідження є теоретичні та практичні аспекти оптимізації в контексті задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною.

Задачами дослідження є:

1. Розглянути властивості допустимої області для задачі (0.6)-(0.9).
2. Розглянути властивості функціонала $f_A(z) = \max\limits_{\varphi \in A} \varphi(z)$, $z \in Y$.
3. Встановити умови при яких допустима область є непорожньою множиною.
4. Побудувати приєднану задачу до задачі (0.6)-(0.9) та встановлення еквівалентності цих задач
5. Довести співвідношення двоїстості для задачі (0.6)-(0.9).
6. Встановити критерії оптимальності допустимих розв’язків для задачі (0.6)-(0.9) та двоїстої до неї задачі.

Наукова новизна отриманих результатів

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

— Доведено, що множина допустимих розв’язків задачі (0.6)-(0.9) є опуклою слабко* компактною множиною;

— Встановлено, що функціонал $f_A(z)=\max\limits_{\varphi\in A}\varphi(z)$, $z\in Y$, є сублінійним функціоналом, заданим на Y.

— Досліджено питання існування допустимого розв’язку для задачі (0.6)-(0.9) у випадку, коли A є опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*.

— Досліджено питання існування допустимого розв’язку для задачі (0.6)-(0.9) у випадку, коли A є симетричною опуклою слабко* компактною множина простору Y^*.

— Побудовано приєднану задачу до задачі (0.6)-(0.9) та встановлено зв'язок між оптимальними розв’язками цих задач.

— Встановлено співвідношення двоїстості для задачі (0.6)-(0.9).

— Доведено критерії оптимальності допустимих розв’язків для задачі (0.6)-(0.9) та двоїстої до неї.

Практичне значення отриманих результатів. Результати отримані в роботі носять теоретичний характер і можуть бути використанні при побудові чисельного методу розв’язування мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на науковій конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету 1 листопада 2023 року.

Основні результати наукових досліджень опубліковано у працях:

ГІРЧУК А. Властивості допустимої області задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається опуклою слабко* компактною множиною. Збірник наукових праць студентів та магістрантів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип. 17. С. 248-250.

СМІРНОВА А. Умови існування допустимого розв’язку для задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається опуклою слабко* компактною множиною. Збірник матеріалів наукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. 1 листопада 2023 року [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. С. 15-17.

Структура роботи. Робота містить вступ, два розділи, висновки та список використаних джерел.

У першому розділі розглянуто властивості множини допустимих розв’язків задачі (0.6)-(0.9) та питання існування допустимого розв’язку для цієї задачі.

У другому розділі побудовано приєднану задачу до задачі (0.6)-(0.9) та встановлено зв'язок між оптимальними розв’язками цих задач, встановлено співвідношення двоїстості для задачі (0.6)-(0.9), доведено критерії оптимальності допустимих розв’язків для задачі (0.6)-(0.9) та двоїстої до неї.

ВИСНОВКИ

У роботі розглядалась задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною.

В роботі:

1. Встановлено, що множина допустимих розв'язків задачі (1.1) – (1.4) є опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*.

2. Показано, що функціонал $f_A(z) = \max_{\varphi \in A} \varphi(z)$, $z \in Y$, є сублінійним функціоналом, заданим на Y.

3. Для задачі (1.1) – (1.4) встановлено необхідні і достатні умови існування допустимих розв'язків у випадку, коли A є опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*.

4. Для задачі (1.1) – (1.4) встановлено необхідні і достатні умови існування допустимих розв'язків у випадку, коли A є симетричною опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*.

5. Розглянуто критерій існування допустимого розв'язку у випадку, коли $f_A(z) = \|z\|_A, z \in Y$.

6. Побудовано приєднану задачу до задачі (1.1) – (1.4) та встановлено зв'язок між оптимальним розв'язком цих задач.

7. Встановлено співвідношення двоїстості для задачі (1.1) – (1.4).

8. Встановлено критерії оптимальності допустимих розв'язків для задачі (1.1) – (1.4) та двоїстості до неї.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гнатюк В. О., Чікуркова Я. В. Співвідношення двоїстості для задачі мінімізації кусково-лінійної функції при обмеженнях, заданих системою лінійних рівнянь, та додатковому обмеженню на норми допустимих розв’язків. Наукові праці Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка: збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів. [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 21.С. 283-285.

2. Гудима У., Гнатюк В. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський : Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. Ів. Огієнка, 2019. 112 с.

3. Дороговцев А. Математичний аналіз: підручник у двох частинах. Частина 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.

4. Дороговцев А. Математичний аналіз: підручник у двох частинах. Частина 2. Київ : Либідь, 1994. 304 с.

5. Думанська Т.В. , Каліта Н.А. Критерій оптимальності допустимих розв’язків для деякої задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції та двоїстої для неї, Наукові праці Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка : збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів. [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип. 22. С. 653-656.

6. Жалдак М., Триус Ю. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 305 с.

7. Каліта Н.А. Умови існування допустимих розв’язків для задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції. Вісник Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Випуск 15. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. С. 68-72.

8. Канторович Л., Акилов Г. Функциональный анализ. М : Наука, 1984. 752 с.

9. Лавров Є., Перхун Л., Шендрик В. 6. Математичні методи дослідження операцій. Суми : Сум. держ. ун-т, 2017. 212 с. С.43

10. Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация. Москва : Мир, 1975. 496 с.

11. Михайлевич В.М., Тютюнник О.І. Вища математика. Математичне програмування в Maple. Частина II. Двоїсті та цілочислові задачі лінійного програмування: навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2013. 78 с.

12. Моклячук М. Основи опуклого аналізу. Навчальний посібник. Київ : Вид-во ТВіМС, 2004. 236 с.

13. Самсонов В. Алгоритми розв’язання задач оптимізації. Київ : НУХТ, 2014. 303 с.

14. Сікора Я. Методи оптимізації та дослідження операцій. Житомир : ЖДУ ім. Ів. Франка, 2019. 148 с.

15. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе. Бесконечные антагонистические игры. М : Физматгиз, 1963. С. 31-39.