Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«Задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною»**

Виконала: студентка ІІ курсу, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Смірнова Анастасія Романівна

Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Гудима У.В.**

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Сорич В.А.**

Кам'янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Досить часто ми зіштовхуємося з ситуаціями, коли з деякої сукупності можливих варіантів своєї поведінки або прийняття рішень в якій-небуть області діяльності необхідно обрати один. Вибір здійснюється шляхом порівняння різних варіантів за допомогою деякої кількісної їх оцінки. В цьому випадку говорять про необхідність розв’язання оптимізаційної задачі, яка полягає у побудові оптимального розв’язку для математичної моделі, при цьому саме вид моделі визначає методи, що використовуються при її розв’язанні.

Зрозуміло, що для розв’язання задачі необхідно, в першу чергу, формалізувати об’єкт оптимізації і подати його у вигляді математичної моделі. Математична модель не є точною копією, вона є ідеалізацією досліджуваного процесу.

Теорія оптимізації представляє собою сукупність фундаментальних математичних результатів та чисельних методів, які орієнтовані на відшукання та ідентифікацію найкращого варіанту з множини альтернатив, які дозволяють уникнути перебору і оцінювання всіх можливих варіантів.

Оптимізаційні задачі знаходять своє застосування в прикладних інженерних, економічних задачах, техніці та в будь-якій іншій області людського життя.

Стандартна задача оптимізації полягає в знаходженні такої точки на множині X евклідового простору R^n ($n \geq 1$), в якій досягається екстремальне значення функції $f(x)$, заданої на множині $X \subset R^n$ [14].

Класифікація екстремальних задач здійснюється за властивостями та способами подання допустимої множини X і цільової функції $f(x)$. Без урахування специфіки цільової функції $f(x)$ вони поділяються на задачі бузумовної та задачі умовної оптимізації [13]:

– задачі безумовної оптимізації, в яких не існує обмежень на можливі зміни x, тобто множина X збігається з простором R^n;

– задачі умовної оптимізації, в яких X є власною підмножиною простору R^n, яка не співпадає з R^n.

Одним із найважливіших типів задач умовної оптимізації є задача математичного програмування. Вона має такий загальний вигляд:

$$f(x) \to \min(\max) \tag{0.1}$$

при обмеженнях

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,k}; \tag{0.2}$$

$$g_i(x) \ge 0,\ i = \overline{k+1,m}; \tag{0.3}$$

$$g_i(x) = 0,\ i = \overline{m+1,s}; \tag{0.4}$$

$$x \in P, \tag{0.5}$$

де $P \subset R^n$.

Залежно від специфіки цільової функції $f(x)$ та функцій $g_i(x)$, $i = \overline{1,s}$, у (0.1)-(0.5) серед задач математичного програмування виділяються різні типи задач, які потребують спеціальних методів дослідження.

Останнім часом математичне програмування розвивається у напрямку дослідження все більш класів спеціальних екстремальних задач, що зумлено інтенсивним розвитком теорії функції дійсної та комплексної змінної, теорії оптимізації, опуклого аналізу. Серед них особливе значення займають задачі кусково-лінійного програмування. Одна із таких задач розглядається у роботі.

Нехай Y – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, Y^*- простір, спряжений з Y, c_k, $k = \overline{1,m};$ y_j, $j = \overline{1,n};$ x_i, $i = \overline{1,l};$ – фіксовані елементи простору Y, $\varphi \in Y^*$, $d_k \in R,$ $k = \overline{1,m};$ $t_j \in R,$ $j = \overline{1,n}$; $p_i \in R,$ $i = \overline{1,l};$ A – опукла слабко* компактна множина простору Y^*.

Розглянемо задачу відшукання величини

$$\inf \max_{1 \le k \le m} (\varphi(c_k) + d_k), \tag{0.6}$$

при умовах

$$\varphi(y_j) \ge t_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{0.7}$$

$$\varphi(x_i) = p_i,\ i = \overline{1,l}, \tag{0.8}$$

$$\varphi \in A. \tag{0.9}$$

Задачу (0.6)-(0.9) будемо називати задачею мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається опуклою слабко* компактною множиною.

У випадку, коли $A=\left\{\varphi \in Y^* : \|\varphi\| \le \theta\right\}$, де θ – фіксоване додатне число, одержимо задачу мінімізації опуклої кусково-афінної функції в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з обмеженнями типу лінійних рівнянь та нерівностей і додатковим обмеженням на норми її допустимих розв’язків, яка розглядалась у працях [1; 7; 5].

Мета, об’єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є: розглянути властивості множини M допустимих розв’язків для задачі (0.6)-(0.9); встановити умови при яких $M \neq \varnothing$ та критерій оптимальності допустимого розв’язку для задачі (0.6)-(0.9); довести співвідношення двоїстості для задачі (0.6)-(0.9).

Об'єктом дослідження є задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною.

Предметом дослідження є теоретичні та практичні аспекти оптимізації в контексті задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною.

Задачами дослідження є:

1. Розглянути властивості допустимої області для задачі (0.6)-(0.9).
2. Розглянути властивості функціонала $f_A(z)=\max\limits_{\varphi\in A}\varphi(z)$, $z \in Y$.
3. Встановити умови при яких допустима область є непорожньою множиною.
4. Побудувати приєднану задачу до задачі (0.6)-(0.9) та встановлення еквівалентності цих задач
5. Довести співвідношення двоїстості для задачі (0.6)-(0.9).
6. Встановити критерії оптимальності допустимих розв’язків для задачі (0.6)-(0.9) та двоїстої до неї задачі.

Наукова новизна отриманих результатів

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

— Доведено, що множина допустимих розв’язків задачі (0.6)-(0.9) є опуклою слабко* компактною множиною;

— Встановлено, що функціонал $f_A(z)=\max_{\varphi\in A}\varphi(z)$, $z\in Y$, є сублінійним функціоналом, заданим на Y.

— Досліджено питання існування допустимого розв’язку для задачі (0.6)-(0.9) у випадку, коли A є опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*.

— Досліджено питання існування допустимого розв’язку для задачі (0.6)-(0.9) у випадку, коли A є симетричною опуклою слабко* компактною множина простору Y^*.

— Побудовано приєднану задачу до задачі (0.6)-(0.9) та встановлено зв'язок між оптимальними розв’язками цих задач.

— Встановлено співвідношення двоїстості для задачі (0.6)-(0.9).

— Доведено критерії оптимальності допустимих розв’язків для задачі (0.6)-(0.9) та двоїстої до неї.

Практичне значення отриманих результатів. Результати отримані в роботі носять теоретичний характер і можуть бути використанні при побудові чисельного методу розв’язування мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на науковій конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету 1 листопада 2023 року.

Основні результати наукових досліджень опубліковано у працях:

ГІРЧУК А. Властивості допустимої області задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається опуклою слабко* компактною множиною. Збірник наукових праць студентів та магістрантів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип. 17. С. 248-250.

СМІРНОВА А. Умови існування допустимого розв’язку для задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається опуклою слабко* компактною множиною. Збірник матеріалів наукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. 1 листопада 2023 року [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. С. 15-17.

Структура роботи. Робота містить вступ, два розділи, висновки та список використаних джерел.

У першому розділі розглянуто властивості множини допустимих розв’язків задачі (0.6)-(0.9) та питання існування допустимого розв’язку для цієї задачі.

У другому розділі побудовано приєднану задачу до задачі (0.6)-(0.9) та встановлено зв'язок між оптимальними розв’язками цих задач, встановлено співвідношення двоїстості для задачі (0.6)-(0.9), доведено критерії оптимальності допустимих розв’язків для задачі (0.6)-(0.9) та двоїстої до неї.

РОЗДІЛ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. КРИТЕРІЇ ІСНУВАННЯ ДОПУСТИМОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ЗАДАЧІ МІНІМІЗАЦІЇ ОПУКЛОЇ КУСКОВО-АФІННОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ЛІНІЙНИХ ОБМЕЖЕННЯХ ТА ДОДАТКОВОМУ ОБМЕЖЕННЮ, ЩО ЗАДАЄТЬСЯ ОПУКЛОЮ СЛАБКО* КОМПАКТНОЮ МНОЖИНОЮ

1.1. Постановка задачі. Властивості множини допустимих розвязків

Нехай Y – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, Y^*- простір, спряжений з Y, c_k, $k=\overline{1,m}$; y_j, $j=\overline{1,n}$; x_i, $i=\overline{1,l}$; – фіксовані елементи простору Y, $\varphi \in Y^*$, $d_k \in R$, $k=\overline{1,m}$; $t_j \in R$, $j=\overline{1,n}$; $p_i \in R$, $i=\overline{1,l}$; A – опукла слабко* компактна множина простору Y^*.

Розглянемо задачу відшукання величини

$$\inf \max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k), \tag{1.1}$$

при умовах

$$\varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{1.2}$$

$$\varphi(x_i)=p_i,\ i=\overline{1,l}, \tag{1.3}$$

$$\varphi\in A. \tag{1.4}$$

Задачу (1.1)-(1.4) будемо називати задачею мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається опуклою слабко* компактною множиною.

Позначимо через M – множину допустимих розв'язків задачі (1.1)-(1.4), тобто

$$M=\{\varphi\in A:\ \varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n}; \varphi(x_i)=p_i,\ i=\overline{1,l}\}.$$

Розглянемо деякі властивості допустимої області *M.*

Твердження 1.1. *Множина*

$$M_1=\{\varphi\in Y^*:\varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n}; \varphi(x_i)=p_i, i=\overline{1,l}\}$$

є опуклою множиною простору Y^*.

Доведення. Нехай $\varphi_1,\varphi_2\in M_1$. Переконаємося, що

$$[\varphi_1,\varphi_2]\subset M_1.$$

Для цього доведемо, що кожний елемент $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ буде належати M_1.

Оскільки $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, то існує $\alpha \in [0,1]$ таке, що

$$\varphi = (1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2 .$$

Внаслідок того, що $\varphi_1, \varphi_2 \in M_1$, будемо мати

$$\varphi_1(x_i) = p_i,\ \varphi_2(x_i) = p_i,\ i = \overline{1,l} .$$

Звідси одержуємо, що

$$\varphi(x_i) = ((1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2)(x_i) =$$
$$= (1-\alpha)\varphi_1(x_i) + \alpha\varphi_2(x_i) =$$
$$= (1-\alpha)\, p_i + \alpha\, p_i = p_i,\ i = \overline{1,l} .$$

Крім того, внаслідок того, що $\varphi_1, \varphi_2 \in M_1$, то $\varphi_1(y_j) \ge t_j, \varphi_2(y_j) \ge t_j$, $j = \overline{1,n}$, $\alpha \in [0;1]$, будемо мати, що

$$\varphi(y_j) = ((1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2)(y_j) =$$
$$= (1-\alpha)\varphi_1(y_j) + \alpha\varphi_2(y_j) \ge$$
$$\ge (1-\alpha)t_j + \alpha t_j \ge t_j,\ j = \overline{1,n} .$$

Таким чином $\varphi \in M_1$.

Отже, можна зробити висновок, що для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in M_1$, відрізок $[\varphi_1, \varphi_2] \subset M_1$.

Це означає, що M_1 є опуклою множиною простору Y^*.

Твердження доведено.

Твердження 1.2. M_1 *є слабко* замкненою множиною простору* Y^*.

Доведення. Переконаємося, що доповнення $C_{Y^*}M_1$ до множини M_1 є слабко* відкритою множиною простору Y^*.

Нехай $\varphi^0 \in C_{Y^*}M$, тоді $\varphi^0 \notin M_1$, а отже існує індекс $j \in \{1,...,n\}$ такий, що

$$\varphi^0(y_j) < t_j ,$$

або індекс $i \in \{1,...,l\}$ такий, що

$$\varphi^0(x_i) \ne p_i .$$

Припустимо, що існує індекс $j_0 \in \{1,...,n\}$ такий, що $\varphi^0(y_{j_0}) < t_{j_0}$.

Розглянемо окіл точки φ^0 у слабкій* топології простору Y^* такий, що

$$O\left(\varphi^0\right)=O\left(\varphi^0;y_{j_0};\varepsilon\right)=\left\{\varphi\in Y^*:\left|\varphi\left(y_{j_0}\right)-\varphi^0\left(y_{j_0}\right)\right|<\varepsilon\right\},$$

де $\varepsilon=t_{j_0}-\varphi^0\left(y_{j_0}\right)>0$.

Для довільного $\varphi\in O\left(\varphi^0\right)=O\left(\varphi^0;y_{j_0};\varepsilon\right)$ будемо мати

$$\left|\varphi\left(y_{j_0}\right)-\varphi^0\left(y_{j_0}\right)\right|<\varepsilon=t_{j_0}-\varphi^0\left(y_{j_0}\right),$$

$$\varphi\left(y_{j_0}\right)-\varphi^0\left(y_{j_0}\right)<t_{j_0}-\varphi^0\left(y_{j_0}\right),$$

$$\varphi\left(y_{j_0}\right)<t_{j_0}.$$

Оскільки для $\varphi\in O(\varphi^0)$, $\varphi\left(y_{j_0}\right)<t_{j_0}$, то $\varphi\notin M_1$, а, отже $\varphi\in C_{Y^*}M_1$.

Оскільки φ вибрано довільним чином з $O\left(\varphi^0\right)=O\left(\varphi^0;y_{j_0};\varepsilon\right)$, то можна зробити висновок, що $O\left(\varphi^0\right)\subset C_{Y^*}M_1$.

Припустимо тепер, що існує індекс $i_0\in\{1,...,l\}$ такий, що $\varphi^0(x_{i_0})\neq p_{i_0}$, тоді $\varphi^0(x_{i_0})>p_{i_0}$ або $\varphi^0(x_{i_0})<p_{i_0}$.

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $\varphi^0(x_{i_0})<p_{i_0}$. Розглянемо окіл точки φ^0 у слабкій* топології простору X^* такий, що

$$O\left(\varphi^0\right)=O\left(\varphi^0;x_{i_0};\varepsilon\right)=\left\{\varphi\in Y^*:\left|\varphi\left(x_{i_0}\right)-\varphi^0\left(x_{i_0}\right)\right|<\varepsilon\right\},$$

де $\varepsilon=p_{i_0}-\varphi^0(x_{i_0})>0$.

Для довільного $\varphi\in O\left(\varphi^0\right)=O\left(\varphi^0;x_{i_0};\varepsilon\right)$ будемо мати

$$\left|\varphi\left(x_{i_0}\right)-\varphi^0\left(x_{i_0}\right)\right|<\varepsilon=p_{i_0}-\varphi^0\left(x_{i_0}\right),$$

$$\varphi\left(x_{i_0}\right)-\varphi^0\left(x_{i_0}\right)<p_{i_0}-\varphi^0\left(x_{i_0}\right),$$

$$\varphi\left(x_{i_0}\right)<p_{i_0}.$$

Отже, $\varphi\in O(\varphi^0)$ $\varphi\left(x_{i_0}\right)\neq p_{i_0}$, а тому $\varphi\notin M_1$, звідси випливає, що $\varphi\in C_{Y^*}M_1$.

Оскільки φ вибрано довільним чином з $O\left(\varphi^0\right)=O\left(\varphi^0;x_{i_0};\varepsilon\right)$, то можна зробити висновок, що $O\left(\varphi^0\right)\subset C_{Y^*}M_1$ і в цьому випадку.

Тому для довільного $\varphi^0\in C_{Y^*}M_1$ існує окіл $O\left(\varphi^0\right)\subset C_{Y^*}M_1$.

Звідси випливає, що $C_{Y^*}M_1$ є відкритою множиною простору Y^* у слабкій* топології цього простору.

Тоді множина M_1 є слабко* замкненою множиною простору Y^* (див, наприклад, [3, с. 11]).

Твердження доведено.

Теорема 1.1. *Множина допустимих розв'язків* M *задачі (1.1)-(1.4) є опуклою слабко* компактною множиною простору* Y^*.

Доведення. Оскільки $M=M_1\cap A$ і згідно з твердженням 1.1 M_1 є опуклою множиною простору Y^*, A – опукла множина простору Y^*, тоді M є опуклою множиною простору Y^*, як перетин опуклих множин (див., [12, с. 42]).

Оскільки A слабко* компактна підмножина простору Y^*, M_1 є слабко* замкненою підмножиною простору Y^*, тоді множина $M=M_1\cap A\subset A$ є слабко* замкненою підмножиною слабко* компактної множини A, а, отже M – слабко* компактна множина простору Y^* (див., наприклад, [10, с. 59]).

Отже, множина допустимих розв'язків M задачі (1.1)-(1.4) є опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*.

Теорему доведено.

1.2. Критерії існування допустимого розв'язку для задачі (1.1)-(1.4)

Теорема 1.2. *Нехай* Y *- лінійний над полем дійсних чисел нормований простір,* Y^* *- простір, спряжений з* Y*,* A *– опукла слабко * компактна множина простору* Y*, тоді функціонал*

$$f_A(z)=\max_{\varphi\in A}\varphi(z),\ z\in Y,$$

є сублінійним функціоналом, заданим на Y.

Доведення. Доведемо, що при фіксованому $z \in Y$ відображення $\varphi \in Y^* \to \varphi(z)$ є неперервним на Y^* у розумінні слабкої* топології простору Y^* (див. [3, с. 43]).

Нехай $\varphi_0 \in Y^*$. Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо окіл точки φ_0:

$$O(\varphi_0) = O_{(z,\varepsilon)}(\varphi_0) = \left\{ \varphi \in Y^* : \left| \varphi(z) - \varphi_0(z) \right| < \varepsilon \right\}.$$

Тоді для довільних $\varphi \in O(\varphi_0)$ будемо мати, що

$$\left| \varphi(z) - \varphi_0(z) \right| < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що відображення $\varphi \in Y^* \to \varphi(z)$ є неперервним у розумінні слабко* топології простору Y^* в точці $\varphi_0 \in Y^*$, а, отже, і на Y^*.

Оскільки A – опукла слабко* компактна множина простору Y^*, відображення $\varphi \in Y^* \to \varphi(z)$ є неперервним у розумінні слабкої* топології простору Y^*, то згідно з узагальненою теоремою Вейерштрасса (див., наприклад, [8, с. 28]), існує $\max\limits_{\varphi \in A} \varphi(z)$. Для $z \in Y$ покладемо

$$f_A(z) = \max_{\varphi \in A} \varphi(z).$$

Розглянемо функціонал

$$f_A(z) = \max_{\varphi \in A} \varphi(z), \ \ z \in Y.$$

Доведемо, що f_A є сублінійним функціоналом, тобто f_A - обмежений, і для довільних $z_1, z_2 \in Y, \ \lambda \geq 0$

$$f_A(z_1 + z_2) = f_A(z_1) + f_A(z_2); \tag{1.5}$$

$$f_A(\lambda z_1) = \lambda f_A(z_1). \tag{1.6}$$

Дійсно, нехай $z_1, z_2 \in Y$, тоді

$$f_A(z_1 + z_2) = \max_{\varphi \in A} \varphi(z_1 + z_2);$$

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2) \leq \max_{\varphi \in A} \varphi(z_1) + \max_{\varphi \in A} \varphi(z_2), \varphi \in A;$$

$$\max_{\varphi \in A} \varphi(z_1 + z_2) \leq \max_{\varphi \in A} \varphi(z_1) + \max_{\varphi \in A} \varphi(z_2);$$

$$f_A(z_1 + z_2) \leq f_A(z_1) + f_A(z_2).$$

Отже, функціонал f_A є півадетивним функціоналом заданим на Y.

Нехай $\lambda \geq 0$, тоді

$$f_A(\lambda z_1) = \max_{\varphi \in A} \varphi(\lambda z_1) = \max_{\varphi \in A} (\lambda \varphi(z_1)) = \lambda \max_{\varphi \in A} \varphi(z_1) = \lambda f_A(z_1).$$

Отже, співвідношення (6) виконується, а тому функціонал $f_A(z)$ є додатнооднорідним функціоналом.

Оскільки A є слабко* компактною множиною, а отже, обмеженою множиною, то існує таке $r \in R,\ r > 0$, що

$$\|\varphi\| \leq r,\ \varphi \in A,$$

$$\sup_{\varphi \neq 0} \frac{|\varphi(z)|}{\|z\|} \leq r\ ,\ \varphi \in A;$$

$$|\varphi(z)| \leq r\|z\|,\ z \in Y,\ \varphi \in A;$$

$$-r\|z\| \leq \varphi(z) \leq r\|z\|,\ z \in Y, \varphi \in A.$$

Звідси випливає, що

$$-r\|z\| \leq \max_{\varphi \in A} \varphi(z) = f_A(z) \leq r\|z\|,\ z \in Y;$$

$$|f_A(z)| \leq r\|z\|,\ z \in Y.$$

Отже, функціонал f_A є обмеженим, півадетивним на додатнооднорідним функціоналом заданим на Y.

Теорему доведено.

Твердження 1.3. Якщо A - непорожня симетрична опукла множина простору Y^*, то $0 \in A$.

Доведення. Нехай $\varphi \in A$. Оскільки A - симетрична множина, то $(-\varphi) \in A$.

Враховуючи опуклість множини A, одержимо, що для довільного $\beta \in [0;1]$

$$(1-\beta)\varphi + \beta(-\varphi) \in A.$$

Звідси для $\beta = \dfrac{1}{2}$ одержимо

$$\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}(-\varphi) = 0 \in A.$$

Твердження доведено.

Твердження 1.4. Якщо A- непорожня симетрична опукла слабко* компактна множина простору Y^*, то

$$f_A(z) = \max_{\varphi \in A} \varphi(z) \geq 0,\ z \in Y.$$

Доведення. Оскільки A- непорожня симетрична множина простору Y^*, то згідно з твердженням 1.3 $0 \in A$, тоді

$$f_A(z) = \max_{\varphi \in A} \varphi(z) \geq 0,\ z \in Y.$$

Твердження доведено.

Теорема 1.3. Для того, щоб множина допустимих розв'язків для задачі (1.1)-(1.4) була непорожньою множиною необхідно і достатньо, щоб для будь-яких чисел $\xi_j \in R$, $\xi_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n};\ \psi_i \in R,\ i = \overline{1,l}$, виконувалась нерівність

$$f_A\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i x_i\Big) \geq \sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i. \tag{1.7}$$

де $f_A(z) = \max\limits_{\varphi \in A} \varphi(z)$, $z \in A$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що $M \neq \varnothing$.

Доведемо, що має місце нерівність (1.7). Оскільки $M \neq \varnothing$, то існує функціонал $\varphi \in Y^*$ такий, що задовольняє умовам:

$$\varphi(y_j) \geq t_j,\ \ j = \overline{1,n}; \tag{1.8}$$

$$\varphi(x_i) = p_i,\ i = \overline{1,l}\ ; \tag{1.9}$$

$$\varphi \in A. \tag{1.10}$$

З (1.8), (1.9) випливає, що для будь-яких $\xi_j \in R,\ \xi_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n};\ \psi_i \in R,\ i = \overline{1,l}$ мають місце співвідношення:

$$\xi_j \varphi(y_j) \geq \xi_j t_j,\ \ \ j = \overline{1,n};$$

$$\psi_i \varphi(x_i) = \psi_i p_i,\ \ i = \overline{1,l}.$$

Звідси

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi(y_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j,$$

$$\sum_{i=1}^{l}\psi_i\varphi(x_i)=\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\varphi(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i\varphi(x_i)\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i,\ \sum_{j=1}^{n}\varphi(\xi_j y_j)+\sum_{i=1}^{l}\varphi(\psi_i x_i)\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i;$$

$$\varphi(\sum_{j}^{n}\xi_j y_j)+\varphi(\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i)\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i;$$

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i)\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i\,. \tag{1.11}$$

Оскільки $\varphi\in A,$ де $A-$ слабко* компактна множина простору Y^*, то для довільного $\varphi\in A,\ z\in Y$

$$\varphi(z)\leq\max_{\varphi\in A}\varphi(z)=f_A(z). \tag{1.12}$$

З (1.11), (1.12) одержимо

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i\leq$$

$$\leq\varphi(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i)\leq$$

$$\leq\max_{\varphi\in A}\varphi(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i)=$$

$$=f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i).$$

Отже, у випадку, коли $M\neq\varnothing$ нерівність (1.7) має місце.

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що для довільних $\xi_j\in R,\ \xi_j\geq 0,\ \ j=\overline{1,n};\ \psi_i\in R,\ i=\overline{1,l}$ виконується нерівність (1.7). Доведемо, що в цьому випадку множина допустимих розв’язків для задачі (1.1) – (1.4) є непорожньою множиною.

Для довільних $\xi_j\in R,\ \xi_j\geq 0,\ j=\overline{1,n};\ \psi_i\in R,\ i=\overline{1,l}$

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i)\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i\,,$$

$$\max_{\varphi\in A}\varphi(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i)\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i$$

$$\max_{\varphi\in A}(\varphi(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j)+\varphi(\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i))\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i,$$

$$\max_{\varphi\in A}(\sum_{j=1}^{n}\varphi(\xi_j y_j)+\sum_{i=1}^{l}\varphi(\psi_i x_i))\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i,$$

$$\max_{\varphi\in A}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\varphi(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i\varphi(x_i))\geq\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i,$$

$$\max_{\varphi\in A}((\sum_{j=1}^{n}\xi_j\varphi(y_j)-\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j)+(\sum_{i=1}^{l}\psi_i\varphi(x_i)-\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i))\geq 0$$

$$\max_{\varphi\in A}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\varphi(x_i)-p_i))\geq 0. \qquad (1.13)$$

Оскільки (1.13) має місце для довільних $\xi_j\in R,\ \xi_j\geq 0,\ j=\overline{1,n};\ \psi_i\in R,\ i=\overline{1,l},$ то з нерівності (1.13) випливає

$$\inf_{\substack{\xi_j\in R,\xi_j\geq 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R, i=\overline{1,l}}}\max_{\varphi\in A}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\varphi(x_i)-p_i))\geq 0.$$

Розглянемо функцію $\gamma((\xi,\psi),\varphi)=\gamma((\xi_1,...,\xi_n;\psi_1,...,\psi_l),\varphi)$:

$$\gamma((\xi,\psi),\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\varphi(x_i)-p_i).$$

Доведемо, що функція $\gamma((\xi,\psi),\varphi)$ є опуклою по $(\xi,\psi)\in R^{n+l}$ для кожного фіксованого $\varphi\in Y^*$.

Нехай φ – фіксований елемент простору Y^*, (ξ^1,ψ^1), $(\xi^2,\psi^2)\in R^{n+l}$, де

$$(\xi^1,\psi^1)=(\xi_1^1,...,\xi_n^1;\psi_1^1,...,\psi_l^1),$$

$$(\xi^2,\psi^2)=(\xi_1^2,...,\xi_n^2;\psi_1^2,...,\psi_l^2).$$

Для $\beta\in[0;1]$ будемо мати

$$\gamma\Big((1-\beta)(\xi^1,\psi^1)+\beta(\xi^2,\psi^2),\varphi\Big)=$$

$$=\gamma(((1-\beta)\xi^1;(1-\beta)\psi^1)+(\beta\xi^2;\beta\psi^2)),\varphi)=$$

$$=\varphi(((1-\beta)\xi^1+\beta\xi^2;(1-\beta)\psi^1+\beta\psi^2),\varphi)=$$

$$=\varphi(((1-\beta)\xi_1^1+\beta\xi_1^2;...;(1-\beta)\xi_n^1+\beta\xi_n^2;(1-\beta)\psi_1^1+\beta\psi_1^2,$$

$$,...,(1-\beta)\psi_l^1+\beta\psi_l^2),\varphi)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(((1-\beta)\xi_j^1+\beta\xi_j^2)(\varphi(y_j)-t_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}((1-\beta)\psi_i^1+\beta\psi_i^2)(\varphi(x_i)-p_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(1-\beta)\xi_j^1(\varphi(y_j)-t_j)+\sum_{j=1}^{n}\beta\xi_j^2(\varphi(y_j)-t_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}(1-\beta)\psi_i^1(\varphi(x_i)-p_i)+\sum_{i=1}^{l}\beta\psi_i^2(\varphi(x_i)-p_i)=$$

$$=(1-\beta)\sum_{j=1}^{n}\xi_j^1(\varphi(y_j)-t_j)+\beta\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2(\varphi(y_j)-t_j)+$$

$$+(1-\beta)\sum_{i=1}^{l}\psi_j^1(\varphi(x_j)-p_j)+\beta\sum_{i=1}^{l}\psi_i^2(\varphi(x_i)-p_i)=$$

$$=(1-\beta)\gamma((\xi^1,\psi^1),\varphi)+\beta\gamma((\xi^1;\psi^1),\varphi),\ \ 0\le\beta\le 1.$$

Звідси слідує, що функція $\gamma((\xi,\psi),\varphi)$ буде опуклою по $(\xi,\psi)\in R^{n+l}$ при фіксованому $\varphi\in Y^*$.

Доведемо, що функція $\gamma((\xi,\psi),\varphi)$ є вгнутою по φ на Y^* при фіксованому $(\xi,\psi)\in R^{n+l}$.

Нехай (ξ,ψ) фіксований елемент простору R^{n+l}, $\varphi_1,\varphi_2\in Y^*$.

Для $\beta\in[0,1]$ будемо мати

$$\gamma((\xi,\psi),(1-\beta)\varphi_1+\beta\varphi_2)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j((1-\beta)\varphi_1+\beta\varphi_2)(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i((1-\beta)\varphi_1+\beta\varphi_2)(x_i)-p_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j((1-\beta)\varphi_1(y_j)+\beta\varphi_2(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i((1-\beta)\varphi_1(x_i)+\beta\varphi_2(x_i))-p_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j((1-\beta)\varphi_1(y_j)+\beta\varphi_2(y_j)-((1-\beta)t_j+\beta t_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\psi_i((1-\beta)\varphi_1(x_i)+\beta\varphi_2(x_2)-((1-\beta)p_i+\beta p_i))=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j((1-\beta)\varphi_1(y_j)-(1-\beta)t_j+\beta\varphi_2(y_j)-\beta t_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\psi_i((1-\beta)\varphi_1(x_i)-(1-\beta)p_i+\beta\varphi_2(x_2)-\beta p_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j((1-\beta)(\varphi_1(y_j)-t_j)+\beta((\varphi_2(y_j)-t_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\psi_i((1-\beta)(\varphi_1(x_i)-p_i)+\beta(\varphi_2(x_i)-p_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\xi_j(1-\beta)(\varphi_1(y_j)-t_j)+\xi_j\beta(\varphi_2(y_j)-t_j))+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}(\psi_i(1-\beta)(\varphi_1(x_i)-p_i)+\psi_i\beta(\varphi_2(x_i)-p_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_i(1-\beta)(\varphi_1(y_j)-t_j)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j\beta(\varphi_2(y_j)-t_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(1-\beta)(\varphi_1(x_i)-p_i)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i\beta(\varphi_2(x_i)-p_i)=$$

$$=(1-\beta)\sum_{j=1}^{n}\xi_i(\varphi_1(y_j)-t_j)+\beta\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi_2(y_j)-t_j)+$$

$$+(1-\beta)\sum_{j=1}^{l}\psi_i(\varphi_1(x_j)-p_j)+\beta\sum_{j=1}^{n}\psi_j(\varphi_2(x_j)-p_j)=$$

$$=(1-\beta)\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_i(\varphi_1(y_j)-t_j)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(\varphi_1(x_j)-p_j)\right)+$$

$$+\beta\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_i(\varphi_2(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\varphi_2(x_i)-p_i)\right)=$$

$$=(1-\beta)\gamma((\xi,\psi),\varphi_1)+\beta\gamma((\xi,\psi),\varphi_2).$$

Звідси слідує, що при фіксованому $(\xi,\psi)\in R^{n+l}$ функція $\gamma((\xi,\psi),\varphi)$ буде вгнутою по φ на Y^*.

Доведемо, що функція $\gamma((\xi,\psi),\varphi)$ є півнеперервною зверху відносно слабко* топології простору Y^* при фіксованому $(\xi,\psi)\in R^{n+l}$.

Нехай (ξ,ψ) - фіксований елемент простору R^{n+l}, $\varphi_0\in Y^*$, тоді

$$\left|\gamma((\xi,\psi),\varphi)-\gamma((\xi,\psi),\varphi_0)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\varphi(x_i)-p_i)-(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi_0(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i\left(\varphi_0(x_i)-p_i\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\varphi(x_i)-p_i)-\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi_0(y_j)-t_j)-\sum_{i=1}^{l}\psi_i\left(\varphi_0(x_i)-p_i\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j((\varphi(y_j)-t_j)-(\varphi_0(y_j)-t_j))+\sum_{i=1}^{l}\psi_i((\varphi(x_i)-p_1)-(\varphi_0(x_i)-p_i))\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\left(\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i\left(\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right)\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\left(\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right)\right|+\left|\sum_{i=1}^{l}\psi_i\left(\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_i(\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j))\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i(\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|\left|\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i\right|\left|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|. \tag{1.14}$$

Для довільного $\varepsilon>0$ розглянемо окіл точки φ_0 у слабкій* топології

$$O(\varphi_0)=O_{((y_1,\dots,y_n;x_1,\dots,x_l),\delta)}(\varphi_0)=$$

$$=\left\{\varphi\in Y^*:\left|\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right|<\delta;\, j=\overline{1,n};\left|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|<\delta, i=\overline{1,l}\right\},$$

де $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i\right|}$.

Тоді для $\varphi\in O(\varphi_0)$ з урахуванням (1.14) одержимо:

$$\left|\gamma((\xi,\psi),\varphi)-\gamma((\xi,\psi),\varphi_0)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|\left|\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i\right|\left|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|\le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|\cdot\delta+\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i\right|\cdot\delta=$$

$$=\delta\cdot\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|+\delta\cdot\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i\right|=$$

$$=\delta\cdot(\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i\right|)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i\right|}\cdot(\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\psi_i\right|)=\varepsilon.$$

Отже, для довільного $\varepsilon>0,$ існує окіл точки $\varphi_0\in Y^*$ у слабкій* топології $O(\varphi_0)=O_{((y_1,...,y_n;x_1,...,x_l),\delta)}(\varphi_0)$ такий, що для довільних $\varphi\in O(\varphi_0)$

$$\left|\gamma((\xi,\psi),\varphi)-\gamma\left((\xi,\psi),\varphi_0\right)\right|<\varepsilon.$$

Це означає, що функція $\gamma((\xi,\psi),\varphi)$ при фіксованому $(\xi,\psi)\in R^{n+l}$ є півнеперервною зверху в точці $\varphi_0\in Y^*$, а, отже, і на Y^*.

Доведемо, що множина

$$B=\left\{(\xi,\psi)=(\xi_1,...,\xi_n;\psi_1,...,\psi_l\right\}\in R^{n+l}:\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}\}$$

є опуклою множиною простору R^{n+l}.

Для довільного $\beta\in\left[0;1\right]$ розглянемо вектор

$(\xi_\beta,\psi_\beta)=(1-\beta)(\xi^1,\psi^1)+\beta(\xi^2,\psi^2)=$

$=((1-\beta)\xi^1+\beta\xi^2;(1-\beta)\psi^1+\beta\psi^2)=$

$=((1-\beta)\xi_1^1+\beta\xi_1^2;...;(1-\beta)\xi_n^1+\beta\xi_n^2;(1-\beta)\psi_1^1+\beta\psi_1^2,...,$

$(1-\beta)\psi_l^1+\beta\psi_l^2)=(\xi_1^\beta,...,\xi_n^\beta;\psi_1^\beta,...,\psi_l^\beta),$

де $(\xi^1,\psi^1)=(\xi_1^1,...,\xi_n^1;\psi_1^1,...,\psi_l^1),(\xi^2,\psi^2)=(\xi_1^2,...,\xi_n^2;\psi_1^2,...,\psi_l^2)\in B.$

Оскільки $(\xi^1,\psi^1),(\xi^2,\psi^2)\in B,$ то $\xi_j^1\ge 0,\ j=\overline{1,n},\ \ \xi_j^2\ge 0,\ j=\overline{1,n}.$

З урахуванням того, що $\beta\in\left[0;1\right]$, будемо мати, що

$$(1-\beta)\xi_j^1+\beta\xi_j^2\ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Отже, $(\xi_\beta,\psi_\beta)=(\xi_i^\beta,...,\xi_n^\beta;\psi_1^\beta;...;\psi_l^\beta)$ такий, що $\xi_j^\beta\geq 0,\ j=\overline{1,n},$ тому для довільного $\beta\in[0;1]$ вектор

$$(\xi_\beta;\psi_\beta)\in B.$$

Звідси випливає, що $\left[(\xi^1,\psi^1),(\xi^2;\psi^2)\right]\subset B,$ а це і означає, що B є опуклою множиною.

Оскільки A є опуклою слабко* компактною множиною, B – опуклою множиною, $\gamma((\xi,\psi),\varphi)$ – опуклою по $(\xi,\psi)\in R^{n+l}$ при фіксованому $\varphi\in Y^*$, випуклою по $\varphi\in Y^*$, при фіксованому $(\xi,\psi)\in R^{n+l}$ та неперервною зверху у розумінні слабкої* топології, то згідно з теоремою Фань – Цзі [15] будемо мати, що

$$\inf_{(\xi,\psi)\in B}\max_{\varphi\in A}\gamma((\xi,\psi),\varphi)=$$

$$=\max_{\varphi\in A}\inf_{(\xi,\psi)\in B}\gamma((\xi,\psi),\varphi).$$

З нерівності (1.14) випливає, що

$$\inf_{(\xi,\psi)\in B}\max_{\varphi\in A}\gamma((\xi,\psi),\varphi)\geq 0,$$

тоді

$$\max_{\varphi\in A}\inf_{(\xi,\psi)B}\gamma((\xi,\psi),\varphi)\geq 0,$$

$$\max_{\varphi\in B}\inf_{\substack{\xi_j\in R,\xi_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},\\ \beta_i\in R, i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\varphi(x_i)-p_i)\right)\geq 0.$$

Нехай $\tilde{\varphi}\in A$ такий, що

$$\max_{\varphi\in B}\inf_{\substack{\xi_j\in R,\xi_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},\\ \beta_i\in R, i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varphi(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\varphi(x_i)-p_i)\right)=$$

$$=\inf_{\substack{\xi_j\in R,\xi_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}\\ \beta_i\in R, i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\tilde{\varphi}(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\tilde{\varphi}(x_i)-p_i)\right).$$

Тоді

$$\inf_{\substack{\xi_j\in R,\xi_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}\\ \beta_i\in R, i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\tilde{\varphi}(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\tilde{\varphi}(x_i)-p_i)\right)\geq 0.$$

Звідси випливає, що для будь-яких $\xi_j\in R,\xi_j\geq 0,\ \ j=\overline{1,n};\psi_i\in R, i=\overline{1,l}$

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\tilde{\varphi}(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(\tilde{\varphi}(x_i)-p_i)\ge 0. \tag{1.15}$$

З (1.15) випливає, що

$$\tilde{\varphi}(x_i)=p_i, i=\overline{1,l}.$$

Дійсно, припустимо, що для деякого $i_0\in\{1,...,l\}$

$$\tilde{\varphi}(x_i)\ne p_{i_0}.$$

Тоді, або $\varphi(x_{i_0})>p_{i_0}$, або $\varphi(x_{i_0})<p_{i_0}$.

Припустимо, що $\varphi(x_{i_0})>p_{i_0}$. Тоді

$$\varphi(x_{i_0})-p_{i_0}>0.$$

Розглянемо вектор

$$(\tilde{\xi},\tilde{\psi})=(\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_n;\tilde{\psi}_1,...,\tilde{\psi}_{i_0},...,\tilde{\psi}_l),$$

такий, що

$$\tilde{\xi}_1=0,...,\tilde{\xi}_n=0;\tilde{\psi}_1=0,...,\tilde{\psi}_{i_0}<0,...,\tilde{\psi}_l=0.$$

Тоді для $(\tilde{\xi},\tilde{\psi})$ будемо мати

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{\xi}_j\cdot(\tilde{\varphi}(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}(x_i)-p_i)=$$

$$=0\cdot(\tilde{\varphi}(y_1)-t_1)+...+0\cdot(\tilde{\varphi}(y_n)-t_n))+$$

$$+0\cdot(\tilde{\varphi}(x_1)-p_1)+...+\tilde{\psi}_{i_0}\cdot(\tilde{\varphi}(x_{i_0})-p_{i_0}))+...+$$

$$+0\cdot(\tilde{\varphi}(x_l)-p_l)=\tilde{\psi}_{i_0}\cdot(\tilde{\varphi}(x_{i_0})-p_{i_0}))<0,$$

що суперечить умові (1.15).

Припустимо, що $\varphi(x_{i_0})<p_{i_0}$. Тоді

$$\varphi(x_{i_0})-p_{i_0}<0.$$

Розглянемо вектор

$$(\tilde{\xi},\tilde{\psi})=(\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_n;\tilde{\psi}_1,...,\tilde{\psi}_{i_0},...,\tilde{\psi}_l),$$

такий, що $\tilde{\xi}_1=0,...,\tilde{\xi}_n=0;\tilde{\psi}_1=0,...,\tilde{\psi}_{i_0}>0,...,\tilde{\psi}_l=0.$

Тоді для $(\tilde{\xi};\tilde{\psi})$ будемо мати

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{\xi}_j\cdot(\tilde{\varphi}(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}(x_i)-p_i)=$$

$$=0\cdot(\tilde{\varphi}(y_1)-t_1)+\ldots+0\cdot(\tilde{\varphi}(y_n)-t_n))+$$

$$+0\cdot(\tilde{\varphi}(x_1)-p_1)+\ldots+\tilde{\psi}_{i_0}\cdot(\tilde{\varphi}(x_{i_0})-p_{i_0}))+\ldots+$$

$$+0\cdot(\tilde{\varphi}(x_l)-p_l)=\tilde{\psi}_{i_0}\cdot(\tilde{\varphi}(x_{i_0})-p_{i_0}))<0,$$

що суперечить умові (1.15).

Одержана суперечність доводить, що

$$\tilde{\varphi}(x_i)=p_i, i=\overline{1,l}.$$

З урахуванням цього та рівності (1.15) одержимо

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{\xi}_j\cdot(\tilde{\varphi}(y_j)-t_j)+\sum_{i=1}^{l}\tilde{\psi}_i(\tilde{\varphi}(x_i)-p_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\tilde{\varphi}(y_j)-t_j)\geq 0, \tag{1.16}$$

для довільних $\xi_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}.$

З (1.16) випливає, що для довільного $j\in\{1,\ldots,n\}.$

$$\tilde{\varphi}(y_j)\geq t_j.$$

Дійсно, припустимо, що для деякого $j_0\in\{1,\ldots,n\}$

$$\tilde{\varphi}(y_{j_0})<t_{j_0}.$$

Тоді

$$\tilde{\varphi}(y_{j_0})-t_{j_0}<0.$$

Розглянемо вектор

$$\tilde{\xi}=(\tilde{\xi}_1,\ldots,\tilde{\xi}_{j_0},\ldots,\tilde{\xi}_n).$$

такий, що

$$\tilde{\xi}_1=0,\ldots,\tilde{\xi}_{j_0}>0,\ldots,\tilde{\xi}_n=0.$$

Для вектора $\tilde{\xi}$ будемо мати, що

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{\xi}_j\cdot(\tilde{\varphi}(y_j)-t_j)=$$

$$= 0 \cdot (\tilde{\varphi}(y_1) - t_1) + \ldots + \tilde{\xi}_{j_0}(\tilde{\varphi}(y_{j_0}) - t_{j_0}) +$$

$$+ \ldots + 0 \cdot (\tilde{\varphi}(y_n) - t_n) = \tilde{\xi}_{j_0}(\tilde{\varphi}(y_{j_0}) - t_{j_0}) < 0,$$

що суперечить нерівності (1.16).

Одержана суперечність доводить, що

$$\tilde{\varphi}(y_j) \geq t_j,\ j = \overline{1,n}.$$

Отже, функціонал $\tilde{\varphi} \in Y^*$ такий, що

$$\tilde{\varphi}(x_i) = p_i, i = \overline{1,l}$$

$$\tilde{\varphi}(y_j) \geq t_j,\ j = \overline{1,n},$$

$$\tilde{\varphi} \in A.$$

Тому $\tilde{\varphi}$ задовольняє умови (1.2) – (1.4) задачі (1.1) – (1.4), а, отже є допустимим розв'язком для цієї задачі.

Можна зробити висновок, що у випадку, коли для довільних $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}; \psi_i \in R, i = \overline{1,l}$, виконується нерівність (1.7), то множина допустимих розв'язків M не є порожньою множиною.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 1.4. Якщо існують $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, $\psi_i \in R, i = \overline{1,l},$ такі, що

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i > 0, \tag{1.17}$$

то для того, щоб множина допустимих розв'язків для задачі (1.1)-(1.4) була непорожньою множиною $(M \neq \varnothing)$, необхідно, а у випадку, коли A - симетрична опукла слабко* компактна множина простору Y^* і достатньою, щоб

$$\inf_{\substack{\xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}; \\ \psi_i \in R, i = \overline{1,l}; \\ \sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i > 0}} \frac{f_A(\sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i x_i)}{\sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i} \geq 1. \tag{1.18}$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що множина допустимих розв'язків для задачі (1.1) – (1.4) буде непорожньою множиною.

З теореми 1.3 випливає що, оскільки $M \neq \varnothing$, то для будь-яких чисел $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}$, $\psi_i \in R, i = \overline{1,l},$ виконується нерівність

$$f_A(\sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i x_i) \geq \sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i. \tag{1.19}$$

Згідно з умовою теореми існують $\tilde{\xi}_j \in R, \tilde{\xi}_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \tilde{\psi}_i, i = \overline{1,l},$ для яких має місце (1.17).

Оскільки (1.19) має місце для довільних $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}$ має місце для довільних $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \psi_i \in R, i = \overline{1,l},$ то, зокрема, і для $\tilde{\xi}_j, j = \overline{1,n}, \tilde{\psi}_i, i = \overline{1,l}.$ Тоді

$$f_A(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\xi}_j y_j + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\psi}_i x_i) \geq \sum_{j=1}^{n} \tilde{\xi}_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\psi}_i p_i,$$

$$\tilde{\xi}_j \in R, \tilde{\xi}_j \geq 0, j = \overline{1,n}; \quad \tilde{\psi}_i \in R, i = \overline{1,l}; \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{\xi}_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\psi}_i p_i > 0.$$

Звідси

$$\frac{f_A(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\xi}_j y_j + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\psi}_i x_i)}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{\xi}_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\psi}_i p_i} \geq 1$$

для довільних $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \tilde{\psi}_i \in R, i = \overline{1,l}, \ \sum_{j=1}^{n} \tilde{\xi}_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\psi}_i p_i > 0.$

Тоді

$$\inf_{\substack{\xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}; \\ \psi_i \in R, i = \overline{1,l}; \\ \sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i > 0}} \frac{f_A(\sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i x_i)}{\sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i} \geq 1.$$

Отже, в цьому випадку нерівність (1.18) має місце.

Достатність. Оскільки A- симетричною опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*, то $0 \in A,$ існують $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \ \psi_i \in R, i = \overline{1,l},$ такі, що

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i > 0,$$

та виконується нерівність (1.18).

Доведемо, що в цьому випадку множина допустимих розв'язків задачі (1.1) – (1.4) є непорожньою множиною.

Оскільки f_A – сублінійний функціонал, то f_A - додатньо однорідний, а, отже, для довільних $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \tilde{\psi}_i \in R, i = \overline{1,l},$ для яких має місце нерівність (1.17) будемо мати

$$\frac{f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i)}{\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i} =$$

$$= \frac{f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i)}{\theta} =$$

$$= f_A(\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j}{\theta} y_j + \sum_{i=1}^{l}\frac{\psi_i}{\theta} x_i) \geq 1,$$

де $\theta = \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i > 0.$

Покладемо $\delta_j = \frac{\xi_j}{\theta}; j = \overline{1,n}; \alpha_i = \frac{\psi_i}{\theta}, i = \overline{1,l}.$

Оскільки $\xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \theta > 0,$ то $\delta_j \geq 0, j = \overline{1,n},$ причому

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j}{\theta} t_j + \sum_{i=1}^{l}\frac{\psi_i}{\theta} p_i =$$

$$= \frac{1}{\theta}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i) =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i) = 1.$$

Отже, існують $\delta_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \alpha_i, i = \overline{1,l}$, такі, що $\sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i = 1,$ та для яких

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\delta_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i) \ge 1.$$

Розглянемо довільні $\delta_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},\ \ \alpha_i,\ i=\overline{1,l}$, такі, що $\sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i = 1,$ та для яких

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\delta_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i) \ge 1.$$

Згідно (1.18) для них:

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\delta_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i) = \frac{f_A(\sum_{j=1}^{n}\delta_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i)}{\sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i} \ge 1.$$

Отже, є такі $\delta_j \ge 0,\ j=\overline{1,n},\ \ \alpha_i,\ i=\overline{1,l}$, такі, що $\sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i = 1,$ та для яких

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\delta_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i) \ge 1.$$

З урахуванням зазначеного отримаємо, що

$$\inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R, i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i=1}} f_A(\sum_{j=1}^{n}\delta_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i) =$$

$$= \inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R, i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i=1}} \max_{\varphi\in A} \varphi(\sum_{j=1}^{n}\delta_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i) =$$

$$= \inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R, i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i=1}} \max_{\varphi\in A} (\sum_{j=1}^{n}\delta_j \varphi(y_j) + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i \varphi(x_i)) \ge 1. \qquad (1.20)$$

Розглянемо функцію

$$\lambda((\delta;\alpha),\varphi) = \lambda(\delta_1,...,\delta_n;\alpha_1,...,\alpha_l),\varphi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\delta_j \varphi(y_j) + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i \varphi(x_i),$$

де $(\delta;\alpha)\in R^{n+l}, \varphi\in Y^*$.

Доведемо, що функція $\lambda((\delta,\alpha),\varphi)$ є опуклою по $(\delta;\alpha)\in R^{n+l}$ для фіксованого $\varphi\in Y^*$ (див., наприклад, [6, с. 141]).

Нехай $\varphi\in Y^*$ - фіксований елемент простору Y^*, (δ^1,α^1), $(\delta^2,\alpha^2)\in R^{n+l}$, де

$$(\delta^1,\alpha^1)=(\delta_1^1,...,\delta_n^1;\alpha_1^1,...,\alpha_l^1),$$

$$(\delta^2,\alpha^2)=(\delta_1^2,...,\delta_n^2;\alpha_1^2,...,\alpha_l^2).$$

Для $\beta\in[0;1]$ будемо мати

$$\lambda((1-\beta)(\delta^1,\alpha^1)+\beta(\delta^2,\alpha^2),\varphi)=$$

$$=\lambda((((1-\beta)\delta^1;(1-\beta)\alpha^1)+(\beta\delta^2,\beta\alpha^2)),\varphi)=$$

$$=\lambda((((1-\beta)\delta^1+\beta\delta^2,(1-\beta)\alpha^1+\beta\alpha^2),\varphi)=$$

$$=\lambda((((1-\beta)\delta_1^1+\beta\delta_1^2;...;(1-\beta)\delta_n^1+\beta\delta_n^2;(1-\beta)\alpha_1^1+\beta\alpha_1^2,$$

$$,...,(1-\beta)\alpha_l^1+\beta\alpha_l^2),\varphi)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}((((1-\beta)\delta_j^1+\beta\delta_j^2)\varphi(y_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}(((1-\beta)\alpha_i^1+\beta\alpha_i^2)\varphi(x_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(1-\beta)\delta_j^1\varphi(y_j)+\sum_{j=1}^{n}\beta\delta_j^2\varphi(y_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}(1-\beta)\alpha_i^1\varphi(x_i)+\sum_{i=1}^{l}\beta\alpha_i^2\varphi(x_i)=$$

$$=(1-\beta)\sum_{j=1}^{n}\delta_j^1\varphi(y_j)+\beta\sum_{j=1}^{n}\delta_j^2\varphi(y_j)+$$

$$+(1-\beta)\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^1\varphi(x_i)+\beta\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^2\varphi(x_i)=$$

$$=(1-\beta)\lambda((\delta^1,\alpha^1),\varphi)+\beta\lambda((\delta^2,\alpha^2),\varphi),\ \ 0\le\beta\le1.$$

Звідси слідує, що функція $\lambda((\delta,\alpha),\varphi)$ буде опуклою по $(\delta,\alpha)\in R^{n+l}$ при фіксованому $\varphi\in Y^*$.

Доведемо, що функція $\lambda((\delta,\alpha),\varphi)$ є вгнутою по $\varphi\in Y^*$ при фіксованому $(\delta;\alpha)\in R^{n+l}$ (див., наприклад, [6, с.142]).

Нехай (δ,α) фіксований елемент простору R^{n+l}, $\varphi_1,\varphi_2\in Y^*$.

Для $p_0\in[0,1]$ будемо мати

$$\lambda((\delta,\alpha),(1-\beta)\varphi_1+\beta\varphi_2)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\delta_j((1-\beta)\varphi_1+\beta\varphi_2)(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i((1-\beta)\varphi_1+\beta\varphi_2)(x_i)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\delta_j((1-\beta)\varphi_1(y_j)+\beta\varphi_2(y_j))+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i((1-\beta)\varphi_2(x_i)+\beta\varphi_2(x_i))=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\delta_j(1-\beta)\varphi_1(y_j)+\delta_j\beta\varphi_2(y_j))+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i(1-\beta)\varphi_1(x_i)+\alpha_i\beta\varphi_2(x_i))=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\delta_i(1-\beta)\varphi_1(y_j)+\sum_{j=1}^{n}\delta_j\beta\varphi_2(y_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(1-\beta)\varphi_1(x_i)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\beta\varphi_2(x_i)=$$

$$=(1-\beta)\sum_{j=1}^{n}\delta_i\varphi_1(y_j)+\beta\sum_{j=1}^{n}\delta_j\varphi_2(y_j)+$$

$$+(1-\beta)\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\varphi_1(x_j)+\beta\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\varphi_2(x_j)=$$

$$=(1-\beta)\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_i\varphi_1(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_j\varphi_1(x_j)\right)+$$

$$+\beta\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_i\varphi_2(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\varphi_2(x_i)\right)=$$

$$=(1-\beta)\lambda((\delta,\alpha),\varphi_1)+\beta\lambda((\delta,\alpha),\varphi_2).$$

Звідси слідує, що при фіксованому $(\delta,\alpha)\in R^{n+l}$ функція $\lambda((\delta,\alpha),\varphi)$ буде вгнутою по φ на Y^*.

Доведемо, що функція $\lambda((\delta,\alpha),\varphi)$ є неперервною по φ у розумінні слабкої* топології простору Y^*.

Нехай (δ,α) - фіксований елемент простору R^{n+l}, $\varphi_0 \in Y^*$, тоді

$$\left|\lambda((\delta,\alpha),\varphi)-\lambda((\delta,\alpha),\varphi_0)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\delta_j\varphi(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\varphi(x_i)-\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\varphi_0(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(x_i)\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\delta_j\varphi(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\varphi(x_i)-\sum_{j=1}^{n}\delta_j\varphi_0(y_j)-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\varphi_0(x_i)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\delta_j(\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j))+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(\varphi(x_i)-\varphi_0(x_2))\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{j=1}^{n}\delta_j(\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right|+\left|\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_i(\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j))\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\alpha_i(\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_j\right|\left|\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i\right|\left|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|.$$

Для довільного $\varepsilon>0$ розглянемо окіл точки φ_0 у слабкій* топології

$$O(\varphi_0)=O_{((y_1,\ldots,y_n;x_1,\ldots,x_l),\eta)}(\varphi_0)=$$

$$=\left\{\varphi\in Y^*:\left|\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right|<\eta;\, j=\overline{1,n};\left|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|<\eta, i=\overline{1,l}\right\},$$

де $\eta=\dfrac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_j\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\alpha_i\right|}$.

Тоді для $\varphi\in O(\varphi_0)$ одержимо:

$$\left|\lambda((\delta,\alpha),\varphi)-\alpha((\delta,\alpha),\varphi_0)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_j\right|\left|\varphi(y_j)-\varphi_0(y_j)\right|+\sum_{i=1}^{l}\left|\alpha_i\right|\left|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_j\right|\cdot\eta+\sum_{i=1}^{l}\left|\alpha_i\right|\cdot\eta=$$

$$= \eta \cdot \sum_{j=1}^{n} |\delta_j| + \eta \cdot \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i| =$$

$$= \eta \cdot (\sum_{j=1}^{n} |\delta_j| + \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i|) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n} |\delta_j| + \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i|} \cdot (\sum_{j=1}^{n} |\delta_j| + \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i|) = \varepsilon.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$, існує окіл точки $\varphi_0 \in Y^*$ у слабкій* топології $O(\varphi_0) = O_{((y_1,...,y_n;x_1,...,x_n),\eta)}(\varphi_0)$ таким, що для довільних $\varphi \in O(\varphi_0)$

$$|\lambda((\delta,\alpha),\varphi) - \lambda((\delta,\alpha),\varphi_0| < \varepsilon.$$

Це означає, що функція $\lambda((\delta,\alpha),\varphi)$ при фіксованому $(\delta,\alpha) \in R^{n+l}$, неперервна зверху в точці $\varphi_0 \in Y^*$, а, отже, і на Y^*.

Розглянемо множину

$$D = \left\{ (\delta,\alpha) = (\delta_1,...,\delta_n;\alpha_1,...,\alpha_l) \in R^{n+l}; \delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \sum_{j=1}^{n} \delta_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = 1 \right\}.$$

Покажемо, що множина D є опуклою множиною простору R^{n+l}.

Для довільного $\beta \in [0;1]$ розглянемо вектор

$$(\delta_\beta, \alpha_\beta) = (1-\beta)(\delta^1,\alpha^1) + \beta(\delta^2,\alpha^2) =$$

$$= ((1-\beta)\delta^1 + \beta\delta^2; (1-\beta)\alpha_1 + \beta\alpha^2) =$$

$$= ((1-\beta)\delta_1^1 + \beta\delta_1^2;...;(1-\beta)\delta_n^1 + \beta\delta_n^2;(1-\beta)\alpha_1^1 + \beta\alpha_1^2;...$$

$$...,(1-\beta)\alpha_l^1 + \beta\alpha_l^2) = (\delta_1^\beta,...,\delta_n^\beta;\alpha_1^\beta,...,\alpha_l^\beta),$$

де $(\delta^1,\alpha^1) = (\delta_1^1,...,\delta_n^1;\alpha_1^1,...,\alpha_l^1), (\delta^2,\alpha^2) = (\delta_1^2,...,\delta_n^2;\alpha_1^2,...,\alpha_l^2) \in D.$

Оскільки $(\delta^1,\alpha^1),(\delta^2,\alpha^2) \in D,$ то $\delta_j^1 \geq 0,\ j = \overline{1,n},$ $\delta_j^2 \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$ З урахуванням того, що $\beta \in [0;1]$, будемо мати, що

$$(1-\beta)\delta_j^1 + \beta\delta_j^2 \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Отже, $(\delta_\beta,\alpha_\beta) = (\delta_1^\beta,...,\delta_n^\beta;\alpha_1^\beta;...;\alpha_l^\beta)$ такий, що $\delta_j^\beta \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$

Крім того,

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_j^{\beta}t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^{\beta}p_i=\sum_{j=1}^{n}\left((1-\beta)\delta_j^1+\beta\delta_j^2\right)t_j+\sum_{i=1}^{l}\left((1-\beta)\alpha_i^1+\beta\alpha_i^2\right)p_i=$$

$$=(1-\beta)\sum_{j=1}^{n}\delta_j^1t_j+\beta\sum_{j=1}^{n}\delta_j^2t_j+(1-\beta)\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^1p_i+\beta\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^2p_i=$$

$$=(1-\beta)\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j^1t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^1p_i\right)+\beta\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j^2t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^2p_i\right)=$$

$$=(1-\beta)\cdot 1+\beta\cdot 1=1.$$

Отже, $\forall\,\beta\in[0;1]$ вектор $(\delta_\beta;\alpha_\beta)\in D.$

Звідси випливає, що довільна точка відрізку $\left[(\delta^1,\alpha^1),(\delta^2;\alpha^2)\right]\subset D,$ а це і означає, що D є опуклою множиною.

Оскільки A є опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*, D є опуклою множиною простору R^{n+l}, $\lambda((\delta,\alpha),\varphi)$ - опукла по $(\delta;\alpha)\in R^{n+l}$ при фіксованому $\varphi\in Y^*$, вгнута по φ при фіксованому $(\delta;\alpha)\in R^{n+l}$, півнеперервна зверху на Y^* у розумінні слабко* топології простору Y^*, D є опуклою множиною, то згідно з теоремою Фань-Цзі (див., наприклад, [15] будемо мати

$$\inf_{(\delta,\alpha)\in D}\max_{\varphi\in A}\lambda((\delta,\alpha);\varphi)=\max_{\varphi\in A}\inf_{(\delta,\alpha)\in A}\lambda((\delta,\alpha);\varphi)=$$

$$=\inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R,i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_jt_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_ip_i=1}}\max_{\varphi\in A}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\varphi(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\varphi(x_i)\right)=$$

$$=\max_{\varphi\in A}\inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R,i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_jt_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_ip_i=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\varphi(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\varphi(x_i)\right)\ge 1. \qquad (1.21)$$

Нехай функціонал $\hat{\varphi}\in A$ такий, що

$$\max_{\varphi\in A}\inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R,i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_jt_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_ip_i=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\varphi(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\varphi(x_i)\right)=$$

$$=\inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R,i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\hat{\varphi}(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\hat{\varphi}(x_i)\right).$$

З урахуванням нерівності (1.21) будемо мати, що

$$\inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R,i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\hat{\varphi}(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\hat{\varphi}(x_i)\right)\ge 1. \qquad (1.22)$$

З нерівності (1.22) випливає, що задача лінійного програмування

$$\inf_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R,i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\hat{\varphi}(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\hat{\varphi}(x_i)\right) \qquad (1.23)$$

має оптимальний розв'язок.

Побудуємо задачу двоїсту до задачі (1.23) (див., [9, с.43])

$$\max v \qquad (1.24)$$

$$vt_j\le\hat{\varphi}(y_j),\ j=\overline{1,n}, \qquad (1.25)$$

$$vp_i=\hat{\varphi}(x_i), i=\overline{1,l}. \qquad (1.26).$$

Оскільки задача (1.23) має оптимальний розв'язок, то згідно з першою теоремою двоїстості лінійного програмування (див., [11, с. 19]), має розв'язок і задача (1.24) – (1.26), причому оптимальні значення цільових функцій цих задач рівні між собою.

Нехай v^* - оптимальний розв'язок задачі (1.24) – (1.26), тоді

$$v^*=\max_{\substack{vt_j\le\hat{\varphi}(y_j),\ j=\overline{1,n};\\ vp_i=\hat{\varphi}(x_i),\ i=\overline{1,l}}} v=$$

$$=\min_{\substack{\delta_j\in R,\delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \alpha_i\in R,i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i=1}}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\hat{\varphi}(y_j)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\hat{\varphi}(x_i)\right)\ge 1,$$

Звідси випливає, що

$$v^*t_j\le\hat{\varphi}(y_j),\ j=\overline{1,n};$$

$$v^*p_i=\hat{\varphi}(x_i), i=\overline{1,l}.$$

Отже,

$$\frac{\hat{\varphi}}{v^*}(y_j) \ge t_j,\ j = \overline{1,n};$$

$$\frac{\hat{\varphi}}{v^*}(x_i) \ge p_j, i = \overline{1,l}.$$

Розглянемо функціонал $\tilde{\varphi} = \dfrac{\tilde{\varphi}}{v^*} \in Y^*$.

Оскільки $0 \in A, \hat{\varphi} \in A, A$- опукла множина, то для довільного $\beta \in [0,1]$.

$$(1-\beta)\cdot 0 + \beta \cdot \hat{\varphi} = \beta\hat{\varphi} \in A. \tag{1.27}$$

Покладемо $\tilde{\beta} = \dfrac{1}{v^*}$. Оскільки $v^* \ge 1$, то $\dfrac{1}{v^*} \le 1$, тому $\tilde{\beta} \in [0,1]$.

З (1.27) випливає, що

$$\tilde{\beta} \cdot \hat{\varphi} = \frac{1}{v^*}\hat{\varphi} = \tilde{\varphi} \in A.$$

Отже, функціонал $\tilde{\varphi} \in A$такий, що

$$\tilde{\varphi}(y_j) \ge t_j,\ j = \overline{1,n};$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) \ge p_i, i = \overline{1,l}.$$

Це означає, що $\tilde{\varphi}$ - допустимий розв’язок задачі (1.1) – (1.4), а, отже, множина допустимих розв’язків задачі (1.1) – (1.4) не є порожньою множиною.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 1.5. *Якщо A - симетрична опукла слабко* компактна множина простору Y^*, існують $\xi_j \in R, \xi_j \ge 0,\ j = \overline{1,n};\ \psi_i \in R, i = \overline{1,l}$, для яких виконується нерівність (1.17), то для того, щоб множина допустимих розв’язків для задачі (1.1) – (1.4) була непорожньою множиною $(M \ne \varnothing)$, необхідно і достатньо, щоб мала місце нерівність (1.18).*

Доведення. Необхідність. Необхідність випливає з теореми 1.4.

Достатність. Оскільки A - симетричною опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*, то $f_A(z) \ge 0,\ \ z \in Y$; існують $\xi_j \in R,\ \ \xi_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}; \psi_i \in R, i = \overline{1,l}$, для яких виконується нерівність (1.17) і має місце співвідношення (1.18). Доведемо, що в цьому випадку множина M є непорожньою множиною.

З (1.18) випливає, що

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i) \geq \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i \tag{1.28}$$

для довільних $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}; \psi_i \in R, i=\overline{1,l}$, таких, що

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i > 0.$$

Розглянемо $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}; \psi_i \in R, i=\overline{1,l}$, такі, що $\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i \leq 0,$ тоді

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i) \geq 0 = \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i.$$

Отже

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i) \geq \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i,$$

для довільних $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}; \psi_i \in R, i=\overline{1,l}$.

Згідно з теоремою 1.3, множина допустимих розв'язків є непорожньою множиною.

Теорему доведено.

Наслідок 1.1. *Якщо* $f_A(z)=\|z\|_A, z \in Y,$ *і існують* $\xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n};\ \psi_i \in R, i=\overline{1,l}$ *такі, що має місце нерівність (1.17), то для того, щоб множина допустимих розв'язків задачі (1.1) – (1.4) була непорожньою множиною, необхідно і достатньо, щоб*

$$\inf_{\substack{\xi_j \in R,\, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i \in R,\, i=\overline{1,l};\\ \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i \geq 0}} \frac{\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i\right\|}{\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i} \geq 1.$$

Справедливість наслідку випливає з теореми 1.4.

РОЗДІЛ 2. КРИТЕРІЇ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ЗАДАЧІ (1.1) – (1.4)

2.1. Співвідношення двоїстості для задачі (1.1) – (1.4)

Розглянемо задачу

$$\min w \tag{2.1}$$

$$\varphi(c_k) \leq w - d_k, k = \overline{1,m}; \tag{2.2}$$

$$\varphi(y_j) \geq t_j, j = \overline{1,n}; \tag{2.3}$$

$$\varphi(x_i) = p_i, i = \overline{1,l}; \tag{2.4}$$

$$\varphi \in A. \tag{2.5}$$

Задачу (2.1) – (2.5) будемо називати приєднаною задачею до задачі (1.1) – (1.4).

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. *Задачі (1.1) – (1.4) та (2.1) – (2.5) є еквівалентними між собою, тобто, якщо $\varphi^* \in Y^*$ є оптимальним розв'язком для задачі (1.1) – (1.4), то (φ^*, w^*) є оптимальним для задачі (2.1) – (2.5), причому*

$$w^* = \max_{1 \leq k \leq m} (\varphi^*(c_k) + d_k). \tag{2.6}$$

Навпаки, якщо (φ^*, w^*), $\varphi^* \in Y^*$, є оптимальним розв'язком для задачі (2.1) – (2.5), то φ^* є оптимальним розв'язком для задачі (1) – (4) і має місце рівність (2.6).

Доведення. Нехай $\varphi^* \in Y^*$ є оптимальним розв'язком задачі (1.1) – (1.4), тоді

$$\min_{\varphi \in Y^*} \max_{1 \leq k \leq m} (\varphi(c_k) + d_k) = \max_{1 \leq k \leq m} \left(\varphi^*(c_k) + d_k \right),$$

причому

$$\varphi^*(y_j) \geq t_j, j = \overline{1,n}; \tag{2.8}$$

$$\varphi^*(x_i) = p_i, i = \overline{1,l}; \tag{2.9}$$

$$\varphi^* \in A. \tag{2.10}$$

Покладемо $w^* = \max_{1 \leq k \leq m} (\varphi^*(c_k) + d_k)$. Звідси випливає, що для довільних $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\varphi^*(c_k) + d_k \leq \max_{1 \leq k \leq m} (\varphi^*(c_k) + d_k) = w^*; k = \overline{1,m}$$

$$\varphi^*(c_k) + d_k \le w^*; k = \overline{1,m}$$

$$\varphi^*(c_k) \le w^* - d_k; k = \overline{1,m}$$

Отже, (φ^*, w^*) задовольняють умову (2.2) задачі (2.1) – (2.6). Крім того, з (2.8) – (2.10) випливає, що φ^* задовольняє умови (2.3) – (2.5) задачі (2.1) – (2.5).

Тому (φ^*, w^*) є допустимим розв'язком для задачі (2.1) – (2.5).

Доведемо, що (φ^*, w^*) є оптимальним розв'язком задачі (2.1) – (2.5).

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що (φ^*, w^*) не є оптимальним розв'язком для задачі (2.1) – (2.5). Тоді існує $(\tilde{\varphi}, \tilde{w}), \tilde{\varphi} \in A,$ що задовольняє умову (2.2) – (2.5) (є допустимим розв'язком для задачі (2.1) – (2.5)) і

$$\tilde{w} < w^*.$$

Тоді

$$\tilde{\varphi}(c_k) + d_k \le \tilde{w}, k = \overline{1,m}, \tag{2.11}$$

$$\tilde{\varphi}(y_j) \ge t_j, j = \overline{1,n}, \tag{2.12}$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = p_i, i = \overline{1,l}, \tag{2.13}$$

$$\tilde{\varphi} \in A. \tag{2.14}$$

З (2.11) випливає, що

$$\tilde{\varphi}(c_k) + d_k \le \tilde{w}, k = \overline{1,m};$$

$$\max_{1 \le k \le m}(\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) \le \tilde{w} < w^*;$$

$$\max_{1 \le k \le m}(\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) < w^*.$$

З урахуванням того, що

$$w^* = \max_{1 \le k \le m}(\varphi^*(c_k) + d_k),$$

одержимо

$$\max_{1 \le k \le m}(\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) < \max_{1 \le k \le m}(\varphi^*(c_k) + d_k). \tag{2.15}$$

З умов (2.12) – (2.15) випливає, що $\tilde{\varphi}$ задовольняє умови (1.2) – (1.4) задачі (1.1) – (1.4), а, отже, є допустимим розв'язком для цієї задачі.

Тоді $\tilde{\varphi} \in Y^*$ – допустимий розв'язок задачі (1.1) – (1.4) для якого виконується умова (2.15), що суперечить оптимальності розв'язку $\varphi^* \in Y^*$ для задачі (1.1) – (1.4).

Одержана суперечність доводить, що (φ^*, w^*) є оптимальним розв'язком для задачі (2.1) – (2.5).

Отже, якщо φ^* є оптимальним розв'язком для задачі (1.1) – (1.4), то (φ^*, w^*) де $w^* = \max\limits_{1 \le k \le m} (\varphi^*(c_k) + d_k),$ є оптимальним розв'язком для задачі (2.1) – (2.5).

Навпаки, нехай (φ^*, w^*) є оптимальним розв'язком для задачі (2.1) – (2.5). Доведемо, що φ^* є оптимальним розв'язком для задачі (1.1) – (1.4), причому $w^* = \max\limits_{1 \le k \le m} (\varphi^*(c_k) + d_k).$

Оскільки, (φ^*, w^*) - оптимальний розв'язок задачі (2.1) – (2.5), то (φ^*, w^*) - допустимий розв'язок для цієї задачі, тому φ^* задовольняє умови (2.3) – (2.5) задачі (2.1) – (2.5), а отже, умови (1.2) – (1.4) задачі (1.1) – (1.4). Тому φ^* є допустимий розв'язок для задачі (1.1) – (1.4). Крім того, з умови (2.2) задачі (2.1) – (2.5) випливає, що

$$\varphi^*(c_k) \le w^* - d_k, k = \overline{1,m};$$

$$\varphi^*(c_k) + d_k \le w^*, k = \overline{1,m};$$

$$\max_{1 \le k \le m} (\varphi^*(c_k) + d_k) \le w^*.$$

Доведемо, що

$$\max_{1 \le k \le m} (\varphi^*(c_k) + d_k) = w^*.$$

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що

$$\max_{1 \le k \le m} (\varphi^*(c_k) + d_k) < w^*.$$

Покладемо

$$\max_{1 \le k \le m} (\varphi^*(c_k) + d_k) = \tilde{w}.$$

Тоді $\tilde{w} < w^*.$

Розглянемо пару $(\varphi^*; \tilde{w}).$

З (2.15) випливає, що

$$\max_{1 \le k \le m} (\varphi^*(c_k) + d_k) = \tilde{w};$$

$$\varphi^*(c_k) + d_k \le \tilde{w}, k = \overline{1,m};$$

$$\varphi^*(c_k) \le \tilde{w} - d_k, k = \overline{1,m}.$$

Отже, $(\varphi^*;\tilde{w})$ задовольняє умову (2.2) задачі (2.1) – (2.5). Крім того φ^* задовольняє умови (2.3) – (2.5) цієї задачі. Можна зробити висновок, що $(\varphi^*;\tilde{w})$ є допустимим розв'язком для задачі (2.1) – (2.5) і $\tilde{w} < w^*$, що суперечить оптимальності розв'язку $(\varphi^*;w^*)$ для задачі (2.1) – (2.5).

Одержана суперечність доводить, що

$$w^* = \max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k) + d_k). \tag{2.16}$$

Доведемо, що φ^* є оптимальним розв'язком для задачі (1.1) – (1.4).

Доведення проведемо, від супротивного.

Припустимо, що φ^* не є оптимальним розв'язком для задачі (1.1) – (1.4). Тоді існує функціонал $\tilde{\varphi} \in Y^*$ такий, що задовольняє умови (1.2) – (1.4) задачі (1.1) – (1.4) (є допустимим розв'язком для задачі (1.1) – (1.4))

$$\max_{1\le k\le m}(\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) < \max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k) + d_k) \tag{2.17}$$

Покладемо

$$w_{\tilde{\varphi}} = \max_{1\le k\le m}(\tilde{\varphi}(c_k) + d_k).$$

Тоді

$$\tilde{\varphi}(c_k) + d_k \le w_{\tilde{\varphi}}, k = \overline{1,m};$$

$$\tilde{\varphi}(c_k) \le w_{\tilde{\varphi}} - d_k, k = \overline{1,m}.$$

Звідси випливає, що $(\tilde{\varphi}, w_{\tilde{\varphi}})$ задовольняє умову (2.2) задачі (2.1) – (2.5). Крім того, оскільки $\tilde{\varphi}$ є допустимим розв'язком задачі (1.1) – (1.4), то $\tilde{\varphi}$ задовольняє умови (2.3) – (2.5) задачі (2.1) – (2.5). Отже, $(\tilde{\varphi}, w_{\tilde{\varphi}})$ є допустимим розв'язком задачі (2.1) – (2.5).

З умови (2.17) випливає, що

$$w_{\tilde{\varphi}} = \max_{1\le k\le m}(\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) < \max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k) + d_k)$$

Звідси $w_{\tilde{\varphi}} < w^*$. Отже, $(\tilde{\varphi}, w_{\tilde{\varphi}})$ - допустимий розв'язок для задачі (2.1) – (2.5) для якого

$$w_{\tilde{\varphi}} < w^*,$$

що суперечить оптимальності розв’язку $(\varphi^*; w^*)$ для задачі (2.1) – (2.5).

Одержана суперечність доводить, що φ^* є оптимальним розв’язком для задачі (1.1) – (1.4).

Теорему доведено.

Теорема 2.2. *Має місце співвідношення двоїстості*

$$\min\left\{\max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k):\varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n};\varphi(x_i)=p_i,i=\overline{1,l};\varphi\in A\right\}=$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k-f_A\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k\right)\right).$$

Доведення. Нехай φ^* є оптимальним розв’язком задачі (1.1) – (1.4). Тоді, згідно з теоремою 2.1, $(\varphi^*; w^*)$, де $w^*=\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k),$ є оптимальним розв’язком задачі (2.1) – (2.5).

Оскільки $(\varphi^*; w^*)$ – оптимальний розв’язок задачі (2.1) – (2.5), то він задовольняє умови (2.2) – (2.5) цієї задачі:

$$\varphi^*(c_k)\le w^*-d_k,k=\overline{1,m}; \tag{2.18}$$

$$\varphi^*(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n}; \tag{2.19}$$

$$\varphi^*(x_i)=p_i,i=\overline{1,l}; \tag{2.20}$$

$$\varphi^*\in A. \tag{2.21}$$

З (2.18) – (2.20) для довільних $\gamma_k\in R,\ \gamma_k\ge 0,\ k=\overline{1,m},\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1,\ \xi_j\in R,\ \xi_j\ge 0,$ $j=\overline{1,n};\ \psi_i\in R,\ i=\overline{1,l},$ одержимо

$$\gamma_k\varphi^*(c_k)\le\gamma_k(w^*-d_k),k=\overline{1,m},$$

$$\xi_j\varphi^*(y_j)\ge\xi_j t_j,\ j=\overline{1,n};$$

$$\psi_i\varphi^*(x_i)=\psi_i p_i,i=\overline{1,l}.$$

Звідси

$$-\gamma_k\varphi^*(c_k)\ge-\gamma_k(w^*-d_k),k=\overline{1,m};$$

$$\xi_j \varphi^*(y_j) \ge \xi_j t_j,\ j=\overline{1,n};$$

$$\psi_i \varphi^*(x_i) = \psi_i p_i, i=\overline{1,l}.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{m}(-\gamma_k \varphi^*(c_k)) \ge \sum_{k=1}^{m}(-\gamma_k (w^* - d_k)),$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\xi_j \varphi^*(y_j)) \ge \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j,$$

$$\sum_{i=1}^{l}(\psi_i \varphi^*(x_i)) = \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i.$$

Додавши одержані співвідношення, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{m}(-\gamma_k \varphi^*(c_k)) + \sum_{j=1}^{n}\xi_j \varphi^*(y_j) + \sum_{i=1}^{l}\psi_i \varphi^*(x_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\varphi^*(-\gamma_k c_k) + \sum_{j=1}^{n}\varphi^*(\xi_j y_j) + \sum_{i=1}^{l}\varphi^*(\psi_i x_i) =$$

$$= \varphi^*(\sum_{k=1}^{m}(-\gamma_k c_k)) + \varphi^*(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j) + \varphi^*(\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i) =$$

$$= \varphi^*(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k) \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{m}(-\gamma_k (w^* - d_k)) + \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k w^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k - w^* \cdot \sum_{k=1}^{m}\gamma_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k - w^*.$$

Отже, для довільних $\gamma_k \in R, \gamma_k \ge 0, k=\overline{1,m},$ $\sum_{k=1}^{m}\gamma_k = 1, \xi_j \in R, \xi_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}; \psi_i \in R, i=\overline{1,l},$ будемо мати

$$\varphi^*(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k - w^*.$$

Звідси

$$f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k) =$$

$$= \max_{\varphi\in A}\varphi(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k) \geq$$

$$\geq \varphi^*(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k - w^*;$$

$$w^* \geq \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k -$$

$$- f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k). \qquad (2.22)$$

Оскільки $w^* = \max\limits_{1\leq k\leq m}(\varphi^*(c_k) + d_k)$, то

$$\max_{1\leq k\leq m}(\varphi^*(c_k) + d_k) \geq \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k -$$

$$- f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k).$$

З урахуванням того, що φ^* є оптимальним розв’язком для задачі (1.1) – (1.4), будемо мати, що для довільних $\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k = \overline{1,m}$, $\sum\limits_{k=1}^{m}\gamma_k = 1, \xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}; \psi_i \in R, i = \overline{1,l}$, має місце співвідношення

$$\min\left\{\max_{1\leq k\leq m}(\varphi(c_k) + d_k) : \varphi(y_j) \geq t_j,\ j = \overline{1,n};\ \varphi(x_i) > p_i, i = \overline{1,l}; \varphi \in A\right\} \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k - f_A\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k\right);$$

$$\min\left\{\max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k):\varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n};\ \varphi(x_i)>p_i, i=\overline{1,l};\varphi\in A\right\}\ge$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^m\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^n\xi_j t_j+\sum_{i=1}^l\psi_i p_i+\sum_{k=1}^m\gamma_k d_k-f_A\left(\sum_{j=1}^n\xi_j y_j+\sum_{i=1}^l\psi_i x_i-\sum_{k=1}^m\gamma_k c_k\right)\right).\quad(2.23)$$

З урахуванням того, що $f_A(z)=\max_{\varphi\in A}\varphi(z)$, одержимо:

$$\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^m\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^n\xi_j t_j+\sum_{i=1}^l\psi_i p_i+\sum_{k=1}^m\gamma_k d_k-f_A\left(\sum_{j=1}^n\xi_j y_j+\sum_{i=1}^l\psi_i x_i-\sum_{k=1}^m\gamma_k c_k\right)\right)=$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^m\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^n\xi_j t_j+\sum_{i=1}^l\psi_i p_i+\sum_{k=1}^m\gamma_k d_k-\max_{\varphi\in A}\varphi\left(\sum_{j=1}^n\xi_j y_j+\sum_{i=1}^l\psi_i x_i-\sum_{k=1}^m\gamma_k c_k\right)\right)=$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^m\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\min_{\varphi\in A}\left(\sum_{j=1}^n\xi_j t_j+\sum_{i=1}^l\psi_i p_i+\sum_{k=1}^m\gamma_k d_k-\varphi\left(\sum_{j=1}^n\xi_j y_j+\sum_{i=1}^l\psi_i x_i-\sum_{k=1}^m\gamma_k c_k\right)\right)=$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^m\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\min_{\varphi\in A}\left(\sum_{j=1}^n\xi_j(t_j-\varphi(y_j))+\sum_{i=1}^l\psi_i(p_i-\varphi(x_i))+\sum_{k=1}^m\gamma_k(d_k+\varphi(c_k))\right).\quad(2.24)$$

Розглянемо функцію:

$$\upsilon(\varphi;(\xi,\psi,\gamma))=\upsilon(\varphi,(\xi_1,...,\xi_n;\varphi_1,...,\varphi_l;\gamma_1,...,\gamma_m)=$$

$$=\sum_{j=1}^n\xi_j(t_j-\varphi(y_j))+\sum_{i=1}^l\psi_i(p_i-\varphi(x_i))+\sum_{k=1}^m\gamma_k(d_k+\varphi(c_k)).$$

Функція $\upsilon(\varphi;(\xi,\psi,\gamma))$ є угнутою по φ на Y^* при фіксованому $(\xi,\psi,\gamma)\in R^{n+l+m}$, опуклою по (ξ,ψ,γ) на R^{n+l+m} при кожному фіксованому $\varphi\in Y^*$, неперервною по φ у розумінні слабко* топології простору Y^*.

Розглянемо множину:

$$B=\left\{(\xi,\psi,\gamma)=(\xi_1,...,\xi_n;\psi_1,...,\psi_l;\gamma_1,...,\gamma_m)\in R^{n+l+m}:\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\sum_{k=1}^{m}\gamma_n=1\right\}.$$

Очевидно, що множина B є опуклою множиною простору R^{n+l+m}.

З урахуванням вищезазначеного та того, що A - слабко* компактна множина, простору Y^*, теореми Фань-Цзі (див., [15]), одержимо, що

$$\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\min_{\varphi\in A}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(t_j-\varphi(y_j))+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(p_i-\varphi(x_i))+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(d_k+\varphi(c_k))=$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\min_{\varphi\in A}\upsilon(\varphi;(\xi,\psi,\gamma))=$$

$$=\min_{\varphi\in A}\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\upsilon(\varphi;\xi;\varphi,\gamma))=$$

$$=\min_{\varphi\in A}\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(t_j-\varphi(y_j))+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(p_i-\varphi(x_i))+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(d_k+\varphi(c_k)). \quad (2.25)$$

Нехай $\tilde{\varphi}\in A$ такий, що

$$\min_{\varphi\in A}\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(t_j-\varphi(y_j))+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(p_i-\varphi(x_i))+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(d_k+\varphi(c_k))=$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(t_j-\tilde{\varphi}(y_j))+\sum_{i=1}^{l}\psi_i(p_i-\tilde{\varphi}(x_i))+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(d_k+\tilde{\varphi}(c_k)). \quad (2.26)$$

Покажемо, що $\tilde{\varphi} \in M$, тобто є допустимим для задачі (1.1) – (1.4).

Припустимо, що $\tilde{\varphi}$ не є допустимим для задачі (1.1) – (1.4), тоді для деякого $j_0 \in \{1,...,n\}$

$$\tilde{\varphi}(y_{j_0}) < t_{j_0},$$

або для деякого $i_0 \in \{1,...,l\}$

$$\tilde{\varphi}(x_{i_0}) \neq p_{i_0}.$$

Припустимо, що $\tilde{\varphi}(y_{j_0}) < t_{j_0}$, тоді $t_{j_0} - \tilde{\varphi}(y_{j_0}) > 0.$ Розглянемо вектор $(\tilde{\xi},\tilde{\psi},\tilde{\gamma}) = (\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_{j_0-1},\tilde{\xi}_{j_0},\tilde{\xi}_{j_0+1},...,\tilde{\xi}_n;\tilde{\psi}_1,...,\tilde{\psi}_l;\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_m)$, такий, що $\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_{j_0-1};\tilde{\xi}_{j_0+1};...,\tilde{\xi}_n;\tilde{\psi}_1,...,\tilde{\psi}_l;\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_m$ – фіксовані числа такі, що $\tilde{\xi}_1 \geq 0,...,\tilde{\xi}_{j_0-1} \geq 0, \tilde{\xi}_{j_0+1} \geq 0,...,\tilde{\xi}_n \geq 0,\ \tilde{\gamma}_1 \geq 0,...,\tilde{\gamma}_m \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \tilde{\gamma}_k = 1,$ тоді при $\tilde{\xi}_{j_0} \to +\infty$ одержимо, що

$$\tilde{\xi}_{j_0}(t_{j_0} - \tilde{\varphi}(y_{j_0})) \to +\infty,$$

а отже,

$$\sup_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k = 1;\\ \xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j=\overline{1,n};\\ \psi_i \in R, i=\overline{1,l}}} \left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j(t_j - \varphi(y_j)) + \sum_{i=1}^{l}\psi_i(p_i - \varphi(x_i)) + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k(d_k + \varphi(c_k)\right) \to +\infty,$$

що суперечить умові (2.23).

Одержана суперечність доводить, що

$$\tilde{\varphi}(y_j) \geq t_j,\ j = \overline{1,n}.$$

Припустимо, що для деякого $i_0 \in \{1,...,l\}$

$$\tilde{\varphi}(x_{i_0}) \neq p_{i_0}.$$

Нехай, наприклад, $\tilde{\varphi}(x_{i_0}) < p_{i_0}$. Тоді $p_{i_0} - \tilde{\varphi}(x_{i_0}) > 0.$

Розглянемо вектор $(\tilde{\xi},\tilde{\psi},\tilde{\gamma}) = (\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_n;\tilde{\psi}_1,...,\tilde{\psi}_{i_0-1},\tilde{\psi}_{i_0},\tilde{\psi}_{i_0+1},..\tilde{\psi}_l;\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_m)$ такий, що $\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_n;\tilde{\psi}_1,...,\tilde{\psi}_{i_0-1},\tilde{\psi}_{i_0},\tilde{\psi}_{i_0+1},..\tilde{\psi}_l;\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_m$ - фіксовані дійсні числа, які задовольняють умові

$\tilde{\xi}_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\ \tilde{\gamma}_k \geq 0, k = \overline{1,m}, \sum_{k=1}^{m} \tilde{\gamma}_k = 1,$ а $\tilde{\psi}_{i_0}$ - як завгодно велике додатне число. Тоді при $\tilde{\psi}_{i_0} \to +\infty$ одержимо

$$\tilde{\psi}_{i_0}(p_{i_0} - \tilde{\varphi}(x_{i_0})) \to +\infty,$$

а, отже,

$$\sup_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1; \\ \xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}; \\ \psi_i \in R, i=\overline{1,l}}} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j (t_j - \varphi(y_j)) + \sum_{i=1}^{l} \psi_i (p_i - \varphi(x_i)) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (d_k + \varphi(c_k))\right) \to +\infty,$$

що суперечить умові (2.23).

Аналогічно можна провести міркування і для випадку коли $\tilde{\varphi}(x_{i_0}) > p_{i_0}$.

Отже, $\tilde{\varphi} \in A$ такий, що

$$\tilde{\varphi}(y_j) \geq t_j,\ j = \overline{1,n}$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) \geq t_i, i = \overline{1,l}.$$

Тому $\tilde{\varphi}$ є допустимим розв’язком для задачі (1.1) – (1.4).

З урахуванням вищезазначеного та співвідношення (2.24), (2.25), (2.26) одержимо:

$$\sup_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1; \\ \xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}; \\ \psi_i \in R, i=\overline{1,l}}} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k d_k - f_A\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k c_k\right)\right) =$$

$$= \min_{\varphi \in A} \sup_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1; \\ \xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}; \\ \psi_i \in R, i=\overline{1,l}}} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j (t_j - \varphi(y_j)) + \sum_{i=1}^{l} \psi_i (p_i - \varphi(x_i)) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (d_k + \varphi(c_k))\right) =$$

$$= \sup_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1; \\ \xi_j \in R, \xi_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}; \\ \psi_i \in R, i=\overline{1,l}}} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j (t_j - \tilde{\varphi}(y_j)) + \sum_{i=1}^{l} \psi_i (p_i - \tilde{\varphi}(x_i)) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (d_k + \tilde{\varphi}(c_k))\right) =$$

$$= \sup_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1; \\ \xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j=\overline{1,n}; \\ \psi_i \in R, i=\overline{1,l}}} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j (t_j - \tilde{\varphi}(y_j)) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (d_k + \tilde{\varphi}(c_k))\right) \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1; \\ \xi_j \in R, \xi_j \geq 0, j=\overline{1,n}; \\ \psi_i \in R, i=\overline{1,l}}} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (d_k + \tilde{\varphi}(c_k)) \geq$$

$$= \max_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1;}} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (d_k + \tilde{\varphi}(c_k)). \tag{2.27}$$

Покажемо, що $\max\limits_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1;}} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (d_k + \tilde{\varphi}(c_k)) = \max\limits_{1 \leq k \leq m} (\tilde{\varphi}(c_k) + d_k).$

Дійсно

$$\max_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1;}} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (d_k + \tilde{\varphi}(c_k)) \leq$$

$$\leq \max_{\substack{\gamma_k \in R, \gamma_k \geq 0, k=\overline{1,m}; \\ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1;}} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \max_{1 \leq k \leq m} (\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) =$$

$$= \max_{1 \leq k \leq m} (\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) \cdot \max_{1 \leq k \leq m} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k =$$

$$= \max_{1 \leq k \leq m} (\tilde{\varphi}(c_k) + d_k). \tag{2.28}$$

Припустимо, не втрачаючи загальності, що

$$\max_{1 \leq k \leq m} (\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) = \tilde{\varphi}(c_1) + d_1.$$

Розглянемо вектор $(\gamma_1, ..., \gamma_m) = (1, 0, ..., 0)$ тоді

$$\max_{1 \leq k \leq m} (\tilde{\varphi}(c_k) + d_k) = \tilde{\varphi}(c_1) + d_1 = 1 \cdot (\tilde{\varphi}(c_1) + d_1) +$$

$$+0\cdot(\tilde{\varphi}(c_2)+d_2)+0\cdot\ldots+0\cdot(\tilde{\varphi}(c_m)+d_m)\le$$

$$\le \max_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m},\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1}} \sum_{k=1}^{m}\gamma_k(\tilde{\varphi}(c_k)+d_k). \qquad (2.29)$$

Зі співвідношень (2.28), (2.29) випливає, що

$$\max_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m},\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1}} \sum_{k=1}^{m}\gamma_k(\tilde{\varphi}(c_k)+d_k)=\max_{1\le k\le m}(\tilde{\varphi}(c_k)+d_k).$$

З урахуванням цього та співвідношення (2.27) одержимо:

$$\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}} (\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k-f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k))\ge$$

$$\ge \sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;}} \sum_{k=1}^{m}\gamma_k(d_k+\tilde{\varphi}(c_k))=$$

$$=\max_{1\le k\le m}(\tilde{\varphi}(c_k)+d_k)\ge\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=$$

$$=\min\left\{\max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k):\varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n};\ \varphi(x_i)>p_i,i=\overline{1,l};\varphi\in A\right\}. \qquad (2.30)$$

З (2.23), (2.30) слідує

$$\min\left\{\max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k):\varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n};\ \varphi(x_i)>p_i,i=\overline{1,l};\varphi\in A\right\}=$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}} (\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k-f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k)).$$

Теорему доведено.

Поруч із задачею (1.1) – (1.4) будемо розглядати задачу

$$\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k-f_A\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k\right)\right). \quad (2.31)$$

2.2. Критерій оптимальності допустимо для задачі (1.1) – (1.4) та (2.31) розв’язків

Теорема 2.3. Нехай функціонал φ^* - допустимий розв’язок для задачі (1.1) – (1.4), а вектор $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)\in R^{n+l+m}$ допустимий розв’язок для задачі (2.31).

Для того, щоб φ^* та $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)$ були оптимальними розв’язками відповідно для задач (1.1) – (1.4) та (2.31), необхідно і достатньо, що мало місце співвідношення:

$$\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^* t_j+\sum_{i=1}^{l}\varphi_i^* p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* d_k-$$

$$-f_A\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_j^* y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^* x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* c_k\right). \quad (2.32)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\varphi^*\in M$ і φ^* - оптимальний розв’язок для задачі (1.1) – (1.4) тоді

$$\min_{\substack{\varphi(x_i)=p_i,i=\overline{1,n};\\ \varphi(y_j)\ge t_j;\ j=\overline{1,l};\\ \varphi\in A}}\max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k)=\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k). \quad (2.32)$$

Нехай $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)$, $\xi_j^*\in R,\xi_j^*\ge 0,\ j=\overline{1,n};\psi_i^*\in R;\quad i=\overline{1,l};\ \gamma_k^*\in R,$ $\gamma_k^*\ge 0,\ k=\overline{1,m},\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*=1-$ оптимальний розв’язок для задачі (2.31).

Тоді:

$$\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\gamma_k\ge 0,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\xi_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,i=\overline{1,l}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k-\right.$$

$$\left.-f_A\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_j y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k\right)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*d_k-$$

$$-f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k). \qquad (2.33)$$

З урахуванням (2.32) та (2.33), теореми 2.2 одержимо

$$\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=\min_{\substack{\varphi(x_i)=p_i,\, i=\overline{1,n};\\ \varphi(y_j)\ge t_j,\, j=\overline{1,l};\\ \varphi\in A}}\max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k)=$$

$$=\sup_{\substack{\gamma_k\in R,\,\gamma_k\ge 0,\,k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\,\xi_j\ge 0,\,j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,\,i=\overline{1,l}}}(\sum_{j=1}^{n}\xi_jt_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_ip_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_kd_k-$$

$$-f_A(\sum_{i=1}^{n}\xi_jy_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_ix_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_kc_k))=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*d_k-$$

$$-f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k).$$

Звідси випливає, що

$$\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*d_k-$$

$$-f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k).$$

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що функціонал $\varphi^*\in M$, вектор $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)\in R^{n+l+m}$, $\xi_j^*\in R,\xi_j^*\ge 0,\ j=\overline{1,n};\ \psi_i^*\in R;\ \ i=\overline{1,l};\ \gamma_k^*\in R,\ \ \gamma_k^*\ge 0,$ $k=\overline{1,m},\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*=1$, такі, що має рівність (2.32).

Тоді

$$\min_{\substack{\varphi(x_i)=p_i,\, i=\overline{1,n};\\ \varphi(y_j)\ge t_j,\, j=\overline{1,l};\\ \varphi\in A}} \max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k) \le \max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k) =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^* t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i^* p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* d_k -$$

$$-f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^* y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i^* x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* c_k) \le$$

$$\le \sup_{\substack{\gamma_k\in R,\, \gamma_k\ge 0,\, k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\, \xi_j\ge 0,\, j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,\, i=\overline{1,l}}} (\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k -$$

$$-f_A(\sum_{i=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k)). \tag{2.34}$$

З урахуванням теореми 2.2 одержимо

$$\min_{\substack{\varphi(x_i)=p_i,\, i=\overline{1,n};\\ \varphi(y_j)\ge t_j;\, j=\overline{1,l};\\ \varphi\in A}} \max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k) = \max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k) =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^* t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i^* p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* d_k -$$

$$-f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^* y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i^* x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* c_k) =$$

$$= \sup_{\substack{\gamma_k\in R,\, \gamma_k\ge 0,\, k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\\ \xi_j\in R,\, \xi_j\ge 0,\, j=\overline{1,n};\\ \psi_i\in R,\, i=\overline{1,l}}} (\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k -$$

$$-f_A(\sum_{i=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k)).$$

Звідси випливає, що

$$\min_{\substack{\varphi(x_i)=p_i,\, i=\overline{1,n};\\ \varphi(y_j)\ge t_j;\, j=\overline{1,l};\\ \varphi\in A}} \max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k) = \max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)\,,$$

$$\sup_{\substack{\gamma_k \in R,\, \gamma_k \ge 0,\, k=\overline{1,m};\\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k = 1;\\ \xi_j \in R,\, \xi_j \ge 0,\, j=\overline{1,n};\\ \psi_i \in R,\, i=\overline{1,l}}} \left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k d_k - \right.$$

$$\left. - f_A\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_j y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k c_k\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\xi_j^* t_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i^* p_i + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* d_k -$$

$$- f_A\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^* y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i^* x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* c_k\right).$$

А це означає, що функціонал φ^* є оптимальним для задачі (1.1) – (1.4), а вектор $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)$ - оптимальним для задачі (2.31).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 2.4. *Нехай функціонал φ^* - допустимий розв'язок для задачі (1.1) – (1.4), а вектор $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*) \in R^{n+l+m}$ допустимий розв'язок для задачі (2.31).*

Для того, щоб φ^* та $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)$ були оптимальними розв'язками відповідно для задачі (1.1) – (1.4) та (2.31), необхідно і достатньо, щоб вони задовольняли умовам:

$$1) \varphi^*\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_j^* y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* c_k\right) = f_A\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_j^* y_j + \sum_{i=1}^{l}\psi_i x_i - \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* c_k\right);$$

$$2) \xi_j^*(t_j - \varphi_j(y_j)) = 0,\ j = \overline{1,n};$$

$$3) \gamma_k^*(\varphi^*(c_k) + d_k) - \max_{1 \le k \le m}(\varphi^*(c_k) + d_k)) = 0, k = \overline{1,m}.$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\varphi^* \in M$ – оптимальний розв'язок для задачі (1.1) – (1.4), а $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*) \in R^{n+l+m}$, $\xi_j^* \in R, \xi_j^* \ge 0,\ j = \overline{1,n};\ \psi_i^* \in R;\ \ i = \overline{1,l};$ $\gamma_k^* \in R,\ \ \gamma_k^* \ge 0,\ \ k = \overline{1,m},\ \ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k^* = 1$ – оптимальний розв'язок для задачі (2.31). Доведемо, що виконується умови 1.1) – 1.3) теореми.

Оскільки φ^* є допустимим для задачі (1.1) – (1.4), то

$$\varphi^*(y_j) \geq t_j,\ j = \overline{1,n};$$

$$\varphi^*(x_i) = p_i, i = \overline{1,l};$$

$$\varphi^* \in A.$$

Звідси одержимо:

$$t_j - \varphi^*(y_j) \leq 0,\ j = \overline{1,n}; \tag{2.35}$$

$$p_i - \varphi^*(x_i) = 0, i = \overline{1,l}\ . \tag{2.36}$$

З теореми 2.3, співвідношень (2.35), (2.36) одержемо:

$$\min_{\substack{\varphi(y_j) \geq t_j,\ j=\overline{1,n};\\ \varphi(x_i)=p_i,\ i=\overline{1,l};\\ \varphi \in A}} \max_{1 \leq k \leq m}(\varphi(c_k) + d_k) = \max_{1 \leq k \leq m}(\varphi^*(c_k) + d_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k -$$

$$- f_A(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^* y_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* x_i - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* c_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k -$$

$$- \max_{\varphi \in A} \varphi(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^* y_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* x_i - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* c_k) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k -$$

$$- \varphi^*(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^* y_j + \sum_{j=1}^{l} \psi_i^* x_i - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* c_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k -$$

$$-(\varphi^*(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^* y_j) + \varphi^*(\sum_{i=1}^{l} \psi_i^* x_i) - \varphi^*(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* c_k)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* t_j + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*\varphi^*(y_j)-\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*\varphi^*(x_i)+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*\varphi^*(c_k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*(t_j-\varphi^*(y_j))+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*(p_i-\varphi^*(x_i))+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(d_k+\varphi^*(c_k))\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*(t_j-\varphi^*(y_j)+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(d_k+\varphi^*(c_k)))\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(d_k+\varphi^*(c_k))\le\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=$$

$$=\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)\cdot\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*=\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=$$

$$=\min_{\substack{\varphi(y_j)\ge t_j,\ j=\overline{1,n};\\ \varphi(x_i)=p_i,\ i=\overline{1,l};\\ \varphi\in A}}\max_{1\le k\le m}(\varphi(c_k)+d_k)\,. \tag{2.37}$$

З (2.37) випливає, що

$$\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*d_k-$$

$$-f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*t_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*p_i+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*d_k-$$

$$-\varphi^*(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{j=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*(t_j-\varphi^*(y_j)+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(d_k+\varphi^*(c_k)))$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(\varphi^*(c_k)+d_k)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k).$$

Звідси випливає, що

$$\varphi^*(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{j=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k)=$$

$$=f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k), \tag{2.38}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*(t_j-\varphi^*(y_j))=0, \tag{2.39}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(\varphi^*(c_k)+d_k)-\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k))=0\,. \tag{2.40}$$

З урахуванням того, що $\xi_j^*\ge 0$ та (2.36) з (2.39) одержимо:

$$\xi_j^*(t_j-\varphi^*(y_j))=0,\quad j=\overline{1,m}.$$

Оскільки $\gamma_k^*\ge 0$ і $\varphi^*(c_k)+d_k\le\max\limits_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k),\ k=\overline{1,m},$ з (2.40) одержимо

$$\gamma_k^*(\varphi^*(c_k)+d_k-\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k))=0,\ \ k=\overline{1,m}.$$

Отже, з умов (2.38) – (2.40) випливає

$$\varphi^*(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k)=$$

$$=f_A(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*y_j+\sum_{i=1}^{l}\psi_i^*x_i-\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*c_k),$$

$$\xi_j^*(t_j-\varphi^*(y_j))=0,\ j=\overline{1,m};$$

$$\gamma_k^*(\varphi^*(c_k)+d_k-\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k))=0,\ \ k=\overline{1,m}.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай функціонал φ^*- допустимий для задачі (1.1) – (1.4), $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)$ - допустимий для задачі 1.1) – 1.3) теореми.

Тоді з умови 1.3) одержимо, що

$$\gamma_k^*\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=\gamma_k^*(\varphi^*(c_k)+d_k),$$

$$\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(\varphi^*(c_k)+d_k);$$

$$\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(\varphi^*(c_k)+d_k).$$

Звідси та з урахуванням умов 1.1) – 1.2) одержимо:

$$\max_{1\le k\le m}(\varphi^*(c_k)+d_k)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*(\varphi^*(c_k)+d_k)=$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* (\varphi^*(c_k) + d_k) + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* (p_i - \varphi^*(x_i)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* (\varphi^*(c_k) + d_k) + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* (p_i - \varphi^*(x_i)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \xi_j^* (t_j - \varphi^*(y_j) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* \varphi^*(c_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i - \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* \varphi^*(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* t_j - \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* \varphi^*(y_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* t_j - (\sum_{i=1}^{l} \varphi^*(\psi_i^* x_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \varphi^*(\xi_j^* y_j) - \sum_{k=1}^{m} \varphi^*(\gamma_k^* c_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* t_j -$$

$$-(\varphi^*(\sum_{i=1}^{l} \psi_i^* x_i) + \varphi^*(\sum_{j=1}^{m} \xi_j^* y_j) - \varphi^*(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* c_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* t_j -$$

$$-\varphi^*(\sum_{i=1}^{l} \psi_i^* x_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* y_j - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* c_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* t_j -$$

$$- f_A(\sum_{i=1}^{l} \psi_i^* x_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* y_j - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* c_k). \tag{2.41}$$

З (2.41) одержимо, що для допустимого для задачі (1.1) – (1.4) функціоналу φ^*, допустимого для задачі (2.31) вектора $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)$ виконується рівність

$$\max_{1 \le k \le m} (\varphi^*(c_k) + d_k) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* d_k + \sum_{i=1}^{l} \psi_i^* p_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* t_j -$$

$$- f_A(\sum_{i=1}^{l} \psi_i^* x_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^* y_j - \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^* c_k).$$

Згідно з теоремою 2.3 φ^* є оптимальним розв'язком для задачі (1.1) – (1.4); $(\xi_1^*,...,\xi_n^*;\psi_1^*,...,\psi_l^*;\gamma_n^*,...,\gamma_m^*)$ - оптимальним розв'язком для задачі (2.31).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі розглядалась задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції при лінійних обмеженнях та додатковому обмеженню, що задається симетричною опуклою слабко* компактною множиною.

В роботі:

1. Встановлено, що множина допустимих розв'язків задачі (1.1) – (1.4) є опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*.

2. Показано, що функціонал $f_A(z) = \max_{\varphi \in A} \varphi(z)$, $z \in Y$, є сублінійним функціоналом, заданим на Y.

3. Для задачі (1.1) – (1.4) встановлено необхідні і достатні умови існування допустимих розв'язків у випадку, коли A є опуклою слабко* компактною множиною простору Y^*.

4. Для задачі (1.1) – (1.4) встановлено необхідні і достатні умови існування допустимих розв'язків у випадку, коли A є симетричною опуклою слабко* компактною множиною простору Y^* .

5. Розглянуто критерій існування допустимого розв'язку у випадку, коли $f_A(z) = \|z\|_A, z \in Y$.

6. Побудовано приєднану задачу до задачі (1.1) – (1.4) та встановлено зв'язок між оптимальним розв'язком цих задач.

7. Встановлено співвідношення двоїстості для задачі (1.1) – (1.4).

8. Встановлено критерії оптимальності допустимих розв'язків для задачі (1.1) – (1.4) та двоїстості до неї.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гнатюк В. О., Чікуркова Я. В. Співвідношення двоїстості для задачі мінімізації кусково-лінійної функції при обмеженнях, заданих системою лінійних рівнянь, та додатковому обмеженню на норми допустимих розв'язків. Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка: збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів. [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 21.С. 283-285.

2. Гудима У., Гнатюк В. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Ів. Огієнка, 2019. 112 с.

3. Дороговцев А. Математичний аналіз: підручник у двох частинах. Частина 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.

4. Дороговцев А. Математичний аналіз: підручник у двох частинах. Частина 2. Київ : Либідь, 1994. 304 с.

5. Думанська Т.В. , Каліта Н.А. Критерій оптимальності допустимих розв'язків для деякої задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції та двоїстої для неї, Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка : збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів. [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип. 22. С. 653-656.

6. Жалдак М., Триус Ю. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 305 с.

7. Каліта Н.А. Умови існування допустимих розв'язків для задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Випуск 15. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. С. 68-72.

8. Канторович Л., Акилов Г. Функциональный анализ. М : Наука, 1984. 752 с.

9. Лавров Є., Перхун Л., Шендрик В. 6. Математичні методи дослідження операцій. Суми : Сум. держ. ун-т, 2017. 212 с. С.43

10. Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация. Москва : Мир, 1975. 496 с.

11. Михайлевич В.М., Тютюнник О.І. Вища математика. Математичне програмування в Maple. Частина ІІ. Двоїсті та цілочислові задачі лінійного програмування: навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2013. 78 с.

12. Моклячук М. Основи опуклого аналізу. Навчальний посібник. Київ : Вид-во ТВіМС, 2004. 236 с.

13. Самсонов В. Алгоритми розв'язання задач оптимізації. Київ : НУХТ, 2014. 303 с.

14. Сікора Я. Методи оптимізації та дослідження операцій. Житомир : ЖДУ ім. Ів. Франка, 2019. 148 с.

15. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе. Бесконечные антагонистические игры. М : Физматгиз, 1963. С. 31-39.