Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ, ОБ’ЄМІВ ТА ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 11 КЛАСУ НА РІВНІ СТАНДАРТУ»**

Виконала: студентка 2 курсу ступеня вищої освіти магістр, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Швачій Діана Юріївна

Керівник: **Теплінський Ю.В.**, доктор фізико-математичних наук, професор

Рецензент: **Моцик Р.В.**, кандидат педагогічних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Упровадження у старшу школу рівневого навчання передбачає оновлення змісту навчання істворення відповідних засобів навчання. І перші кроки вже зроблено: затверджені нові програми, з’явились нові підручники. Створення повноцінного навчально-методичного забезпечення профільного навчання є актуальною проблемою сучасної освіти.

Планування освіти є одним із найважливіших її рівнів. Системний підхід до планування навчання з предмета передбачає ієрархію планувань: загальне, тематичне, модульне, блочне, поурочнепланування тощо. Важливо при цьому забезпечити наступність навсіх етапах планування.

Загальновідомо, що навчання математики, як і решти навчальних дисциплін, має дві основні функції: загальноосвітню і професійно-орієнтуючу. Це повністю відповідає гуманістичній парадигмі в освіті. Згідно з нею головною метою навчання є становлення особистості, її розвиток, соціалізація ісамовизначення, зокрема професійне. Ці стратегічні цілі івизначають згадані функції. Забезпечення їхньої гармонійної реалізації іє головним завданнямнавчання. Впровадження диференціації навчання як рівневої, такіпрофільної, є одним із головних засобів узгодження цих функцій.

Реалізація зазначених функцій залежить від вікових особливостей учнів. Не викликає сумнівів, що в основній школі, а тим більш у початковій, пріоритетною у навчанні математики є загальноосвітня функція. Для старшої школи співвідношення значущості цих функцій залежить насамперед від рівня навчання. Власне, це і є головною характеристикою рівня навчання.

Розвиток просторового мисленнями учнів відбувається в процесі навчання. Як відомо, якнайповніше просторові властивості і відношення досліджуються в математиці. З однієї сторони, розвиток просторового мислення школярів є необхідним для розвитку у них здібностей до уявлення із другої – це необхідна умова для свідомого засвоєння курсу стереометрії. Формування просторового мислення є одним із найважливіших завданьгеометрії.

У зв’язку з впровадженням нової системи освіти у старших класах розпочинаючи з 2000 років Міністерство освіти розробило нові навчальні плани і програми. Згідно з цим вивчення математики диференційоване за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним рівнем, профільним рівнем, рівнем поглибленого вивчення математики. Учні закладів загальної середньої освіти, в яких ще не визначилися зі спеціалізацією, вивчатимуть математику на академічному рівні.

Кожному з цих рівнів відповідає певна навчальна програма, а також підручники. Вчителі математики у старших класах орієнтуються на нові підручники, затверджені Міністерством освіти і науки України, але для успішного навчання математики потрібна ще й методологічна спрямованість на відповідний рівень вивчення предмету.

Незважаючи на наявність значної кількості публікацій, окремих суджень, в яких у тій чи іншій мірі розглядалась проблема рівневої диференціації по темах, необхідно зазначити, що, по-перше, ця проблема залишається досі не розв’язаною, а, по-друге, існуючі математичні системи не задовольняють сучасне чотирьох рівневе навчання. Те ж саме можна сказати і про дидактичні матеріали, які має в своєму розпорядженні учитель на даний час. Все це зумовило вибір теми нашого дослідження «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл в курсі математики 11 класу на рівні стандарту». В цих підручниках міститься теоретичний матеріал курсу, а також задачі для його закріплення. Кожен з авторів виклав матеріал згідно зі своїм баченням та розумінням. Методичні ж матеріали, які розроблені на сьогоднішній день не в повній мірі дозволяють реалізувати високу продуктивність викладу матеріалу. Методика застаріла, отже виникає потреба розробити нову.

У шкільному курсі геометрії геометричні тіла займають особливе місце. Саме вивчення цієї теми повинно наштовхнути учнів на просторове мислення, позвивати в учнів просторову уяву, допомогти встановленню кількісних відношень між просторовими об’єктами. Коли як на під час вивчення цієї теми учень стикається з об’єктами, інтерпретацію яких він може бачити у повсякденному житті. Дітям завжди цікава ця тема, вони навіть самі наводять приклади відповідних предметів повсякденного вжитку, які мають форму вивченого геометричного тіла. До того ж ця тема підсумовує знання з вивчених раніше тем з планіметрії та стереометрії.

Цей тісний взаємозв’язок з минулим має особливе значення у методичному відношенні.

Аналіз психолого-педагогічної літератури показав, що диференціація навчання, як загальна педагогічна задача не є новою ні для нашої, ні для закордонної школи. Необхідно відзначити, що проблеми рівневої диференціації навчання висвітлювали відомі дидакти та методисти: Бевз Г.П., Бурда М.І., Дубовик В.П., Сікорський П.І., Сісецький П.П., Слєпкань З.І. інші.

Проте не дивлячись на велику кількість робіт про диференціацію навчання, ця актуальна проблема залишається мало розробленою.

Виходячи з праць вище згаданих авторів, можна говорити про те, що існуючі методичні системи не задовольняють сучасну чотирьохрівневу диференціацію навчання у старшій школі зокрема і стосовно теми «Геометричні тіла». Все це зумовило вибір теми дослідження «Методика вивчення геометричних тіл, об’ємів та площ поверхонь в курсі математики 11 класу на рівні стандарту».

Об’єктом дослідження є процес навчання математики.

Предметом дослідження є методика вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» в курсі математики 11 класу на рівні стандарту.

Мета дослідження полягає в тому, щоб розробити методику вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» у закладах загальної середньої освіти, де вивчають математику на рівні стандарту, розробити систему вправ та дидактичних матеріалів.

Для досягнення мети було розв’язано такі завдання:

– З’ясовано значення досліджуваної теми в курсі стереометрії;
– Визначено, в якій мірі психолого-методична, дидактична література, підручники з математики задовольняють чотирьохрівневе навчання з досліджуваної теми;
– Розроблено методику вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл»;
– Експериментально перевірено ефективність досліджуваної методики.

Експериментальна перевірка розробленої методики проводилась у міста Кам’янця-Подільського. Результати дослідження доповідались на звітній науковій конференції студентів магістрантів Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка 2023 року.

РОЗДІЛ І. АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРИ ПО ТЕМІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Дидактична суть рівня стандарту змісту освіти

Для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв’язання практичних задач. Певної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає і вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи. Значні вимоги до володіння математикою у розв’язанні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах. Тому одним з головних завдань цього курсу є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності.

Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об’єктів, процесів і явищ, задач, пов’язаних з ними, за допомогою математичних об’єктів, відповідних математичних задач;
- вміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв’язання задачі; переформульовувати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв’язки між ними, складати план розв’язання задачі; вибирати засоби розв’язання задачі, їх порівнювати і застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв’язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв’язання задачі;
- володіє технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені;
- вміє проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі;

- вміє працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші і т. п.);
- вміє читати і будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості;
- вміє класифікувати і конструювати геометричні фігури на площині й упросторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та їх елементи, виконувати побудови на зображеннях;
- вміє вимірювати геометричні величини на площині й упросторі, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми);
- вміє оцінювати шанси настання тих чи інших подій, міру ризику при прийнятті того чи іншого рішення, вибирати оптимальне рішення.

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою. Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема.

Реалізація у навчанні прикладної спрямованості навчання математики означає:

1) створення запасу математичних моделей, які описують реальні

явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;

2) формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей;

3) навчання учнів побудові і дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів.

Прикладна спрямованість математичної освіти суттєво підвищується завдяки впровадженню комп'ютерів у навчання математики, повноцінному введенню ймовірносно-статистичної змістової лінії у шкільний курс математики.

Одним із найважливіших засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання математики є встановлення природних міжпредметних зв'язків математики з іншими предметами, у першу чергу, з природничими. Особливої уваги заслуговує встановлення тісних, взаємовигідних зв'язків між математикою та інформатикою – двома освітніми галузями, які є визначальними у підготовці особистості до життя у постіндустріальному, інформаційному суспільстві. Широке застосування комп'ютерів у навчанні математики доцільне для проведення математичних експериментів, практичних занять, інформаційного забезпечення, візуального інтерпретування математичної діяльності, проведення досліджень.

Програма передбачає побудову курсу математики на засадах застосування методу математичного моделювання. Тому цілком природно, що програма містить вступ до курсу, який присвячено цьому методу.

Програма передбачає як сумісне, так і роздільне вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу. Перший підхід в умовах вивчення предмету на рівні стандарту має певні переваги у порівнянні з розподілом курсу “Математика” на два курси “Геометрія” і “Алгебра і початки аналізу”. Він дозволяє забезпечити цілісність навчання математики, можливість концентрації навчальної діяльності на певному відрізку часу навколо невеликої кількості понять і фактів, оптимально розподілити час на вивчення окремих тем з врахуванням особливостей контингенту учнів, забезпечити природні внутрішні і міжпредметні зв'язки тощо. Такий підхід особливо важливий в умовах загальнокультурної спрямованості навчання математики. Другий підхід запобігає великим перервам у вивченні окремих предметів.

У темі "Геометричні тіла. Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл" розглядаються основні види геометричних тіл та їхні властивості. Вона є центральною у стереометричній підготовці учнів. При вивченні даної теми дуже важливим є підхід, що передбачає формування навичок конструювання і класифікації тіл та їх поверхонь. Такий підхід вимагає використання конструктивних означень. Конструктивні означення дозволяють встановити спільність між призмами і циліндрами, пірамідами та конусами. Паралельне розглядання зазначених груп тіл дає перевагу при вивченні їхніх властивостей.

У процесі вивчення теми повинні бути розглянуті різні методи обчислення об'ємів і площ поверхонь. Особливу увагу необхідно приділити методу розбиття, який має велике практичне значення. Використання аналогії між вимірюваннями площ плоских фігур і об'ємів сприятиме засвоєнню матеріалу учнями. При вивченні площ поверхонь тіл доцільно широко користуватись природною та важливою з практичної точки зору ідеєю розгортки.

Таким чином, послідовність тем – головних структурних елементів навчального матеріалу курсу "Математика" – забезпечує розгляд усіх змістових ліній курсу у відповідності до Державного стандарту, створює умови для реалізації рівневої диференціації навчання. Навчальний процес у старшій школі потребує і робить можливим використання специфічних форм та методів навчання. Можливість їх використання зумовлена віковими особливостями старшокласників, набутими в основній школі навичками самостійної роботи, рівнем розвинення загальнонавчальних і пізнавальних видів діяльності. У старших класах може широко застосовуватися лекційно-семінарська форма проведення занять, причому не час від часу, а досить регулярно. Реалізація рівневої диференціації на практичних заняттях є однією з головних умов ефективності навчання. Особливістю практичних занять має бути постійне залучення учнів до самостійної роботи. Доцільно спільно обговорити ідею та алгоритм розв'язання певного класу задач. Після цього кожен учень може виконувати запропоновану систему вправ, спілкуючись із вчителем.

Важливе місце в організації навчання математики повинно посісти вдосконалення, у порівнянні з основною школою, системи самостійної роботи учнів. Формуванню відповідних мотивів до самостійної роботи сприяє застосування завдань на рисунках, контрольних запитань, зокрема прикладного характеру, домашніх контрольних робіт по дослідженню конкретних класів функцій, геометричних конструкцій. Важливим засобом навчання можуть стати контрольні запитання і тестові завдання, які спрямовані не на відтворення означень, фактів, формул, а на з'ясування елементів та структури означень математичних об'єктів; їх місця в системі інших понять; операцій, які можна виконувати з об'єктом; його особливостей та властивостей; окремих винятків та тонкощів. Подібні контрольні запитання стимулюють продуктивне мислення учнів, сприяють неформальному засвоєнню теоретичного матеріалу, формують навички порівняння, класифікації, узагальнення, застосування математичних понять і об'єктів.

Обов'язковим елементом технології навчання має бути постійна діагностика навчальних досягнень учнів. Вивчення кожної теми слід починати з виконання діагностичної роботи, що дає змогу встановити залишковий рівень володіння матеріалом попередньої теми. За результатами діагностичної роботи виявляються прогалини у підготовці учня, його досягнення, що допомагає спрямувати зусилля його та викладача на поліпшення стану справ.

Значне місце у технології навчання повинен посідати тематичний контроль навчальних досягнень як засіб управління навчальним процесом.

До кожної теми система контролю може складатися з тематичної контрольної роботи, яка, як правило, має сюжетний характер, специфічного навчально-контролюючого засобу – теоретичної контрольної роботи, виконання тесту.

Обов'язковим елементом навчання повинно стати індивідуальне завдання з теми. Його варто пропонувати на завершальному етапі вивчення теми для самостійного опрацювання після всіх контролюючих заходів. Мета завдання – охопити матеріал теми в цілому, привернути увагу до головного, дати додаткові приклади і пояснення окремих складних моментів, підкреслити особливості й тонкощі, переконати учнів у можливості розв'язання задач основних типів. Індивідуальні завдання перевіряються, оцінюються вчителем та захищаються учнем.

Варто планувати виконання індивідуальних завдань, які передбачають ознайомлення як з розвитком математики в історичному аспекті (наприклад, з теми "Скільки існує геометрій?") так і змістовних ("Перспектива", "Математика і соціологія").

Одним із ефективних засобів удосконалення навчання взагалі, в старшій школі в особливості, є модульне проектування навчального процесу, яке передбачає, що одиницею виміру навчального процесу є не урок, а певна сукупність уроків, яка охоплює логічно пов'язаний блок навчальних питань теми.

Рівень стандарту передбачає, насамперед, оволодіння загальною математичною культурою, вироблення так званого математичного стилю мислення, тобто вміння класифікувати об'єкти, вміння встановлювати закономірності, виявляти зв'язки між різними явищами, вміння приймати рішення тощо.

1.2. Аналіз психологічної, дидактичної, методичної літератури по темі

Досліджувана тема характерна тим, що в результаті її вивчення в учнів повинна бути добре розвинута просторова уява. Допомогти у її формуванні зможе застосування інтерактивних технологій під час пояснення нового матеріалу.

Є досить багато робіт, присвячених питанням розвитку просторового мислення при навчанні математики. Велику увагу проблемі розвитку просторового мислення учнів під час навчання математики та інших предметів приділялася в дослідженнях з методики математики 1950-70-х років. Кожен з дослідників пропонував новий погляд на розглянуту проблему, тим самим, розширюючи і поглиблюючи її створенням нової системи завдань, які швидше покращували вміння учнів робити розрахунки та розвивали в них логічне мислення, курс вивчення тем «Многогранники» та «Тіла обертання» будувався здебільшого на дедуктивній основі. Результати досліджень були впроваджені в педагогічну практику і успішно використовувалися вчителями. Однак посилення логічною складовою курсу геометрії, прагнення побудувати курс на строго дедуктивній основі призвело до того, що проблема розвитку просторового мислення відійшла на дальній план, що негативно позначилося на результатах навчання геометрії і, в першу чергу, стереометрії.

Паралельно до проблеми розвитку просторового мислення у старшокласників слід розглядати проблему нової диференціації системи навчання математики, адже у зв’язку з цим змінюється навчальна програма і виникає потреба розробки методичних матеріалів.

Теоретично обґрунтована і експериментально перевірена методична система диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії, автором якої є Ю.Л.Сморжевський. Т. Дейниченко виявив деякі особливості диференціації навчального матеріалу по в умовах групової взаємодії школярів. Досліджувала використання багаторівневих завдань при організації диференційованого контролю навчальних досягнень учнів І.П. Упанова. Диференційованому підходу до навчання комп'ютерних технологій у ВНЗ присвячені роботи Шугайло Г.В. та Красюк О.М.

Проте не дивлячись на велику кількість робіт про диференціацію, ця актуальна проблема залишається мало розробленою.

Виходячи з праць вище згаданих авторів, можна говорити про те, що існуючі методичні системи не задовольняють сучасну чотирьохрівневу диференціацію навчання у старшій школі зокрема і стосовно теми «Геометричні тіла».

Проблема розумової діяльності при вивченні тем «Многогранники» та «Тіла обертання» беззаперечно є доцільною, адже саме при вивченні цих тем удітей формується просторова уява, вони повинні осягнути усі властивості, просторові форми, кількісні відношення між основними елементами просторових тіл.

Вивчення даної теми потребує розв'язанню цілої низки завдань **та** задач. У багатьох психологічних дослідженнях розглядаються питання структури, змісту задач, їх типології. Вони пропонували розділити задачі по рівнях, при розв'язуванні перших задач з відповідних тем пропонувалося використовувати готові ілюстрації, надалі ж учні будували малюнки до задач самостійно.

Чимало психологів писали про розвиток просторової уяви у школярів і в результаті ми маємо цілу схему психологічних прийомів для розвитку просторового мислення. В основу цієї схеми покладена ідея розвитку просторової уяви в учнів шляхом розв'язання задач з геометрії, які провокували розширення просторових об'єктів, але перед побудовою цих об'єктів на дошці учні уявляють і усно описують з точністю до деталей.

Проглянувши дидактичну літературу, яка стосується розвитку просторової уяви в учнів старших класів я дізналася багато цікавого про те, як ліпше покращити якість навчання досліджуваних тем на уроках геометрії в 11класі. Автори деяких посібників пропонують виготовляти паперові моделі просторових фігур і таким чином покращити формування просторової уяви у старшокласників. Вони пропонують створювати цілі гуртки з таким напрямком.

Висновок: Аналіз психолого-дидактичної та методичної літератури показав, що як проблема розвитку просторового мислення у учнів старших класів не є новою ні для наших, ні для закордонних науковців. Розроблені ідеї психологів та дидактів можна використовувати для навчання математики, але їх потрібно правильно підлаштувати під нову чотирьох рівневу диференціацію навчання. Потрібно розробити нову методику.

1.3. Аналіз викладу даного матеріалу в діючих підручниках

Геометрія в 11 класі повинна формувати у дітей просторову уяву, повинна навчати дітей сприймати світ оцінюючи просторові форми і відношення між ними.

Щороку Міністерство освіти і науки України затверджує перелік підручників для використання в навчальному процесі, зокрема для вивчення геометрії в 11 класі це підручник [21].

Підручник «Математика. 11 клас» є продовженням підручника «Математика. 10 клас» для старшої школи, де навчання математики здійснюється за програмою рівня стандарту. Зміст підручника і послідовність викладення матеріалу повністю відповідають цій програмі. Відповідно до кількості тем, що вивчаються в 11-му класі, підручник містить сім розділів, які поділено на параграфи, а деякі з них і на пункти.

Особливості навчання за рівнем стандарту викладено у роботі [21]. Стисло нагадаємо їх.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання, спрямованого на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальнолюдської культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи будуть широко застосовувати математику або пов'язуватимуть з нею свою професійну діяльність. У той самий час слід зауважити, що навчання математики на рівні стандарту не означає, що воно є якимось неповноцінним, урізаним. Цей рівень має забезпечити повноцінний розвиток когнітивної й афективної сфер учнів засобами математики, створити умови для опанування кожним учнем математичної грамотності. З двох основних функцій навчання математики у старшій школі – загальноосвітньої і професійно орієнтуючої – на рівні стандарту навчання математики головною є загальноосвітня функція. Цей рівень навчання повинен насамперед сприяти становленню гуманітарної культури людини, формувати уявлення про математику як форму опису та метод пізнання дійсності та про її роль для прогресу суспільства. Він має будуватися на основі широкого використання можливостей образного мислення учнів. Цей рівень навчання прийнятний для багатьох профілів суспільно-гуманітарного, філологічного, художньо-естетичного, спортивного напрямів, для деяких профілів технологічного напряму.

Як відомо, удругій половині 2010 р. у зв'язку з переходом на 11-річний термін навчання були суттєво перероблені навчальні плани і програми, зокрема програма з математики. Згідно з цими нормативними документами, на курс математики на рівні стандарту було виділено в 11-му класі 3 год на тиждень, як і попередніми документами, але передбачається розглянути майже всі теми колишньої програми 11–12-х класів (за винятком теми «Рівняння, нерівності, системи», яка призначалась для повторення та систематизації матеріалу однієї із змістових ліній курсу). Ці зміни мали знайти відображення у підручнику і мають реалізовуватись у практиці навчання. Ці зміни зумовлюють:

- ретельний відбір навчального матеріалу, який можна засвоїти за суттєво зменшений час;
- широке використання прийомів обґрунтування тверджень, які ґрунтуються на застосуванні аналогії, фізичних міркувань, ілюстрацій, прикладів тощо;
- зниження складності задач, зменшення уваги до громіздких перетворень, нестандартних прийомів розв'язання рівнянь, нерівностей, їхніх систем, дослідження функцій, ускладнених геометричних конструкцій. Разом з тим, це не означає можливості вилучити якийсь навчальний матеріал, передбачений програмою (за винятком тих навчальних питань, які програмою зазначені як необов'язкові, наприклад, похідна складеної функції, розміщення, перестановки, комбінації тощо), переходу до рецептурного стилю викладення і навчання, створення та використання системи задач, в якій були б відсутні важливі для розвитку та навчання учнів типи завдань.

Як і у попередньому підручнику, автори намагались реалізувати у книзі різні рівні й прийоми обґрунтування фактів, тверджень:

• рівень здорового глузду (на це спрямовані численні приклади, порівняння);

• «прикладний» рівень обґрунтування (наприклад, чисельні експерименти, використання фізичних уявлень);

• наочно-інтуїтивний рівень (використання геометричних ілюстрацій, звернення до образів);

• правдоподібні міркування (використання замість доведення прикладу або окремого випадку, в якому фактично використовується ідея строгого доведення);

• і, звичайно, формально-логічний рівень.

Відмінність полягає в тому, що, можливо, у деяких випадках зменшилося застосування формально-логічного рівня обґрунтувань.

Дидактичні особливості підручника «Математика. 11 клас» залишилися тими самими, що і особливості його попередника. Вони викладені в [2], відповідають сучасним вимогам до підручників, представленим у [5]. Стисло нагадаємо їх.

Підручник з математики, розрахований на програму рівня стандарту, має забезпечити загальнокультурне спрямування навчання. Це стосується усіх складових навчального матеріалу: означень, тверджень, засобів їх обґрунтування, системи задач, контрольних запитань тощо.

Збережено структуризацію кожного навчального модуля, яка відповідає психолого-педагогічним закономірностям засвоєння навчального матеріалу. Матеріал кожного навчального модуля розбито на дві частини, які позначені літерами Б, О і знаками – сходинками. Ці позначення є смисловими, вони відображають складність навчального матеріалу, його значущість і етап проходження.

У частині, позначеній літерою Б і знаком (перша сходинка), подано практично весь головний теоретичний матеріал (поняття, твердження) навчального модуля, який супроводжується ілюстраціями, певними обґрунтуваннями, прикладами відповідного рівня. Головне призначення цієї частини є забезпечення фундаменту для продовження вивчення навчального модуля з врахуванням різних можливостей і потреб учнів. Таким чином, у цій частині забезпечується перший етап оволодіння навчальним матеріалом. Тому ця частина позначається першою сходинкою. Літера Б є символічним образом поняття бази (фундаменту). Йдеться про створення бази для засвоєння змісту навчального матеріалу. Необхідність такого етапу обґрунтовується психолого-педагогічними дослідженнями процесу навчання. Вони відображені у багатьох сучасних технологіях навчання. Головною функцією цього етапу є орієнтаційна.

У частині, позначеній буквою О і знаком (друга сходинка), завершується подання навчального матеріалу різними способами:

1) поглибленням обґрунтувань, наведених у попередній частині, тобто проведенням строгих доведень, наскільки це можливо на рівні стандарту;

2) розширенням змісту за рахунок понять, тверджень, задач, які не відіграють першорядної ролі і спрямовані на поглиблене сприйняття навчального матеріалу частини Б;

3) розглядом більш складних, у порівнянні з першою частиною, прикладів застосувань навчального матеріалу.

Літера О є символічним образом поняття «основа» і має природне змістове навантаження. У цій частині забезпечується готовність розв’язувати увесь спектр передбачених програмою задач. Тим самим закладається основа для продовження навчання.

Структура викладення матеріалу переважно уніфікована. Означення основних понять виділено синім кольором, курсивом, формулювання тверджень – напівжирним прямим шрифтом. Важливі зауваження позначено спеціальним знаком, який нагадує правила дорожнього руху.

Кожний розділ починається з невеликого вступу, який містить мету його вивчення, можливість застосування матеріалу, що буде вивчатись як у самій математиці, так і поза нею, перелік головних навчальних питань розділу. Кожний параграф розпочинається зі стислого представлення його змісту.

Кожний розділ книги містить підрозділ «Готуємось до вивчення теми», який передбачає повторення матеріалу, що вивчався в попередніх класах і необхідний для вивчення нового матеріалу. Його наведено у вигляді таблиць. Наявність такого матеріалу пов’язана з тим, що учні, як правило, не мають підручників з попередніх класів. У цьому підрозділі є також тест для діагностики готовності до вивчення теми.

Кожний пункт (параграф) складається з теоретичної частини, викладеної, як ми зазначали, на двох рівнях, розв’язаних прикладів і задач (у геометричній частині). Початок і кінець доведень тверджень, і розв’язань прикладів (задач) позначено знаками **і**. Якщо приклади спрямовані на засвоєння введених понять, викладених тверджень, на застосування теоретичного матеріалу до розв’язування задач, то задачі, як правило, містять у собі доведення тверджень, які у подальшому застосовуються при розв’язанні задач. Кожний пункт завершується контрольними запитаннями з широким діапазоном дидактичних функцій: активізації пізнавальної діяльності, діагностики засвоєння, способу засвоєння, контролю за засвоєнням тощо. Вони розраховані на активне та свідоме засвоєння матеріалу і мають різний рівень складності. Контрольні запитання спрямовані не на формальне повторення означень чи формулювання теорем, а на з’ясування змісту основних понять і фактів, на відпрацювання їхніх характеристичних властивостей. Вони можуть використовуватись і для активізації діяльності учнів на різних етапах занять, і при актуалізації опорних знань, і при вивченні нових понять, фактів, методів, і при закріпленні нового матеріалу, і при систематизації вивченого матеріалу тощо. Контрольні запитання мають характер невеличких вправ, які анатомують поняття, твердження, звертають увагу на прикладну спрямованість, дозволяють зазирнути вперед, побачити перспективу розвитку теми. Викладення теоретичного матеріалу супроводжується тлумаченням термінів, введених у пункті, або параграфі.

Наприкінці кожного параграфа наводяться задачі. Вони призначені як для роботи в класі (фронтальної та самостійної), так і для домашньої роботи. Система задач також має різні функції, а саме: відпрацьовування навчального матеріалу, його застосування, зокрема до розв'язання прикладних задач. Основу задачного фонду складають «сюжетні» задачі, де до деякої функції, виразу, рівняння, нерівності, геометричної фігури чи конструкції наведено низку взаємопов'язаних завдань. Такі задачі дозволяють виявити властивості об'єктів, економно розпорядитись часом, формувати дослідницькі навички учнів. Вони привчають розглядати об'єкт з різних позицій, використовувати отримані результати у подальшому, поєднувати результати різних видів діяльності. Розв'язання сюжетних задач сприяє цілеспрямованому розвитку аналітичних і синтетичних видів діяльності. Задачі диференційовані за рівнем складності. Задачі базового рівня позначені кружечком °, задачі наступного рівня складності, який відповідає, в головному, достатньому рівню навчання, не позначені ніяким знаком, задачі підвищеного рівня позначені зірочкою *. Система задач до кожного параграфа розподілена за допомогою спеціального знака на групи за різними ознаками: характером вимог до задач, видом об'єктів, що розглядаються, тощо. Завершується система задач набором вправ для повторення, що мають за мету сприяння готовності до опанування наступним матеріалом, збереження вмінь і навичок, сформованих при вивченні попередніх розділів. У геометричній частині підручника окремо виділені графічні вправи, які складаються із завдань на готових рисунках і завдань, де потрібно зобразити геометричну конфігурацію, яка задовольняє певні вимоги.

Кожен параграф завершується невеликим підсумком основних понять і тверджень, що розглядалися у цьому параграфі. Вони супроводжуються ілюстраціями, коментарями, наведенням можливих застосувань.

Завершується кожний розділ підрозділами «Готуємось до тематичного оцінювання з теми», «Таблиці для систематизації матеріалу розділу», «Історичний коментар». Перший з них містить завдання для самоконтролю з відповідями до них, зразок тематичної контрольної роботи. Другий складається з таблиць, що містять головний матеріал, який вивчався у розділі. Їх можна використати для систематизації вивченого матеріалу. Вони не дублюють викладене у розділі, а дають змогу поглянути на вивчений матеріал з узагальненої точки зору. У «Історичних коментарях» зроблено спробу прослідкувати за розвитком математичних ідей, які розглядаються у відповідних розділах.

Підручник містить предметний покажчик, а у підрозділі «Відповіді і вказівки до задач» наведено відповіді майже до всіх завдань і численні вказівки до їх розв'язання.

Як і в попередньому підручнику, автори намагались, щоб він забезпечував можливість повноцінної реалізації прикладної спрямованості навчання, зокрема, оволодіння прийомами математичного моделювання на загальнокультурному рівні. У підручнику математичне моделювання є одним з головних прийомів розгляду навчального матеріалу як на теоретичному, так і на практичному рівнях. Цей прийом широко застосовується при формуванні понять, розгляді тверджень, що створює передумови для його застосування при розв'язанні прикладних задач, які складають значну частину задачного фонду.

У підручнику широко використовується стиль, характерний для прикладних досліджень. Звернення до життєвого досвіду, інтуїції, здорового глузду, проведення експериментів, обґрунтування на рівні фізичних моделей тощо – це далеко не повна характеристика цього стилю.

Структура підручника дає змогу проводити вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу як сумісне, так і роздільне, як це і передбачається програмою. Перший підхід в умовах вивчення предмета «Математика» на рівні стандарту має певні переваги у порівнянні з розподілом його на два курси «Геометрія» та «Алгебра і початки аналізу». Він дає змогу забезпечити цілісність навчання математики, можливість концентрації навчальної діяльності на певному відрізку часу навколо невеликої кількості понять і фактів, оптимально розподілити час на вивчення окремих тем з урахуванням особливостей контингенту учнів, забезпечити природні внутришні і міжпредметні зв'язки тощо. Такий підхід особливо важливий в умовах загальнокультурної спрямованості навчання математики. Другий підхід запобігає великим вимушеним перервам у вивченні окремих предметів.

Розглянемо особливості викладення у підручнику окремих тем.

У розділі «Геометричні тіла і поверхні» розглядаються основні види геометричних тіл та їхні властивості. Вона є центральною у стереометричній підготовці учнів. При вивченні даної теми дуже важливим є підхід, що передбачає формування навичок конструювання і класифікації тіл та їх поверхонь. Такий підхід вимагає використання конструктивних означень. Конструктивні означення дозволяють встановити спільність між призмами і циліндрами, пірамідами та конусами. Паралельний розгляд зазначених груп тіл дає перевагу при вивченні їхніх властивостей, а також у подальшому при знаходженні об'ємів тіл і площ їх поверхонь. Такий підхід має неабияке значення для формування геометричного мислення учнів. При викладенні даної теми постійна увага приділялась побудові зображень тіл. Необхідні для цього вміння побудови зображень плоских тіл закладалися при вивченні тем «Паралельність прямих і площин у просторі» і «Перпендикулярність прямих і площин у просторі». У даній темі даються конкретні пояснення щодо побудови зображень конкретних видів тіл. Побудова зображень і виконання побудов на зображеннях відіграє центральну роль у розвиненні просторового мислення учнів.

У підручнику особлива увага приділяється побудові перерізів геометричних тіл. Вони сприяють розвитку просторових уявлень учнів, засвоєнню властивостей тіл. Автори намагались, щоб учні набули досвіду використання загальних методів дослідження властивостей тіл. Одним із таких загальних методів є метод перерізів. Використовуючи перерізи тіла, ми досліджуємо його внутрішню структуру. Розгляд різноманітних перерізів даного тіла дає багато інформації про його будову і властивості. Крім цього, побудова перерізів часто дає змогу зводити розв’язання просторових задач до планіметричних. Поняття симетрії в геометрії відноситься до вузлових. Тому звертання до нього у підручнику є постійним при вивченні тіл. Наявність симетрій у фігури спрощує вивчення її властивостей та розв’язання задач, пов’язаних з цією фігурою.

Введення нових просторових фігур у підручнику супроводжується розглядом достатньої кількості та якості фізичних об’єктів, які природно моделюються цими фігурами, пошуком таких об’єктів у навколишньому середовищі, «матеріальному» конструюванню цих фігур різними засобами.

У розділі «Об’єми і площі поверхонь геометричних тіл» завершується вивчення учнями в школі геометрії простору. Незважаючи на те, що класичні формули обчислення об’ємів і площ поверхонь були вже відомі дравньогрецьким ученим, для їх повноцінного обґрунтування знадобилось практично два тисячоліття. І це цілком зрозуміло. Поки не вдавалось формалізувати ідеї граничного переходу, твердження стосовно вимірювання величин не мали відповідного підґрунтя. У підручнику розглядаються різні методи обчислення об’ємів і площ поверхонь. Особлива увага приділена методу розбиття, який має велике практичне значення. Його суть полягає у поділі тіла на частини, об’єми яких легко знайти і з яких можна скласти тіло відомого об’єму. Метод вичерпування та застосування інтеграла в даній темі передбачає володіння відповідними ідеями і поняттями. Широко використовується аналогія між вимірюваннями площ плоских фігур і об’ємів, що сприяє засвоєнню матеріалу учнями. При вивченні площ поверхонь тіл широко використовується природна та важлива з практичної точки зору ідея розгортки.

Багато методичних проблем виникає при розгляді поняття площі поверхні тіла. Труднощі тут пов’язані з відсутністю досить простого означення, яке б охоплювало всі основні види «викривлених» поверхонь — циліндричну, конічну і сферичну.

Загальне означення площі поверхні, яке ґрунтується на понятті об’єму і яке було запропоноване Г. Мінковським на початок XX ст., потребує певного досвіду і певної готовності як вчителів, так і учнів. Тому у підручнику обчислення площі поверхонь циліндра і конуса зводиться до обчислення площі їх розгорток. Можливість такого розгортання спирається на практичний досвід учнів, їхні просторові уявлення і, безумовно, не може бути обґрунтована на високому рівні строгості.

Означення площі поверхні за Г. Мінковським у підручнику наведено наприкінці розділу. Воно забезпечує досить просте виведення формули дляобчислення площі поверхні сфери, а також може використовуватись для посилення обґрунтованості понять площі поверхні циліндра і конуса.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА, ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ»

Згідно з навчальною програмою для 11 класу рівня стандарт вивчення математики на вивчення теми «Геометричні тіла. Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл» виділяють 37 годин. Протягом цього часу учні:

- розпізнають основні геометричні тіла, їхні елементи;
- будують зображення основних видів геометричних тіл, їх елементів, перерізів;
- обчислюють основні елементи найпростіших геометричних тіл;
- встановлюють властивості геометричних фігур;
- застосовують геометричні тіла для моделювання геометричних тіл;
- обчислюють з необхідною точністю об’єми та площі поверхонь геометричних тіл, використовуючи: основні формули; розбиття тіл на найпростіші;
- вимірюють параметри реальних тіл та їх фізичних моделей.

Наведемо фрагмент календарного плану для геометрії 11 класу:

Тема 4. Геометричні тіла. Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл(37 год)				
№	Тема уроку	Дата	Д/з	Примітка
11	Циліндри і призми			
12	Циліндри і призми			
13	Циліндри і призми			
14	Конуси і піраміди			
15	Деякі види пірамід			
16	Піраміди і конуси			
17	Зрізана піраміда і зрізаний			
18	Правильні многогранники			
19	*Контрольна робота № 2*			
20	Куля, сфера. Площина, дотична			
21	Куля і сфера			
22	Куля і сфера. тіла обертання			
23	Комбінації геометричних тіл			
№	Тема уроку	Дата	Д/з	Примітка

24	Комбінації геометричних тіл			
25	Комбінації геометричних тіл			
26	*Контрольна робота № 3*			
27	Площа поверхні призми			
28	Площа поверхні призми			
29	Площа поверхні піраміди			
30	Площа поверхні піраміди			
31	Площі поверхонь			
32	Площа поверхні циліндра			
33	Площа поверхні конуса			
34	Площа поверхні сфери			
35	*Контрольна робота № 4*			
36	Об'єм призми і циліндра			
37	Об'єми призми і			
38	Об'єм циліндра			
39	Об'єм призми і циліндра			
40	Об'єм конуса і піраміди			
41	Об'єм піраміди			
42	Об'єм конуса			
43	Об'єм конуса і піраміди			
44	Об'єм кулі			
45	Об'єми тіл обертання			
46	Об'єми тіл			
47	*Контрольна робота № 5*			
46* (1)	Об'єми геометричних тіл і площі їхніх поверхонь			
46* (2)	Розв'язування задач прикладного характеру із застосуванням формул об'ємів			

Розглянемо методику вивчення тем: «Циліндр і призма», «Конус і піраміда», «Куля і сфера», орієнтуючись на підручник [21].

2.1. Методика вивчення теми «Циліндр і призма»

Мета уроку: узагальнити й систематизувати знання учнів про призму й циліндр та їхні елементи; формувати вміння знаходити елементи призми і циліндра; розвивати просторову уяву, пам'ять, увагу, уміння проводити аналогії, узагальнювати вивчений матеріал; виховувати графічну культуру, акуратність, працьовитість, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати призму, циліндр та їхні елементи; будувати зображення призми й циліндра; обчислювати основні елементи призми й циліндра.

Учитель повідомляє статистичні дані контрольної роботи та зупиняється на типових помилках, яких учні припустилися під час виконання контрольної роботи.

Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування затехнологією «Мікрофон»

Учитель демонструє кілька моделей різних геометричних тіл.

Серед запропонованих моделей знайдіть модель призми; модель циліндра.

До якого виду геометричних тіл належить призма; циліндр?

У який спосіб можна отримати розгортку призми; розгортку циліндра?

Наведіть із повсякденного життя приклади многогранників; циліндрів.

Вчитель: У навколишньому світі багато що пов’язує нас із геометрією. Приміром, кристали кухонної солі мають форму куба; кристали льоду і гірського кришталю нагадують відточений з обох боків олівець, тобто мають форму шестикутної призми, на основи якої поставлені піраміди. Ісландський шпат має форму похилого паралелепіпеда.

Існує чимало професій, представники яких не можуть обійтися без тих геометричних фігур, про які ми сьогодні говоритимемо. Столяри, малярі, екскаваторники, мінералоги – усі вони мають справу із многогранниками й циліндрами.

Повторення й аналіз фактів; бесіда.

Користуючись рис. 1, назвіть вершини, основи, бічні ребра й грані призми $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$.

Користуючись рис. 2, назвіть радіус і твірну циліндра.

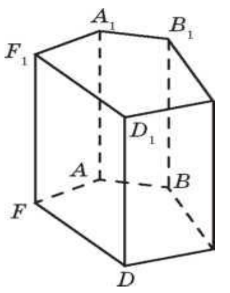


Рис. 1

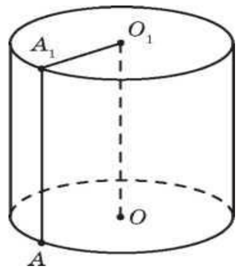


Рис. 2

Учні інтуїтивно називають те, що вони вважають правильним, розглядаючи рисунок і модель призми, циліндра.

Вчитель: Сформулюйте властивості основ призми; основ циліндра. Учень: Основи призви та циліндра паралельні й рівні.

Вчитель: Сформулюйте властивості бічних ребер призми.

Учень: Бічні ребра призми паралельні.

Вчитель: Сформулюйте властивості твірних циліндра.

Учень: Твірні циліндра паралельні, якщо циліндр прямий, то твірні перпендикулярні до основ.

Вчитель: Яка призма називається прямою?

Учень: Прямою називається призма, в якій твірні перпендикулярні до основи.

Вчитель: Із чого складається поверхня призми?

Учень: Поверхня призми складається із многокутників, які називаються гранями, їхні сторони – ребрами, а вершини – вершинами призми.

Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Робота з підручником

Учні, ознайомившись із текстом підручника, називають нові поняття, які не були розглянуті в 9-му класі, та дають їм визначення.

Основні терміни й поняття

Висота призми – відстань між площинами основ.

Діагональ призми – відрізок, що сполучає дві вершини, які не лежать на одній грані.

Призма, яка не є прямою, називається похилою.

Бічні ребра прямої призми є її висотами. Бічні грані прямої призми – прямокутники. Бічні грані похилої призми – паралелограми.

Відстань між площинами основ називається висотою циліндра. У прямому циліндрі висота дорівнює його твірній.

Діагональний переріз призми – переріз призми площиною, що проходить через два бічних ребра, які не належать одній грані.

Діагональний переріз прямої призми – прямокутник.

Осьовий переріз циліндра – прямокутник.

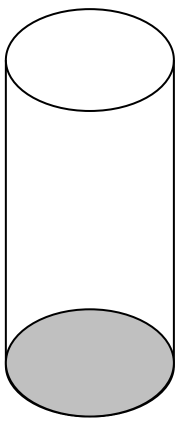
Переріз циліндра площиною, паралельною площині основи, – круг, який дорівнює основі циліндра.

Переріз циліндра площиною, паралельною осі циліндра, – прямокутник.

Осмислення нового матеріалу.

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя.

1. Для поливу висячих садів Семіраміди щодня тисячі рабів качали воду з глибоких колодязів на верхні тераси, а вже звідти по численних каналах вода стікала на нижні тераси. Визначте якою була загальна глибина колодязів, якщо відомо, що радіус цих колодязів 1 м і щодня з них викачували 3 140 $м^3$ води.



Дано: циліндр, R=1 м,   V=3140м,

Знайти: h

Розв'язання:

$V_{цил.}=\pi R^2 h$

$h= V_{цил.}/\pi R^2$

$h= 3140/3.14 \cdot 1^2=1000$ (м)

Відповідь: 1000м

Рис. 3

2. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної кубометром вилитої нафти, якщо товщина плівки 1 мм.

Дано: циліндр, $V=1$ м^3,
$h=1$ мм$=0{,}001$ м.
Знайти: $S_{основи}$

Рис.4

Розв'язання:

Утворена пляма – це циліндр висотою 0,001 м, що займає об'єм 1 м^3.

$V=\pi R^2 h$

$S_{основи} = \pi R^2 = V / h;$

$S_{основи} = 1/0{,}001=1000$ (м^2)

Відповідь: 1000 м^2.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$– прямий паралелепіпед, ABCDA – паралелограм, AB=4 см, AD=6 см, $\angle BAD=30°$, $\angle B_1CB=60°$.

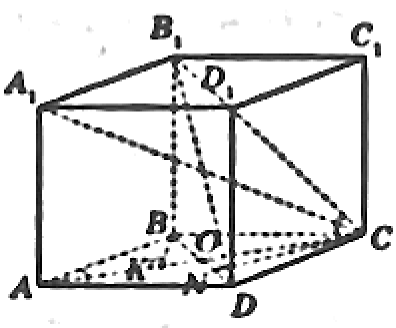


Рис. 5

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cos\angle BAD$$

$$BD^2 = 16+36-2\cdot 4\cdot 6\cos 30^\circ$$

$$BD^2 = 52-24\sqrt{3},$$

$$BD = \sqrt{4\cdot(13-6\sqrt{3})} = 2\sqrt{13-6\sqrt{3}}\,(см);$$

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ;$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2AD\cdot DC\cos\angle ADC,$$

$$AC^2 = 36+16-2\cdot 6\cdot 4\cos 150^\circ = 52+2\cdot 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 52+24\sqrt{3};$$

$$AC = \sqrt{52+24\sqrt{3}} = 2\sqrt{13+6\sqrt{3}}\,(см)$$

Із $\Delta BB_1C\left(\angle BB_1C = 90^\circ\right) BB_1 = BCtg\angle B_1CB, BB_1 = 6tg60^\circ = 6\sqrt{3}(см).$

4. В основі прямої призми лежить ромб із гострим кутом 60° і стороною 4 см. Знайдіть діагоналі призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см. (Відповідь: $2\sqrt{13}$ см; $2\sqrt{21}$ см.)

5. Воснові прямої призми лежить квадрат. Діагональ призми дорівнює 17 см, а висота – 15 см. Знайдіть довжину діагоналі бічної грані цієї призми. (Відповідь: $\sqrt{257}$ см.)

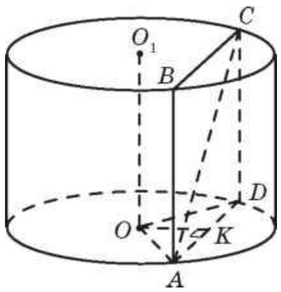


Рис. 6

6. На відстані 4 см від осі циліндра проведено переріз, паралельний цій осі. Висота циліндра дорівнює 5 см. Знайдіть радіус його основи, якщо діагональ перерізу дорівнює 13 см.

Розв'язання.

За умовою $OO_1 \parallel (ABC)$ (рис. 6). Оскільки $AB \perp (AOD)$ і $AB \subset (ABC)$, то за ознакою перпендикулярності площин $(ABC) \perp (AOD)$. AD – пряма перетину площин ABC і *АОЛ,* тож, провівши $OK \perp AD$, можемо стверджувати, що $OK \perp (ABC)$. А оскільки $OO_1 \parallel (ABC)$, то відрізок OK, що дорівнює 4 см, і є відстань від осі циліндра до площини ABC. У трикутнику CDA ($D = 90°$) маємо:

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{169 - 25} = 12(см)$$

Трикутник AOD рівнобедрений ($AO = OD$ як радіуси). Отже, OK — висота і медіана. $AK = KD = 6$ см. Із трикутника OKA ($K = 90°$) отримаємо: $AO = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}(см)$.

Відповідь: $2\sqrt{13}$ см.

Робота в малих групах.

Учні працюють у групах, після чого представник однієї з груп наводить доведення біля дошки (слід підкреслити, що доведені факти є опорними).

Задача: Дано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, сторона основиякоїдорівнює 2, діагональ бічної грані $\sqrt{5}$. Знайти кут між площиною A_1BC і площиною основи призми.

Розв'язання: Позначимо середину ребра BCлітероюH. Відрізки AHіA_1H перпендикулярніBC, оскільки трикутникABC – рівносторонній, а A_1BC – рівнобедрений. Тому, кутA_1HA – лінійний кут двогранного кута з гранями BCA і BCA_1.

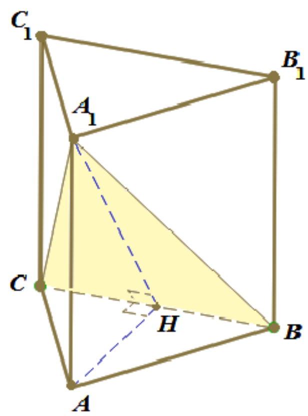


Рис. 7

Розглянемо трикутник A_1AB: за теоремою Піфагора знайдемо $AA_1=1$.

Розглянемо трикутник AHB: за теоремою Піфагора знайдемо AH=$\sqrt{3}$.

З трикутника HAA_1 знаходимо:

$$A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Звідси знаходимо: кут $A_1HA=30^o$.

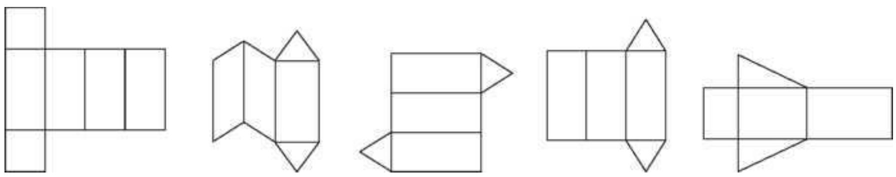
Відповідь. 30^o.

Підбиття підсумків уроку

Учитель просить назвати спільне і відмінне у прямій призмі й прямому циліндрі.

Бліц опитування.

Вчитель: На рис. 8, позначте фігури, що є розгорткою призми. Визначте вид призми в кожному випадку.



а б в г д

Рис. 8

Учень:

а) прямокутний паралелепіпед, основа – квадрат;

б) похила трикутна призма;

в), г) – правильна трикутна призма;

д) пряма трикутна призма, основа – рівнобедрений прямокутний трикутник.

Вчитель: Скільки діагоналей можна провести у чотирикутній призмі; п’ятикутній, n-кутній?

Учень: 4; 10; n(n-3).

Вчитель: Призма має 20 граней. Який многокутник лежить у її основі?

Учень: Вісімнадцятикутник.

Вчитель: У якому випадку переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є квадратом?

Учень: Якщо хорда дорівнює твірній.

Вчитель: Що являє собою переріз циліндра площиною, перпендикулярною до осі циліндра?

Учень: Круг.

Домашнє завдання

[3]: § 13, пп. 1, 2

[C] № 239 (3), 249 (1-3)

[D] № 239 (4, 7), 249 (4, 5)

[B] № 239 (9), 251 (4)

Індивідуальне завдання

1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює із площиною основи циліндра кут 30°. Знайти висоту циліндра і площу його основи. *(Відповідь:* 4 см; 48π см^2.)

2. Осьовий переріз циліндра – квадрат зі стороною $2\sqrt{5}$ см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює 5 см. Знайти площу цього перерізу. *(Відповідь:* 10 см^2.)

Вивчення теми розраховано на 3 уроки. Задачі, які розв’язуються під час вивчення теми, поступово ускладнюються. Під час написання роботи було підібрано комплекс задач таких, щоб на першому уроці учні розв’язували задачі початкового рівня, на другому – достатнього та середнього, на третьому – середнього та високого рівнів.

2.2. Методика вивчення теми «Конус і піраміда»

Мета уроку: узагальнити й систематизувати матеріал про конуси і піраміди, відомий учням із курсу 9-го класу; формувати навички розв'язування задач на знаходження основних елементів конуса і піраміди; розвивати просторову уяву, вміння проводити аналогії, узагальнювати; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати серед геометричних тіл конуси й піраміди; будувати їхні зображення; обчислювати основні елементи конуса і піраміди.

Основні поняття: піраміда, правильна піраміда, основа піраміди, вершина піраміди, бічні ребра, висота піраміди, конус, основа конуса, вершина конуса, твірна конуса, вісь конуса, осьовий переріз конуса.

Фронтальне опитування затехнологією «Мікрофон»

Учням демонструються різноманітні моделі геометричних тіл. Серед поданих моделей потрібно визначити модель піраміди; модель конуса.

Вчитель: До якого виду геометричних тіл належить піраміда; конус?

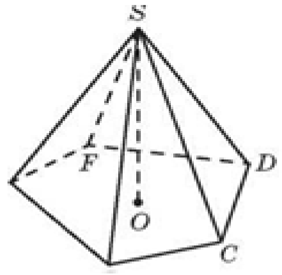
Учень: Піраміди належать до многогранників, а конуси – тіл обертання.

Вчитель: Наведіть із повсякденного життя приклади предметів, які мають форму піраміди; форму конуса.

Вчитель: Навіть якщо ви ніколи не були в Єгипті, то напевно чули про єгипетські піраміди. Про ці споруди розповідають легенди, надаючи їм казкових властивостей. Відомо, що в основі піраміди Хеопса лежить квадрат зі стороною 230 м, а її бічне ребро становить 218 м. Сьогодні, повторивши й узагальнивши вже відомі вам факти, ми зможемо обчислити і висоту цієї піраміди. Не менш цікавим є й конус, форму якого відтворюють природа, техніка й архітектура. У конуса й піраміди багато спільного. Що саме, ми з’ясуємо на уроці.

Повторення й аналіз фактів

Фронтальна бесіда



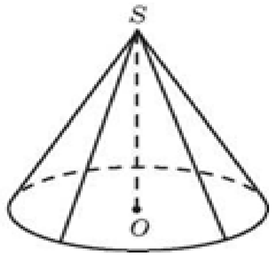


Рис.9 Рис. 10

Вчитель: Назвіть вершину, основу, бічні ребра, бічні грані й висоту піраміди (рис. 9).

Учень: Вершина – S, основа – ABCDF, бічні грані – ABS, BSC, CSD, DSF, FSA, висота – SO.

Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Робота з підручником

Учні самостійно читають текст підручника, знаходять у ньому поняття, які ще не були розглянуті в 9-му класі, і наводять визначення.

Основні поняття й терміни

Висота піраміди – перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи.

Висота конуса – перпендикуляр, проведений із вершини конуса до площини основи.

Діагональний переріз піраміди – переріз піраміди площиною, яка проходить через два несусідніх бічних ребра.

Пряма, що проходить через центр основи й висоту конуса, називається його віссю.

Осьовий переріз конуса – переріз конуса площиною, що проходить через його вісь.

Правильна піраміда – піраміда, основа якої – правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

У правильної піраміди

а) усі бічні ребра рівні;

б) усі бічні ребра однаково нахилені до площини основи;

в) усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди;

г) усі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники.

Апофема правильної піраміди – висота бічної грані, проведеної з вершини піраміди.

Усі твірні конуса є рівними.

Усі твірні конуса однаково нахилені до площини його основи.

Усі твірні конуса утворюють однакові кути з його висотою.

Осьовий переріз конуса – рівнобедрений трикутник.

Діагональний переріз правильної піраміди – рівнобедрений трикутник.

Конус називають рівностороннім, якщо діаметр його основи дорівнює його твірній.

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину, – рівнобедрений трикутник.

Переріз конуса площиною, паралельною його основі, – круг.

Переріз піраміди площиною, паралельною її основі, – многокутник, подібний многокутнику, що лежить в основі піраміди.

Осмислення нового матеріалу

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи – 8 см. Знайдіть бічне ребро піраміди. *(Відповідь:* 9 см.)

2. Знайдіть висоту й радіус основи конуса, якщо його твірна дорівнює 12 см, а осьовий переріз – правильний трикутник. *(Відповідь:*$6\sqrt{3}$ см; 6 см.)

3. В основі піраміди лежить паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см і гострим кутом 60°. Бічне ребро, що проходить через вершину гострого кута, перпендикулярне до площини основи і дорівнює 12 см. Знайдіть більше бічне ребро піраміди. *(Відповідь:* $\sqrt{163}$ см.)

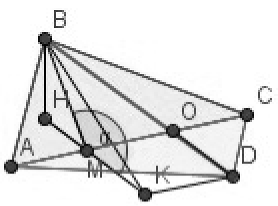


Рис. 11

4. Прямокутник ABCD з сторонами a і b перегнули по діагоналі AC так, що площини (ABC) і (ADC) утворюють між собою кут α. Знайти відстань

між точками B і D.

Розв'язання:

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

З точки D опустимо перпендикуляр DO на AC. З точки B опустимо перпендикуляр BM на AC.

$$BM = OD = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$OC = AM = \sqrt{BA^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$MO = AC - 2AB = \sqrt{a^2 + b^2} - 2\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Через точку D проведемо пряму с паралельну AC.

З точки M проведемо перпендикуляр до AC. В перетині з прямоюс отримаємо точку K.

Очевидно, що MKDO – прямокутник.

В площині (MKB) проведемо BH перпендикулярно до MK. AC перпендикулярна до площини (BMK), отже, AC перпендикулярна до BK. Очевидно, що BH перпендикулярно до (ACD)

BH – перпендикуляр, AK – похила, HK – проекція. Тоді за теоремою про три перпендикулярно: BK перпендикулярно до DK.

$$BK = \sqrt{BM^2 + MK^2 - 2 \cdot BM \cdot MK \cdot COS\alpha} = \sqrt{\frac{2a^2b^2\left(1 - a^2b^2\cos\alpha\right)}{a^2 + b^2}}$$

$$BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = \sqrt{\frac{2ab\left(1 + \cos\alpha\right)}{a^2 + b^2} + \frac{\left(b^2 - a^2\right)^2}{a^2 + b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(b^2 - a^2\right)^2 + 2ab\left(1 + \cos\alpha\right)}{a^2 + b^2}}$$

Вчитель: Зазвичай розв'язування стереометричних задач починається з побудови рисунка. Щоб правильно зобразити піраміду, часто необхідно проаналізувати умову задачі та встановити, властивості піраміди. Сьогодні ви ознайомитеся з особливостями положення висоти піраміди.

Шкільна лекція

Якщо дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то пряма їх перетину містить висоту піраміди. Цей факт випливає з теореми про дві площини, які перетинаються й перпендикулярні до третьої площини. На рис. 12 (SBA)⊥(ABC), (SBC)⊥(ABC), SB – висота піраміди.

Якщо одна із граней піраміди перпендикулярна до площини основи, то висота піраміди лежить у площині цієї грані і є перпендикуляром, проведеним із вершини піраміди до прямої перетину площин цієї грані й площини основи (рис. 13). Це твердження ґрунтується на факті, що перпендикуляр, проведений в одній із двох перпендикулярних площин до прямої перетину цих площин, є перпендикуляром до другої площини.

Учитель пропонує учням довести обернене твердження самостійно, спираючись на ознаки рівності прямокутних трикутників.

Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або однаково нахилені до площини основи піраміди, або утворюють однакові кути з висотою піраміди, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди (рис. 14).

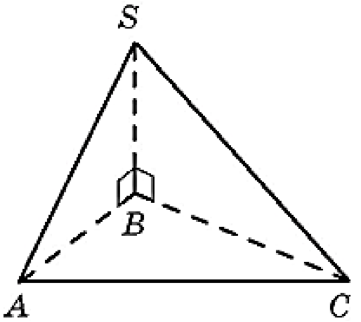


Рис. 12

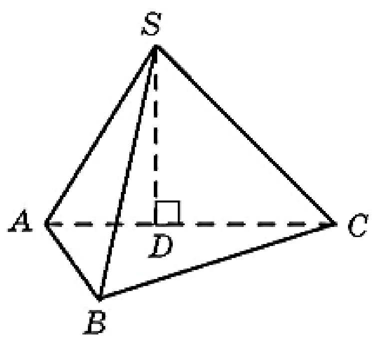


Рис. 13

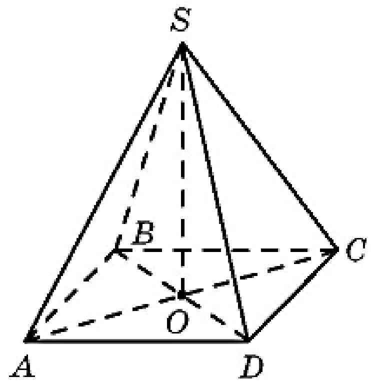


Рис. 14

Робота в малих групах

Учні, працюючи в групах, доводять твердження.

Якщо основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди, то в цій піраміді всі бічні ребра рівні, всі бічні ребра однаково нахилені до площини основи піраміди, всі бічні ребра утворюють із висотою піраміди однакові кути.

Учитель пропонує учням довести обернене твердження, спираючись на ознаки рівності прямокутних трикутників.

Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, або всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні, або всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, утворюють однакові кути з висотою піраміди, або висота піраміди утворює із площинами всіх бічних граней однакові кути, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди. Учитель відзначає, що сформульовані твердження широко застосовуються під час розв'язування задач.

Осмислення нового матеріалу:

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

4. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою, яка дорівнює 24 см. Знайдіть висоту піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює 13 см. (Відповідь: 5см)

5. Основа піраміди – ромб із меншою діагоналлю 4 см і гострим кутом 60°. Усі бічні грані утворюють з основою піраміди рівні кути по 45°. Знайдіть висоту піраміди. (Відповідь: $\sqrt{3}$ см)

6. Основа піраміди SABC – рівнобедрений трикутник ABC. AB = BC = 12 см. Бічна грань SAC, що містить основу трикутника, перпендикулярна до площини ABC, а дві інші бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°, SO = 4π/3 см. Знайдіть площу основи піраміди. (Відповідь: 48 см^2.)

Шкільна лекція

Зрізана піраміда – многогранник, який відтинається внаслідок перетину піраміди площиною, паралельною її основі.

Основи зрізаної піраміди – дві її грані, які лежать у паралельних площинах і є подібними многокутниками.

Бічні грані зрізаної піраміди (інші грані) – трапеції (рис. 15).

Бічні ребра зрізаної піраміди – відрізки, що сполучають відповідні вершини основ.

Висота зрізаної піраміди – перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи до площини іншої основи (рис. 15), DO – висота зрізаної піраміди.

Зрізана піраміда називається правильною, якщо вона отримана внаслідок перетину правильної піраміди площиною, паралельною основі.

Апофема правильної зрізаної піраміди – висота її бічної грані (рівнобедреної трапеції).

Висота правильної зрізаної піраміди – відрізок, який сполучає центри її основ.

Зрізаний конус – частина конуса, що лежить між основою конуса і площиною, паралельною його основі.

Основи зрізаного конуса – круги із центрами в точках O і O_1 (рис. 16).

Пряма OO_1 – вісь зрізаного конуса, відрізок OO_1 – висота зрізаного конуса.

Осьовий переріз зрізаного конуса – рівнобедрена трапеція AA_1B_1B (рис. 16), AA_1 і BB_1 – твірні зрізаного конуса.

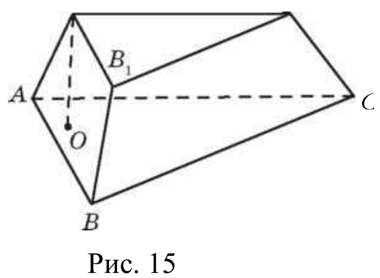


Рис. 15

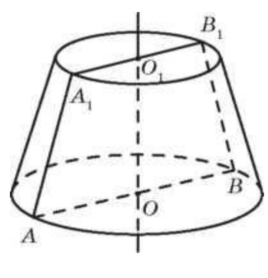


Рис. 16

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

8. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 7 см, сторони основ – 10 см і 2 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

Розв’язання.

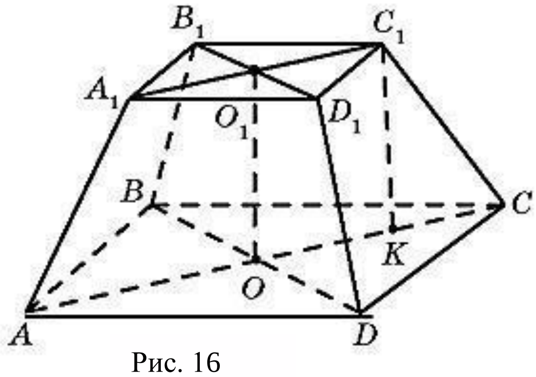


Рис. 16

Проведемо $C_1K \perp (ABC)$; $C_1K = OO_1$ (рис. 16). $K \in AC$, оскільки $C_1K \perp (ABC)$ і $OO_1 \perp (ABC)$, то $C_1K \parallel OO_1$, і вони лежать в одній площині, що перетинає площину нижньої основи по прямій, де лежать всі спільні точки двох площин, оскільки піраміда правильна, то $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ – квадрати, $AC = 10\sqrt{2}$ см, $A_1C_1 = 2\sqrt{2}$ см і $OC = 5\sqrt{2}$ см; $O_1C_1 = \sqrt{2}$ см, а $KC = 4\sqrt{2}$ см. Із трикутника $C_1KC(\angle K = 90°)$ отримаємо:
$CC_1 = \sqrt{C_1K^2 + KC^2} = \sqrt{49+32} = \sqrt{81} = 9$ (см)

Відповідь: 9см.

9. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 11 см і 16 см, твірна 13 см. Знайдіть відстань від центра меншої основи до точки кола більшої основи.

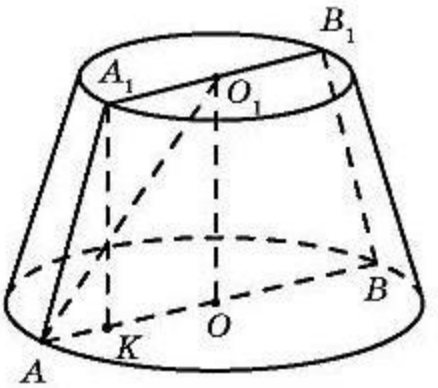


Рис. 17

Розв'язання. Нехай *A* – точка, що належить колу більшої основи зрізаного конуса (рис. 17) із висотою O_1O, де O і O_1 – центри його основ. Через точку *A* і висоту OO_1 конуса, проведемо площину, яка перетинає основи по діаметрах *AB* і A_1B_1, а бічну поверхню – по твірних AA_1 і BB_1. Знайдемо O_1A, у площині AA_1B_1 проведемо $A_1K \parallel OO_1$. $A_1O_1 \parallel AO$ за властивістю паралельних площин, тому KA_1O_1O – паралелограм. Отже, $OK = A_1O_1$ і $AK = AO - A_1O_1 = 16 - 11 = 5$ (см).

Із трикутника AKA_1 ($K = 90°$) отримаємо: $A_1K = AA^2 – AK^2 = 169 – 25 = 144$ см^2. Отже, $O_1O^2 = 144$ см^2.

Із трикутника AOO_1 ($\angle O = 90°$) отримаємо: $O_1A = \sqrt{OO_1^2 + AO^2} = \sqrt{400} = 20$ (см).

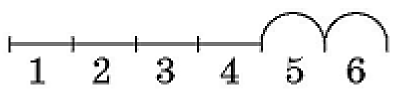
Відповідь: 20 см.

Підбиття підсумків уроку

Графічний диктант

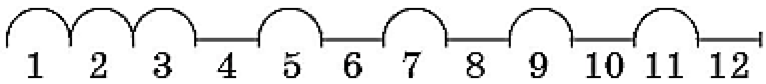
Учні записують у зошиті відповіді, користуючись символами «так», «ні», а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, запропонованим учителем.

1. Чи існує піраміда, що має 21 ребро?
2. Чи є правильним твердження, що коли всі бічні ребра піраміди рівні між собою, то піраміда правильна?
3. Чи є правильним твердження, що коли всі бічні ребра піраміди однаково нахилені до основи, то піраміда правильна?
4. Чи обов’язково висота піраміди лежить усередині піраміди?
5. Чи може висота піраміди збігатися з її бічним ребром?
6. Чи існує піраміда, усі грані якої є прямокутними трикутниками?

Ключ-відповідь: 

1. Чи можна в перерізі конуса площиною отримати рівнобедрений трикутник, відмінний від осьового перерізу?
2. Чи може осьовим перерізом конуса бути прямокутний трикутник?
3. Чи може осьовим перерізом конуса бути рівносторонній трикутник?
4. Чи можуть бути будь-які відрізки a і b відповідно твірною й висотою конуса?
5. Чи можуть бути будь-які відрізки a і b відповідно висотою й радіусом конуса?
6. Бічні грані піраміди утворюють з основою рівні двогранні кути. Чи може основою піраміди бути прямокутник?
7. Бічні грані піраміди утворюють з основою рівні двогранні кути. Чи може основою піраміди бути ромб?
8. Бічне ребро піраміди перпендикулярне до однієї зі сторін основи. Чи можна прийняти це ребро за висоту піраміди?
9. Усі бічні ребра чотирикутної піраміди рівні. Чи може її основою бути прямокутник?

10. Усі бічні ребра чотирикутної піраміди утворюють рівні кути з висотою піраміди. Чи може її основою бути ромб?
11. Усі бічні ребра піраміди рівні. Чи може її одна бічна грань бути перпендикулярною до основи піраміди?
12. Чи може бути основою піраміди, у якій всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні, рівнобедрена трапеція зі стороною 9 см і основами 5 см і 11 см?

Ключ-відповіді: 

Домашнє завдання

[З]: § 12

[С] № 226 (1, 2)

[D] № 226 (3)

[В] № 226 (4), 234

Індивідуально

1. Сторони основ зрізаної правильної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 6 см. Бічна грань утворює із більшою основою кут 60°. Знайти висоту зрізаної піраміди *(Відповідь:* 2 см.)

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Циліндри і призми. Конуси і піраміди»; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, самостійність, уміння правильно розраховувати час, застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати наполегливість, уміння організовувати роботу.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Циліндри і призми. Конуси і піраміди». Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

Організаційний етап

Перевірка домашнього завдання

Учні здають зошити з домашнім завданням учителю на перевірку.

Формулювання теми, мети й завдань уроку; мотивація навчальної діяльності

Учитель налаштовує учнів на вдумливу самостійну роботу, звертає увагу на необхідність дати докладні пояснення до задач 7-9, до розв’язання задачі 8 застосувати властивість медіани прямокутного трикутника, а в задачі 9 виконати додаткову побудову.

Перевірка знань, умінь і навичок

На цьому етапі уроку можна провести контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [23], КР 2.

Контрольна робота № 2

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1 см, 2 см і 2 см. Знайдіть його діагональ.

А) 5 см; Б) 3 см; В) 9 см; Г) 4 см.

2. Бічні ребра піраміди дорівнюють гіпотенузі прямокутного трикутника, який лежить у її основі, і дорівнюють 4 см. Знайдіть висоту піраміди.

А) $2\sqrt{3}$ см; Б) 2 см; В) 8 см; Г) $4\pi/3$ см.

3. Осьовий переріз циліндра – квадрат, діагональ якого $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус основи циліндра.

А) 4 см; Б) 8 см; В) 2 см; Г) $2\sqrt{2}$ см.

4. Твірна конуса дорівнює 6 см і нахилена до площини основи конуса під кутом 60°. Знайдіть площу основи конуса.

А) 9π см^2; Б) 27π см^2; В) 27 см^2; Г) 9 см^2.

5. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту піраміди.

А) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$см; Б) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$см; В)$5\sqrt{3}$см; Г) 5см.

6. Радіус основи і висота циліндра відповідно дорівнюють 6 см. І 5 см. Знайдіть кут нахилу діагоналі осьового перерізу до площини основи циліндра.

А) $arctg\,\frac{12}{5}$; Б)$arctg\,\frac{5}{12}$; В) $arctg\,\frac{6}{5}$; Г) $arctg\,\frac{5}{6}$.

Достатній рівень (3 бали)

7. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 1073 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть сторону основи піраміди.

8. Відстань від центра основи конуса до середини твірної дорівнює 5 см. Знайдіть висоту конуса, якщо його радіус дорівнює 8 см.

Високий рівень (3 бали)

9. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, у якому радіуси основ дорівнюють 3 см і 6 см, а твірна – 5 см.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть його діагональ.

А) 7 см; Б) 11 см; В) 49 см; Г) 36 см.

2. Бічні ребра піраміди дорівнюють гіпотенузі прямокутного трикутника, що лежить у її основі, висота піраміди дорівнює 43 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

А) 4 см; Б) 8 см; В) 12 см; Г) $12\sqrt{3}$ см.

3. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а осьовий переріз циліндра — квадрат. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

А) $4\sqrt{2}$ см; Б) 8 см; В) $2\sqrt{2}$ см; Г) $8\sqrt{2}$ см.

4. Площа основи конуса дорівнює 9п см^2. Знайдіть твірну конуса, яка нахилена до площини основи конуса під кутом 60°.

А) 3 см; Б) 12 см; В) 6 см; Г) 9 см.

5. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 8 см, а кут між бічним ребром і висотою становить 30°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо основи піраміди.

А) 4 см; В) $4\sqrt{3}$; В)$\frac{8\sqrt{2}}{3}$см; Г) $4\sqrt{2}$.

6. Радіус основи і висота циліндра відповідно дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть кут нахилу діагоналі осьового перерізу до площини основи циліндра.

А) $arctg\frac{7}{4}$; Б)$arctg\frac{4}{7}$; В) $arctg\frac{7}{8}$; Г) $arctg\frac{8}{7}$.

Достатній рівень (3 бали)

7. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см і нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайдіть сторону основи піраміди.

8. Відстань від центра основи конуса до середини твірної дорівнює 5 см. Знайдіть радіус основи конуса, якщо його висота дорівнює 6 см.

Високий рівень (3 бали)

9. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, у якому радіуси основ дорівнюють 3 см і 7 см, а твірна – 5 см.

2.3. Методика вивчення теми «Куля, сфера. Площина, дотична до сфери»

Мета уроку: сформувати поняття кулі, сфери, радіуса кулі, діаметра кулі, діаметрально протилежних точок; розглянути переріз кулі площиною і поняття дотичної площини до сфери; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, уміння аналізувати й узагальнювати вивчений матеріал; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати кулю й сферу на моделях і рисунках; будувати зображення кулі та її елементів; знати поняття дотичної площини до сфери; уміти обчислювати основні елементи кулі та сфери.

Основні поняття: куля, сфера, діаметр кулі, радіус кулі, діаметрально протилежні точки, великий круг.

Фронтальне опитування.

Вчитель: Що називають колом?

Учень: Коло – це геометричне місце точок, відстань яких до точки, що називається центром кола, є постійною величиною і дорівнює радіусу кола.

Вчитель: Що таке діаметр кола?

Учень: Відрізок прямої, що сполучає дві точки кола називається хордою. Найдовша з хорд, діаметр, проходить через центр кола. Діаметр кола дорівнює двом радіусам.

Вчитель: За якою формулою можна обчислити довжину кола?

Учень: $l = 2\pi R$.

Вчитель: За якою формулою обчислюють площу круга?

Учень: $S = \pi R^2$.

Вчитель: Яке тіло є просторовим аналогом кола; круга?

Учень: Сфера та куля.

Формулювання теми, мети й завдань уроку; мотивація навчальної діяльності.

Вчитель: Дитячий м’ячик, тенісний або футбольний м’яч, повітряна кулька... У кожного з вас свої дитячі спогади, пов’язані із гроюз м’ячем. У школі вивчення, наприклад, географії прямо пов’язанез таким тілом, як куля. Географічні паралелі – це лінії перетину поверхні Землі (яку ми, ідеалізуючи, вважаємо кулею) площинами, паралельними площині екватора. Сьогодні ми узагальнимо, систематизуємо й розширимо знання про кулю та її поверхню.

Повторення й аналіз фактів

Бліцопитування затехнологією «Мікрофон»

Вчитель: Яку фігуру називають кулею?

Учень: Куля з центром О і радіусом R є фігурою, яка складається з усіх точок простору, що лежать від центра кулі О на відстані, яка не перевищує R.

Вчитель: Що називають поверхнею кулі?

Учень: Поверхнею кулі є сфера.

Вчитель: Що називають радіусом кулі?

Учень: Радіусом кулі називають дану відстань R, а також відрізки, що мають цю довжину і відкладені від центра кулі О.

Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Шкільна лекція

Хорда сфери – відрізок, який сполучає дві точки сфери.

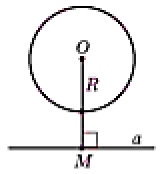
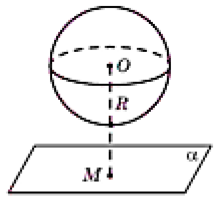
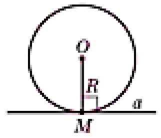
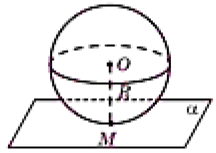
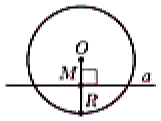
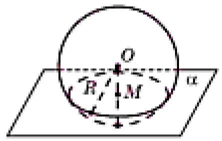
Діаметр сфери – хорда, яка проходить через центр сфери.

Кінці діаметра – діаметрально протилежні точки.

Розглянемо взаємне розміщення кулі та площини, провівши аналогії з розміщенням прямої та круга на площині, та заповнимо таблицю 1.

Взаємне розміщення прямої і круга,
площини і кулі

Таблиця 1

№ з/п	Пряма і круг	Площина і куля
1	Не перетинаються $R<OM$ 	Не перетинаються $R<OM$ 
2	Дотикаються $R=OM$ 	Дотикаються $R=OM$ 
3	Перетинаються $R>OM$ 	Перетинаються $R>OM$ 

Отже, якщо відстань від центра кулі до площини менша за радіус кулі, то переріз цієї кулі площиною – коло. Центр цього кола – основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі до січної площини.

Якщо січна площина проходить через центр кулі, цю площину називають діаметральною площиною. У цьому випадку радіус перерізу дорівнює радіусу кулі.

Переріз кулі діаметральною площиною називається великим кругом, а коло цього перерізу – великим колом.

Дотичною площиною до сфери (кулі) називається площина, що має з нею єдину спільну точку. Цю точку називають точкою дотику.

Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику.

Якщо радіус сфери є перпендикуляром, проведеним із центра сфери до площини, що проходить через інший кінець радіуса, то ця площина є дотичною до сфери. Це твердження називають ознакою дотичної площини.

На рис. 18 площина α – дотична до сфери. OA – радіус сфери.

Дотичною прямою до сфери (кулі) називається пряма, що належить дотичній площині до цієї сфери (кулі) і проходить через точку дотику.

Усі прямі дотичної площини до сфери, які проходять через точку А, є дотичними прямими до сфери.

Пряма, що проходить через точку сфери перпендикулярно до радіуса сфери, проведеного в цю точку, є дотичною прямою до сфери.

На рис. 19 OA⊥a, OA = R – радіус сфери.

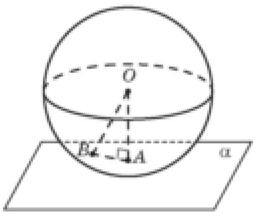


Рис. 18

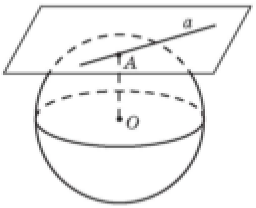


Рис.19

Осмислення нового матеріалу

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. На відстані 3 см від центра кулі проведено переріз. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть площу перерізу.

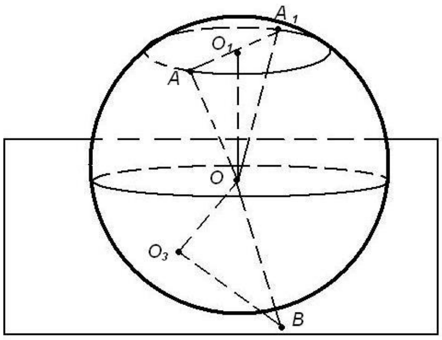


Рис. 20

Розв'язання

Нехай кулю перетнули площиною, яка проходить через точку A, відстань $OO_1 = 3$ (O_1 – центр перерізу). Із ΔOO_1A ($\angle OO_1A = 90°$)

$$AO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1{}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{пер.}} = \pi \cdot AO_1{}^2 = 16\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Відповідь: 16π см^2.

2. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між центром кулі і точкою, що знаходиться на дотичній площині на відстані 2 см від точки дотику.

Розв'язання.

Розглянемо Рис. 20. Нехай O_3 – точка дотику кулі до площини, B – точка площини, відстань до якої $O_3B = 2$см. $OO_3 \perp \alpha$, $OO_3 = OA = 5$.

Із $\Delta OO_3B(\angle OO_3B = 90°)OB = \sqrt{OO_3{}^2 + O_3B^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ (см).

Відповідь: $\sqrt{29}$см.

3. Пункт А розташований на 30° північної широти. Обчисліть шлях, який проходить цей пункт за 2 год внаслідок обертання Землі навколо своєї осі. Радіус земної кулі прийняти таким, що дорівнює 6000 км.

Вчитель: Ви звернули увагу, що багато задач, розв'язання яких пов'язане зі знаходженням географічних координат, — не що інше як геометричні задачі, пов'язані зі сферою та кулею. Тому необхідно вміти швидко й чітко розв'язувати задачі на знаходження елементів кулі — це допоможе вам впевненіше почуватися в навколишньому світі.

Наприклад, вам необхідно знайти довжину паралелі, широта якої *a*, якщо радіус Землі дорівнює R. Оскільки Земля має форму кулі, то довжина паралелі – це довжина деякого кола кулі, що лежить у площині, паралельній екватору. Широта *a* – кут нахилу радіуса кулі, проведеного паралельно площині екватора (рис. 21).

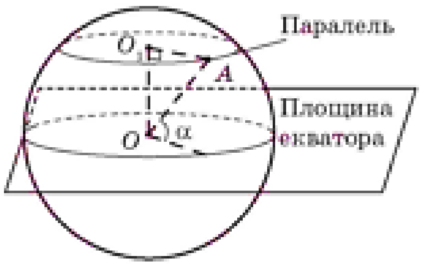


Рис.21

Тоді довжину паралелі можна знайти як довжину кола радіуса OA = r. Із трикутника OO_lA ($OO_lA = 90°$) отримаємо:

r = Rsin(90°-a) = Rcos a.

Тоді довжина l паралелі дорівнюватиме

l = 2πR cos a.

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

4. Куля дотикається до всіх сторін правильного трикутника. Знайдіть радіус кулі, якщо сторона трикутника дорівнює $24\sqrt{3}$ см, а відстань від центра кулі до площини трикутника становить 5 см.

5. Усі сторони квадрата, площа якого дорівнює 144 см^2, дотикаються до сфери радіусом 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини квадрата.

6. Усі вершини прямокутного трикутника з гіпотенузою 16 см лежать на сфері, радіус якої дорівнює 17 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

Підбиття підсумків уроку.

Фронтальне опитування

1. На дотичній до кулі площині а взято точку В і сполучено із центром кулі О (рис. 22). Відрізок ОВ перетинає кулю в точці С. Чому дорівнює довжина відрізка ВС, якщо АО = 6, АВ = 8 см?

2. Знайдіть відстань від центра кулі до січної площини (рис. 23), якщо радіус кулі дорівнює 5 см, а радіус перерізу – 4 см.

3. Два перерізи кулі площинами мають рівні площі. Чи є правильним твердження, що площини цих перерізів однаково віддалені від центра кулі?

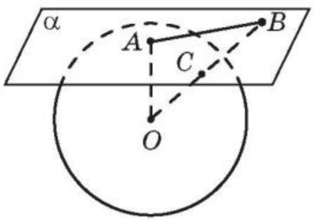


Рис.22

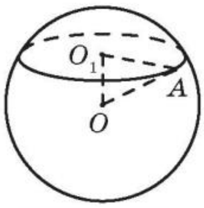


Рис.23

Тема. Контрольна робота № 3.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл»; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, самостійність, уміння правильно розраховувати час, застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати наполегливість, уміння організовувати роботу.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл».

Контрольна робота № 3

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Площа перерізу, проведеного через кулю радіусом 5 см на відстані 3 см від її центра, дорівнюватиме:

А) 9π см^2; Б) 2π см^2; В) 16 см^2; Г) 16π см^2.

2. Дві сфери радіусом 3 см і 5 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

А) 8 см; Б) 2 см; В) 6 см; Г) 10 см.

3. Якщо пряма призма описана навколо кулі, радіус якої становить 5 см, то бічне ребро дорівнює:

А) 5 см; Б) 2,5 см; В) 10 см; Г) 15 см.

4. Якщо в кулю радіусом 8 см вписано правильну піраміду, то відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює:

А) 16 см; Б) 8 см; В) 4 см; Г) 12 см.

5. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіусом 13 см. Якщо відрізок AB дорівнює 24 см, то відстань від центра кулі до відрізка AB дорівнює:

А) 12 см; Б) 5 см; В) 10 см; Г) 15 см.

6. Воснові прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть діаметр основи циліндра, описаного навколо цієї призми.

А) 12 см; Б) 10 см; В) 4 см; Г) 16 см.

Достатній рівень (3 бали)

7. Через середину радіуса сфери проведено площину, перпендикулярну до радіуса. Знайдіть відношення довжини великого кола до довжини перерізу.

8. Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см, 4 см, 12 см. Знайдіть радіус описаної навколо нього кулі.

Високий рівень (3 бали)

9. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, якщо радіус кулі $\pi/34$ см.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Довжина лінії перерізу, проведеного через сферу радіусом 10 см на відстані 8 см від її центра, дорівнюватиме:

А) 12π см; Б) 12 см; В) 16π см; Г) 10π см.

2. Дві сфери радіусами 12 см і 15 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

А) 27 см; Б) 30 см; В) 3 см; Г) 24 см.

3. Якщо пряма призма, описана навколо кулі, має бічне ребро, що дорівнює 6 см, то радіус кулі дорівнює:

А) 6 см; Б) 3 см; В) 12 см; Г) 18 см.

4. Якщо в кулю вписано правильну піраміду й відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює 10 см, то радіус кулі дорівнює:

А) 20 см; Б) 5 см; В) 10 см; Г) 15 см.

5. Відстань від центра кулі до відрізка АВ, кінці якого лежать на поверхні кулі, дорівнює 15 см. Якщо відрізок АВ дорівнює 16 см, то радіус кулі дорівнює:

А) 8 см; Б) 16 см; В) 17 см; Г) 30 см.

6. Воснові прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см. Знайдіть діаметр основи циліндра, описаного навколо цієї призми.

А) 10 см; Б) 24 см; В) 6 см; Г) 13 см.

Достатній рівень (3 бали)

7. Через середину радіуса кулі проведено площину, перпендикулярну до радіуса. Знайдіть відношення площі великого круга до площі перерізу.

8. Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть радіус описаної навколо нього кулі.

Високий рівень (3 бала)

1. Гіпотенуза й катет прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 10 см і 8 см. Відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кулі.

2.4. Експериментальна перевірка розробленої методики

Під час виконання роботи нами була розроблена методика вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл», яка б покращила успішність учнів з вивчення цієї теми.

Експериментальна перевірка проводилася в Кам’янець-Подільському.

За експериментальну групу було взято учнів 11-Б класу. Середній бал успішності в даному класі становив 5,8. За контрольну групу було взято учнів 11-А. Середній бал успішності складав 6,2.

Учні контрольної групи працювали просто за шкільною програмою з традиційним викладанням, а учні експериментальної групи працювали з використанням розробленої методики та добіркою вправ, наведених в нашій роботі.

Результатом використання розробленої методики стало різке зростання учнів інтересу до уроків математики, збільшилась їхня активність на уроках, потрібно було заставляти учнів відповідати, майже завжди були бажаючі, все було доказами ефективності використання проблемного методу навчання математики.

1. Задачі та вправи для експериментальної групу ми підібрали з урахуванням чотирьохрівневого навчання по темах «Циліндри і призми, конуси і піраміди» та «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл». Навчання у обох класах проходило за підручником Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту. В кінці кожної з тем учням як експериментального, так контрольного класів було запропоновано перевірочні роботи.

Наведемо результати однієї з таких робіт (Тематична контрольна бота з теми «Циліндри і призми, конуси і піраміди»).

При написанні перевірочної роботи з теми «Циліндри і призми, конуси і піраміди», учні даних класів держали такі оцінки :

Класи Бали

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11-А	1	2	4	5	3	2	3	3	2	2	1	0
11-Б	0	1	1	2	4	4	3	5	4	2	2	0

А – кількість учнів, що одержали відповідні бали в контрольному клас

Б – кількість учнів, що одержали відповідні бали в кспериментальному класі;

Результати цієї роботи зображено графічно.

Як видно з одержаних графіків, в експериментальній групі зберігається ріст вищих балів, причому кількість їх більша, ніж в контрольній групі. Це говорить про те, що розроблена методика є ефективною. Для того, щоб з'ясувати як впливає застосування даної методики даній темі на формування математичних знань, звернемось до статистики, застосуємо метод кореляції на прикладі даних класів. Для цього визначимо коефіцієнт кореляції, який є мірою щільності розглядуваного зв'язку. Чим ближчий коефіцієнт до одиниці, тим більша залежність між застосуванням різнорівневих завдань для перевірки і підтвердженням відповідних рівнів знань. Якщо зв'язок між ознаками відсутній, то коефіцієнт кореляції буде рівний або близький до нуля.

Обчислимо коефіцієнт по даних контрольної роботи теми «Циліндри і призми,конуси і піраміди»

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}},$$

де SS_x – сума квадратів відхилень $SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$,

SS_y – сума квадратів відхилень $SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}$,

SP_{xy} – сума скоректованих добутків$SP_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}$,

де N – кількість учнів

Кіль кість учнів	Загальна кількість балів		Допоміжні розрахунки		
N	В контрольному класі	В експериментальному класі	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
28	158	196	3483	2792	5274

1. Знаходимо суму квадратів відхилень:

$$SS_x = 2792 - \frac{158^2}{28} \approx 1900{,}42$$

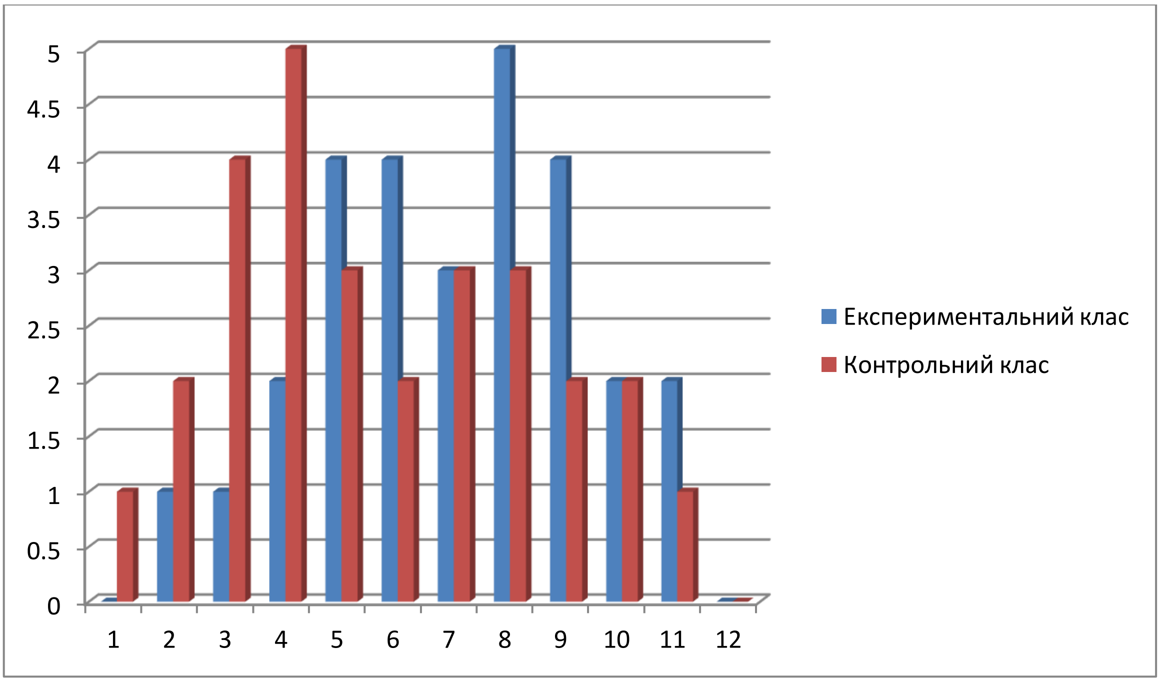
$$SS_y = 5274 - \frac{196^2}{28} = 3209$$

2. Сума скорельованих добутків

$$SS_{xy} = 3483 - \frac{158 * 196}{28} = 2377$$

3. Коефіцієнт

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{2377}{\sqrt{1900{,}42 * 3902}} \approx 0{,}8729$$



Обчислимо коефіцієнт по даних контрольної роботи з теми «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл»

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}},$$

де SS_x – сума квадратів відхилень $SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$,

SS_y – сума квадратів відхилень $SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}$,

SP_{xy} – сума скоректованих добутків$SP_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}$,

де N – кількість учнів

Кіль кість учнів	Загальна кількість балів		Допоміжні розрахунки		
N	В контрольному класі	В експериментальному класі	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
28	144	146	3339	3318	3242

1. Знаходимо суму квадратів відхилень:

$$SS_x = 3318 - \frac{144^2}{19} \approx 2226{,}63$$

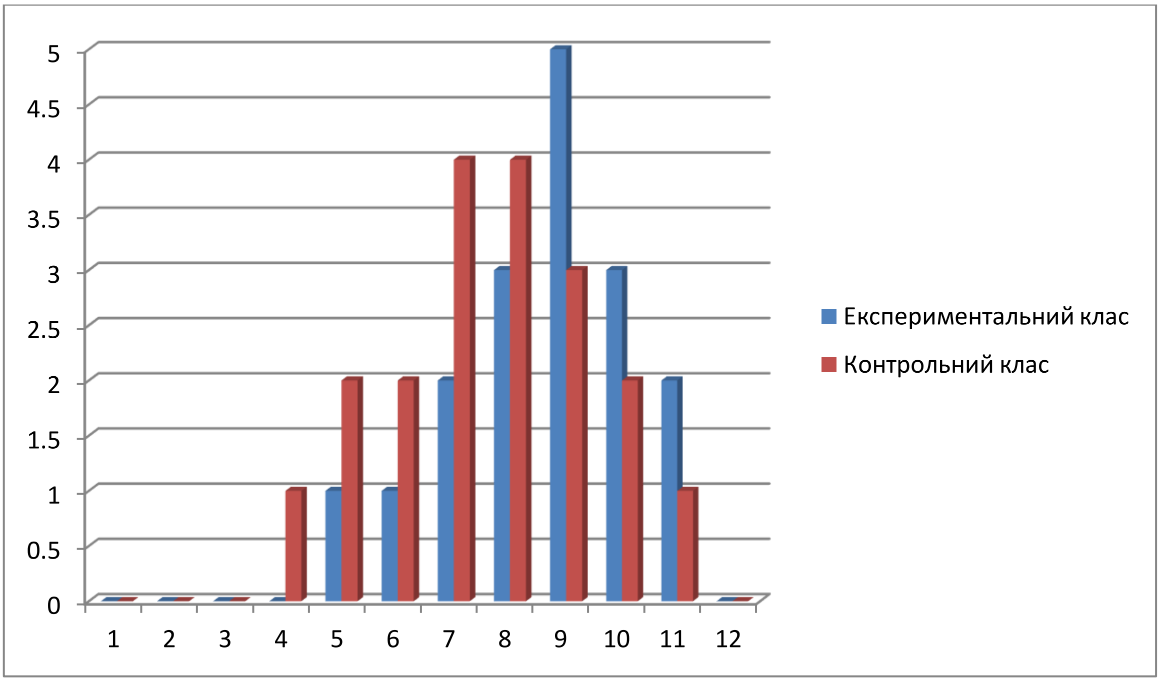
$$SS_y = 3242 - \frac{146^2}{17} = 2988{,}11$$

2. Сума скорельованих добутків

$$SS_{xy} = 3339 - \frac{144 * 146}{18} = 2171$$

3. Коефіцієнт

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{2171}{\sqrt{2226{,}63 * 2988{,}11}} \approx 0{,}84166$$



З одержаних діаграм можна помітити, що в експериментальному класі більше вищих балів, ніж в контрольному. Це говорить про те, що розробленаметодика є дійсно ефективною.

ВИСНОВКИ І РЕКОМЕНДАЦІЇ

Успіх інтелектуального розвитку школяра досягається головним чином на уроці, коли учитель залишається наодинці з своїми вихованцями. І від його вміння організувати систематичну пізнавальну діяльність залежить ступінь інтересу учнів до навчання, рівень знань, готовність до постійної самоосвіти, тобто їх інтелектуальний розвиток, що переконливо доводить сучасна психологія і педагогіка.

Дуже великий вплив на світогляд учнів має специфіка математичних методів пізнання. На сьогоднішній день актуальною є проблема всебічного розвитку учнів. Вивчення геометрії сприяє формуванню наукового стилю мислення та творчих здібностей учнів, розвитку в учнів раціонального мислення з характерними для нього такими рисами, як обґрунтованість, критичність, алгоритмічність; розвитку уяви, інтуїції, які є обов'язковою творчої діяльності особистості. Тому слід покращити їхню підготовку з геометрії, особливо у період реформування загальної середньої освіти.

Ми пропонуємо використовувати цю методику з метою активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, розвитку їхніх творчих здібностей, вироблення особистого підходу під час використання знань при розв'язуванні задач у різних ситуаціях, розширення обсягу знань за рахунок залучання додаткових теоретичних фактів. Важливо, щоб кожен учень мав належну підготовку, добре володів навчальним матеріалом на рівні, який йому під силу, вмів застосовувати теорію для розв'язування задач, зміст яких пов'язаний з даною темою.

Дана методика допомагає більш якісно формувати математичні поняття, розвивати мислення учнів, їх самостійність. Вона сприяє зменшенню формалізму в знаннях учнів.

Для написання дипломної роботи нами було використано багато методичної літератури, дидактичних матеріалів та наукових посібників. Всі цізнання узагальнені і підсумовані вміщені у данійроботі. Тому, ми вважаємо, дана методика допоможе вчителям у школах успішно реалізувати процес навчання теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл». Вона допоможе розвинути у дітей просторову уяву, абстрактне мислення, з часом учні на інтуїтивному рівні починають приходити до правильних висновків. Коли учні приходять до правильних висновків самостійно їм цікаво вчитися далі, вони хочуть дізнатися все більше і більше відчувши себе на уроці справжніми дослідниками. Зрозумівши суть нової теми уроку, розібравшись у основних властивостях нових виучуваних просторових тіл учні починають самі приводити приклади геометричних тіл такого ж типу, з яким вони зустрічалися у повсякденному житті.

Основна перевага розробленої методики полягає у тому, що вона адоптована на нову диференціацію процесу навчання, зокрема на рівневі навчання математики. З допомогою розробленої методики учитель зможе також реалізовувати індивідуалістичний підхід до навчання математики. Розроблена методика також дозволяє реалізовувати розвивальне навчання на різних етапах проведення уроку.

Експериментальна перевірка розробленої методики свідчить про доцільність її використання у старших класах, у школах де вивчають геометрію на академічному рівні. Використавши цю методику учитель зможе помітно покращити рівень засвоєння учнями даних тем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. III Всеукраїнська науково-практична конференція "Особистісно орієнтоване навчання математики: Сьогодення і перспективи" // Математика в школі. – 2008, №2, С. 55.

2. Афанасьєва О.М. Математика (рівень стандарту) / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л.Павлов, А.К. Сліпенко. – Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.

3. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.

4. Бевз Г. П. Урок математики в школі. – К.: Рад. шк., 1977. – 112 с.

5. Бевз Г.П. Математика (рівень стандарту) / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз – Генеза, 2011. – 380 с.

6. Бех І.Д. Виховання особистості. Кн.1: Особистісно орієнтований підхід: теоретико-технологічні засади: наук. видання. – К.: Либідь, 2003. – 280 с.

7. Бех І.Д. Особистісно зорієнтоване виховання: науково-метод. посібник. – К.: ІЗМН, 1999. – 179 с.

8. Блох О.Я. Методика викладання математики в середній школі. – Х.: Основа, 1992. – 303 с.

9. Бурда М.І. Рівні навчальної діяльності // Зміст і технології шкільної освіти: Матеріали звітної наукової конференції Інституту педагогіки АПН України. 26 – 28 березня 2002 року.–К.: Пед. думка, 2002. –С. 4 – 5.

10. Грамбовська Л. В. Особистісно орієнтоване навчання геометрії в основній школі: Дис. канд. наук: 13.00.02 – 2009. – 250 с.

11. Дендеренко О.О., Шарко В.Д. Проблемне навчання як освітня технологія // Відкритий урок / О.О. Дендеренко, В.Д. Шарко. – 2002. – № 2. – С. 13 – 14.

12. Дичаківська І.М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник /І.М. Дичаківська. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.

13. Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2001, 647 с.

14. Жовнір Я.М. П'ятсот задач з методики викладання математики / Я.М.Жовнір. – Х.: Основа, 1997, 390 с.

15. Зінченко О. Г. Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Комплексний зошит для контроля знань (Алгебра і початки аналізу). – Х.: Вид-во «Ранок», 2011.

16. Загальна педагогіка: модульне навчання: Посібник для студентів виших навчальних закладів / За заг. ред. Е.І. Федорчук. – Кам'янець–Подільський: АБЕТКА, 2003. – 328 с.

17. Карпенчук С.Г. Теорія і методика виховання / С.Г. Карпенчук. – К.: Вища школа, 1997. – 304 с.

18. Касьяненко М. Д. Педагогіка співробітництва / М.Д. Касьяненко. – К.: Вища школа, 1993. – 321 с.

19. Касьяненко М.Д. Підвищення ефективності навчання математики / М.Д. Касьяненко. – К., 1980. – 230 с.

20. Конет І. М. Теорія ймовірностей і математичної статистики / І.М. Конет // Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський державний педагогічний університет, інформаційно-видавничий відділ. 1999. – 214 с.

21. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 208 с.

22. Програма з математики для 10 - 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – К., 2010.

23. Роганін О. М. Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Комплексний зошит для контроля знань (Геометрія). – Х.: Вид-во «Ранок», 2011.

24. Сікорський П.І. Теоретико-методологічні основи диференційованого навчання / ПЛ. Сікорський. – Львів, 1998. – 110 с.

25. Сісецький П.П. Диференційовані завдання для учнів / П.П. Сісецький. – Радянська школа. – 1975. – № 7. – С. 34 – 38.