Кам’янець-Подільський
національний університет
імені Івана Огієнка

Уляна ГУДИМА,
Тетяна ДУМАНСЬКА,
Катерина ГЕСЕЛЕВА

ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Навчально-методичний посібник

Кам’янець-Подільський
2024

УДК 51(076)
ББК 22.1я73
Г93
Рекомендувала вчена рада Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 4 від 25.04.2024 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Юрій СМОРЖЕВСЬКИЙ, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;
Ірина СЕМЕНИШИНА, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та безпекових дисциплін Закладу вищої освіти «Подільський державний університет»;
Ольга СИВАК, заступник директора, учитель математики Кам'янець-Подільського ліцею №5 Кам'янець-Подільської міської ради.

ГУДИМА Уляна, ДУМАНСЬКА Тетяна, ГЕСЕЛЕВА Катерина
Г93 Практикум із розв'язування рівнянь з параметрами: навчально-методичний посібник [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. 80 с.

Електронна версія посібника доступна за покликаннями:
URL: http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8137

Навчально-методичний посібник спрямований на оволодіння методами розв'язування рівнянь з параметрами. У посібнику наведено короткий теоретичний матеріал і приклади розв'язування практичних завдань, в тому числі, підвищеної складності; підібрано завдання для самостійного розв'язування, що сприятимуть удосконаленню та закріпленню навичок виконання вправ. Посібник призначений для вивчення таких освітніх компонент як: «Елементарна математика (Алгебра)», «Практикум із розв'язування задач з параметрами», «Практикум із розв'язування математичних олімпіад (5-9 класи)», «Практикум із розв'язування конкурсних та олімпіадних задач з математики (10-11 класи)», «Задачі з параметрами». Пропонований посібник може бути корисним для здобувачів освіти, педагогічних і науково-педагогічних працівників закладів загальної середньої освіти, закладів професійно-технічної освіти, закладів вищої освіти як при підготовці до олімпіад, так і для підготовки до національного мультипредметного тесту (зовнішнього незалежного оцінювання), фахової підготовки.

УДК 51(076)
ББК 22.1я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Ряд практичних завдань економіки, хімії, фізики зводяться до розв'язування математичних задач різних типів, зокрема з параметрами. Саме тому задачам із параметрами приділяють особливу увагу в шкільному курсі математики. Однак, як показує практика, завдання з параметрами є одним із найважчих розділів шкільного курсу математики. Адже під час розв'язування таких завдань не достатньо володіти формулами елементарної математики та методами розв'язування рівнянь і нерівностей, а необхідно також вміти детально аналізувати умову, будувати ряд логічних міркувань, дотримуватися математичної культури мислення.

Особливу увагу при вивченні підходів до розв'язування завдань з параметрами слід приділити розв'язуванню рівнянь з параметрами, оскільки цей тип задач є базовим при оволодінні темою. Ціллю навчально-методичного посібника було систематизувати рівняння, що містять параметр, розглянути алгоритми та прийоми їх розв'язування з урахуванням властивостей різних функцій.

Навчально-методичний посібник містить шість розділів. Основою посібника є перші два розділи, у яких розглядаються поняття параметра, лінійні та квадратні рівняння з параметром, методи їх розв'язування. Вони спрямовані не просто на формування уявлення про рівняння з параметром, а є підґрунтям для вивчення наступних типів рівнянь, таких як дробово-раціональні, ірраціональні, показникові та логарифмічні, які розглядаються в 4-6 розділах посібника, оскільки більшість з них зводяться саме до розв'язування лінійних і квадратних рівнянь. Значної уваги заслуговують рівняння, що містять модуль і параметр, які розглядаються у третьому розділі посібника, оскільки такі рівняння в шкільному курсі математики зустрічаються дуже рідко.

Посібник містить чіткі пояснення як працювати з різними рівняннями, що містять параметр, та методичні поради щодо їхнього розв'язування. Кожен розділ посібника включає в себе вправи для самостійної роботи здобувачів освіти, що дозволить їм закріпити отримані знання.

Навчально-методичний посібник розрахований на здобувачів вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика), вчителів математики та учнів закладів загальної середньої освіти, зокрема, під час факультативів, підготовки до олімпіад з математики та національного мультипредметного тесту.

1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

1.1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ

Рівняння виду $Ax = B$, де A і B – деякі сталі, називається лінійним рівнянням із однією змінною x. ***Лінійним рівнянням із змінною та параметром*** будемо називати таке лінійне рівняння $Ax = B$ зі змінною x, у якому хоча б одна з величин A і B – це параметр або функція від параметра.

1. Якщо $A \neq 0$, то поділимо обидві частини рівняння $Ax = B$ на A та отримаємо розв'язок $x = \dfrac{B}{A}$ – єдиний корінь лінійного рівняння $Ax = B$.
2. Якщо $A = 0$, то лінійне рівняння набуває вигляду $0x = B$.

Випадок 1. Якщо $A = 0$ і $B = 0$, то отримаємо $0x = 0$, розв'язком якого може бути будь-яке число. Тому рівняння $Ax = B$ має безліч коренів.

Випадок 2. Якщо $A = 0$, а $B \neq 0$, то при будь-якому значенні x отримаємо хибну рівність $0x = B$. Тому рівняння $Ax = B$ немає коренів.

Суттєвим моментом є область визначення параметра, оскільки у рівнянні на параметр можуть бути накладені певні обмеження.

Приклад 1.1. Розв'язати рівняння $5x = a$ з параметром a.

Розв'язання

Рівняння $5x = a$ – лінійне, коефіцієнт біля змінної не дорівнює нулю. Тому розв'язком буде $x = \dfrac{a}{5}$.

Відповідь: якщо $a \in R$, то $x = \dfrac{a}{5}$.

Приклад 1.2. Розв'язати рівняння $ax = 4$ з параметром a.

Розв'язання

Рівняння $ax = 4$ – лінійне, коефіцієнт біля змінної може бути довільним числом (нулем у тому числі). Тому, щоб знайти розв'язки такого рівняння, потрібно розділити обидві частини рівняння на a у випадку, якщо $a \neq 0$. Розв'язок рівняння буде мати вигляд $x = \frac{4}{a}$. Якщо $a = 0$, то ділити не можна. Підставивши значення $a = 0$ у рівняння, отримаємо $0x = 4$. Отже, $x \in \varnothing$, тобто рівняння розв'язків немає.

Відповідь: якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{4}{a}$;
якщо $a = 0$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння $bx = 0$ з параметром b.

Розв'язання

Оскільки на коефіцієнт при змінній не накладено жодних умов, то, очевидно, що він може дорівнювати нулю. Тому потрібно розглянути два випадки: якщо $b \neq 0$, то $x = \frac{0}{b} = 0$; якщо $b = 0$, то $0x = 0$ і матимемо, що $x \in R$.

Відповідь: якщо $b \neq 0$, то $x = 0$;
якщо $b = 0$, то $x \in R$.

Приклад 1.4. Розв'язати рівняння $(a^2 - 4a + 3)x = a - 1$ з параметром a.

Розв'язання

Рівняння, що задане в умові задачі, лінійне відносно змінної x. Потрібно застосувати аналогічний алгоритм розв'язування. Тому розглянемо два випадки: коефіцієнт біля змінної рівний нулю або відмінний від нуля.

Якщо $a^2 - 4a + 3 \neq 0$, тобто $a \neq 1$, $a \neq 3$, то

$$x = \frac{a-1}{a^2 - 4a + 3} = \frac{a-1}{(a-1)(a-3)} = \frac{1}{a-3}.$$

При $a^2 - 4a + 3 = 0$, тобто $a = 1$, $a = 3$, матимемо: якщо $a = 1$, то $0x = 0$, $x \in R$; якщо $a = 3$, то $0x = 2$, $x \in \varnothing$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то $x \in R$;
якщо $a = 3$, то $x \in \varnothing$;
якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$, то $x = \frac{1}{a-3}$.

Приклад 1.5. Знайти значення параметра a, при якому рівняння $(5+a)x=7a-3$ має корінь 5.

Розв'язання

Оскільки корінь рівняння відомий, то підставимо його в рівняння та знайдемо невідомий параметр, який йому відповідає.

$$(5+a)5=7a-3, 25+5a=7a-3, -2a=-28, a=14.$$

Відповідь: $a=14$.

Приклад 1.6. Знайти значення параметра a, при якому рівняння $7-9x=a+1$ і $5x-2=2a-3$ мають спільний корінь.

Розв'язання

Знайдемо корені кожного рівняння:

$$7-9x=a+1,\ x=\frac{a+1-7}{-9}=-\frac{a-6}{9}=\frac{6-a}{9}.$$

$$5x-2=2a-3,\ x=\frac{2a-3+2}{5}=\frac{2a-1}{5}.$$

Оскільки ці рівняння за умовою мають спільний корінь, то прирівняємо знайдені корені. Це дасть можливість знайти значення параметра, при якому виконується умова задачі.

Отже,

$$\frac{6-a}{9}=\frac{2a-1}{5}, 5(6-a)=9(2a-1), -5a-18a=-9-30, -23a=-39, a=\frac{39}{23}.$$

Відповідь: $a=\frac{39}{23}$.

Приклад 1.7. Знайти значення параметра a, при яких рівняння $ax=1$:

1) не має коренів;
2) має від'ємний корінь;
3) має корінь більший за 1, але менший за 2.

Розв'язання

1) Якщо $a=0$, $0x=1$, то рівняння розв'язків не має.

2) Якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{1}{a}$; цей розв'язок $x=\frac{1}{a}<0$ тільки коли $a<0$.

3) Якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{1}{a}$ і $1<\frac{1}{a}<2$,

$$\begin{cases}\frac{1}{a}>1,\\ \frac{1}{a}<2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1-a}{a}>0,\\ \frac{1-2a}{a}<0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in(0;1),\\ a\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right);\end{cases}\Rightarrow a\in\left(\frac{1}{2};1\right).$$

Відповідь: 1) $a=0$; 2) $a\in(-\infty;0)$; 3) $a\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Приклад 1.8. Знайти всі натуральні значення параметра a, при яких корінь рівняння $ax=6$ теж є натуральним числом.

Розв'язання

Якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{6}{a}$. Корінь рівняння буде натуральним числом, якщо значення дробу $\frac{6}{a}$ буде натуральним числом. Тому $a=\{1;2;3;6\}$.

Відповідь: $a=\{1;2;3;6\}$.

1.2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Для всіх значень параметра a, розв'язати рівняння:

1.1. $ax=-3$;

1.2. $(a^3-2a^2-5a+10)x-a=-2$;

1.3. $ax-3x=a^2-9$;

1.4. $(3a-2)x+4=3a+2$;

1.5. $a^2x=a(5x+2)-10$;

1.6. $(a^3-1)x=a^2+a+1$;

1.7. $(a^2-3a+2)x=a^2+3a-4$;

1.8. $a^2x+1=x+a$;

1.9. $\frac{a+x}{2}-1=\frac{x-3}{a}$;

1.10. $3x-5a=a^2-2x$.

2. Знайти значення параметра t, при яких рівняння $3(2-x)=4(t-2x)$ має додатні розв'язки.
3. Визначте, при яких значеннях параметра k рівняння $\frac{4x+5k}{3}=\frac{5x-3k}{2}$ має від'ємні розв'язки.
4. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\frac{ax+11}{3}=\frac{4x-5a}{7}$ має від'ємний розв'язок.
5. При яких значеннях параметра t рівняння $3(x+2)(t-1)+1=t^2$:
   1) має єдиний розв'язок; 2) має безліч розв'язків?
6. Визначте, при яких значеннях параметра k рівняння $3k+3(x+1)=\frac{3kx+15}{5}$:
   1) має єдиний розв'язок; 2) не має розв'язків.
7. При яких значеннях параметра a рівняння $4x+16=a(a-x)$ має єдиний розв'язок; скільки коренів має це рівняння, якщо $a=-4$?
8. При яких значеннях параметра k рівняння $(k^2-8k+15)x=k^2-4k-5$:
   1) не має жодного кореня; 2) має безліч коренів;
   3) має лише один корінь?
9. При яких значеннях параметра a рівняння $ax-7=4x-a$ матиме:
   1) єдиний розв'язок; 2) нульовий розв'язок;
   3) безліч розв'язків; 4) не матиме жодного розв'язку?
10. При яких значеннях параметра a рівняння $(a-3)(x-2)=a^2$:
    1) має розв'язок, що дорівнює 0; 2) не має розв'язку?
11. При яких значеннях параметра k рівняння $\frac{k}{2}(1-x)=1+\frac{3}{2}x$ має розв'язок, що дорівнює нулю?
12. Визначте кількість розв'язків рівняння $k^2x+3=k(x+3)$ залежно від параметра k.
13. Дослідити рівняння зі змінною x залежно від параметра:
    13.1. $ax+9=3x-1$;
    13.2. $k(x+1)+2=6(x+1)$;
    13.3. $2-4ax=10-x$;
    13.4. $\frac{-k(x-1)}{2}=\frac{x-1}{k+2}$.

14. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $3(x+1)=4+ax$ матиме корінь більший за –1.
15. Знайдіть всі значення параметра a, при кожному з яких розв'язок рівняння $10x-15a=13-5ax+2a$ більший за 2.
16. Знайдіть всі значення параметра m, при кожному з яких розв'язок рівняння $5x-18m=21-5mx-m$ більший за 3.
17. Знайдіть всі значення параметра b, при кожному з яких розв'язок рівняння $14x+8b=8+2bx+3b$ більший за 1.
18. Знайдіть всі значення параметра b, при кожному з яких розв'язок рівняння $6-3b+4bx=12x+4b$ більший за 1.

2. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

2.1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ

У цьому параграфі розглянемо рівняння виду $ax^2+bx+c=0$. Зрозуміло, що при $a=0$ рівняння буде лінійним, а при $a\neq 0$ – квадратним.

Кількість різних випадків для квадратних рівнянь значно більша, ніж для лінійних. Розглянемо деякі з них:

- квадратне рівняння не має дійсних коренів тоді і тільки тоді, коли $D<0$;
- квадратне рівняння має два дійсних різних корені тоді і тільки тоді, коли $D>0$;
- квадратне рівняння має один (два дійсних рівних корені) корінь тоді і тільки тоді, коли $D=0$;
- два додатних корені тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1x_2>0, \\ x_1+x_2>0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} b^2-4ac>0, \\ \dfrac{c}{a}>0, \\ -\dfrac{b}{a}>0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} D>0, \\ af(0)>0, \\ x_в>0, \end{cases}$$

де $f(x)=ax^2+bx+c$, $x_в$ – вершина параболи $f(x)=ax^2+bx+c$;

- два від'ємних корені тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1x_2>0, \\ x_1+x_2<0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} b^2-4ac>0, \\ \dfrac{c}{a}>0, \\ -\dfrac{b}{a}<0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} D>0, \\ af(0)>0, \\ x_в<0; \end{cases}$$

- корені різних знаків тоді і тільки тоді, коли:

$$x_1x_2<0, \text{ або } \frac{c}{a}<0, \text{ або } ac<0, \text{ або } af(0)<0;$$

- корінь, рівний нулю, тоді і тільки тоді, коли: $x_1x_2=0$ або $c=0$;
- два різних корені x_1,x_2: $x_1,x_2>L$, де L – довільне дійсне число, тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D>0, \\ af(L)>0, \\ x_в>L; \end{cases}$$

- два різних корені x_1,x_2: $x_1,x_2<L$, де L – довільне дійсне число, тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D>0, \\ af(L)>0, \\ x_в<L; \end{cases}$$

- два різних корені x_1,x_2: $x_1<L<x_2$, де L – довільне дійсне число, тоді і тільки тоді, коли $af(L)<0$;
- два різних корені x_1,x_2: $x_1<L<x_2<N$, де L, N – довільні дійсні числа, $N>L$, тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} af(L)<0, \\ af(N)>0; \end{cases}$$

- два різних корені x_1,x_2: $L<x_1<N<x_2$, тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} af(L)>0, \\ af(N)<0; \end{cases}$$

- два різних корені x_1,x_2: $x_1<L<N<x_2$, тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} af(L)<0, \\ af(N)<0; \end{cases}$$

- один корінь належить інтервалу (L,N), а другий лежить поза його межами тоді і тільки тоді, коли $f(L)f(N)<0$.

Розглянемо приклади розв’язання квадратних рівнянь з параметром.

Приклад 2.1. При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2+2(a+1)x+9a-5=0$$

має один корінь; два різних корені; не має жодного кореня?

Розв’язання

Оскільки задане рівняння завжди буде квадратним, то знайдемо дискримінант рівняння:

$$D=\left(2(a+1)\right)^2-4(9a-5)=4(a+1)^2-36a+20=$$

$$=4a^2+8a+4-36a+20=4a^2-28a+24.$$

1 випадок. Розглянемо випадок, коли рівняння має один корінь. У цьому випадку дискримінант дорівнює 0.

$$4a^2-28a+24=0.$$

Коренями цього рівняння є $a_1=1$, $a_2=6$.

Отже, при $a=1$ і $a=6$ рівняння має один корінь.

2 випадок. Розглянемо випадок, коли рівняння має два різних корення. У цьому випадку $D>0$, тобто $4a^2-28a+24>0$.

Оскільки $f(a)=4a^2-28a+24$ – парабола, напрямлена вітками вгору, то розв’язком нерівності є $a\in(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$.

Отже, при $a\in(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$ рівняння має два різні розв’язки.

3 випадок. Розглянемо випадок, коли рівняння не має коренів. У цьому випадку $D<0$. Шукані a будуть розв’язками нерівності:

$$4a^2-28a+24<0.$$

Розв’язавши нерівність, одержимо $a\in(1;6)$.

Отже, при $a\in(1;6)$ рівняння не має розв’язків.

Відповідь: при $a=1$ і $a=6$ рівняння має один корінь; при $a\in(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$ – два різні корені; при $a\in(1;6)$ – рівняння не має коренів.

Приклад 2.2. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$(a+1)x^2 - ax + a - 3 = 0$$

має не більше одного розв'язку.

Розв'язання

1 випадок. Розглянемо випадок, коли $a+1=0$, тобто $a=-1$. У цьому разі рівняння набуде вигляду: $x-4=0$. Одержане рівняння є лінійним, і, очевидно, має єдиний розв'язок $x=4$.

Отже, при $a=-1$ рівняння має єдиний розв'язок.

2 випадок. Нехай $a+1\neq 0$. Тоді задане рівняння є квадратним рівнянням. Квадратне рівняння має не більше одного кореня тільки у випадку, коли $D\leq 0$. Знайдемо дискримінант: $D=a^2-4(a+1)(a-3)=-3a^2+8a+12$. Щоб знайти значення параметра a, при яких рівняння в цьому випадку має не більше одного розв'язку, потрібно знайти розв'язки нерівності:

$$-3a^2+8a+12\leq 0.$$

Знайдемо корені відповідного квадратного рівняння $-3a^2+8a+12=0$:

$$D=8^2-4\cdot(-3)\cdot 12=208;$$

$$a_1=\frac{-8+\sqrt{208}}{-6}=\frac{4-2\sqrt{13}}{3};\ a_2=\frac{-8-\sqrt{208}}{-6}=\frac{4+2\sqrt{13}}{3}.$$

Тоді нерівність $-3a^2+8a+12\leq 0$ виконується для

$$a\in\left(-\infty;\frac{4-2\sqrt{13}}{3}\right]\cup\left[\frac{4+2\sqrt{13}}{3};+\infty\right).$$

Врахуємо, що $a+1\neq 0$, тобто $a\neq -1$.

Оскільки

$$-1\notin\left(-\infty;\frac{4-2\sqrt{13}}{3}\right]\cup\left[\frac{4+2\sqrt{13}}{3};+\infty\right),$$

то при

$$a+1\neq 0: a\in\left(-\infty;\frac{4-2\sqrt{13}}{3}\right]\cup\left[\frac{4+2\sqrt{13}}{3};+\infty\right).$$

Відповідь: $a=-1$ і $a\in\left(-\infty;\frac{4-2\sqrt{13}}{3}\right]\cup\left[\frac{4+2\sqrt{13}}{3};+\infty\right)$.

Приклад 2.3. При якому значенні параметра p відношення коренів рівняння $px^2 - px - 3x = -3$ дорівнює 3?

Розв'язання

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$px^2 - x(p+3) + 3 = 0.$$

Очевидно, що у випадку, коли $p=0$, рівняння є лінійним і має єдиний корінь $x=1$. Цей випадок не відповідає умові задачі.

Припустимо, що $p \neq 0$. Нас цікавить випадок, коли рівняння має два різні корені x_1, x_2 (рівними корені бути не можуть, оскільки $\frac{x_1}{x_2} \neq 1$). Скористаємося теоремою Вієта і отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{p+3}{p}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{p}. \end{cases}$$

Врахувавши, що за умовою $\frac{x_1}{x_2} = 3$, одержимо систему трьох рівнянь, що містить три невідомі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{p+3}{p}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{p}, \\ \dfrac{x_1}{x_2} = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо шукане p:

$$\begin{cases} 3x_2 + x_2 = \dfrac{p+3}{p}, \\ 3x_2 \cdot x_2 = \dfrac{3}{p}, \\ x_1 = 3x_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = \dfrac{p+3}{p}, \\ 3{x_2}^2 = \dfrac{3}{p}, \\ x_1 = 3x_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{p+3}{4p}, \\ 3\left(\dfrac{p+3}{4p}\right)^2 = \dfrac{3}{p}, \\ x_1 = 3x_2. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $3\left(\dfrac{p+3}{4p}\right)^2=\dfrac{3}{p}$:

$$\left(\frac{p+3}{4p}\right)^2=\frac{1}{p};\Rightarrow \frac{p^2+6p+9-16p}{16p^2}=0;\Rightarrow p^2-10p+9=0, p\neq 0;\Rightarrow p_1=1,\ p_2=9.$$

Відповідь: $p=1$ або $p=9$.

Приклад 2.4. При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2-ax+a+7=0$ рівна 10?

Розв'язання

Нехай x_1 та x_2 – корені заданого рівняння. Тоді згідно з теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1+x_2=a, \\ x_1x_2=a+7. \end{cases}$$

За умовою ${x_1}^2+{x_2}^2=10$. Звідси одержимо:

$${x_1}^2+{x_2}^2=\left({x_1}^2+{x_2}^2+2x_1x_2\right)-2x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=a^2-2(a+7)=10.$$

Одержимо рівняння $a^2-2a-24=0$, коренями якого є $a_1=6$, $a_2=-4$.

При $a=6$ одержимо рівняння $x^2-6x+13=0$, дискримінант якого $D=-16$, $x\in\varnothing$.

При $a=-4$ одержимо рівняння $x^2+4x+3=0$, коренями якого є $x_1=-3$, $x_2=-1$. Перевіримо умову ${x_1}^2+{x_2}^2=10$: $(-3)^2+(-1)^2=9+1=10$.

Відповідь: $a=-4$.

Приклад 2.5. При яких значеннях параметра a сума коренів квадратного рівняння $4x^2-2(a-2)x+1=0$ є додатною?

Розв'язання

Знайдемо при яких значеннях параметра a рівняння має корені:

$$D=4(a-2)^2-16=4\left((a-2)^2-4\right)=4\left(a^2-4a+4-4\right)=4a(a-4)\geq 0.$$

Розв'язавши нерівність $4a(a-4)\geq 0$, одержимо, що $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$.

Оскільки за умовою задачі сума коренів повинна бути додатною, то, скориставшись теоремою Вієта, одержимо: $x_1 + x_2 = \dfrac{2(a-2)}{4} > 0$. Звідси маємо, що $a \in (2;+\infty)$.

Враховуючи a, при яких рівняння має корені, одержимо, що при $a \in [4;+\infty)$ сума коренів рівняння буде додатною.

Відповідь: $a \in [4;+\infty)$.

Приклад 2.6. При яких значеннях параметра a корені рівняння

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$$

задовольняють нерівність $x > 5$?

Розв'язання

Розглянемо функцію $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$.

Оскільки $x > 5$, тоді:

$$\begin{cases} D = 4(a+1)^2 - 4(9a-5) \geq 0, \\ 1 \cdot f(5) = 5^2 - 2 \cdot (a+1) \cdot 5 + 9a - 5 > 0, \\ x_в = \dfrac{2(a+1)}{2} > 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 28a + 24 \geq 0, \\ -a + 10 > 0, \\ a > 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 7a + 6 \geq 0, \\ a < 10, \\ a > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-6) \geq 0, \\ a < 10, \\ a > 4; \end{cases} \Leftrightarrow a \in [6;10).$$

Відповідь: $a \in [6;10)$.

Приклад 2.7. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 + ax + 4 = 0$ належать інтервалу $(1;3)$?

Розв'язання

Оскільки за умовою корені заданого рівняння належать інтервалу $(1;3)$, то x_1, x_2 більші 1 і x_1, x_2 менші 3. Розглянемо функцію $f(x) = x^2 + ax + 4$. Тоді:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ 1 \cdot f(1) > 0, \\ 1 \cdot f(3) > 0, \\ x_в > 1, \\ x_в < 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0, \\ f(1) > 0, \\ f(3) > 0, \\ 1 < x_в < 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 16 \geq 0, \\ a + 5 > 0, \\ 3a + 13 > 0, \\ 1 < -\frac{a}{2} < 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)(a+4) \geq 0, \\ a > -5, \\ a > -\frac{13}{3}, \\ -6 < a < -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty), \\ a > -5, \\ a > -\frac{13}{3}, \\ -6 < a < -2; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{13}{3}; -4\right].$$

Відповідь: $a \in \left(-\frac{13}{3}; -4\right]$.

Приклад 2.8. Два підйомних крани, працюючи разом, розвантажили баржу за t год. За який час кожен кран розвантажить баржу, якщо перший витрачає на це на a годин менше, ніж другий?

Розв'язання

З умови задачі випливає, що $t > 0$, $a > 0$.

Нехай перший кран може виконати роботу за x годин. Тоді другий кран – за $(x + a)$ годин. Складемо рівняння:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{tx + ta + tx - x^2 - xa}{x(x+a)t} = 0,$$

$$\frac{x^2 + (a - 2t)x - ta}{x(x+a)t} = 0,$$

$$x^2 + (a - 2t)x - ta = 0.$$

Знайдемо дискримінант одержаного квадратного рівняння:

$$D = (a - 2t)^2 + 4at = 4t^2 + a^2.$$

Очевидно, що $D>0$, а, отже, рівняння має корені при довільних значеннях параметра a. Знайдемо корені: $x_1=\dfrac{2t-a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}$, $x_2=\dfrac{2t-a-\sqrt{4t^2+a^2}}{2}$. Оскільки $2t=\sqrt{4t^2}$, то виконуватиметься нерівність $2t-a<\sqrt{4t^2+a^2}$, і тому $x_2=\dfrac{2t-a-\sqrt{4t^2+a^2}}{2}<0$ не задовольняє умову задачі.

Знайдемо час роботи другого крана:

$$\frac{2t-a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}+a=\frac{2t+a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}.$$

Відповідь: при $t>0$, $a>0$ час виконання роботи першим і другим краном дорівнює $\dfrac{2t-a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}$, $\dfrac{2t+a+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}$ відповідно.

Приклад 2.9. Скільки коренів має рівняння $\left|x^2-4|x|-5\right|=a$ залежно від параметра a?

Розв'язання

На площині Oxy побудуємо графік функцій $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ та пряму $y=a$. Графіком функції $y=a$ є пряма, яка паралельна осі Ox, або співпадає з нею у випадку, коли $a=0$. Залежно від значень, яких набуває параметр a, пряма $y=a$ має з графіком функції $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ різну кількість спільних точок (рис. 2.1).

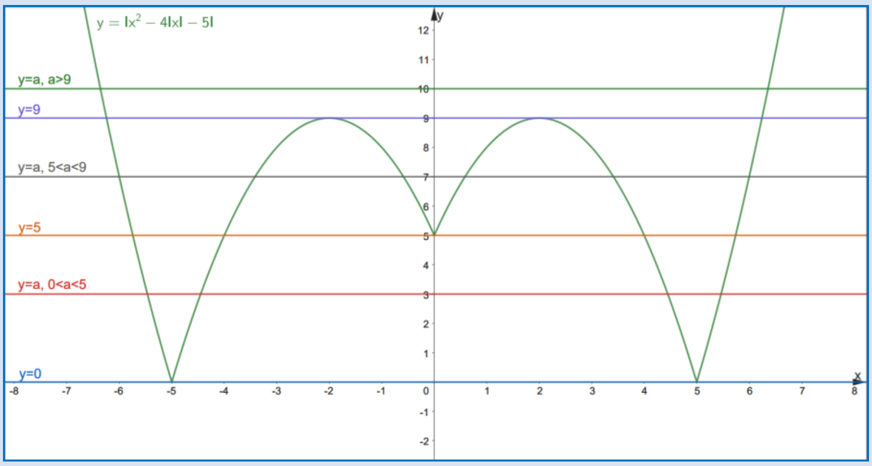

Рис. 2.1.

З графіка бачимо, що можливі випадки:

1) якщо $a<0$, то пряма $y=a$ не має з графіком функції $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ жодної спільної точки, а, отже, рівняння $\left|x^2-4|x|-5\right|=a$ в цьому випадку не має коренів;
2) якщо $a=0$, то пряма $y=0$ має з графіком функції $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ дві спільні точки, а, отже, рівняння $\left|x^2-4|x|-5\right|=a$ в цьому випадку має два корені.
3) при $0<a<5$ пряма $y=a$ має з графіком функції $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ чотири спільні точки, а, отже, рівняння $\left|x^2-4|x|-5\right|=a$ в цьому випадку має 4 корені;
4) якщо $a=5$, то пряма $y=5$ має з графіком функції $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ п'ять спільних точок, а, отже, рівняння $\left|x^2-4|x|-5\right|=a$ в цьому випадку має 5 коренів;
5) при $5<a<9$ пряма $y=a$ має з графіком функції $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ шість спільних точок, а, отже, рівняння $\left|x^2-4|x|-5\right|=a$ в цьому випадку має 6 коренів;
6) якщо $a=9$, то пряма $y=9$ має з графіком функції $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ чотири спільні точки, а, отже, рівняння $\left|x^2-4|x|-5\right|=a$ в цьому випадку має 4 корені;
7) при $a>9$ пряма $y=a$ має з графіком функції $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$ дві спільні точки, а, отже, рівняння $\left|x^2-4|x|-5\right|=a$ в цьому випадку має 2 корені.

Відповідь: при $a<0$ рівняння розвязків не має;

при $a=0$ і $a>9$ рівняння має два корені;
при $0<a<5$ і $a=9$ рівняння має чотири корені;
при $a=5$ рівняння має 5 коренів;
при $5<a<9$ рівняння має шість коренів.

2.2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Розв'язати рівняння для всіх допустимих значень параметра:

   1.1. $ax^2-(a+1)x+a^2+a=0$;

   1.2. $(k-5)x^2+3kx-(k-5)=0$;

   1.3. $\left(a^2+a-2\right)x^2-2a^2+a+1=0$;

   1.4. $x^2+|x|+a=0$;

   1.5. $x^2-2x+1=a$;

   1.6. $a^2x^2-3ax+2a^2=0$;

   1.7. $a^2x^2-4=0$?

2. При яких значеннях параметра рівняння має два різних корені:

   2.1. $x^2+(2a+3)x+a^2-a+5=0$;

   2.2. $4x^2-2x+m=0$;

   2.3. $(2k+3)x^2+(k+1)x+4=0$;

   2.4. $(a-1)x^2+2(a-1)x+2a+1=0$?

3. При яких значеннях параметра рівняння має один корінь:

   3.1. $(a+4)x^2+2(a+2)x+1=0$;

   3.2. $(a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$;

   3.3. $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$?

4. При яких значеннях параметра рівняння не має коренів:

   4.1. $2x^2-2(2m+1)x+m(m-1)=0$;

   4.2. $(a-1)x^2+2(a+3)x+2a=0$?

5. При яких значеннях параметра a сума коренів рівняння $x^2+2ax-8=0$ дорівнює 6?
6. При яких значеннях параметра a різниця коренів рівняння $x^2-ax+2=0$ дорівнює 1?
7. При яких значеннях a сума квадратів коренів рівняння $x^2-4x+a=0$ дорівнює 16?

8. Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому один з коренів рівняння $4x^2-15x+4a^2=0$ був би квадратом другого.
9. Знайдіть всі значення параметра a, при яких різниця коренів рівняння $2x^2-(a+1)x+a-1=0$ дорівнює їх добутку.
10. Знайдіть всі значення параметра m, при кожному з яких рівняння $(1-2m)x^2-6mx-1=0$ і $mx^2-x+1=0$ мають спільний корінь. Знайдіть цей корінь.
11. При яких значеннях параметра a сума квадратів різних коренів рівняння $ax^2+6x-6=0$ більша за 3?
12. При яких значеннях параметра m корені рівняння $mx^2-(2m+1)x+3m-1=0$ більші за 1?
13. При яких значеннях параметра k рівняння $kx^2-(3k-2)x+k-1=0$ має корені різних знаків?
14. При яких значеннях параметра m рівняння $(m+1)x^2-2mx+2m-2=0$ має різні корені одного знаку?
15. При якому найменшому цілому додатному значенні параметра a корені рівняння $ax^2+ax-2=0$ належать проміжку $(-3;1)$?

3. ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

3.1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ

У цьому розділі розглядатимемо рівняння виду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \qquad (*)$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – многочлени зі змінною x та параметром a. Або рівняння, в яких ліва та / або права частини складаються з дробово-раціональних доданків, що містять параметр a.

Отже, ***дробово-раціональним рівнянням із змінною*** x ***та параметром*** a називається рівняння, яке містить хоча б один дробовий вираз з параметром.

Наприклад, $\frac{3}{ax+2}-\frac{2}{3x+a}=0$, $\frac{a^2x^2+4+4ax}{a^2x^2-4}=2\cdot\frac{x-1}{x+2}$.

Основний аналітичний прийом розв'язування дробово-раціональних рівняння з параметром аналогічний до розв'язування таких рівнянь без параметра.

Як відомо, дробово-раціональні рівняння розв'язують за допомогою рівносильних перетворень та властивостей дробів.

Пригадаємо властивості дробів:

1) $\frac{\triangle}{\square}=0;\Leftrightarrow\begin{cases}\triangle=0,\\ \square\neq 0.\end{cases}$

2) $\frac{\triangle}{\square}=\frac{\bigcirc}{\square};\Leftrightarrow\begin{cases}\triangle=\bigcirc,\\ \square\neq 0.\end{cases}$

3) $\frac{\triangle}{\square}=\frac{\bigcirc}{\diamond};\Leftrightarrow\begin{cases}\triangle\cdot\diamond=\square\cdot\bigcirc,\\ \square\neq 0,\\ \diamond\neq 0.\end{cases}$

Після зведення дробово-раціонального рівняння до вигляду (*) розв'язують рівняння $P(x)=0$ і вимагають, щоб $Q(x)\neq 0$.

Під час розв'язування дробово-раціональних рівнянь із змінною x та параметром a важливим елементом є дослідження отриманих коренів. Інакше кажучи, потрібно дослідити, при яких значеннях параметра знаменники дробів, що входять у рівняння, на множині коренів не дорівнюють нулю.

Приклад 3.1. Розв'язати рівняння $\frac{3}{ax+2}-\frac{2}{3x+a}=0$ для всіх значень параметра a.

Розв'язання

Виконаємо рівносильне перетворення заданого рівняння:

$$\frac{3}{ax+2}=\frac{2}{3x+a}.$$

Отримане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 3(3x+a)=2(ax+2), \\ 3x+a\neq 0, \\ ax+2\neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x+3a=2ax+4, \\ x\neq -\frac{a}{3}, \\ x\neq -\frac{2}{a}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x-2ax=4-3a, \\ x\neq -\frac{a}{3}, \\ x\neq -\frac{2}{a}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(9-2a)=4-3a, \\ x\neq -\frac{a}{3}, \\ x\neq -\frac{2}{a}. \end{cases}$$

Якщо $9-2a=0$, $a=\frac{9}{2}$, то перше рівняння системи матиме вигляд $x\left(9-2\cdot\frac{9}{2}\right)=4-3\cdot\frac{9}{2}$, $x\cdot 0=-\frac{19}{2}$, що неможливо. Отже, в цьому випадку рівняння розв'язків не має.

Якщо $9-2a\neq 0$, $a\neq\frac{9}{2}$, то $x=\frac{4-3a}{9-2a}$. Враховуючи обмеження системи, з'ясуємо, при яких значеннях a вираз $x=\frac{4-3a}{9-2a}$ буде коренем цього рівняння. Для цього підставимо знайдене x в обмеження системи $3x+a\neq 0$ та $ax+2\neq 0$.

Отримаємо:

$$3\cdot\frac{4-3a}{9-2a}+a\neq 0,$$
$$\frac{12-9a}{9-2a}+a\neq 0,$$
$$\frac{12-9a+9a-2a^2}{9-2a}\neq 0,$$
$$\frac{12-2a^2}{9-2a}\neq 0,$$
$$\frac{2\left(6-a^2\right)}{9-2a}\neq 0,$$
$$\frac{6-a^2}{9-2a}\neq 0,$$
$$6-a^2\neq 0,$$
$$a\neq\pm\sqrt{6};$$

$$a\cdot\frac{4-3a}{9-2a}+2\neq 0,$$
$$\frac{4a-3a^2}{9-2a}+2\neq 0,$$
$$\frac{4a-3a^2+18-4a}{9-2a}\neq 0,$$
$$\frac{18-3a^2}{9-2a}\neq 0,$$
$$\frac{3\left(6-a^2\right)}{9-2a}\neq 0,$$
$$\frac{6-a^2}{9-2a}\neq 0,$$
$$6-a^2\neq 0,$$
$$a\neq\pm\sqrt{6}.$$

Відповідь: якщо $a\neq\pm\sqrt{6}$ і $a\neq\frac{9}{2}$, то $x=\frac{4-3a}{9-2a}$;

якщо $a=\pm\sqrt{6}$ і $a=\frac{9}{2}$, то $x\in\varnothing$.

Приклад 3.2. Розв'язати рівняння $\frac{3-x^2}{a(ax-2)}+\frac{1}{ax-2}=\frac{x}{a}$ для всіх значень параметра a.

Розв'язання

Перепишемо задане рівняння у вигляді $\frac{3-x^2+a}{a(ax-2)}=\frac{x}{a}$.

Рівняння має сенс за умов $a\neq 0$ і $ax-2\neq 0$. За таких обмежень воно рівносильне рівнянню

$$a\left(3-x^2+a\right)=xa\left(ax-2\right).$$

Оскільки $a\neq 0$, то поділимо останню рівність на a:

$$3-x^2+a=x\left(ax-2\right),$$

$$3-x^2+a=ax^2-2x,$$

$$3-x^2+a-ax^2+2x=0,$$

$$-x^2\left(1+a\right)+2x+3+a=0,$$

$$\left(1+a\right)x^2-2x-\left(3+a\right)=0.$$

Якщо $a=-1$, то матимемо лінійне рівняння $-2x-2=0$, звідки $x=-1$.

При $a\neq -1$ матимемо квадратне рівняння зі змінною x та параметром a.

Розв'яжемо його:

$$D=4+4\left(1+a\right)\left(3+a\right)=4+4\left(3+a+3a+a^2\right)=4+4\left(3+4a+a^2\right)=$$

$$=4+12+16a+4a^2=4a^2+16a+16=4\left(a^2+4a+4\right)=4\left(a+2\right)^2.$$

Як бачимо, вираз $4\left(a+2\right)^2$ завжди буде невід'ємним при будь-якому значенні параметра a.

Тому:

$$x_1=\frac{2-\sqrt{4\left(a+2\right)^2}}{2\left(a+1\right)}=\frac{2-2\left(a+2\right)}{2\left(a+1\right)}=\frac{2\left(1-\left(a+2\right)\right)}{2\left(a+1\right)}=\frac{1-\left(a+2\right)}{a+1}=\frac{-a-1}{a+1}=\frac{-\left(a+1\right)}{a+1}=-1,$$

$$x_2=\frac{2+\sqrt{4\left(a+2\right)^2}}{2\left(a+1\right)}=\frac{2+2\left(a+2\right)}{2\left(a+1\right)}=\frac{2\left(1+\left(a+2\right)\right)}{2\left(a+1\right)}=\frac{1+\left(a+2\right)}{a+1}=\frac{a+3}{a+1}.$$

Визначимо такі значення параметра a, при яких отримані вирази для x_1 та x_2 будуть коренями цього рівняння:

1) умова $ax_1-2\neq 0$ виконується, якщо $a\cdot\left(-1\right)-2\neq 0,\Rightarrow -a\neq 2,\Rightarrow a\neq -2;$

2) умова $ax_2-2\neq 0$ виконується, якщо

$$a\cdot\frac{a+3}{a+1}-2\neq 0,\Rightarrow\frac{a^2+3a-2a-2}{a+1}\neq 0,\Rightarrow\frac{a^2+a-2}{a+1}\neq 0,\Rightarrow a^2+a-2\neq 0,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1\neq 1 \text{ і } a_2\neq -2.$$

Відповідь: якщо $a\neq 0;-2$, то $x=-1$;

якщо $a\neq 0;\pm1;-2$, то $x=\dfrac{a+3}{a+1}$;

якщо $a=-2;0$, то $x\in\varnothing$.

Приклад 3.3. Розв'язати рівняння $\dfrac{a^2x^2+4+4ax}{a^2x^2-4}=2\cdot\dfrac{x-1}{x+2}$.

Розв'язання

Виконаємо перетворення. Рівняння має зміст при $x\neq -2$, $ax-2\neq 0$, $ax+2\neq 0$. Тоді:

$$\frac{(ax+2)^2}{(ax-2)(ax+2)}=\frac{2(x-1)}{x+2},$$

$$\frac{ax+2}{ax-2}=\frac{2(x-1)}{x+2},$$

$$(ax+2)(x+2)=2(x-1)(ax-2),$$

$$ax^2+2ax+2x+4=2\left(ax^2-2x-ax+2\right),$$

$$ax^2+2ax+2x+4=2ax^2-4x-2ax+4,$$

$$ax^2+2ax+2x+4-2ax^2+4x+2ax-4=0,$$

$$-ax^2+4ax+6x=0,$$

$$ax^2-4ax-6x=0.$$

Якщо $a=0$, то $-6x=0,\Rightarrow x=0$.

Якщо $a\neq 0$, то

$$ax^2-x(4a+6)=0,$$

$$x\left(ax-(4a+6)\right)=0,$$

$$ax\left(x-\frac{4a+6}{a}\right)=0,$$

$$x_1=0,\ \ x_2=\frac{4a+6}{a}=4+\frac{6}{a}.$$

Оскільки перетворення були нерівносильними, то виконаємо перевірку. Значення $x=0$ перетворює задане рівняння на тотожність: $-1=-1$. Отже, $x=0$ – корінь початкового рівняння при довільному значенні параметра a.

Значення $x=4+\dfrac{6}{a}$ – корінь рівняння, якщо одночасно справедливі умови: $x\neq -2$, $ax-2\neq 0$, $ax+2\neq 0$. З'ясуємо, якими при цьому будуть обмеження на параметр a:

1) $4+\dfrac{6}{a}\neq -2,\Rightarrow \dfrac{6}{a}\neq -6,\Rightarrow -6a\neq 6,\Rightarrow a\neq -1;$

2) $a\left(4+\dfrac{6}{a}\right)-2\neq 0,\Rightarrow a\left(4+\dfrac{6}{a}\right)\neq 2,\Rightarrow 4a+6\neq 2,\Rightarrow 4a\neq -4;\Rightarrow a\neq -1$ і $a\neq 0$;

3) $a\left(4+\dfrac{6}{a}\right)+2\neq 0,\Rightarrow a\left(4+\dfrac{6}{a}\right)\neq -2,\Rightarrow 4a+6\neq -2,\Rightarrow 4a\neq -8;\Rightarrow a\neq -2$ і $a\neq 0$.

Отже, $x=4+\dfrac{6}{a}$ є коренем заданого рівняння, якщо $a\neq -1$, $a\neq -2$ і $a\neq 0$. Крім того, $x_1=x_2=0$, якщо $4+\dfrac{6}{a}=0,\Rightarrow \dfrac{6}{a}=-4,\Rightarrow -4a=6,\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}.$

Відповідь: якщо $a=-2;-1;0;-\dfrac{3}{2}$, то $x=0$;

якщо $a\neq -2;-1;0;-\dfrac{3}{2}$, то $x=0;\ 4+\dfrac{6}{a}$.

Приклад 3.4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(a+1)^2}{x^2}=a\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{a+1}{x}\right)$.

Розв'язання

Позначимо $\dfrac{x}{2}+\dfrac{a+1}{x}=t$. Тоді $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{a+1}{x}\right)^2=t^2$ або

$$\frac{x^2}{4}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{a+1}{x}+\frac{(a+1)^2}{x^2}=t^2,\Rightarrow \frac{x^2}{4}+a+1+\frac{(a+1)^2}{x^2}=t^2,\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{(a+1)^2}{x^2}=t^2-a-1.$$

Отже, в результаті заміни задане рівняння набуде вигляду:

$$t^2-a-1=at,\Rightarrow t^2-at-a-1=0.$$

Отримане рівняння є квадратним. Розв'яжемо його:

$$D=(-a)^2+4(a+1)=a^2+4a+4=(a+2)^2.$$

Як бачимо, дискримінант при будь-яких значеннях параметра a буде невід'ємним. Тому рівняння $t^2-at-a-1=0$ має такі корені:

$$t_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{(a+2)^2}}{2}=\frac{a\pm(a+2)}{2},$$

$$t_1=\frac{a+a+2}{2}=\frac{2a+2}{2}=a+1,$$

$$t_2=\frac{a-(a+2)}{2}=\frac{a-a-2}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{aligned}&\frac{x}{2}+\frac{a+1}{x}=-1,\\&\frac{x}{2}+\frac{a+1}{x}=a+1;\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\frac{x^2+2(a+1)}{2x}+1=0,\\&\frac{x^2+2(a+1)}{2x}-(a+1)=0;\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\frac{x^2+2(a+1)+2x}{2x}=0,\\&\frac{x^2+2(a+1)-2x(a+1)}{2x}=0;\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}&x^2+2x+2(a+1)=0,\\&x^2-2x(a+1)+2(a+1)=0;\end{aligned}\right.\\x\neq0.\end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння сукупності. Воно завжди буде квадратним рівнянням із змінною x при будь-яких значеннях параметра a. Знайдемо для цього рівняння дискримінант $D=4-8(a+1)=$ $=4-8a-8=-8a-4=4(-2a-1)$. Розглянемо такі можливі випадки:

1) $D>0,\ 4(-2a-1)>0,\ -2a-1>0,\ -2a>1,\ a<-\frac{1}{2}.$

Отже, при $a<-\frac{1}{2}$, перше рівняння сукупності матиме такі два дійсні різні корені: $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4(-2a-1)}}{2}=-1\pm\sqrt{-2a-1}.$

2) $D=0,\ 4(-2a-1)=0,\ -2a-1=0,\ -2a=1,\ a=-\frac{1}{2}.$

Отже, при $a=-\frac{1}{2}$, перше рівняння сукупності матиме такі два дійсні рівні корені: $x_1=x_2=\frac{-2}{2}=-1.$

3) $D<0,\ 4(-2a-1)<0,\ -2a-1<0,\ -2a<1,\ a>-\frac{1}{2}.$

Отже, при $a>-\frac{1}{2}$, перше рівняння сукупності не матиме коренів.

Знайдені розв'язки не повинні дорівнювати нулю, тобто $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{-2a-1}\neq 0$. Зрозуміло, що $x_1=-1-\sqrt{-2a-1}\neq 0$. Знайдемо значення параметра a, при якому виконуватиметься умова $x_2=-1+\sqrt{-2a-1}\neq 0$, звідки $\sqrt{-2a-1}\neq 1,\Rightarrow -2a-1\neq 1,\Rightarrow -2a\neq 2,\Rightarrow a\neq -1.$

Аналогічно розв'яжемо друге рівняння сукупності. Воно завжди буде квадратним рівнянням із змінною x при будь-яких значеннях параметра a. Знайдемо для цього рівняння дискримінант

$$D=4(a+1)^2-8(a+1)=4\left(a^2+2a+1\right)-8a-8=4a^2-4=4\left(a^2-1\right).$$

Розглянемо такі можливі випадки:

1) $D>0,\ 4\left(a^2-1\right)>0,\ a^2-1>0,\ (a-1)(a+1)>0,\ a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty).$

Отже, при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, друге рівняння сукупності матиме такі два дійсні різні корені: $x_{3,4}=\frac{2(a+1)\pm\sqrt{4\left(a^2-1\right)}}{2}=a+1\pm\sqrt{a^2-1}.$

2) $D=0,\ 4\left(a^2-1\right)=0,\ a^2-1=0,\ a^2=1,\ a=\pm 1.$

Отже, при $a=\pm 1$, друге рівняння сукупності матиме такі дійсні корені: $x_3=x_4=\frac{2(1+1)}{2}=2$ при $a=1$; $x_3=x_4=\frac{2(-1+1)}{2}=0$ при $a=-1$. Але, оскільки $x\neq 0$, то систему задовольняє лише корінь $x=2$.

3) $D<0,\ 4\left(a^2-1\right)<0,\ a^2-1<0,\ (a-1)(a+1)<0,\ a\in(-1;1)$.

Отже, при $a\in(-1;1)$, друге рівняння сукупності не матиме коренів.

Знайдені розв'язки не повинні дорівнювати нулю, тобто $x_{3,4}=a+1\pm\sqrt{a^2-1}\neq 0$. Знайдемо значення параметра a, при якому виконуватиметься нерівність $x_3=a+1+\sqrt{a^2-1}\neq 0$, звідки

$$\sqrt{a^2-1}\neq -a-1,\Rightarrow a^2-1\neq\left(-(a+1)\right)^2,\Rightarrow a^2-1\neq a^2+2a+1,\Rightarrow 2a+2\neq 0,\Rightarrow a\neq -1.$$

Перевіримо, чи дійсно при $a=-1$ значення $x_3=0$. Маємо, що $x_3=-1+1+\sqrt{(-1)^2-1}=0+\sqrt{0}=0$.

Аналогічно з'ясуємо при якому значенні параметра a виконуватиметься $x_4=a+1-\sqrt{a^2-1}\neq 0$. Отримаємо:

$$a+1\neq\sqrt{a^2-1},\Rightarrow (a+1)^2\neq a^2-1,\Rightarrow a^2+2a+1-a^2+1\neq 0,\Rightarrow 2a\neq -2,\Rightarrow a\neq -1.$$

Перевіримо, чи дійсно при $a=-1$ значення $x_4=0$. Маємо $x_4=-1+1-\sqrt{(-1)^2-1}=0-\sqrt{0}=0$.

Зауважимо, що з сукупності системи ще маємо: $a+1=-1,\Rightarrow a=-2$. Тому при $a=-2$ сукупність рівносильна одному рівнянню $x^2+2x-2=0$, звідки $x=-1\pm\sqrt{3}$.

Об'єднавши отримані результати, і, врахувавши умову $x\neq 0$, позначимо знайдені розв'язки на прямій параметра (рис. 3.1) та запишемо відповідь.

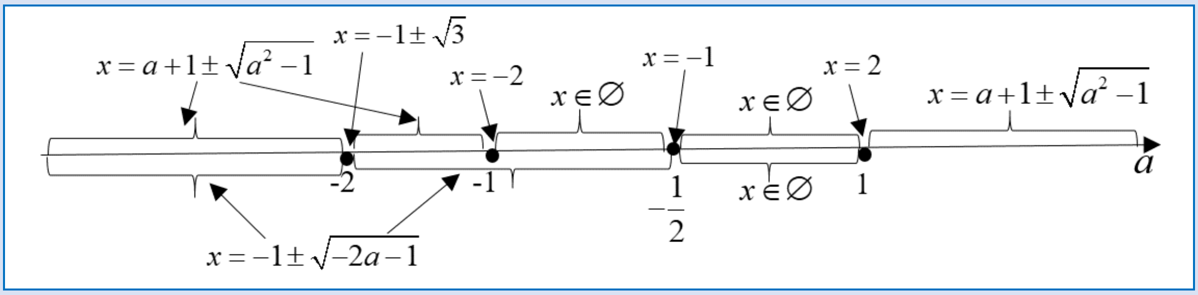

Рис. 3.1.

Відповідь:

якщо $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)$, то $x=-1\pm\sqrt{-2a-1}$, $x=a+1\pm\sqrt{a^2-1}$;

якщо $a=-2$, то $x=-1\pm\sqrt{3}$;

якщо $a=-1$, то $x=-2$;

якщо $a\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, то $x=-1\pm\sqrt{-2a-1}$;

якщо $a=-\frac{1}{2}$, то $x=-1$;

якщо $a\in\left(-\frac{1}{2};1\right)$, то $x\in\varnothing$;

якщо $a=1$, то $x=2$;

якщо $a\in(1;+\infty)$, то $x=a+1\pm\sqrt{a^2-1}$.

Приклад 3.5. При яких значеннях параметра a тільки один корінь рівняння $x^2+\frac{1}{x^2}-(3a-5)\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a^2-5a+2=0$ задовольняє нерівність $|x|>1$?

Розв'язання

Введемо заміну: $x+\frac{1}{x}=t$. Тоді:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2,\Rightarrow x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2,\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2,\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Підставимо зроблені заміни у задане рівняння:

$$t^2-2-(3a-5)t+2a^2-5a+2=0,$$

$$t^2-(3a-5)t+2a^2-5a=0,$$

$$D=\left(-(3a-5)\right)^2-4\left(2a^2-5a\right)=9a^2-30a+25-8a^2+20a=a^2-10a+25=(a-5)^2.$$

Як бачимо, дискримінант при будь-яких значеннях параметра a буде невід'ємним. Тому рівняння $t^2-(3a-5)t+2a^2-5a=0$ має такі корені:

$$t_1=\frac{3a-5+\sqrt{(a-5)^2}}{2}=\frac{3a-5+(a-5)}{2}=\frac{3a-5+a-5}{2}=\frac{4a-10}{2}=2a-5,$$

$$t_2=\frac{3a-5-\sqrt{(a-5)^2}}{2}=\frac{3a-5-(a-5)}{2}=\frac{3a-5-a+5}{2}=\frac{2a}{2}=a.$$

Повернемось до заміни: $x+\frac{1}{x}=a$ або $x+\frac{1}{x}=2a-5$.

Для рівняння $x+\frac{1}{x}=a$, $x^2-ax+1=0$, $D=a^2-4$, $x\neq 0$.

Рівняння матиме два дійсні різні корені, якщо $D>0$, тобто

$$a^2-4>0,\Rightarrow (a-2)(a+2)>0,\Rightarrow a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty),\Leftrightarrow |a|>2.$$

Знайдемо корені рівняння: $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$.

Оскільки для рівняння $x^2-ax+1=0$ за теоремою Вієта $x_1x_2=1$, то x_1 і x_2 – взаємно обернені числа, причому вони одночасно або додатні, або від'ємні. При $a>2$ значення $x_1>0$ і $x_2>0$, причому одне з них більше одиниці, а інше буде більшим нуля, але меншим одиниці. Зрозуміло, що $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ задовольнятиме нерівність $x_1>1$, а $x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ задовольнятиме нерівність $0<x_2<1$. Якщо ж $a<-2$, то значення $x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<0$. Тоді від'ємним мусить бути й $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$. При цьому одне з цих значень буде меншим -1, а інше належатиме інтервалу $(-1;0)$. Очевидно, що $-1<x_1<0$, а $x_2<-1$.

Аналогічно розглянемо рівняння $x+\frac{1}{x}=2a-5$, $x^2-(2a-5)x+1=0$, $D=(2a-5)^2-4$.

Рівняння матиме два дійсні різні корені, якщо $D>0$, тобто

$$(2a-5)^2-4>0,\Rightarrow (2a-7)(2a-3)>0,\Rightarrow 4\left(a-\frac{7}{2}\right)\left(a-\frac{3}{2}\right)>0,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\in\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right).$$

Знайдемо корені рівняння: $x_{3,4}=\frac{2a-5\pm\sqrt{(2a-5)^2-4}}{2}$.

Із рівняння $x^2-(2a-5)x+1=0$ за теоремою Вієта $x_3x_4=1$. Така рівність можлива, якщо x_3 і x_4 – взаємно обернені числа, причому вони одночасно або додатні, або від'ємні. При $a\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$ значення $x_3=\frac{2a-5+\sqrt{(2a-5)^2-4}}{2}>0$ та $x_4=\frac{2a-5-\sqrt{(2a-5)^2-4}}{2}>0$, причому одне з них більше одиниці, а інше буде більшим нуля, але меншим одиниці. Очевидно, що значення $x_3>1$, а x_4 задовольняє нерівність $0<x_4<1$. Якщо ж $a<\frac{3}{2}$, то значення $x_3=\frac{2a-5+\sqrt{(2a-5)^2-4}}{2}<0$. Тоді від'ємним мусить бути й x_4. При цьому одне з цих значень буде меншим за -1, а інше належатиме інтервалу $(-1;0)$. Очевидно, що $-1<x_3<0$, а $x_4<-1$.

Звідси випливає, що тільки один корінь цього рівняння за модулем буде перевищувати одиницю, якщо виконуватиметься одна з умов:

1) $\begin{cases}|a|>2,\\ |2a-5|\le 2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty),\\ a\in\left[\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right];\end{cases}\Rightarrow a\in\left(2;\frac{7}{2}\right];$

2) $\begin{cases}|2a-5|>2,\\ |a|\le 2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right),\\ a\in[-2;2];\end{cases}\Rightarrow a\in\left[-2;\frac{3}{2}\right);$

3) $2a-5=a,\Rightarrow a=5.$

Відповідь: $a\in\left[-2;\frac{3}{2}\right)\cup\left(2;\frac{7}{2}\right]\cup\{5\}.$

3.2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Розв'язати рівняння з параметром a:

1.1. $\frac{2}{5x-a}=\frac{3}{ax-1};$

1.2. $\frac{x+2}{a+1}=\frac{2x-a-1}{x-2};$

1.3. $1+\frac{1}{ax}=\frac{1}{x}-\frac{3}{a};$

1.4. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{a+1}{a}$;

1.5. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{x+a}{a+3}=1$;

1.6. $\dfrac{3x-2}{a^2-2a}+\dfrac{x-1}{a-2}+\dfrac{2}{a}=0$.

2. При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{5}{3x-a}=\dfrac{3}{ax-4}$ має додатні розв'язки?

3. При яких значеннях параметра a рівняння $a-2=\dfrac{3x+1}{x+1}$ має від'ємні розв'язки?

4. При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{x^2-(3a-4)x+2a^2-5a+3}{x^2+x-2}=0$ має один корінь?

5. При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ax}=1$ має розв'язок, що більший за 2?

4. МОДУЛЬ У ЗАВДАННЯХ ІЗ ПАРАМЕТРОМ

4.1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ, ЩО МІСТЯТЬ МОДУЛЬ

У цьому параграфі розглянемо рівняння із змінною та параметром, у яких змінна міститься під знаком модуля, наприклад, $|2x-3|=a$, $4x-|2-bx|+3b=0$, $|x-3|+|x+7|=a$. Для розв'язування рівнянь з модулем (модулями) та параметром використовують як аналітичний, так і графічний методи.

Алгоритми розв'язування рівнянь із модулем і параметром аналогічні до розв'язування рівнянь із модулем, але без параметра. Тому доцільно пригадати способи розв'язування рівнянь із модулями залежно від їх виду:

1. Рівняння з одним модулем, зовні якого немає змінної, наприклад, $|x-3|=5a$, $|x^2-a|=8$, $|a-2x^2|-15=3a$.

Такого виду рівняння можна розв'язати шляхом представлення їх у вигляді $|f(x)|=A$, де A – числовий вираз, що не містить змінної, але може містити параметр:

- якщо $A>0$, то перейти до сукупності $\left[\begin{array}{l} f(x)=A, \\ f(x)=-A \end{array}\right.$ або піднести обидві частини рівняння до квадрату;
- якщо $A=0$, то перейти до рівняння $f(x)=0$;
- якщо $A<0$, то $x\in\varnothing$.

Ознайомимось із розв'язаннями деяких вправ.

Звертаємо увагу, що у прикладі 1 параметр міститься поза модулем.

Приклад 4.1. Розв'язати аналітично рівняння $|x-3|=5a$ для всіх значень параметра *a*.

Розв'язання

Спочатку знайдемо область визначення рівняння. І параметр *a*, і змінна *x* можуть приймати будь-які дійсні значення.

Права частина рівняння може бути:

1) додатною, якщо параметр $a > 0$;
2) рівною нулеві, якщо параметр $a = 0$;
3) від'ємною, якщо параметр $a < 0$.

Розглянемо кожен із можливих випадків окремо.

1) $a > 0$.

Тоді задане рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x-3=5a, \\ x-3=-5a; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5a+3, \\ x=-5a+3. \end{array}\right.$$

2) $a = 0$.

У цьому випадку маємо, що $|x-3|=0; \Rightarrow x-3=0; \Rightarrow x=3$.

3) $a < 0$.

За умови $a < 0$ отримаємо, що модуль рівний від'ємному значенню, що неможливо. Тому $x \in \varnothing$.

Відповідь: якщо $a \in (0;+\infty)$, то $x = \pm 5a + 3$;

якщо $a = 0$, то $x = 3$;

якщо $a \in (-\infty;0)$, то $x \in \varnothing$.

У прикладі 2 параметр міститься під знаком модуля.

Приклад 4.2. Розв'язати аналітично рівняння $|x^2 - a| = 8$ для всіх значень параметра *a*.

Розв'язання

Оскільки права частина рівняння додатна, то задане рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2-a=8, \\ x^2-a=-8; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=8+a, \\ x^2=a-8. \end{array}\right.$

Перше рівняння сукупності матиме зміст тільки коли $8 + a \ge 0$, тобто при $a \ge -8$. Тоді розв'язками першого рівняння будуть $x = \pm\sqrt{8+a}$. Якщо $a = -8$, то $x = \pm\sqrt{8-8} = 0$.

Друге рівняння сукупності матиме зміст тільки коли $a - 8 \ge 0$, тобто при $a \ge 8$. Тоді розв'язками другого рівняння будуть $x = \pm\sqrt{a-8}$. Якщо $a = 8$, то $x = \pm\sqrt{8-8} = 0$.

Розв’язками заданого рівняння, тобто рівносильної йому сукупності, буде об’єднання розв’язків на кожному з проміжків прямої параметра *a* (рис. 4.1).

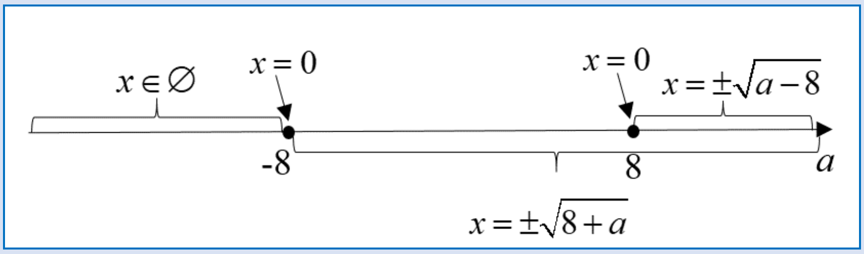

Рис. 4.1.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;-8)$, то $x \in \varnothing$;

якщо $a = \pm 8$, то $x = 0$;

якщо $a \in (-8;8)$, то $x = \pm\sqrt{8+a}$;

якщо $a \in (8;+\infty)$, то $x = \pm\sqrt{a-8}$, $x = \pm\sqrt{8+a}$.

2. Рівняння з одним модулем, зовні якого є змінна, наприклад, $|3x-3|+2 = ax$, $x|x-4|+a = 0$.

У цьому випадку можна спочатку відкрити модуль за означенням або подати рівняння у вигляді $|f(x)| = g(x)$, а потім перейти до:

- рівносильної сукупності $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x), \end{cases} \end{array}\right.$ якщо функція $f(x)$ має простіший вигляд, ніж $g(x)$;
- рівносильної системи $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \end{cases}$ якщо функція $g(x)$ має простіший вигляд, ніж $f(x)$.

Приклад 4.3. Розв’язати аналітично рівняння $|3x-3|+2 = ax$ для всіх значень параметра *a*.

Розв'язання

Для початку знайдемо область визначення рівняння. І параметр a, і змінна x можуть приймати будь-які дійсні значення.

Рівняння містить один модуль, зовні якого є змінна. Оскільки права частина рівняння містить параметр, то перейдемо до рівносильної сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-3\geq 0,\\ 3x-3=ax-2;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-3<0,\\ -3x+3=ax-2;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x\geq 3,\\ 3x-ax=3-2;\end{cases}\\ \begin{cases}3x<3,\\ -3x-ax=-2-3;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 1,\\ (3-a)x=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<1,\\ (3+a)x=5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'яжемо першу систему $\begin{cases}x\geq 1,\\ (3-a)x=1\end{cases}$ сукупності.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт біля змінної дорівнює нулю, тобто $3-a=0;\Rightarrow a=3$. Тоді:

$$\begin{cases}x\geq 1,\\ (3-a)x=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\ (3-3)x=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\ 0\cdot x=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\ 0\neq 1;\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing.$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт біля змінної не дорівнює нулю, тобто $3-a\neq 0,\Rightarrow a\neq 3$. У цьому випадку: $\begin{cases}x\geq 1,\\ (3-a)x=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1,\\ x=\dfrac{1}{3-a}.\end{cases}$ Знайдемо значення параметра, при яких знайдений корінь рівняння задовольнятиме останню систему. Для цього розв'яжемо нерівність $\dfrac{1}{3-a}\geq 1$,

$\dfrac{1}{3-a}-1\geq 0$, $\dfrac{1-3+a}{3-a}\geq 0$, $\dfrac{a-2}{3-a}\geq 0$, $(a-2)(3-a)\geq 0$, $-(a-2)(a-3)\geq 0$, $(a-2)(a-3)\leq 0$, звідки $a\in[2;3)$.

Аналогічно розв'яжемо другу систему $\begin{cases}x<1,\\ (3+a)x=5\end{cases}$ сукупності.

Нехай $3+a=0$, тобто $a=-3$. Тоді:

$$\begin{cases}x<1,\\ (3+a)x=5;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\ (3-3)x=5;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\ 0\cdot x=5;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\ 0\neq 5;\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing.$$

Нехай $3+a\neq 0$, тобто $a\neq -3$. Тоді $\begin{cases} x<1, \\ x=\dfrac{5}{3+a}. \end{cases}$ Знайдемо значення параметра, при яких знайдений корінь рівняння задовольнятиме останню систему. Для цього розв’яжемо нерівність $\dfrac{5}{3+a}<1$, $\dfrac{5}{3+a}-1<0$, $\dfrac{5-3-a}{3+a}<0$, $\dfrac{2-a}{3+a}<0$, $(2-a)(a+3)<0$, $-(a-2)(a+3)<0$, $(a-2)(a+3)>0$, звідки $a\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.

Позначимо знайдені розв’язки на прямій параметра (рис. 4.2) та запишемо відповідь.

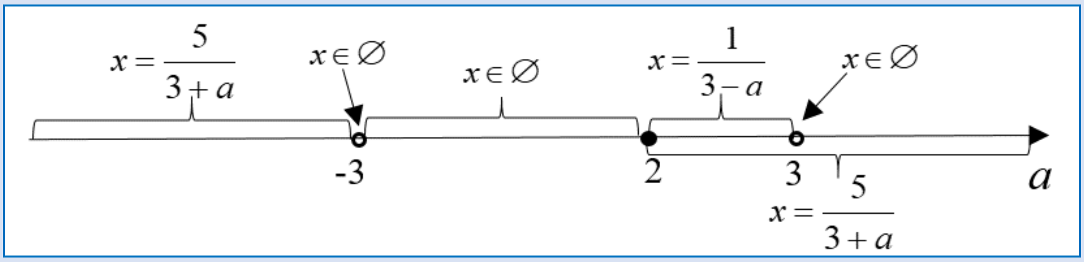

Рис. 4.2.

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;-3)\cup[2;+\infty)$, то $x=\dfrac{5}{3+a}$;

якщо $a\in[-3;2)$, то $x\in\varnothing$;

якщо $a=2$, то $x=1$;

якщо $a\in(2;3)$, то $x_1=\dfrac{1}{3-a}$, $x_2=\dfrac{5}{3+a}$;

якщо $a=3$, то $x\in\varnothing$.

3. Рівняння з двома та більше модулям, наприклад, $|x+5|-a|x-3|=2$ $|x-a|-|x+1|=2$.

Під час розв’язування такого виду рівнянь варто дотримуватись таких порад:

1) знайти область визначення рівняння;
2) знайти значення змінної («нулі» підмодулевих виразів), при яких кожен із підмодулевих виразів перетворюється в нуль;
3) знайденими «нулями» підмодулевих виразів розбити область визначення рівняння на проміжки. Параметр може входити до підмодуле-

вих виразів. Тому розташування таких «нулів» буде змінюватись залежно від значень параметра.

4) за допомогою пробної точки визначити знак кожного з підмодулевих виразів;
5) на кожному з отриманих проміжків розкрити модуль згідно встановлених знаків;
6) знайти корені рівняння;
7) обчислити значення параметра, при яких корінь належить «своєму» проміжку.

Приклад 4.4. Розв’язати аналітично рівняння $|x+5|-a|x-3|=2$ для всіх значень параметра *a*.

Розв’язання

1) Рівняння має зміст при будь-яких значеннях параметра та змінної.
2) Знаходимо «нулі» підмодулевих виразів:

$$x+5=0, \qquad\qquad x-3=0,$$
$$x=-5; \qquad\qquad x=3.$$

3) Розіб’ємо область визначення рівняння на проміжки:

$$(-\infty;-5],(-5;3],(3;+\infty).$$

4) Розкриємо модулі рівняння на кожному з цих проміжків і запишемо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-5],\\ -x-5-a(-x+3)=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-5;3],\\ x+5-a(-x+3)=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;+\infty),\\ x+5-a(x-3)=2;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-5],\\ -x-5+ax-3a=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-5;3],\\ x+5+ax-3a=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;+\infty),\\ x+5-ax+3a=2;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-5],\\ x(a-1)=7+3a;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-5;3],\\ x(a+1)=3a-3;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;+\infty),\\ x(1-a)=-3a-3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв’яжемо кожну з систем сукупності окремо.

4.1) Розв’яжемо першу систему $\begin{cases}x\in(-\infty;-5],\\ x(a-1)=7+3a.\end{cases}$

Якщо $a-1\neq 0$, тобто $a\neq 1$, то $\begin{cases} x\in(-\infty;-5], \\ x=\dfrac{7+3a}{a-1}. \end{cases}$

Знайдемо значення параметра, при яких $x=\dfrac{7+3a}{a-1}$ буде розв'язком системи, тобто розглянемо нерівність $\dfrac{7+3a}{a-1}\leq -5$, $\dfrac{7+3a}{a-1}+5\leq 0$, $\dfrac{7+3a+5a-5}{a-1}\leq 0$, $\dfrac{8a+2}{a-1}\leq 0$, $\dfrac{2(4a+1)}{a-1}\leq 0$, $\dfrac{4a+1}{a-1}\leq 0$, звідки, використовуючи метод інтервалів і те, що $a\neq 1$, матимемо, що $a\in\left[-\dfrac{1}{4};1\right)$.

Якщо $a-1=0$, тобто $a=1$, то $\begin{cases} x\in(-\infty;-5], \\ x\cdot 0=10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-5], \\ x\in\varnothing; \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

4.2) Розв'яжемо другу систему $\begin{cases} x\in(-5;3], \\ x(a+1)=3a-3. \end{cases}$

Якщо $a+1\neq 0$, тобто $a\neq -1$, то $\begin{cases} x\in(-5;3], \\ x=\dfrac{3(a-1)}{a+1}. \end{cases}$

Знайдемо значення параметра, при яких $x=\dfrac{3(a-1)}{a+1}$ буде розв'язком системи, тобто розглянемо нерівність:

$$-5<\frac{3(a-1)}{a+1}\leq 3;\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(a-1)}{a+1}>-5, \\ \dfrac{3(a-1)}{a+1}\leq 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3(a-1)}{a+1}+5>0, \\ \dfrac{3(a-1)}{a+1}-3\leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3a-3+5a+5}{a+1}>0, \\ \dfrac{3a-3-3a-3}{a+1}\leq 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8a+2}{a+1}>0, \\ \dfrac{-6}{a+1}\leq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4a+1}{a+1}>0, \\ \dfrac{6}{a+1}\geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{4};+\infty\right), \\ a\in(-1;+\infty); \end{cases} \Rightarrow a\in\left(-\frac{1}{4};+\infty\right).$$

Якщо $a+1=0$, тобто $a=-1$, то $\begin{cases} x\in(-5;3], \\ x\cdot 0=-6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-5;3], \\ x\in\varnothing; \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

4.3) Розв'яжемо третю систему $\begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ x(1-a) = -3a-3. \end{cases}$

Якщо $1-a \neq 0$, тобто $a \neq 1$, то $\begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ x = \dfrac{-3(a+1)}{-(a-1)} = \dfrac{3(a+1)}{a-1}. \end{cases}$

Знайдемо значення параметра, при яких $x = \dfrac{3(a+1)}{a-1}$ буде розв'язком рівняння, тобто розглянемо нерівність $\dfrac{3(a+1)}{a-1} > 3$, $\dfrac{3(a+1)}{a-1} - 3 > 0$, $\dfrac{3a+3-3a+3}{a-1} > 0$, $\dfrac{6}{a-1} > 0$. Отримана нерівність справедлива при $a \in (1;+\infty)$.

Якщо $1-a=0$, тобто $a=1$, то $\begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ x \cdot 0 = -6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ x \in \varnothing; \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing.$

5) Знайдені розв'язки кожного з випадків об'єднаємо, використовуючи пряму параметра (рис. 4.3). Зазначимо, що $x = \dfrac{7+3a}{a-1}$ є розв'язком початкового рівняння для $a \in \left[-\dfrac{1}{4};1\right)$, а $x = \dfrac{3(a-1)}{a+1}$ є розв'язком початкового рівняння для $a \in \left(-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. Тобто для $a \in \left(-\dfrac{1}{4};1\right)$ рівняння має два розв'язки $x_1 = \dfrac{7+3a}{a-1}$ та $x_2 = \dfrac{3(a-1)}{a+1}$, а при $a = -\dfrac{1}{4}$ коренем рівняння є $x = \dfrac{7+3\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)}{-\dfrac{1}{4}-1} = \dfrac{7-\dfrac{3}{4}}{-\dfrac{5}{4}} = \dfrac{25}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -5$. Оскільки значення $a=1$ належить проміжку $\left(-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$ і на ньому $x = \dfrac{3(a-1)}{a+1}$, то $x = \dfrac{3(a-1)}{a+1} = \dfrac{3(1-1)}{1+1} = 0$. Для $a \in (1;+\infty)$ коренем початкового рівняння буде $x_1 = \dfrac{3(a+1)}{a-1}$ і $x_2 = \dfrac{3(a-1)}{a+1}$.

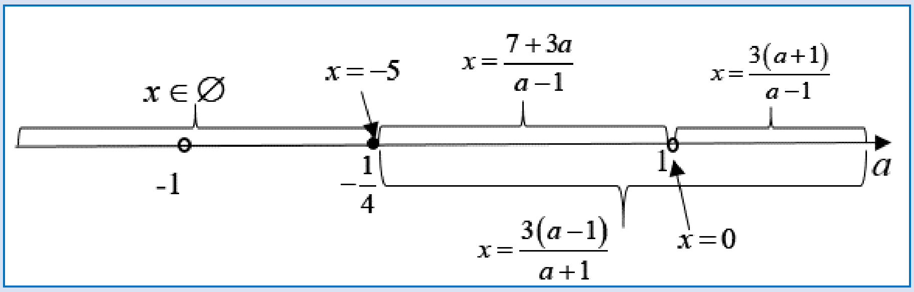

Рис. 4.3.

Відповідь: якщо $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right)$, то $x\in\varnothing$;

якщо $a=-\dfrac{1}{4}$, то $x=-5$;

якщо $a\in\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$, то $x_1=\dfrac{7+3a}{a-1}$, $x_2=\dfrac{3(a-1)}{a+1}$;

якщо $a=1$, то $x=0$;

якщо $a\in(1;+\infty)$, то $x_1=\dfrac{3(a+1)}{a-1}$, $x_2=\dfrac{3(a-1)}{a+1}$.

4. Рівняння виду $|f(x)|=|g(x)|$, наприклад, $|x-3a|=|x|$, $|9+x|=|x-a|$.

Такого виду рівняння можна розв'язувати одним із способів:

1) піднести обидві частини рівняння до квадрату;
2) розв'язувати як рівняння з двома модулями;
3) перейти до сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння $|x+a|=|2x-a|$.

Розв'язання

Рівняння має зміст при будь-яких значеннях параметра та змінної.

Оскільки обидві частини рівняння невід'ємні, то піднесемо їх до квадрату. Отримаємо:

$$(x+a)^2=(2x-a)^2,$$

$$x^2+2ax+a^2=4x^2-4ax+a^2,$$

$$x^2+2ax+a^2-4x^2+4ax-a^2=0,$$

$$-3x^2+6ax=0,$$

$$3x^2-6ax=0,$$

$$x^2-2ax=0,$$

$$x\left(x-2a\right)=0,$$

$$x=0 \text{ або } x-2a=0,$$

$$x=2a.$$

Відповідь: 0; $2a$.

5. Рівняння, які містять модуль у модулі, наприклад, $\left|2|x|-1\right|=a$, $\left|x^2+|x-2|+1\right|=a$, $\left||x-2|-|x|\right|=|x+a|$.

Такі рівняння розв'язуються шляхом розкриття внутрішнього (внутрішніх) модуля (модулів). Після чого отримані рівняння будуть одного з видів, розглянутих у попередніх пунктах. Також можна застосувати графічний метод.

Приклад 4.6. Визначити кількість коренів рівняння $\left|x^2+|x-2|+1\right|=a$ залежно від параметра.

Розв'язання

Розв'яжемо дане рівняння графічним методом.

Спочатку розкриємо внутрішній модуль, знайшовши «нуль» внутрішнього підмодулевого виразу: $x-2=0$, $x=2$. Отже, вісь Ox точкою $x=2$ розбивається на два проміжки $\left(-\infty;2\right]$ та $\left(2;+\infty\right)$. Отримаємо рівносильну сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left(-\infty;2\right],\\ \left|x^2-x+2+1\right|=a;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in\left(2;+\infty\right),\\ \left|x^2+x-2+1\right|=a;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left(-\infty;2\right],\\ \left|x^2-x+3\right|=a;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in\left(2;+\infty\right),\\ \left|x^2+x-1\right|=a.\end{cases}\end{array}\right.$$

У системі координат xOy побудуємо графіки функцій (рис. 4.4):

$$y = f(x) = \left|x^2 - x + 3\right| \text{ та } y = g(x) = \left|x^2 + x - 1\right|.$$

Але спочатку, для зручності побудови, подамо функції під знаком модулів в іншому вигляді:

$$f(x) = \left|x^2 - x + 3\right| = \left|\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 3\right| = \left|\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right| = \left|\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{3}{4}\right|,$$

$$g(x) = \left|x^2 + x - 1\right| = \left|\left(x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 1\right| = \left|\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right| = \left|\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\frac{1}{4}\right|.$$

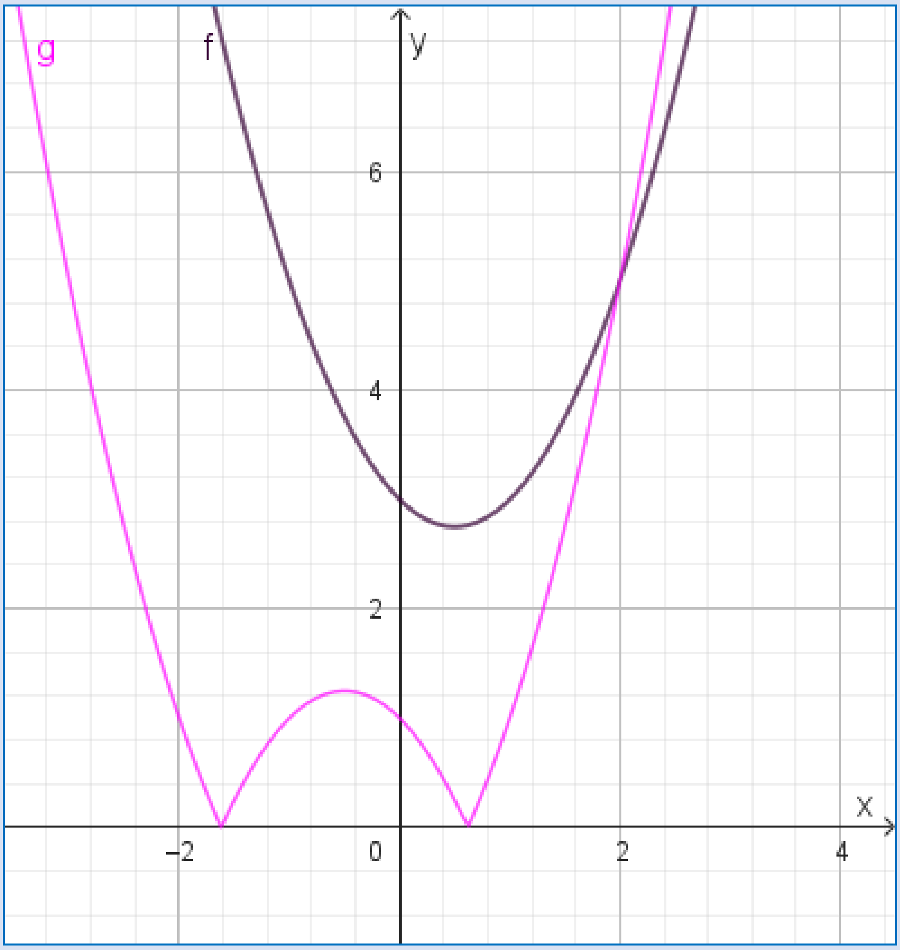

Рис. 4.4.

Залишимо ті частини графіків обох функцій (рис. 4.5), які задані на вказаних у системах сукупності проміжках, тобто на проміжку $(-\infty;2]$ задана функція $y = f(x) = \left|x^2 - x + 3\right|$, а на проміжку $(2;+\infty)$ – функція $y = g(x) = \left|x^2 + x - 1\right|$. Також побудуємо прямі $y = a$ (зелений колір).

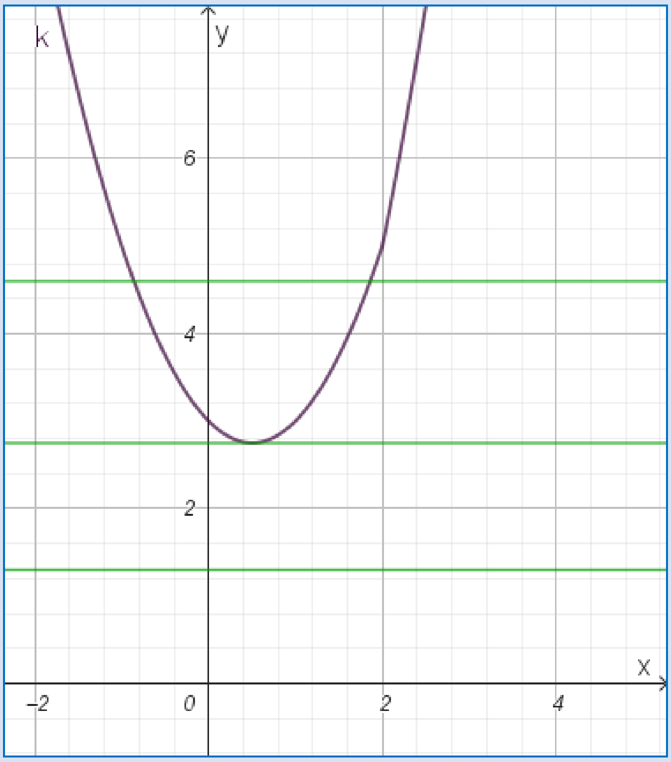

Рис. 4.5.

Як видно з рисунка, пряма $y=a$: для $a\in\left(-\infty;\frac{11}{4}\right)$ точок перетину з графіком функції $k(x)=\left|x^2+|x-2|+1\right|$ немає; для $a=\frac{11}{4}$ – одна точка дотику з графіком функції $k(x)=\left|x^2+|x-2|+1\right|$; для $a\in\left(\frac{11}{4};+\infty\right)$ – дві точки перетину з графіком функції $k(x)=\left|x^2+|x-2|+1\right|$.

Відповідь: для $a\in\left(-\infty;\frac{11}{4}\right)$ рівняння не має розв'язків;

для $a=\frac{11}{4}$ рівняння має один розв'язок;

для $a\in\left(\frac{11}{4};+\infty\right)$ рівняння має два розв'язки.

4.2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Розв'язати аналітично рівняння:

   1.1. $|x+2|=3a$;

   1.2. $|a-2x^2|-15=3a$;

   1.3. $|x-a|=3x-1$;

   1.4. $|x+3|+a|x+8|=5$;

   1.5. $a|x+3|+2|x+4|=2$.

2. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння $x^2+3x=|a(x+3)|$.
3. При яких додатних значеннях параметра a рівняння $x^2+ax+1+|1-x^2|=0$ не має коренів?
4. При яких значеннях параметра a рівняння $|3x-3|+2=ax$ має рівно два розв'язки?
5. Для кожного значення параметра a визначити кількість коренів рівняння $|x^2-2x-3|=a$.
6. При якому значенні параметра a рівняння $||x-4|-2|=a-3$ має три, чотири корені?

5. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

5.1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ

Ірраціональним рівнянням називається рівняння, що містить невідому під знаком кореня.

Основна ідея розв'язування ірраціонального рівняння полягає у зведенні його до раціонального алгебраїчного рівняння, яке, або рівносильне початковому рівнянню, або є його наслідком.

Важливо, перед тим, як розпочати розв'язувати ірраціональні рівняння з параметром, пригадати найпростіші ірраціональні рівняння.

Найпростішим ірраціональним рівнянням називається рівняння виду: $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$.

У випадку, коли $n=2k$, то $\sqrt[2k]{f(x)}=g(x);\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)=g^{2k}(x).\end{cases}$

У випадку, коли $n=2k-1$, то $\sqrt[2k-1]{f(x)}=g(x);\Leftrightarrow f(x)=g^{2k-1}(x)$.

Приклад 5.1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3}=a$.

Розв'язання

Враховуючи властивості арифметичного кореня, розглянемо випадки:

1) $a<0$; 2) $a\geq 0$.

Нехай $a<0$. Тоді, врахувавши, що $\sqrt{x+3}\geq 0$, можна зробити висновок, що рівняння розв'язків не має.

Нехай $a\geq 0$. Підносячи обидві частини рівняння до квадрату, одержимо:

$$x+3=a^2;\Rightarrow x=a^2-3.$$

Відповідь: при $a<0$ рівняння розв'язків не має;
при $a\geq 0$, $x=a^2-3$.

Приклад 5.2. Розв'язати рівняння $a\sqrt{x}=1-a$.

Розв'язання

1 випадок. Розглянемо випадок, коли $a=0$. Тоді $0\cdot\sqrt{x}=1$. Очевидно, що у цьому випадку рівняння розв'язку не має.

2 випадок. Розглянемо випадок, коли $a\neq 0$. У цьому випадку, можна перейти до еквівалентного рівняння $\sqrt{x}=\dfrac{1-a}{a}$, яке рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases} x=\left(\dfrac{1-a}{a}\right)^2, \\ \dfrac{1-a}{a}\geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\left(\dfrac{1-a}{a}\right)^2, \\ a\in(0;1]. \end{cases}$$

Представимо розв'язки на прямій параметра a (рис. 5.1):

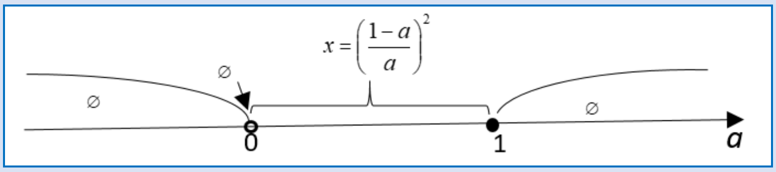

Рис. 5.1.

Відповідь: при $a\in(0;1]$, $x=\left(\dfrac{1-a}{a}\right)^2$;

при $a\in(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$, $x\in\varnothing$.

Приклад 5.3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$.

Розв'язання

Рівняння $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$ рівносильне системі:

$$\begin{cases} x\geq -1, \\ x^2+ax-2a=(x+1)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1, \\ x^2+ax-2a=x^2+2x+1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1, \\ ax-2a=2x+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1, \\ (a-2)x=1+2a. \end{cases}$$

Рівняння $(a-2)x=1+2a$ є лінійним рівнянням з параметром.

При $a=2$, $0\cdot x=5$, а, отже, рівняння розв'язків не має.

Нехай $a \neq 2$. Тоді $x = \dfrac{1+2a}{a-2}$.

Знайдемо значення параметра a, для яких $x = \dfrac{1+2a}{a-2} \geq -1$:

$$\frac{1+2a}{a-2} \geq -1; \Leftrightarrow \frac{1+2a}{a-2} + 1 \geq 0; \Leftrightarrow \frac{1+2a+a-2}{a-2} \geq 0; \Leftrightarrow \frac{3a-1}{a-2} \geq 0.$$

Розв'язавши одержану нерівність, будемо мати, що $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; \infty)$.

Відповідь: при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; \infty)$, $x = \dfrac{1+2a}{a-2}$;

в інших випадках рівняння розв'язків не має.

Приклад 5.4. Розв'язати рівняння $\sqrt{ax-1} = \sqrt{x+a}$.

Розв'язання

Знайдемо область допустимих значень для заданого рівняння:

$$\begin{cases} ax-1 \geq 0, \\ x+a \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \geq 1, \\ x \geq -a. \end{cases}$$

Розглянемо різні випадки.

1 випадок. Нехай $a = 0$, тоді $\begin{cases} 0 \cdot x \geq 1, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \geq 1, \\ x \geq 0. \end{cases}$

У цьому випадку система розв'язку не має.

2 випадок. Нехай $a > 0$, тоді $\begin{cases} ax \geq 1, \\ x \geq -a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{a}, \\ x \geq -a. \end{cases}$

Оскільки $a > 0$, то $\dfrac{1}{a} > 0$, а $-a < 0$. Звідси:

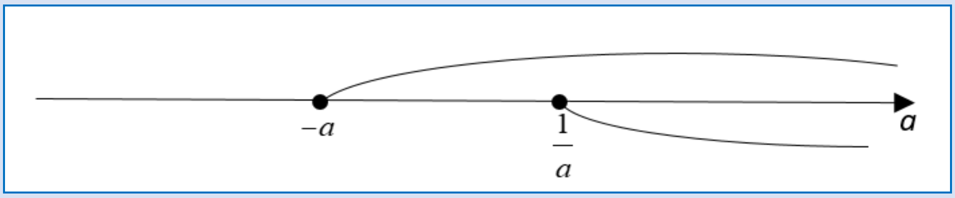

Рис. 5.2.

У цьому випадку $x \in \left[\frac{1}{a};\infty\right)$.

3 випадок. Нехай $a<0$, тоді $\begin{cases} ax \geq 1, \\ x \geq -a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{a}, \\ x \geq -a. \end{cases}$

Оскільки $a<0$, то $\frac{1}{a}<0$, а $-a>0$. Звідси:

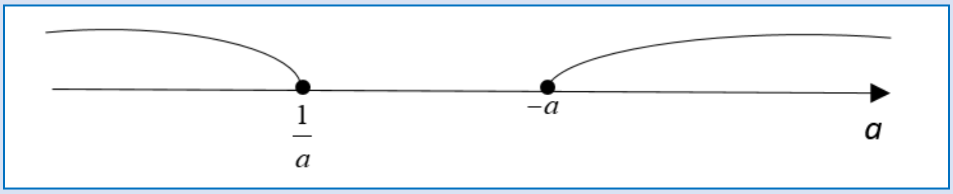

Рис. 5.3.

У цьому випадку система розв'язку не має.

Отже, областю допустимих значень для заданого рівня є $x \in \left[\frac{1}{a};\infty\right)$, де $a>0$.

Тоді рівняння $\sqrt{ax-1}=\sqrt{x+a}$ буде рівносильне системі:

$$\begin{cases} ax-1=x+a, \\ x \geq \frac{1}{a},\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x=a+1, \\ x \geq \frac{1}{a},\ a>0. \end{cases}$$

Розглянемо лінійне рівняння $(a-1)x=a+1$. При $a=1$ одержимо, що $0 \cdot x=2$. Тому рівняння не має розв'язків у цьому випадку. Нехай $a \neq 1$, тоді $x=\frac{a+1}{a-1}$.

З урахуванням умови $x \geq \frac{1}{a}$, $a>0$, будемо мати, що

$$\frac{a+1}{a-1} \geq \frac{1}{a}; \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a(a-1)} \geq 0.$$

Розв'язавши нерівність, одержимо, що $a \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. Оскільки $a>0$, то $a \in (1;+\infty)$.

Отже, при $a \in (1;+\infty)$, $x=\frac{a+1}{a-1}$.

Відповідь: при $a>1$, $x=\dfrac{a+1}{a-1}$;

в інших випадках рівняння не має розв’язків.

Приклад 5.5. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $\sqrt{a-(a+1)(2x+4)}=x+1$ має один корінь.

Розв’язання

Рівняння $\sqrt{a-(a+1)(2x+4)}=x+1$ рівносильне системі:

$$\begin{cases} a-(a+1)(2x+4)=(x+1)^2, \\ x+1\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-(a+1)(2x+4)=x^2+2x+1, \\ x\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2ax-4a-2x-4=x^2+2x+1, \\ x\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x(2a+4)+3a+5=0, \\ x\ge -1. \end{cases}$$

Розглянемо квадратне рівняння $x^2+x(2a+4)+3a+5=0$. Розглянемо випадки, коли це рівняння має один корінь, який задовольняє умову $x\ge -1$.

Розглянемо різні випадки.

1 випадок. Рівняння $x^2+x(2a+4)+3a+5=0$ має один корінь, якщо $D=0$, причому $x\ge -1$:

$$\begin{cases} D=0, \\ x\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a+4)^2-4(3a+5)=0, \\ x\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+4a-4=0, \\ x\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-1=0, \\ x\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, \\ x=\dfrac{-2(a+2)}{2}\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, \\ -a-2\ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, \\ a\le -1; \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отже, при $a=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ корінь $x=-a-2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2 випадок. Припустимо, що рівняння $x^2+x(2a+4)+3a+5=0$ має два різні корені x_1, x_2, причому $x_1<-1<x_2$.

Розглянемо функцію

$$f(x)=x^2+x(2a+4)+3a+5.$$

У цьому випадку має виконуватись умова $1\cdot f(-1)<0$. Звідси:

$$(-1)^2+(-1)(2a+4)+3a+5<0;\Leftrightarrow 2+a<0;\Leftrightarrow a<-2.$$

3 випадок. Припустимо, що рівняння $x^2+x(2a+4)+3a+5=0$ має два різні корені x_1, x_2, причому $x_1=-1$, а $x_2<-1$.

Оскільки $x_1=-1$, то $2+a=0;\Leftrightarrow a=-2$. При $a=-2$ одержимо рівняння $x^2-1=0$, коренями якого є $x_1=-1$, $x_2=1$. Корінь $x_2=1$ не задовольняє умову $x_2<-1$.

Відповідь: рівняння має один корінь при $a\in(-\infty;-2)\cup\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Приклад 5.6. При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{17x^2+8ax+16}=x^2+ax+4$ має три різні корені?

Розв'язання

Рівняння $\sqrt{17x^2+8ax+16}=x^2+ax+4$ рівносильне системі:

$$\begin{cases}17x^2+8ax+16=\left(x^2+ax+4\right)^2,\\ x^2+ax+4\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}17x^2+8ax+16=x^4+a^2x^2+16+2ax^3+8ax+8x^2,\\ x^2+ax+4\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+2ax^3+\left(a^2-9\right)x^2=0,\\ x^2+ax+4\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left(x^2+2ax+a^2-9\right)=0,\\ x^2+ax+4\geq 0;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left((x+a)^2-9\right)=0,\\ x^2+ax+4\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2(x+a-3)(x+a+3)=0,\\ x^2+ax+4\geq 0.\end{cases}$$

Розглянемо рівняння $x^2(x+a-3)(x+a+3)=0$. Коренями цього рівняння будуть $x_1=0$, $x_2=3-a$, $x_3=-a-3$. За умовою ці корені повинні бути різні. Тому $3-a\neq 0$ і $-a-3\neq 0$. Звідси одержуємо, що $a\neq\pm 3$. Отже, при $a\neq\pm 3$ рівняння $x^2(x+a-3)(x+a+3)=0$ має три різні корені. Щоб початкове рівняння мало три різні корені, необхідно, щоб $x_1=0$, $x_2=3-a$, $x_3=-a-3$ при $a\neq\pm 3$ задовольняли умову $x^2+ax+4\geq 0$. Підставивши почергово кожен корінь в цю умову, одержимо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0^2+a\cdot 0+4\geq 0, \\ (3-a)^2+a(3-a)+4\geq 0, \\ (-a-3)^2+a(-a-3)+4\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\geq 0, \\ -3a+13\geq 0, \\ 3a+13\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+13\geq 0, \\ 3a+13\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leq\dfrac{13}{3}, \\ a\geq -\dfrac{13}{3}. \end{cases}$$

З урахуванням того, що $a\neq\pm 3$, одержимо, що при $a\in\left[-\dfrac{13}{3};-3\right)\cup(-3;3)\cup\left(3;\dfrac{13}{3}\right]$ початкове рівняння має три різні корені.

Відповідь: $a\in\left[-\dfrac{13}{3};-3\right)\cup(-3;3)\cup\left(3;\dfrac{13}{3}\right]$.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметром також використовують заміну.

Приклад 5.7. Розв'яжіть рівняння $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a$.

Розв'язання

Нехай $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=t$, $t\geq 0$.

Звідси $x+\frac{1}{4}=t^2;\Leftrightarrow x=t^2-\frac{1}{4}$. Тоді рівняння $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a$ можна переписати у вигляді:

$$t^2-\frac{1}{4}+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+t}=a;\Leftrightarrow t^2-\frac{1}{4}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}}=a;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=a;\Leftrightarrow t^2-\frac{1}{4}+\left|t+\frac{1}{2}\right|=a.$$

Оскільки $t\ge 0$, то $t+\frac{1}{2}>0$. З урахуванням зазначеного одержимо, що

$$t^2-\frac{1}{4}+\left|t+\frac{1}{2}\right|=a;\Leftrightarrow t^2-\frac{1}{4}+t+\frac{1}{2}=a;\Leftrightarrow t^2+t+\frac{1}{4}=a;\Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{2}\right)^2=a.$$

Остання рівність має зміст при $a\ge 0$. Для $a\ge 0$ одержимо

$$t+\frac{1}{2}=\sqrt{a};\Leftrightarrow t=\sqrt{a}-\frac{1}{2}.$$

Врахувавши, що $t\ge 0$, одержимо, що $a\ge\frac{1}{4}$. Тоді для $a\ge\frac{1}{4}$:

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\sqrt{a}-\frac{1}{2};\Leftrightarrow x+\frac{1}{4}=a-\sqrt{a}+\frac{1}{4};\Leftrightarrow x=a-\sqrt{a}.$$

Відповідь: $x=a-\sqrt{a}$ для $a\ge\frac{1}{4}$;

в інших випадках рівняння розв'язку не має.

Приклад 5.8. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}=a$.

Розв'язання

Зрозуміло, що рівняння має зміст при $a\ge 0$. Припустимо, що $a=0$. Таке можливо лише за умови:

$$\begin{cases}x^2-1=0,\\ x^2-2=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2},\\ x=-\sqrt{2}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Очевидно, що в цьому випадку рівняння розв'язку не має.

Нехай $a>0$. Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases}x^2-1\ge 0,\\ x^2-2\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge 1,\\ x^2\ge 2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ge 1,\\ |x|\ge\sqrt{2};\end{cases}\Leftrightarrow |x|\ge\sqrt{2}.$$

Оскільки різниця підкореневих виразів x^2-1 і x^2-2 дорівнює 1, то при $|x|\ge\sqrt{2}$ виконується рівність $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2=1$.

Введемо допоміжні змінні $\sqrt{x^2-1}=u$, $\sqrt{x^2-2}=\vartheta$. З заміни випливає, що $u\ge 0$ та $\vartheta\ge 0$.

Тоді рівняння $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}=a$ запишеться у вигляді

$$u+\vartheta=a.$$

Оскільки $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2=1$, то звідси одержимо, що

$$u^2-\vartheta^2=1,$$

$$(u-\vartheta)(u+\vartheta)=1,$$

$$a(u-\vartheta)=1,$$

$$u-\vartheta=\frac{1}{a}.$$

Отже, в результаті таких міркувань, одержимо систему:

$$\begin{cases} u+\vartheta=a, \\ u-\vartheta=\dfrac{1}{a}, \\ u\ge 0, \vartheta\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right), \\ \vartheta=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right), \\ u\ge 0, \vartheta\ge 0. \end{cases}$$

Оскільки $\vartheta\ge 0$, то

$$\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\ge 0;\Leftrightarrow a-\frac{1}{a}\ge 0;\Leftrightarrow \frac{a^2-1}{a}\ge 0;\Leftrightarrow \frac{(a-1)(a+1)}{a}\ge 0.$$

Розв'язавши нерівність, одержимо, що $a\in[-1;0)\cup[1;+\infty)$. З урахуванням того, що $a>0$, отримаємо, що $a\in[1;+\infty)$. Повернемося до заміни:

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right);\Leftrightarrow x^2-1=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2;\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+1;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+1}\,.$$

Оскільки $a\geq 1$, то згідно з наслідком із нерівності Коші $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$. Тоді:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\geq 4;\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\geq 1;\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+1\geq 2;\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+1}\geq\sqrt{2}\,.$$

Отже, при $a\geq 1$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+1}$, причому $|x_{1,2}|\geq\sqrt{2}$.

Відповідь: при $a\geq 1$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+1}$;

при $a<1$ рівняння коренів не має.

5.2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти мінімальне ціле додатне значення параметра a, при якому рівняння $\sqrt{ax-8}=\sqrt{8x}$ має різні додатні корені.
2. При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{2x^2+ax+2a+10}=x-1$ не має коренів?
3. Розв'язати рівняння для всіх допустимих значень параметра:

   3.1. $\sqrt{x^2-1}=a-x$;

   3.2. $x^2-\sqrt{a-x}=a$;

   3.3. $\sqrt{ax-1}=\sqrt{x+a}$;

   3.4. $\sqrt{bx-3}=b-3$;

   3.5. $\sqrt{x^2-bx-3}=-x$;

   3.6. $\sqrt{4x+a}=2x-1$.
4. Знайдіть всі значення параметра a, при якому рівняння

   $$\sqrt{-4x^3+11x^2+60x-67}=7\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{a^2-9a+18}$$

   має єдиний розв'язок.
5. При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{x+a}+x-a^2=2$ має корінь $x=1$?

6. ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

6.1. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ І ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ

Показниковим рівнянням із зміною x ***та параметром*** a будемо називати рівняння, у якому змінна входить лише до показника степеня, а параметр може входити і до показника, і до основи степеня.

Наприклад,

$$2^{ax^2-1}=2^{2x+1},\ 7^{ax}-(3a-2)7^{ax^2-3x+4}-9=0,\ 3^{ax+4}+3^{x^2+a-1}-3^{a^2x-1}=3.$$

Способи розв'язування показникових рівнянь з параметром аналогічні до способів розв'язування показникових рівнянь без параметра:

1) спосіб зведення обох частин рівняння до степеня з однаковою основою;
2) спосіб винесення спільного множника за дужки;
3) введення допоміжної змінної;
4) спосіб логарифмування;
5) графічний спосіб.

Для розв'язування показникових рівнянь із параметром варто врахувати наступні рекомендації:

1. Використання аналітичного методу розв'язування показникових рівнянь із параметром є значно простішим і точним у порівнянні з графічним методом.
2. Знаходження області визначення показникових рівнянь із параметром, як правило, не потребує особливої уваги. У багатьох випадках область визначення показникових рівнянь – це множина всіх дійсних чисел як для змінної, так і для параметра. Але, звичайно, можливі різні ситуації. Параметр буде впливати на область визначення, якщо він буде знаходитись під знаком певної функції, область визначення якої обмежена. Наприклад, під знаком квадратного кореня.
3. Введення заміни завжди вимагає з'ясування меж існування нової змінної, тобто області визначення для нової функції. При цьому до-

сить часто, враховуючи обмеженість області значень показникової функції, нова змінна приймає лише додатні значення. Це потрібно враховувати. Тобто, якщо знайдені значення нової змінної залежать від параметра, то потрібно знаходити ті значення параметра, при яких можна повернутись до заміни.

Логарифмічним рівнянням із зміною x ***та параметром*** a будемо називати рівняння, у якому параметр входить під знак логарифма або до його основи.

Наприклад,

$$\log_2(a^2x^2-2ax+1)=1,\ \log_{8a-1}(x^2+1)-4\log_{x^2+1}(8a-1)+4=0,$$

$$\log_{\sqrt{a^2-9}}(x^2-4)=5.$$

Під час розв'язування логарифмічних рівнянь із параметром використовують логарифмічні тотожності, властивості логарифмів та операцію потенціювання:

1. *Основна логарифмічна тотожність*: при $a>0$, $a\neq 0$ і $b>0$ виконується рівність $a^{\log_a b}=b$.
2. *Логарифм добутку*: якщо $x>0$, $y>0$, $a>0$ і $a\neq 1$, то виконується рівність $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.
3. *Логарифм частки*: якщо $x>0$, $y>0$, $a>0$ і $a\neq 1$, то виконується рівність $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.
4. Якщо $x>0$, $a>0$ і $a\neq 1$, то для будь-якого $\beta\in R$ виконується рівність $\log_a x^{\beta}=\beta\log_a x$.
5. *Перехід до нової основи логарифма*: якщо $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$, то виконується рівність $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

   5.1. Якщо $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, то виконується рівність $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

   5.2. Якщо $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, то для будь-якого $\beta\neq 0$ виконується рівність $\log_{a^{\beta}} b=\dfrac{1}{\beta}\log_a b$.

Загального способу розв'язування логарифмічних рівнянь із параметром, як і логарифмічних рівнянь без параметра, не існує. Проте, під час розв'язування багатьох логарифмічних рівнянь застосовують теорему та наслідок із неї, сформульовані нижче.

Теорема. Нехай $a>0$, $a \neq 1$. Якщо $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки, якщо $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ і $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Наслідок. Нехай $a>0$, $a \neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне одній із систем $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь із параметром варто врахувати наступні рекомендації:

1. Для розв'язування логарифмічних рівнянь із параметром використовують переважно аналітичний метод. Таке розв'язування має свій недолік – воно зазвичай є громіздким. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь з параметром, особливо в системі координат *xOy*, може бути ефективнішим за умови, що побудова відповідного графіка не вимагатиме багато зусиль.
2. Розв'язування логарифмічного рівняння з параметром містить етап знаходження області визначення (якщо не використовувався спосіб рівносильних перетворень). Досить часто це приводить до розв'язування системи нерівностей, серед яких є такі, що залежать від параметра. В результаті може виявитись, що область визначення може бути різною для відповідних груп значень параметра. Зрозуміло, що наприкінці розв'язування необхідно знайти значення параметра, при яких знайдені корені належать знайденій області визначення. Незважаючи на труднощі, вважається доцільним не замінювати знаходження області визначення перевіркою знайдених коренів.
3. Уведення заміни під час розв'язування логарифмічного рівняння та повернення до неї, як правило, не є складним етапом, оскільки множина значень логарифмічної функції необмежена.

Розглянемо розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь з параметром на конкретних прикладах.

Приклад 6.1. Розв'язати рівняння з параметром $2^{2x} - (2a+1)2^x + a^2 + a = 0$.

Розв'язання

Рівняння $2^{2x} - (2a+1)2^x + a^2 + a = 0$ – показникове, змінна x і параметр a можуть приймати будь-які дійсні значення.

Введемо заміну: $2^x = t$, де $t > 0$. Отримаємо квадратне рівняння відносно нової змінної t:

$$t^2 - (2a+1)t + (a^2 + a) = 0,$$

$$D = \left(-(2a+1)\right)^2 - 4(a^2 + a) = (2a+1)^2 - 4(a^2 + a) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1 > 0.$$

Отже, квадратне рівняння при будь-яких значеннях параметра буде мати два різні корені: $t_1 = \dfrac{2a+1-1}{2} = a$; $t_2 = \dfrac{2a+1+1}{2} = a+1$.

Повернемося до заміни:

- $t_1 > 0$, тобто $t_1 = a > 0$. Отже, якщо $a \in (0;+\infty)$, то повертаємось до заміни: $2^x = a$. Прологарифмувавши цю рівність, отримаємо: $\log_2 2^x = \log_2 a$, $x = \log_2 a$;
- $t_2 > 0$, тобто $t_2 = a+1 > 0$ для $a > -1$. Отже, якщо $a \in \left(-1;+\infty\right)$, то повертаємось до заміни: $2^x = a+1$. Прологарифмувавши цю рівність, отримаємо: $\log_2 2^x = \log_2\left(a+1\right)$, $x = \log_2(a+1)$. Оскільки $0 \in \left(-1;+\infty\right)$, то при $a = 0$, $x = \log_2(0+1) = 0$.

Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметра (рис. 6.1) та запишемо відповідь.

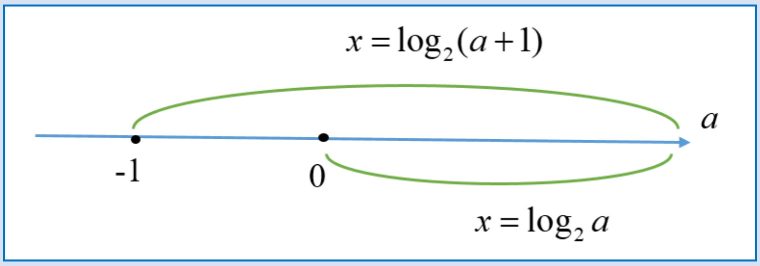

Рис. 6.1.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1]$, то $x \in \varnothing$;

якщо $a \in (-1; 0)$, то $x = \log_2(a+1)$;

якщо $a = 0$, то $x = 0$;

якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x_1 = \log_2 a$, $x_2 = \log_2(a+1)$.

Приклад 6.2. Розв'язати рівняння з параметром $4^x - (2a-1)2^x + a^2 - a = 0$.

Розв'язання

Змінна x і параметр a можуть приймати будь-які дійсні значення.

Приведемо степені до однієї основи $\left(2^x\right)^2 - (2a-1)2^x + a^2 - a = 0$.

Введемо заміну: $2^x = t$, де $t > 0$. Отримаємо квадратне рівняння відносно нової змінної t. Розв'яжемо утворене рівняння:

$$t^2 - (2a-1)t + a^2 - a = 0,$$

$$D = (2a-1)^2 - 4(a^2 - a) = 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 4a = 1 > 0.$$

Отже, квадратне рівняння при будь-яких значеннях параметра буде мати два різні корені: $t_1 = \dfrac{2a-1-1}{2} = a - 1$; $t_2 = \dfrac{2a-1+1}{2} = a$.

Повернемося до заміни:

- $t_1 > 0$, тобто $t_1 = a - 1 > 0, a > 1$. Отже, якщо $a \in (1; +\infty)$, то $2^x = a - 1$, $\log_2 2^x = \log_2(a-1)$, $x = \log_2(a-1)$;
- $t_2 > 0$, тобто $t_2 = a > 0$. Отже, якщо $a \in (0; +\infty)$, то $2^x = a$, $x = \log_2 a$. Оскільки $1 \in \left(0; +\infty\right)$, то при $a = 1$, $x = \log_2 1 = 0$.

Позначимо знайдені розв'язки (рис. 6.2) на прямій параметра та запишемо відповідь.

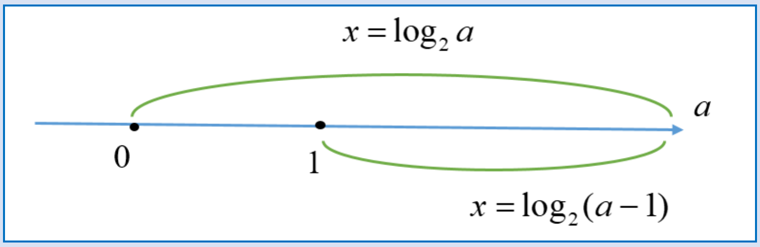

Рис. 6.2.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0]$, то $x \in \varnothing$;

якщо $a \in (0;1)$, то $x = \log_2 a$;

якщо $a = 1$, то $x = 0$;

якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x_1 = \log_2(a-1)$, $x_2 = \log_2 a$.

Приклад 6.3. Розв'язати рівняння з параметром $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.

Розв'язання

Маємо показникове рівняння з модулем. Змінна x і параметр a можуть приймати будь-які дійсні значення.

Введемо заміну: $12^{|x|} = t$, де $t > 0$. Оскільки функція $t = 12^{|x|}$ при всіх значеннях змінної x приймає значення, більші або рівні за 1, то $t \geq 1$ (рис. 6.3).

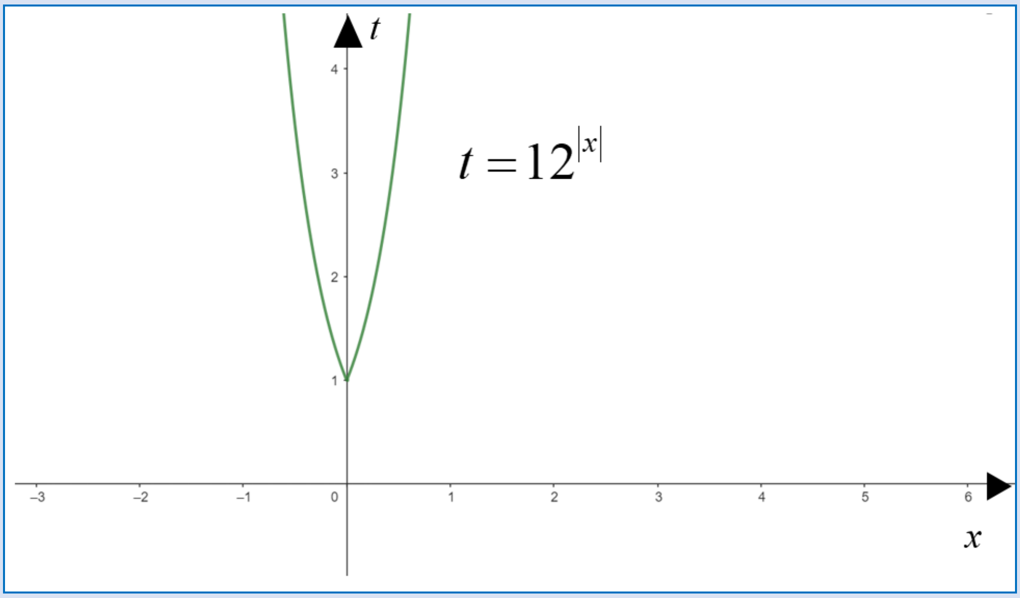

Рис. 6.3.

Після введення заміни отримаємо квадратне рівняння відносно нової змінної t. Розв'яжемо утворене рівняння та повернемося до заміни:

$$t^2 - 2t + a = 0,$$

$$D = 4 - 4a = 4(1-a).$$

Розглянемо різні випадки.

1 випадок. Нехай $D > 0$, тобто $4(1-a) > 0, \Rightarrow a < 1$.

При визначених значеннях параметра квадратне рівняння має два різні корені:

- $t_1 = 1 - \sqrt{1-a} < 1$ (не підходить для заміни, оскільки він менший за одиницю);
- $t_2 = 1 + \sqrt{1-a} > 1$, для якого повернемося до заміни:

$$1+\sqrt{1-a} = 12^{|x|}, \Rightarrow \log_{12} 12^{|x|} = \log_{12}\left(1+\sqrt{1-a}\right), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| = \log_{12}(1+\sqrt{1-a}), \Rightarrow x = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a}).$$

2 випадок. Нехай $D=0$, тобто $4(1-a)=0$, $a=1$. При визначених значеннях параметра квадратне рівняння має два рівні корені (один корінь): $t_1 = t_2 = 1$. Оскільки $t=1$ задовольняє вимогу до заміни, то повернемось до неї: $12^{|x|} = 1$, $\log_{12} 12^{|x|} = \log_{12} 1$, $|x| = 0$, $x = 0$.

3 випадок. Нехай $D<0, 4(1-a)<0$, $a>1$. При визначених значеннях параметра квадратне рівняння, а, отже, і початкове рівняння, не має дійсних коренів.

Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметра (рис. 6.4) та запишемо відповідь.

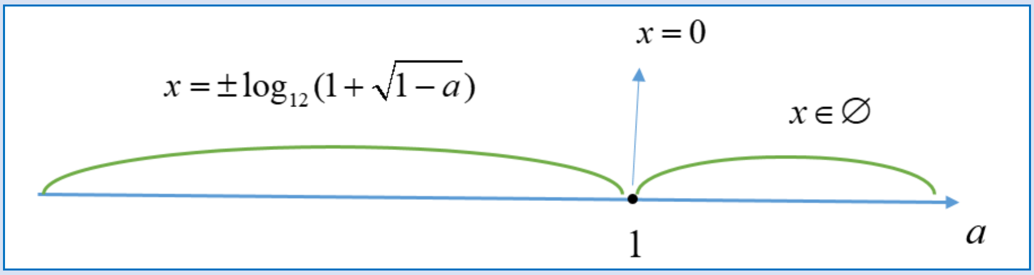

Рис. 6.4.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;1)$, то $x = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$;

якщо $a = 1$, то $x = 0$;

якщо $a \in (1;+\infty)$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 6.4. Розв'язати рівняння з параметром $2\log_3 x + \log_{\frac{x}{3}} 3 = a$.

Розв'язання

Маємо логарифмічне рівняння. Параметр *a* може приймати будь-які дійсні значення. Знайдемо область допустимих значень для змінної *x*:

$$\begin{cases} x>0, \\ \frac{x}{3}>0, \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 3; \end{cases} \Rightarrow x\in(0;3)\cup(3;+\infty). \\ \frac{x}{3}\neq 1; \end{cases}$$

Приведемо логарифми у рівнянні до основи 3:

$$2\log_3 x+\frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{x}{3}}=a\cdot$$

Спростимо отримане рівняння:

$$2\log_3 x+\frac{\log_3 3}{\log_3 x-\log_3 3}=a;$$

$$2\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x-1}=a.$$

Введемо заміну: $\log_3 x=t$.

У результаті одержимо рівняння $2t+\frac{1}{t-1}=a$:

$$\frac{2t(t-1)+1}{t-1}=\frac{a}{1},\Rightarrow \frac{2t^2-2t+1}{t-1}=\frac{a}{1},\Rightarrow \begin{cases} 2t^2-(2+a)t+a+1=0, \\ t\neq 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння, після чого повернемось до заміни:

$$2t^2-(2+a)t+a+1=0,\ t\neq 1.$$

$$D=(2+a)^2-8(a+1)=4+4a+a^2-8a-8=a^2-4a-4.$$

Розглянемо різні випадки.

1 випадок. Нехай $D>0, a^2-4a-4>0$, $a\in(-\infty;a_1)\cup(a_2;+\infty)$, де $a_1=2-2\sqrt{2}$, $a_2=2+2\sqrt{2}$. При визначених значеннях параметра квадратне рівняння має два різні корені: $t_{1,2}=\frac{2+a\pm\sqrt{a^2-4a-4}}{4}$, причому $t_{1,2}\neq 1$.

Дійсно, нехай $t_1=\frac{2+a+\sqrt{a^2-4a-4}}{4}=1$. Тоді:

$$2+a+\sqrt{a^2-4a-4}=4,\Rightarrow\sqrt{a^2-4a-4}=2-a.$$

Для $a\le 2$ одержимо:

$$a^2-4a-4=4-4a+a^2,\Rightarrow -4=4.$$

Одержана суперечність доводить, що $t_1\ne 1$.

Провівши аналогічні міркування, можна показати, що $t_2\ne 1$.

Повернемося до заміни: $\log_3 x=\dfrac{2+a\pm\sqrt{a^2-4a-4}}{4}$, $x=3^{\frac{2+a\pm\sqrt{a^2-4a-4}}{4}}$.

Кожне з чисел $x_1=3^{\frac{2+a-\sqrt{a^2-4a-4}}{4}}$, $x_2=3^{\frac{2+a+\sqrt{a^2-4a-4}}{4}}$ більше за 0 і не дорівнює 3, тобто належить області допустимих значень для змінної *x*, тому ці значення і будуть розв'язками рівняння.

2 випадок. Нехай $D=0, a^2-4a-4=0$, $a_{1,2}=2\pm 2\sqrt{2}$. При визначених значеннях параметра квадратне рівняння має два рівні корені (один корінь): $t_1=t_2=\dfrac{2+a}{4}$.

При $a_1=2-2\sqrt{2}$ отримаємо $t=\dfrac{2+(2-2\sqrt{2})}{4}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{4}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Повернемось до заміни в цьому випадку: $\log_3 x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=3^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}>0, x\ne 3$.

При $a_2=2+2\sqrt{2}$ отримаємо $t=\dfrac{2+(2+2\sqrt{2})}{4}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{4}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Повернемось до заміни: $\log_3 x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=3^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}>0, x\ne 3$.

3 випадок. Нехай $D<0, a^2-4a-4<0$, $a\in(a_1;a_2)$, де $a_1=2-2\sqrt{2}$, $a_2=2+2\sqrt{2}$. При визначених значеннях параметра квадратне рівняння, а, отже, і початкове, коренів не мають.

Знайдені розв'язки позначимо на прямій параметра (рис. 6.5) та запишемо відповідь.

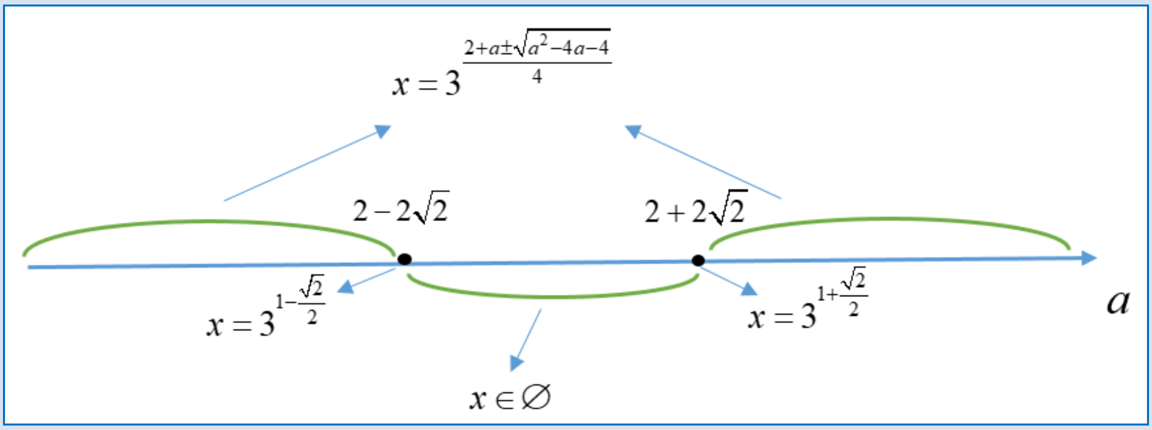

Рис. 6.5.

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;2-2\sqrt{2})\cup(2+2\sqrt{2};+\infty)$, то $x_{1,2}=3^{\frac{2+a\pm\sqrt{a^2-4a-4}}{4}}$;

якщо $a=2-2\sqrt{2}$, то $x=3^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$;

якщо $a=2+2\sqrt{2}$, то $x=3^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$;

якщо $a\in(2-2\sqrt{2};2+2\sqrt{2})$, то $x\in\varnothing$.

Приклад 6.5. Розв'яжіть рівняння з параметром: $\log_3\left(31-\left|x^2-6x+5\right|\right)=a.$

Розв'язання

Задано логарифмічне рівняння з модулем і параметром a, який може приймати будь-які дійсні значення.

Знайдемо область допустимих значень для змінної x:

$$31-\left|x^2-6x+5\right|>0,\Rightarrow\left|x^2-6x+5\right|<31,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-31<x^2-6x+5<31,\Rightarrow-36<x^2-6x<26,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-6x-26<0,\\x^2-6x+36>0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\left(3-\sqrt{35};3+\sqrt{35}\right),\\x\in R;\end{cases}\Rightarrow x\in\left(3-\sqrt{35};3+\sqrt{35}\right).$$

Отже, областю визначення рівняння є $x\in\left(3-\sqrt{35};3+\sqrt{35}\right)$.

Перейдемо до розв'язування заданого рівняння.

За означенням логарифма маємо:

$$31-\left|x^2-6x+5\right|=3^a, \Rightarrow \left|x^2-6x+5\right|=31-3^a.$$

Проаналізуємо праву частину рівняння.

Нехай $31-3^a>0$, $3^a<31$, $a<\log_3 31$, тобто $a\in(-\infty;\log_3 31)$. Тоді рівняння $\left|x^2-6x+5\right|=31-3^a$ рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=31-3^a, \\ x^2-6x+5=3^a-31. \end{array}\right.$

Кожне з рівнянь сукупності – це квадратне рівняння відносно змінної x.

Розв'яжемо перше рівняння сукупності:

$$x^2-6x+5=31-3^a,$$

$$x^2-6x-26+3^a=0,$$

$$D=36-4\left(3^a-26\right)=36-4\cdot 3^a+104=140-4\cdot 3^a=4\left(35-3^a\right).$$

Якщо $D>0, 35-3^a>0$, $3^a<35$, то $a<\log_3 35$. Врахуємо обмеження для параметра $a\in(-\infty;\log_3 31)$, тобто $\begin{cases} a\in(-\infty;\log_3 35), \\ a\in(-\infty;\log_3 31), \end{cases}$ звідки $a\in(-\infty;\log_3 31)$.

Для визначених значень параметра квадратне рівняння має два корені:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{35-3^a}}{2}=3\pm\sqrt{35-3^a}.$$

Знайдемо значеннях параметра a, при яких знайдені корені $x_1=3-\sqrt{35-3^a}$, $x_2=3+\sqrt{35-3^a}$ належать області визначення початкового рівняння $\left(x\in\left(3-\sqrt{35};3+\sqrt{35}\right)\right)$.

Для x_1 та $a\in(-\infty;\log_3 31)$ будемо мати:

$$3-\sqrt{35}<3-\sqrt{35-3^a}<3+\sqrt{35}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{35}<-\sqrt{35-3^a}<\sqrt{35}, \Rightarrow -\sqrt{35}<\sqrt{35-3^a}<\sqrt{35}.$$

Очевидно, що остання нерівність має місце для довільних $a\in(-\infty;\log_3 31)$.

Отже, при $a\in(-\infty;\log_3 31)$ розв'язком початкового рівняння буде $x_1=3-\sqrt{35-3^a}$.

Для x_2 та $a\in(-\infty;\log_3 31)$ будемо мати:

$$3-\sqrt{35}<3+\sqrt{35-3^a}<3+\sqrt{35},\Rightarrow -\sqrt{35}<\sqrt{35-3^a}<\sqrt{35}.$$

Очевидно, що остання нерівність має місце для довільних $a\in(-\infty;\log_3 31)$.

Отже, при $a\in(-\infty;\log_3 31)$ розв'язком початкового рівняння буде $x_2=3+\sqrt{35-3^a}$.

Якщо $D\le 0$, $35-3^a\le 0$, $3^a\ge 35$, то $a\ge\log_3 35$. Врахувавши обмеження на параметр $a\in(-\infty;\log_3 31)$, одержимо $\begin{cases} a\in[\log_3 35;+\infty), \\ a\in(-\infty;\log_3 31), \end{cases}$ звідки $a\in\varnothing$.

Розв'яжемо друге рівняння сукупності:

$$x^2-6x+5=3^a-31,$$

$$x^2-6x+36-3^a=0,$$

$$D=36-4(36-3^a)=4(3^a-27).$$

Якщо $D>0, 3^a-27>0$, $3^a>27$, $3^a>3^3$, то $a>3$. Врахувавши обмеження на параметр $a\in(-\infty;\log_3 31)$, одержимо $\begin{cases} a\in(3;+\infty), \\ a\in(-\infty;\log_3 31), \end{cases}$ звідки $a\in(3;\log_3 31)$.

Для визначених значень параметра квадратне рівняння має два корені:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{3^a-27}}{2}=3\pm\sqrt{3^a-27}.$$

Знайдемо значеннях параметра a, при яких знайдені корені $x_1=3-\sqrt{3^a-27}$, $x_2=3+\sqrt{3^a-27}$ належать області визначення початкового рівняння.

Для x_1 та $a\in(3;\log_3 31)$ одержимо:

$$3-\sqrt{35}<3-\sqrt{3^a-27}<3+\sqrt{35},\Rightarrow \sqrt{35}>\sqrt{3^a-27}>-\sqrt{35},\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3^a-27}<\sqrt{35},\\ \sqrt{3^a-27}>-\sqrt{35},\\ a\in(3;\log_3 31);\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^a-27<35,\\ a\in R,\\ a\in(3;\log_3 31);\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^a<62,\\ a\in(3;\log_3 31);\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<\log_3 62,\\ a\in(3;\log_3 31);\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\in(-\infty;\log_3 62),\\ a\in(3;\log_3 31);\end{cases}\Rightarrow a\in(3;\log_3 31).$$

Отже, при $a\in(3;\log_3 31)$ корінь $x_1=3-\sqrt{3^a-27}$ буде розв'язком початкового рівняння.

Для x_2 та $a\in(3;\log_3 31)$ одержимо:

$$3-\sqrt{35}<3+\sqrt{3^a-27}<3+\sqrt{35},\Rightarrow -\sqrt{35}<\sqrt{3^a-27}<\sqrt{35}.$$

Одержали випадок аналогічний попередньому. Отже, для $a\in(3;\log_3 31)$ корінь $x_2=3+\sqrt{3^a-27}$ буде розв'язком початкового рівняння.

Розглянемо випадок, коли $D=4(3^a-27)=0$, тобто $a=3$. Оскільки $3\in(-\infty;\log_3 31)$, то $a=3$ задовольняє обмеження параметра.

Для $a=3$ квадратне рівняння має корінь $x_1=x_2=3$, який належить області визначення початкового рівняння.

Розглянемо випадок, коли $D=4(3^a-27)<0$. В цьому випадку $3^a<27$, $3^a<3^3$, $a<3$. Врахуємо обмеження для параметра, тобто $\begin{cases}a<3,\\ a<\log_3 31,\end{cases}$ звідки $a\in(-\infty;3)$. Для визначених значень параметра квадратне рівняння коренів не має.

Окремо розглянемо випадок, коли права частина рівняння $\left|x^2-6x+5\right|=31-3^a$ дорівнює нулю, тобто $31-3^a=0$, $a=\log_3 31$. Тоді отримаємо рівняння $x^2-6x+5=0$, звідки $x_1=1$, $x_2=5$. Знайдені корені належать області визначення початкового рівняння.

Якщо ж $31-3^a<0$, $a>\log_3 31$, то рівняння $\left|x^2-6x+5\right|=31-3^a$ розв'язків не має.

Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметра (рис. 6.6.) та запишемо відповідь.

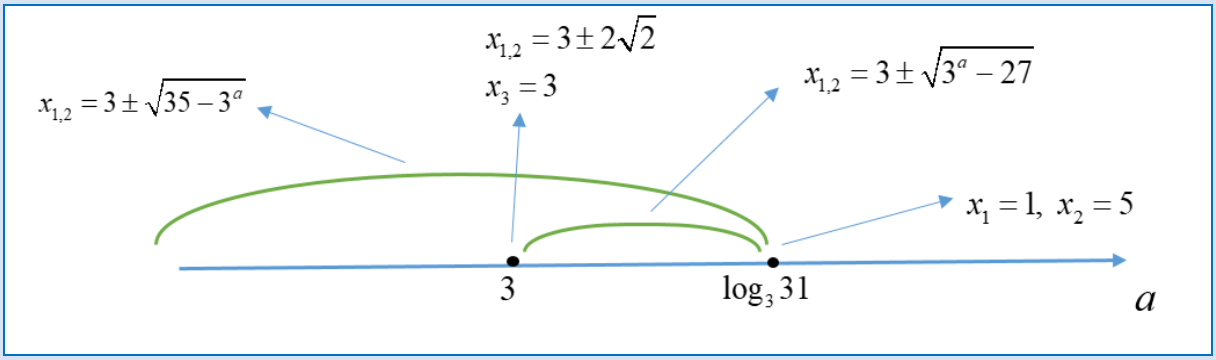

Рис. 6.6.

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;3)$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{35-3^a}$;

якщо $a=3$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{35-3^a}=3\pm2\sqrt{2}$ та $x_3=3$;

якщо $a\in(3;\log_3 31)$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{3^a-27}$, $x_{3,4}=3\pm\sqrt{35-3^a}$;

якщо $a=\log_3 31$, то $x_1=1,\ x_2=5$;

при $a>\log_3 31$ рівняння розв'язків не має.

Приклад 6.6. Для кожного значення параметра a знайти усі значення x, які задовольняють рівність:

$$\left(1+(a+2)^2\right)\log_3(2x-x^2)+\left(1+(3a-1)^2\right)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Розв'язання

Знайдемо область визначення рівняння:

$$\begin{cases}2x-x^2>0,\\ 1-\dfrac{x^2}{2}>0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(2-x)>0,\\ \dfrac{2-x^2}{2}>0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(2-x)>0,\\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})<0;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in(0;2),\\ x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2});\end{cases}\Rightarrow x\in(0;\sqrt{2}).$$

Уведемо заміну: $\log_3(2x-x^2)=t$, $\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=p$.

Отримаємо рівняння $\left(1+(a+2)^2\right)t+\left(1+(3a-1)^2\right)p=t+p$.

Для знаходження розв'язку цього рівняння розділимо його на $p\neq0$. Зауважимо: якщо $p=0$, тоді $\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$. Отже, $1-\dfrac{x^2}{2}=1$, звідки $x=0$. Але $0\notin(0;\sqrt{2})$. Таким чином, при діленні на p рівняння не втрачає корені.

У результаті ділення на $p\neq0$ отримаємо рівняння $\left(1+(a+2)^2\right)\dfrac{t}{p}+1+(3a-1)^2=\dfrac{t}{p}+1$. Спростимо його наступним чином:

$$\left(1+(a+2)^2\right)\frac{t}{p}-\frac{t}{p}=-(3a-1)^2,$$

$$(a+2)^2\frac{t}{p}=-(3a-1)^2.$$

Розглянемо два випадки.

1 випадок. При $a=-2$, одержимо, $0=-49$, а, отже, в цьому випадку рівняння коренів не має.

2 випадок. Нехай $a\neq-2$, тоді $\dfrac{t}{p}=-\left(\dfrac{3a-1}{a+2}\right)^2$. Дослідимо обидві частини цього рівняння: $\dfrac{t}{p}=-\left(\dfrac{3a-1}{a+2}\right)^2\leq0$.

Покажемо, що $t=\log_3(2x-x^2)\leq0$ для довільних $x\in(0;\sqrt{2})$. Припустимо, що існує x з області визначення, для якого: $\log_3(2x-x^2)>0$, $2x-x^2>3^0$, $x^2-2x+1<0$, $(x-1)^2<0$. Отримали протиріччя. Отже, наше припущення хибне. Тому $\log_3(2x-x^2)\leq0$ для довільних $x\in(0;\sqrt{2})$.

Аналогічно $\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=p<0$ для довільних $x\in(0;\sqrt{2})$. Припустимо, що існує x з області визначення, для якого: $p=\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\geq0$,

$1-\frac{x^2}{2}\geq 1$, $-\frac{x^2}{2}\geq 0$, $\frac{x^2}{2}\leq 0$. Отримали протиріччя. Отже, наше припущення хибне. Тому $\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=p<0$. Отже, $\frac{t}{p}\geq 0$ для довільних $x\in(0;\sqrt{2})$.

Підсумуємо: права частина рівняння менша або рівна нулю, а ліва – більша або рівна нулю. Тому рівність можлива тільки, якщо виконуються одночасно рівності $-\left(\frac{3a-1}{a+2}\right)^2=0$ і $\frac{t}{p}=0$.

Розв'яжемо рівняння $-\left(\frac{3a-1}{a+2}\right)^2=0$, звідки $a=\frac{1}{3}$ і $a\neq -2$ (це значення параметра досліджувалось вище).

Розв'яжемо рівняння $\frac{t}{p}=0$, звідки $t=0$ і $p\neq 0$. Повернемось до заміни: $\log_3(2x-x^2)=0$, звідки $2x-x^2=1$, $(x-1)^2=0$, $x=1$.

Відповідь: якщо $a=\frac{1}{3}$, то $x=1$;

якщо $a\in R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$, то $x\in\varnothing$.

Приклад 6.7. Знайдіть значення параметра a, при яких рівняння $\log_2(4^x+7a^5)=x$ має два розв'язки.

Розв'язання

Дано показниково-логарифмічне рівняння. Параметр a може приймати будь-які дійсні значення.

Знайдемо область допустимих значень для змінної x: $4^x+7a^5>0$, $4^x>-7a^5$. Проаналізуємо праву частину показникової нерівності:

- якщо $-7a^5\leq 0$, звідки $a\geq 0$, то $x\in R$;
- якщо $-7a^5>0$, звідки $a<0$, то $x>\log_4(-7a^5)$.

Отже, область визначення рівняння: $x\in R$ для $a\geq 0$; $x\in\left(\log_4(-7a^5);+\infty\right)$ для $a<0$.

За означенням логарифма матимемо $2^x = 4^x + 7a^5$. В результаті одержали показникове рівняння: $2^x - 4^x - 7a^5 = 0$. Приведемо степені до однієї основи: $2^x - (2^x)^2 - 7a^5 = 0$.

Введемо заміну: $2^x = t$, $t > 0$. У результаті маємо квадратне рівняння відносно змінної t. Розв'яжемо його:

$$-t^2 + t - 7a^5 = 0,$$

$$t^2 - t + 7a^5 = 0,$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 7a^5 = 1 - 28a^5.$$

Розглянемо випадок, коли $D > 0$, оскільки вимога задачі – знайти значення параметра a, при яких рівняння має два розв'язки.

Отже, $D > 0$, $1 - 28a^5 > 0$, звідки $a < \frac{1}{\sqrt[5]{28}}$. Тоді квадратне рівняння має два розв'язки $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 28a^5}}{2}$.

Повернемось до заміни, враховуючи обмеження до неї. Оскільки $t > 0$, то знайдемо значення параметра, для яких $t_{1,2} > 0$.

Для $t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 28a^5}}{2}$ матимемо:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 28a^5}}{2} > 0, \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - 28a^5} > 0, \Rightarrow \sqrt{1 - 28a^5} < 1, \Rightarrow 1 - 28a^5 < 1, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28a^5 > 0, \Rightarrow a > 0.$$

Врахувавши, що $a < \frac{1}{\sqrt[5]{28}}$, одержимо $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[5]{28}}\right)$.

Тобто для $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[5]{28}}\right)$:

$$2^x = \frac{1 - \sqrt{1 - 28a^5}}{2}, x = \log_2 \frac{1 - \sqrt{1 - 28a^5}}{2}.$$

Знайдений корінь належить області визначення початкового рівняння, оскільки він отриманий для $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[5]{28}}\right)$, а для невід'ємних значень параметра область визначення початкового рівняння – це множина всіх дійсних чисел.

Повернемося до заміни при умові $t_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-28a^5}}{2} > 0$. Очевидно, що нерівність має місце для $a < \dfrac{1}{\sqrt[5]{28}}$.

Тобто для $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{\sqrt[5]{28}}\right)$:

$$2^x = \frac{1+\sqrt{1-28a^5}}{2},\ x = \log_2 \frac{1+\sqrt{1-28a^5}}{2}.$$

З'ясуємо при яких значеннях параметра знайдений корінь належить області визначення (оскільки у нашому випадку параметр може прийматі і від'ємні значення).

Нехай $a < 0$. Знайдемо значення параметра a для якого корінь $x = \log_2 \dfrac{1+\sqrt{1-28a^5}}{2}$ належить інтервалу $\left(\log_4(-7a^5); +\infty\right)$.

$$\log_2 \frac{1+\sqrt{1-28a^5}}{2} > \log_4(-7a^5), \Rightarrow \log_2 \frac{1+\sqrt{1-28a^5}}{2} > \log_2 \sqrt{-7a^5}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-28a^5}}{2} > \sqrt{-7a^5}, \Rightarrow 1+\sqrt{1-28a^5} > 2\sqrt{-7a^5}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\sqrt{1-28a^5}\right)^2 > \left(2\sqrt{-7a^5}\right)^2, \Rightarrow 1+2\sqrt{1-28a^5}+1-28a^5 > -28a^5, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+2\sqrt{1-28a^5} > 0.$$

Очевидно, що нерівність має місце для довільних $a < 0$.

При $a \in \left[0; \dfrac{1}{\sqrt[5]{28}}\right)$ область визначення початкового рівняння – це множина всіх дійсних чисел, тому при $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{\sqrt[5]{28}}\right)$ корінь $x = \log_2 \dfrac{1+\sqrt{1-28a^5}}{2}$ буде належати області визначення початкового рівняння.

Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметра a (рис. 6.7) та отримаємо відповідь.

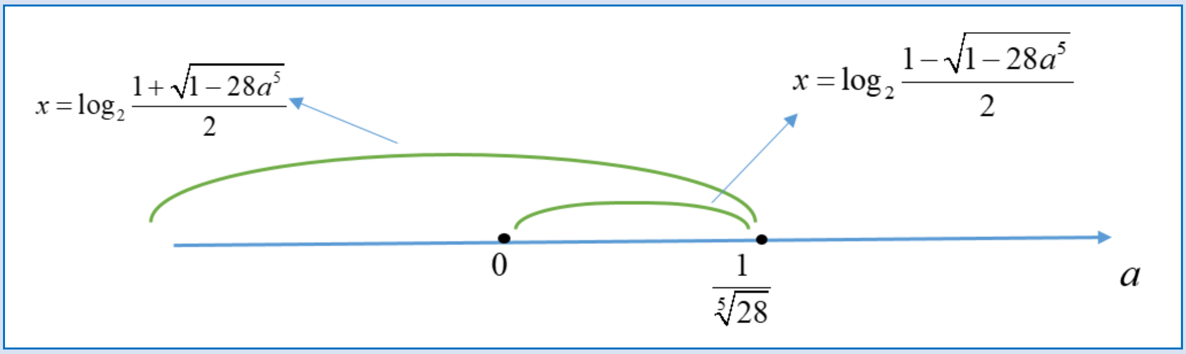

Рис. 6.7.

Відповідь: $a\in\left(0;\frac{1}{\sqrt[5]{28}}\right)$.

6.2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Для яких значень параметра a рівняння не має жодного кореня $\log_2(\log_3(x^2+2x))=\log_2(-1+\log_3(a+4)x)$?
2. Визначити найбільше ціле значення параметра a, при якому рівняння $7^{2x}+a7^x+4=0$ має два різні розв'язки.
3. Визначити найменше ціле значення параметра a, при якому рівняння $5^{2x}+2(1-a)5^x+1=0$ має два різні розв'язки.
4. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

4.1. $25^x+a^2(a-1)5^x-a^5=0$;

4.2. $4^x+2a(a+1)2^{x-1}+a^3=0$;

4.3. $\sqrt[x^2-1]{a^9}\sqrt[x+1]{\frac{1}{a^3}}=\sqrt[x-1]{a^3}$;

4.4. $a^{4x}+a^{2x}=a^{5x}$;

4.5. $2\log_x a+\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a=0$;

4.6. $8\log^2_{a^2}(x-a)-6\log_{a^2}(x-a)+1=0$;

4.7. $3\log_{a^2x} x+\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x-2=0$;

4.8. $\dfrac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2}+\dfrac{\log_a x}{\log_a 2}=\dfrac{1}{\log_{a^2-1} 2}$;

4.9. $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}$;

4.10. $2^{\frac{a+3}{a+2}}\cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}}=4^{\frac{1}{x}}$;

4.11. $\log_a x^2+\log_a(x-1)=\log_a \log_{\sqrt{5}} 5$;

4.12. $\log_a x+\log_{a^2} x+\log_{a^3} x=11$;

4.13. $\log_a x+\log_{\sqrt{a}} x+\log_{\sqrt[3]{a^2}} x=27$;

4.14. $\log_a \sqrt{4+x}+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^4}(16-x^2)^2=2$;

4.15. $\log_x a\cdot\log_{\sqrt{a}}\dfrac{a}{\sqrt{2a-x}}=1$;

4.16. $\log_{\sqrt{a}}\dfrac{\sqrt{2a-x}}{a}-\log_{\frac{1}{a}} x=0$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г., Ясінський В. Перші зустрічі з параметром. Київ: Факт, 2004. 316 с.
2. Доманська І.П., Зеліско Г.В., Стахів Л.Л. Рівняння з параметрами: методичні рекомендації. Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005.
3. Думанська Т.В., Гудима У.В. Логарифмічні та показникові рівняння, нерівності, системи. Практикум: навчально-методичний посібник [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2022. 1 елект. опт. диск; 12 см. URL: http://elar.kpnu.edu.ua:8081/xmlui/handle/123456789/6694.
4. Думанська Т.В., Гудима У.В. Прикладна спрямованість курсу «Рівняння з параметрами». *Матеріали міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми математичної освіти: виклики сучасності (2024)»*: збірник матеріалів [Електронний ресурс]. Вінниця: ВНТУ, 2024. С. 1-2.
5. Захарченко Н. Ячменьов В. Параметри та графіки: навчально-методичний посібник. Київ: ТОВ «Праймдрук», 2012. 56 с.
6. Козира В.М. Математика: зовнішнє незалежне оцінювання: навчально-методичний посібник. Тернопіль: Астон, 2020. 384 с.
7. Конет І.М. Вступні випробування з математики до вищих навчальних закладів. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2005. 160 с.
8. Крамор В.С. Задачі з параметрами і методи їх розв'язання. Тернопіль: Навчальна книга «Богдан», 2012. 416 с.
9. Математика для вступників до вузів: навчальний посібник / упоряд.: М.Ф. Бондаренко, В.А. Дікарєв, О.Ф. Мельников, В.В. Семенець, Л.Й. Шкляров. Харків: Компанія СМІТ, 2002. 120 с.
10. Перегуда О.В., Капустян О.В., Собчук В.В. Задачі з параметрами: методичні вказівки [Електронне видання]. 2023. 62 с. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/04/zadachi_z_parametramy.pdf.
11. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики: навчально-методичний посібник. Житомир: Рута, 2016. 468 с.
12. Цегелик Г.Г. Збірник типових конкурсних тестових завдань з математики: навчальний посібник. Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005.140 с.

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

ГУДИМА Уляна Василівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка
ДУМАНСЬКА Тетяна Володимирівна,
кандидат педагогічних наук, доцент, старший викладач
кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка
ГЕСЕЛЕВА Катерина Григорівна,
кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного
факультету Кам'янець-Подільського національного
університету імені Івана Огієнка

ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Підписано 25.07.2024. Формат 60x84/16. Гарнітура «Cambria».
Об'єм даних 2,46 Мб. Обл.-вид. арк. 4,5. Зам. № 1121.

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Виготовлено в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.