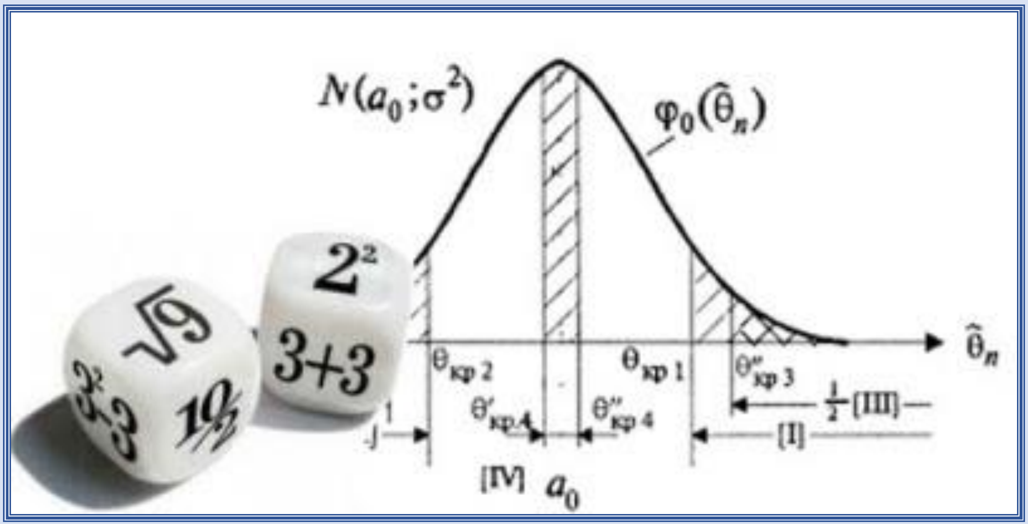
Міністерство освіти і науки України

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

І. Б. КОВАЛЬСЬКА

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК



ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Кам’янець-Подільський

2024

УДК 519.2
К56
Рекомендувала вчена рада Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (№6 від 27 червня 2024 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Ю. В. Теплінський, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;
В. С. Щирба, кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри комп'ютерних наук Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;
О. І. Радзієвська, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики ім. проф. В. Можара Національного університету харчових технологій м. Київ.

Ковальська І. Б.
К56 **Теорія ймовірностей та математична статистика:** навчально-методичний посібник [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. 138 с.

Електронна версія посібника доступна за покликанням:
URL: http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8589

Навчально-методичний посібник «Теорія ймовірностей та математична статистика» написаний відповідно до програми цього курсу для студентів фізико-математичного факультету.

Збірник містить матеріал 2-х змістових модулів. До першого модуля відносяться теми дисципліни «Теорія ймовірностей», а до другого – дисципліни «Математична статистика».

На початку кожної теми вміщені короткі теоретичні відомості, необхідні для розв'язування запропонованих задач. Далі вміщено плани практичних занять за цією темою, тексти задач і вправ з вказівками до розв'язання. Закінчується кожна тема збіркою вправ для самостійного виконання.

Навчально-методичний посібник рекомендований для організації аудиторної та самостійної роботи студентів фізико-математичного факультету спеціальностей «математика», «комп'ютерні науки», «фізика».

УДК 519.2

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчально-методичний посібник «Теорія ймовірностей та математична статистика» рекомендований для організації аудиторної та самостійної роботи студентів фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів і написаний відповідно до програми цього курсу. Мета та завдання курсу математична статистика тісно пов'язані з різноманітними застосуваннями у фізиці, хімії, біології, педагогіці, психології, економіці та фінансовій справі. З другого боку, теорія ймовірностей повинна розвиватись як математична дисципліна, тобто будуватись на точних означеннях і аксіомах. Метою викладання навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» є формування у майбутніх фахівців глибоких і міцних знань, необхідних в професійній діяльності, допомога в розвитку теоретико-ймовірнісної інтуїції, тобто умінні будувати математичні моделі, що правильно відображають ті чи інші аспекти випадкових явищ і процесів та виконувати обробку експериментальних даних.

Збірник містить матеріал 2-х змістових модулів. До першого модуля відносяться теми дисципліни «Теорія ймовірностей», а до другого – дисципліни «Математична статистика».

На початку кожної теми вміщені короткі теоретичні відомості, необхідні для розв'язування запропонованих задач. Далі вміщено плани практичних занять за цією темою, тексти задач і вправ з вказівками до розв'язання. Закінчується кожна тема збіркою вправ для самостійного виконання.

Перед тим, як приступити до розв'язування задач і вправ, студентам потрібно уважно прочитати теоретичні відомості, а в процесі роботи над задачами – керуватись вказівками та використовувати таблиці значень основних спеціальних функцій, які знаходять застосування в теорії ймовірностей та математичній статистиці і подані в останній темі.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Тема 1

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчається теорія скінченних множин. Якщо скінченна множина М містить n елементів, то будемо називати її n-множиною.

У багатьох твердженнях і формулах комбінаторики використовуються два правила, які називають правилом суми і правилом добутку.

Правило суми: якщо деякий елемент x можна вибрати n способами, а елемент y можна вибрати m способами то один з елементів x або y можна вибрати $n + m$ способами.

Правило добутку: якщо елемент x можна вибрати n способами і при кожному виборі елемента x елемент y можна вибрати m способами, то пару $(x; y)$ можна вибрати nm способами.

Означення 1. Розміщенням без повторень з n елементів по k називають будь-яку впорядковану k-підмножину n-множини. Число розміщень без повторень з n по k позначають A_n^k і обчислюють за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Означення 2. Перестановкою без повторень з n елементів називають розміщення з n елементів по n. Число перестановок без повторень з n елементів позначають P_n. Оскільки вважають, що $0!=1$, то очевидно, що $P_n = n!$.

Означення 3. Комбінацією без повторень з n елементів по k називають будь-яку k-підмножину n-множини. Число комбінацій з n по k позначають C_n^k і обчислюють за формулою $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Приклад 1. Скільки перестановок можна отримати із букв A, B, C?

Складемо всі можливі перестановки із цих букв: ABC; ACB; BCA; CAB; CBA; BAC. Видно, що їх шість і вони відрізняються одна від одної тільки порядком розташування букв. Дійсно, на перше місце в перестановці можна поставити кожну з трьох букв. На друге місце вже можна поставити тільки дві букви із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна із тих, що залишилися. Використаємо правило добутку: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = P_3 = 6$.

Приклад 2. З 10 студентів призначають двох чергових. Скількома способами можна це зробити, якщо:

1) один із призначених стає старшим;
2) старших немає?

Розв'язання. Зрозуміло, що якщо один зі студентів – старший, то мова йде про впорядковану підмножину (у відомості чергових старший, наприклад, ставиться на перше місце) і шукана кількість способів дорівнює числу розміщень із 10 елементів по 2, тобто $A_{10}^{2} = 10 \cdot 9 = 90$. Отже, чергових можна призначити 90 способами. Якщо ж старших немає, то порядок запису не має сенсу і шукана кількість способів дорівнює числу комбінацій із 10 елементів по 2, тобто $C_{10}^{2} = \dfrac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = \dfrac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

Означення 4. Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називають будь-яку упорядковану k-множину, утворену з елементів заданої n-множини. Число всіх розміщень з повтореннями з n елементів по k позначають символом $\overline{A_n^k}$ і обчислюють за формулою $\overline{A_n^k} = n^k$.

Означення 5. Перестановкою з повтореннями з n елементів називають будь-яку впорядковану n-множину, серед елементів якої є однакові елементи. Число перестановок такої множини позначають символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, де $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, і обчислюють за формулою $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Означення 6. Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називають будь-яку k-множину, утворену з елементів n-множини. Число всіх комбінацій з повтореннями з n елементів по k позначають символом $\overline{C_n^k}$ і обчислюють за формулою $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Приклад 3. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна утворити, використовуючи цифри 2, 3, 5?

Розв'язання. П'ятицифрове число – це впорядкована множина, в якій задані цифри можуть повторюватися. Отже маємо $\overline{A_3^5} = 3^5 = 243$.

Приклад 4. Скількома способами можна поселити шість студентів у трьох кімнатах: одномісній, двомісній і тримісній?

Розв'язання. Очевидно, що мова йде про перестановки з повтореннями. Число способів $P_6(1,2,3) = \dfrac{6!}{2!3!} = 60$.

Приклад 5. Скількома способами можна купити 6 тістечок, якщо в кав'ярні є 10 видів тістечок?

Розв'язання. Оскільки тістечка можна купувати як однакові, так і різні і їх множина невпорядкована, то ця задача про комбінації з повтореннями. Отже $\overline{C_{10}^6} = \dfrac{(10+6-1)!}{6!9!} = \dfrac{15!}{6!9!} = 5005$.

Розглянемо множину M та її підмножини $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Будемо позначати $N(M)$ – число елементів множини M, $\overline{M_i}$ – доповнення множини M_i до множини M, тобто $\overline{M_i} = M \setminus M_i, (i = \overline{1,k})$. Тоді має місце формула:

$$N\left(\bigcap_{i=1}^{k} \bar{M}_i\right) = n - \sum_{i=1}^{k} N(M_i) + \sum_{1\le i<j\le k} N(M_i \cap M_j) - \ldots (-1)^k N(\bigcap_{i=1}^{k} M_i). \qquad (1)$$

Якщо в цій формулі покласти $M = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ і враховувати, що $n = N(M) = N(\bigcup_{i=1}^{k} M_i)$, а, також, що $\bigcap_{i=1}^{k} \overline{M_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} M_i} = \bar{M} = \varnothing$

То отримаємо формулу:

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{k} M_i\right) = \sum_{i=1}^{k} N(M_i) - \sum_{1\le i<j\le k} N(M_i \cap M_j) + \ldots (-1)^{k-1} N\left(\bigcap_{i=1}^{k} M_i\right). \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) називають формулами включень і виключень.

Приклад 6. На другому курсі навчається 70 студентів. З них 50 відвідують секцію легкої атлетики, 35 – відвідують волейбольну секцію і 20 – відвідують обидві секції Скільки студентів не відвідують жодної секції.

Розв'язання. Нехай М – множина всіх студентів другого курсу, M_1 – множина студентів, які відвідують секцію легкої атлетики, M_2 – волейбольну секцію. Множину студентів, які не відвідують жодної секції, можна подати у вигляді $\overline{M_1} \cap \overline{M_2}$. Згідно з формулою (1):

$$N(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) = N(M) - N(M_1) - N(M_2) + N(M_1 \cap M_2) = 70 - 50 - 35 + 20 = 5.$$

Таким чином залишилося 5 студентів, які не відвідують жодної секції.

Практичне заняття №1-2

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

1. Правила суми і добутку.
2. Розміщення, перестановки і комбінації без повторень.
3. Розміщення, перестановки і комбінації з повтореннями.
4. Формула включень і виключень.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. Скількома способами можна поставити на полицю 5 різних книг?
2. Студент повинен скласти три іспити протягом семи днів (не більше, ніж один іспит в день). Скількома способами це можна зробити?
3. Скількома способами можна призначити варту з 8 солдатів, 2 сержантів та 2 офіцерів, якщо в підрозділі 14 солдатів, 3 сержанти і 4 офіцери?
4. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятись на гору і спуститись з неї? Дати відповідь на те саме запитання, якщо підняття і спуск відбуваються різними шляхами.
5. Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з 9 нападаючих, 5 захисників і 3 воротарів, якщо до складу команди повинно ввійти 3 нападаючих, 2 захисника і 1 воротар?
6. Скільки існує телефонних номерів, які складаються з семи різних цифр?
7. Скільки тризначних чисел можна записати з допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4?
8. Скількома способами 12 учнів можуть вишикуватись в 1 шеренгу?
9. Скільки існує чотиризначних чисел, які діляться на 5?
10. Скільки діагоналей можна провести в опуклому п'ятикутнику, шестикутнику, n-кутнику?
11. Автомобільний номер складається з 4 букв і 4 цифр. Скільки автомобільних номерів можна утворити?
12. В першості країни з футболу бере участь 16 команд. Скількома способами вони можуть завоювати золоту, срібну і бронзову медалі?

13. Розв’язати рівняння: $C_{x+1}^{x-1}=21, x\in N$.

14. Розв’язати рівняння: $\dfrac{A_{x+1}^{4}\cdot P_{x-4}}{P_{x-1}}=15$.

15. Знайти $n\in N$, якщо $2C_{n+1}^{2}-2A_{n}^{2}=n$.

16. Знайти $n\in N$, якщо $A_{n+1}^{2}+2C_{n+1}^{n-1}=14(n+1)$.

17. Довести тотожності: $C_{n}^{k-r}A_{n-k+r}^{r}=C_{n}^{k}A_{k}^{r}$; $\dfrac{C_{n+1}^{k}}{C_{n}^{k}}=\dfrac{n+1}{n-k+1}$.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Оскільки, книги на полиці – це впорядкована множина, то очевидно, що число способів P_5 = 5! = 120.
2. $A_7^3=7\cdot 6\cdot 5=210$.
3. З 14 солдатів можна вибрати вісім C_{14}^{8} різними способами. З 3 сержантів можна вибрати двох C_3^2 різними способами. З 4 офіцерів можна вибрати двох C_4^2 способами. Комбінуючи кожні вісім солдатів з парою сержантів, одержуємо $C_{14}^{8}\cdot C_3^2$ різних вартових без офіцерів (правило добутку). Комбінуючи цих вартових з кожним з офіцерів, маємо $C_{14}^{8}\cdot C_3^2\cdot C_4^2$ способів призначити варту.
4. Використовуємо правило добутку.
5. Див. задачу 3.
6. Обчислюємо кількість впорядкованих множин, які складаються з семи різних елементів, вибраних з десяти можливих.
7. Обчислюємо $\overline{A_5^3}$ і вираховуємо звідси всі трицифрові числа з нулем на першому місці.
8. Шеренга дітей – це впорядкована множина з 10 елементів по10.
9. Спочатку потрібно визначити, скільки тризначних чисел можна утворити з 10 цифр (зад. 7). Дописуючи в кінці кожного числа нуль або п’ятірку, отримуємо чотиризначні числа, що діляться на п’ять.
10. Використовуємо правило добутку, враховуючи, що з кожної з n вершин виходить n – 3 діагоналі і те, що, наприклад, AD і DA – одна і та ж діагональ.

11. Використовуємо правило добутку для розміщень з повтореннями, вибраних з 26 букв і 10 цифр. Враховуємо, що номера 0000 не існує.
12. $A_{16}^{3} = 16 \cdot 15 \cdot 14$.
13. Використовуємо формулу: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Розв'язуємо отримане в результаті перетворень квадратне рівняння $x^2 + x - 42 = 0$ і вибираємо натуральний корінь $x = 6$.
14. Використовуємо формули для розміщень і перестановок без повторень. Отримуємо вираз: $\dfrac{(x+1)x}{x-3} = 15$. Звідси $x = 9$ або $x = 5$.
15. Використовуємо формули для C_n^k і A_n^k. Розв'язуємо рівняння $n(n+1) - 2n(n-1) = n$. Знаходимо натуральний корінь $n = 2$.
16. $n = 7$.
17. Використовуємо формули для C_n^k і A_n^k.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Скількома способами можна скласти список із восьми студентів?
2. Скількома способами можна з 25 студентів групи обрати старосту, профорга і редактора стінгазети?
3. На зборах присутні 45 осіб. Скількома способами можна обрати президію зборів у складі трьох осіб?
4. Скількома способами можна задати трикутник, позначаючи його вершини великими літерами латинського алфавіту?
5. В класі 26 учнів. Скількома способами вони можуть записатися в гуртки: театральний (10 учнів), краєзнавчий (7 учнів) і зоологічний (9 учнів), якщо кожен учень може записатися лише в один гурток?
6. Скількома способами 6 хлопців можуть запросити до танцю 8 дівчат?
7. Скількома способами можна розмістити 10 гостей за круглим столом?
8. Скількома способами можна поселити 10 студентів у секції гуртожитку, яка містить 2 двомісні і 2 тримісні кімнати?
9. Скількома способами можна поділити 22 предмети на 4 пакунки так, щоб в першому пакунку було 7 предметів, в другому – 6 предметів, в третьому – 5, а в четвертому – 4 предмети.

10. В Іспанії прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо їй дають не більше 3-х імен, а загальне число імен дорівнює 200?
11. За наслідками екзаменаційної сесії зі 100 студентів відмінні оцінки отримали: з алгебри – 18 студентів, з геометрії – 13, з інформатики – 20, з алгебри і геометрії – 11, з алгебри та інформатики – 10, з геометрії та інформатики – 8, а 70 студентів не отримали жодної відмінної оцінки. Скільки студентів склали сесію на «відмінно»?
12. Скількома способами можна порівну роздати чотирьом гравцям 36 карт?
13. У групі 25 студентів. З них 12 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний А 8 студентів не відвідують жодного гуртка. Скільки студентів відвідують математичний та фізичний гуртки? Скільки студентів відвідують тільки математичний гурток?
14. Скількома способами можна вгадувати дві останні цифри телефонного номера, знаючи, що вони різні?
15. Скількома способами 25 студентів можуть зайняти місця в аудиторії, де є 20 двомісних столів?
16. На клумбі ростуть тюльпани, гіацинти та нарциси. Скількома способами із них можна скласти букет, що містить 9 квіток?
17. Довести тотожності: $\dfrac{C_{n-r}^{k-r}}{C_n^k}=\dfrac{A_k^r}{A_n^r}$; $\dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}=\dfrac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$;
18. $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$; $A_n^k=(n-k+1)A_n^{k-1}$.
19. Знайти $n\in N$, якщо: $5C_{n+1}^3=6C_n^4$; $12C_n^1+C_{n+4}^2=162$.
20. Скількома способами можна розбити на пари 36 учнів?
21. Скількома способами можна скласти пароль із восьми букв і чотирьох цифр, якщо використовувати 32 букви і 10 цифр?
22. Скількома способами можна розташувати на полиці 10 книг так, щоб книги двотомника з матаналізу знаходились поруч ?

Тема 2

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Теорія ймовірностей – це наука, що вивчає математичні моделі масових однорідних випадкових явищ (експериментів), які мають властивість стійкості частот. Експеримент визначається певною сукупністю умов і його можливими результатами. Експериментом (або дослідженням, випробуванням) називається здійснення якого-небудь певного комплексу умов, що може бути повторений скільки завгодно разів.

Явище, про яке можна говорити, що воно має місце або не має місця під час проведення випробування, називається подією. Звичайно події позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C і т.д.

Якщо подія A відбувається при випробуванні обов'язково, то її називають достовірною. Наприклад, в урні є тільки червоні кулі. Тоді наявність червоної кулі при однократному її вийманні з урни має місце обов’язково і тому ця подія достовірна. Якщо подія A свідомо не може відбутися при випробуванні, то її називають неможливою. Наприклад, добування чорної кулі з урни, у якій перебувають тільки червоні, є неможливою подією. Поява грані з номером 8 при киданні грального кубика також буде неможливою подією. Відомо, що гральний кубик має шість граней з відповідними номерами.

Подія називається випадковою, якщо в результаті випробування вона може відбутися або не відбутися. При киданні грального кубика поява грані з номером 6 буде випадковою подією, тому що при киданні можуть з'являтися грані і з іншими номерами. Якщо в урні є червоні і чорні кулі, то добування чорної кулі також буде випадковою подією (тому що можна витягти й червону кулю). До випадкової можна віднести також подію, яка полягає в тому, що навмання взяте число із сукупності цілих чисел ділиться на 2, і інше.

Дві події називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає можливість появи іншої при тому ж випробуванні. Наприклад, кинемо один раз монету. Поява герба виключає появу цифри. Тому події «з'явився герб» і «з'явилася цифра» – несумісні.

Подія називається елементарною, якщо її не можна розкласти на більш прості події. В іншому випадку подія називається складеною. Якщо розглядати експеримент – підкидання грального кубика, то події ω_i – «випало i очок» ($i=\overline{1,6}$) – є елементарними, вони вичерпують всі можливі результати випробування.

Простором Ω елементарних подій, які описує дане випробування, називають довільну множину, між елементами якої і всіма можливими результатами цього випробування можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тоді випадкові події можна розглядати як будь-які підмножини простору Ω, а сам простір буде достовірною подією.

Між випадковими подіями встановлюються певні відношення. Якщо при випробуванні може відбутися кілька подій і немає підстави вважати, що поява кожної з них більше можлива, ніж поява іншої, то такі події називають рівноможливими. Наприклад, якщо в урні є 5 куль, які відрізняються одна від одної лише кольорами (нехай це будуть червона, жовта, блакитна, зелена та біла кулі), то у нас немає підстав вважати, що, наприклад, поява жовтої кулі більш можлива, ніж поява кулі іншого кольору. Поява кожної з куль у цьому випадку – подія рівноможлива.

Дві несумісні події, які разом утворюють простір Ω даного випробування, називаються протилежними. Подію, протилежну події A, позначають через $\bar{A}$. Прикладами протилежних подій можуть бути влучення і промах при пострілі; поява парного і непарного номера грані при киданні грального кубика.

Означення 1. Подія C, яка відбувається тоді, коли відбувається хоча б одна з сумісних подій A або B, називається сумою подій і позначається :

$$C=A\cup B=A+B.$$

Означення 2. Подія C, яка відбувається тоді, коли одночасно відбуваються обидві події A і B, називається добутком цих подій і позначається:

$$C=A\cap B=AB.$$

Означення 3. Подія C, яка відбувається тоді, коли відбувається A і не відбувається B, називається різницею цих подій і позначається:

$$C=A|B=A-B.$$

Поняття ймовірності можна ввести, розглянувши, наприклад, так звану «задачу про урну». В урні знаходяться 9 куль однакового розміру, з них 4 -червоних, 3 – жовтих і 2 – білих. Пронумеруємо кулі в такий спосіб: червоні позначимо номерами 1, 2, 3, 4, жовті – 5, 6, 7, а білі – 8, 9 відповідно. Позначимо подію «вийняли кулю з номером i» через ω_i (i = 1, 2,..., 9). Внаслідок випробування (виймання кулі з урни) одна з дев'яти подій наступить із необхідністю. Крім цього, події будуть попарно несумісними, тому що коли, наприклад, наступає подія ω_3, то інша подія при тому ж випробуванні наступити не може. Події ці будуть також рівноможливими, тому, що немає підстав стверджувати, що, наприклад, подія ω_2 більш можлива, ніж подія ω_9. Випробування, при якому наступає подія A, називається їй сприятливим. Тому $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – сприятливі випробування для події «вийнята червона куля», а $\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9$ – несприятливі.

Означення 4. Ймовірністю події A називають відношення числа сприятливих цій події випробувань до загального числа всіх можливих випробувань. Отже, якщо n є число всіх можливих випробувань, а m-число випробувань, сприятливих події A, то, позначивши ймовірність події A через $P(A)$, будемо мати: $P(A) = \dfrac{m}{n}$. Цю величину називають класичною ймовірністю.

Приклад 1. Легко обчислити ймовірності дістати з урни червону, жовту й білу кулі. Позначивши ці події, відповідно, через A, B, C, знаходимо: $P(A) = 4/9$; $P(B) = 3/9$; $P(C) = 2/9$. Справді, із всіх дев'яти випробувань події A сприяють 4 випробування, події B – 3, події C – 2 випробування. Імовірність достовірної події дорівнює одиниці, оскільки такій події сприяють всі можливі випробування. Наприклад, в урні лежать лише 9 білих куль, то ймовірність витягти білу кулю дорівнює: $P(A) = 9/9 = 1$. Дійсно, цій події сприяють всі 9 можливих випробувань. Імовірність неможливої події дорівнює нулю, тому що неможливій події не сприяє жодне з можливих випробувань.

Оскільки деякій випадковій події A із всіх n можливих випробувань сприяє m випробувань ($m \le n$), тому $0 \le \dfrac{m}{n} = P(A) \le 1$.

Практичне заняття №3

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ.
КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

1. Простір елементарних подій. Випадкові події та відношення між ними.
2. Операції над подіями та їх властивості.
3. Класичне означення ймовірності.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. У одному банку грошові вклади мають: сім чоловік – у доларах, вісім – у євро і шість – у гривнях. Яка ймовірність того, що навмання обрана особа має грошовий вклад не у доларах?
2. В коробці є 6 червоних і 4 зелених кульки. З коробки беруть навмання 5 кульок. Знайти ймовірність події: A – усі кульки червоні; B – чотири кульки червоні та одна зелена.
3. У регіоні є 50 приватних підприємств, 10 з яких стали банкрутами. Яка ймовірність того, що навмання вибране підприємство не є банкрутом?
4. Абонент, набираючи номер телефону, забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Яка ймовірність події A – набрані абонентом навмання дві останні цифри номера телефону є правильні?
5. На фірмі працюють 10 інженерів і 5 спеціалістів із питань ринку. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з п'яти осіб. Яка ймовірність події A – вибрана навмання група з 5-ти осіб включає 3-х інженерів і 2-х спеціалістів ринку?
6. Знайти ймовірність того, що серед десяти цифр банкноти:
   а) немає цифри 3;
   б) немає цифр 3 і 8;
   в) знайдуться усі цифри.
7. У шухляді письмового столу лежать 12 олівців однакової форми і розмірів, з яких 4 олівці – кольорові, а інші – прості. Яка ймовірність того, що, відкривши шухляду, навмання взятий олівець буде простий?

8. З 40 стандартних і 4 нестандартних деталей взято навмання вісім, які виявилися стандартними. Знайти ймовірність того, що наступна взята навмання деталь теж буде стандартною.
9. Яка ймовірність того, що при киданні двох гральних кубиків сума номерів граней, які випали, дорівнює семи?
10. Маємо п'ять квитків вартістю по 30 грн., три квитка – по 65 грн. і два квитка – по 100 грн. Візьмемо навмання три квитки. Знайти ймовірність того, що:

    а) хоча б два із цих квитків мають однакову вартість,

    б) вартість трьох квитків дорівнює 160 грн.

11. В кошику лежать 6 білих і 4 чорних кулі. З кошика беруть навмання 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони виявляться одного кольору?

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Загальна кількість вкладів – $n=21$, не у доларах вклади мають $m=14$ осіб.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67.$$

2. Із 10 кульок з коробки навмання беруть 5, тому $n=C_{10}^{5}=\frac{10!}{5!5!}=252$.

   Щоб трапилась подія A – всі кульки червоні, потрібно всі 5 кульок вибрати із 6 червоних і не взяти жодної зеленої. Отже $m=C_6^5C_4^0=6$. Тому $P(A)=\frac{6}{252}=\frac{1}{42}$. $P(B)=\frac{C_6^4\cdot C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{60}{252}=\frac{5}{21}$.

3. Не стали банкрутами $m=40$ підприємств з $n=50$. Звідси $P(A)=\frac{40}{50}=0{,}8$.

4. $P(A)=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{90}$.

5. $n=C_{15}^5=\frac{15!}{5!10!}=3003$, $m=C_{10}^3\cdot C_5^2=\frac{10!}{3!7!}\cdot\frac{5!}{2!3!}=1200$, $p(A)=\frac{m}{n}=0{,}4$.

6. Серед 10 цифр банкноти можуть бути різні цифри, а можуть і повторюватись, лише набір десяти нулів неможливий, тому $n=\overline{A_{10}^{10}}-1=10^{10}-1$.

а) Якщо не використовується цифра 3, то $m=\overline{A_9^{10}}-1=9^{10}-1$. Тому $P(A)=\frac{9^{10}-1}{10^{10}-1}$.

б) Якщо не використовуються цифри 3 і 8, то $m=\overline{A_8^{10}}-1=8^{10}-1$.

в) Якщо в номері банкноти знайдуться всі цифри, то це означає, що $m=A_{10}^{10}=P_{10}=10!$.

7. Позначимо подію «взятий олівець простий» через A. Усього олівців – 12. Простих олівців – 8. Тому $n=12; m=8$. За формулою маємо $P(A)=\frac{8}{12}=0{,}67$.

8. В партії залишилося 40 – 8 = 32 стандартні деталі і 4 нестандартні. Отже $m=32; n=36$. Позначимо через A подію «деталь виявилася стандартною». Тоді $P(A)$ = 32/36 = 0,89.

9. При киданні двох гральних кубиків кожній грані першого кубика, яка випадає, може відповідати будь-яка грань другого кубика. Тому число всіх можливих результатів випробування $n=6\cdot 6=36$. Результати випробувань, які сприяють події A «сума номерів, які випали, дорівнює семи», подані у таблиці:

1 кубик	1	2	3	4	5	6
2 кубик	6	5	4	3	2	1

10. Очевидно, що їх шість. Отже тут $m=6$. $P(A)=\frac{6}{36}=0{,}167$.

а) Подію «хоча б два квитка із трьох узятих мають однакову вартість» позначимо через A. Знайдемо ймовірність протилежної події $\overline{A}$. Число можливих випадків взяти три квитка з 10 дорівнює $C_{10}^3=\frac{10!}{3!7!}=120$. Несприятливими для події A будуть випадки, коли виявиться один квиток вартістю 30 грн. (їхнє число дорівнює $C_5^1=5$), один квиток вартістю 65 грн. (їхнє число дорівнює $C_3^1=3$) і один квиток вартістю 100 грн. (їхнє число дорівнює $C_2^1=2$). Тому число несприятливих події A випадків буде 5 · 3 · 2 = 30. Отже

$P(\bar{A})=\frac{30}{120}=0,25$. Ймовірність же того, що хоча б два із трьох узятих квитків мають однакову вартість, дорівнює $p(A)=1-0,25=0,75$.

б) Подію «вартість всіх трьох квитків дорівнює 160 грн.» позначимо через A. Ця подія може трапитися лише в тому випадку, коли два квитка з трьох узятих будуть коштувати по 65 грн., а один квиток – 30 грн. (при цьому число сприятливих випадків буде рівним: $C_5^1 \cdot C_3^2=5\cdot 3=15$), або коли два з трьох узятих квитків будуть коштувати по 30 грн., а один квиток – 100 грн. (при цьому число сприятливих випадків буде рівним: $C_5^2 \cdot C_2^1=\frac{5!}{2!3!}\cdot 2=20$). Тут треба додати сприятливі випадки і віднести їх до можливого числа випадків. Маємо: $P(A)=\frac{15+20}{120}\approx 0,29$.

11. Позначимо через A подію «обидві кулі виявилися білими», а через B – «обидві кулі виявилися чорними». Ці події незалежні. Число всіх можливих випробувань дорівнює числу пар, які можна утворити з 10 різних куль, тобто $n=C_{10}^2=\frac{10!}{2!8!}=45$. Число випробувань, сприятливих появі двох білих куль, $C_6^2=\frac{6!}{2!4!}=15$, а двох чорних – $C_4^2=\frac{4!}{2.12!}=6$. Отже, маємо: $P(A+B)=\frac{15+6}{45}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}\approx 0,47$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. У коробці містяться шість однакових, занумерованих кульок. Навмання по одній виймають усі кульки. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих кульок розташуються за зростанням.
2. Слово «інтеграл» складено з літер на картках розрізної азбуки. З них навмання виймають три картки і кладуть в ряд одну за одною. Яка ймовірність того, що при цьому складеться слово «гра»?
3. Виконується випробування агрегату, що складається із трьох паралельних частин, що дублюють одна іншу. За час t ймовірність безвідмовної роботи I частини – 0,23, II – 0,27, III – 0,32. Знайти ймовірність виходу з ладу всього агрегату за час t.

4. Імовірність складання іспиту студентом на п'ятірку дорівнює 0,3, четвірку – 0,45, двійку – 0,1; імовірність того, що він не з'явитися на іспит – 0,05. Яка ймовірність того, що студент отримає позитивну оцінку?
5. При грі в «преферанс» з колоди в 32 карти трьом гравцям роздають по 10 карт, а 2 карти кладуть в «прикуп». Яка імовірність того, що в «прикупі» 2 тузи?
6. При падінні монети, як правило, вважають, що ймовірність її падіння «на ребро» дорівнює нулю, оскільки товщина монети мала порівняно з її діаметром. А якою повинна бути товщина монети, щоб ймовірності падіння «герба», «цифри» і «на ребро» були однаковими і рівними $\frac{1}{3}$?
7. Десять однакових кульок довільно розкладають в чотири ящики. Яка ймовірність того, що:
   а) в першому ящику буде одна кулька, в другому – дві кульки, в третьому – три кульки, в четвертому – 4 кульки;
   б) в даному ящику буде 5 кульок.
8. З 10 лотерейних білетів 4 виграшні Визначити ймовірність того, що серед чотирьох взятих навмання білетів є:
   а) один виграшний;
   б) 2 виграшних;
   в) чотири виграшних;
   г) хоч один виграшний.
9. Яка ймовірність того, що при випадковому розподілі кульок по 10 ящиках один ящик виявиться порожнім?
10. В круг вписано правильний трикутник. Знайти ймовірність того, що точка, кинута в круг, потрапить в трикутник.
11. В квадрат вписано круг. Знайти ймовірність того, що точка, кинута в квадрат, потрапить в круг.
12. Автопригода сталася на ділянці шосе між 40 і 60 км. Яка ймовірність того, що пригода відбулася між 43 і 51 км.
13. В круг вписано правильний шестикутник. Знайти ймовірність того, що точка, кинута в круг, потрапить в шестикутник.
14. В правильний шестикутник вписано круг. Знайти ймовірність того, що точка, кинута в шестикутник, потрапить в круг.

Тема 3

НЕЗАЛЕЖНІ І ЗАЛЕЖНІ ПОДІЇ. ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ

Означення 1. Якщо ймовірність події A обчислюється за умови, що відбувалась подія B, то така ймовірність називається умовною ймовірністю і позначається $P(A\,/\,B)$. Ймовірність $P(A)$ називається безумовною. Умовна ймовірність $P(A\,/\,B)$ обчислюється за формулою:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)},\ (P(B)\neq 0).$$

Аналогічно, для умовної ймовірності $P(B\,/\,A)$:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)},\ (P(A)\neq 0).$$

З цих формул випливає теорема множення імовірностей.

Теорема 1. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої за умови, що відбулась перша, тобто: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$.

Цю теорему методом математичної індукції можна поширити на довільну кількість множників.

Теорема 2. Для довільних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ справедлива формула:

$$P(A_1, A_2, ..., A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Приклад 1. З колоди в 36 карт навмання беруть 4 карти. Яка ймовірність того, що ці карти королі?

Розв'язання. Нехай подія A – навмання взяті чотири карти королі, A_k – k-та карта король ($k=\overline{1,4}$). Очевидно, що $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4$. За теоремою 2

$$P(A)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cdot A_2)P(A_4/A_1\cdot A_2\cdot A_3)=$$

$$=\frac{4}{36}\cdot\frac{3}{35}\cdot\frac{2}{34}\cdot\frac{1}{33}=0,00002.$$

Означення 2. Подія A називається незалежною від події B, якщо умовна і безумовна ймовірності події A рівні, тобто $P(A/B)=P(A)$.

Якщо події A і B незалежні, то має місце наступна теорема.

Теорема 3. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей, тобто $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Приклад 2. Проводиться два постріли в мішень. Ймовірності влучення при кожному пострілі відповідно рівні 0,85 і 0,9. Знайти ймовірність того, що в мішені буде хоч одне влучення.

Розв'язання. Нехай подія A – в мішені хоч одне влучення. A_1 – в мішень влучили при першому пострілі, A_2 – при другому. Протилежну подію $\overline{A}$ можна подати у вигляді $\overline{A}=\overline{A_1\cdot A_2}$. За теоремою 3:

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = (1 - 0{,}85)(1 - 0{,}9) = 0{,}15\cdot 0{,}1 = 0{,}015.$$

Звідси $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$.

Означення 3. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо для будь-яких $1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_n\le n$ справедлива рівність:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_n})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_n}).$$

Очевидно, що для незалежних в сукупності подій, імовірність їх добутку дорівнює добутку імовірностей.

Якщо події A і B сумісні, то ймовірність їх суми визначається за формулою:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Для обчислення ймовірності добутку подій можна використати теорему множення ймовірностей. Зокрема, якщо події залежні, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B/A).$$

Або

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(B)\cdot P(A/B).$$

Для незалежних подій ці формули набувають вигляду:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

Означення 4. Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називаються гіпотезами, якщо вони утворюють повну групу подій $\bigcup_{i=1}^{n} H_i=\Omega$, тобто, принаймні, одна з них обов'язково відбувається і є попарно несумісними $H_i\bigcap H_j=\varnothing,\ i\ne j$.

Теорема 4. Нехай подія A відбувається тоді, коли має місце яка-небудь з гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. За таких умов має місце формула повної ймовірності:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Приклад 4. В урні 10 білих і 4 зелених кульки. Навмання беруть одну кульку і відкладають в сторону, а після цього беруть ще одну кульку. Яка ймовірність того, що друга кулька біла?

Розв'язання. Нехай подія A – після відкладання першої кульки взяли другу кульку білого кольору. Розглянемо гіпотези:

H_1 – перша кулька білого кольору;

H_2 – перша кулька зеленого кольору.

За формулою повної імовірності шукана ймовірність дорівнює:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{10}{14}\cdot\frac{9}{13}+\frac{4}{14}\cdot\frac{10}{13}=\frac{130}{182}=0{,}71.$$

Теорема 4. Якщо виконуються умови, за яких вірна формула повної ймовірності, то має місце формула Байєса або теорема гіпотез:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Ймовірності $P(H_i)$ називають апріорними, а імовірності $P(H_i/A)$ апостеріорними.

Приклад 5. Три мисливці одночасно вистрілили в здобич, після чого в ній виявили одне влучення. Знайти ймовірність того, що в здобич влучив перший мисливець, якщо ймовірності влучення для кожного з них відповідно рівні 0,7; 0,8 та 0,9.

Розв'язання. Нехай подія A – після трьох пострілів у здобич виявили одне влучення. Розглянемо гіпотези:

H_1 – в здобич влучив перший мисливець, а другий і третій ні;

H_2 – в здобич влучив другий мисливець, а 1 і 3 ні;

H_3 – в здобич влучив 3 мисливець, а 1 і 2 ні.

Позначимо через A_i подію – в здобич влучив і-й мисливець. Тоді гіпотези H_i запишемо так:

$$H_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}; \quad H_2 = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}; \quad H_3 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3.$$

Ймовірності цих гіпотез :

$$P(H_1) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0{,}014; \; P(H_2) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) = 0{,}024;$$

$$P(H_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = 0{,}054.$$

Умовні ймовірності $P(A/H_i) = 1$, бо події A/H_i – вірогідні. За формулами Байєса отримуємо:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}014}{0{,}014 + 0{,}024 + 0{,}054} = 0{,}152.$$

Практичне заняття № 4

НЕЗАЛЕЖНІ І ЗАЛЕЖНІ ПОДІЇ. ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ

1. Умовна ймовірність та її властивості.
2. Теорема множення ймовірностей. Незалежність подій.
3. Теорема додавання і множення ймовірностей.
4. Формула повної ймовірності.
5. Формули Байєса.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. У лотереї 1000 білетів, з них на один білет випадає виграш 500 грн., на 10 білетів – виграші по 100 грн., на 50 білетів – виграші по 20 грн., на 100 білетів – виграші по 5 грн. Решта білетів невиграшні. Знайти ймовірність виграшу на один білет не менш як 20 грн.
2. В магазин швейної фабрики принесли 80 костюмів, з яких 50 костюмів одного фасону, а 30 – іншого. Знайти ймовірність того, що взяті навмання два костюми виявляться різних фасонів.
3. Продавець обслуговує у магазині два відділи. Ймовірність того, що деякий час йому доведеться відпускати товар з І відділу, рівна 0,8, з ІІ – 0,7. Яка ймовірність того, що протягом деякого часу продавець не буде відпускати товар?
4. Три студенти складають іспит. Ймовірність складання іспиту на «5» першим студентом рівна 0,2, другим – 0,5, третім – 0,3. Яка ймовірність того, що всі три студенти складуть іспит на «5».
5. Прилад складається із трьох вузлів, кожний з яких незалежно від інших може відмовити в роботі. Вихід з ладу хоча б одного вузла приводить до зупинки приладу в цілому. Ймовірність безвідмовної роботи протягом 8 годин першого вузла дорівнює 0,8, другого – 0,9, третього – 0,7. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу протягом 8 годин.
6. Серед 50 електроламп є 3 нестандартні. Знайти ймовірність того, що дві навмання узяті електролампи виявились нестандартними.

7. Десять студентів розв'язують задачу. З них 2 студента вчаться на «відмінно» (перша група), п'ять на «добре» (друга група) і три на «задовільно» (третя група). Ймовірність того, що задача буде розв'язана студентом з першої групи, рівна 0,9; другої групи – 0,8; третьої групи – 0,5. Яка ймовірність розв'язання задачі одним зі студентів?
8. На склад надходять електричні лампи. Перший завод поставляє 70%, а другий – 30% усієї кількості ламп. Відомо, що перший завод випускає 95%, а другий – 92% стандартної продукції. Узята навмання електролампа виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що ця лампа надійшла з першого заводу, із другого заводу.
9. Вісімдесят відсотків всіх приладів складається з високоякісних деталей, а двадцять відсотків – з деталей звичайної якості. Якщо прилад зібрано з високоякісних деталей, то ймовірність його безвідмовної роботи протягом певного часу t рівна 0,9. Якщо прилад зібрано з деталей звичайної якості, то ймовірність – 0,5. При випробуванні протягом часу t прилад працював безвідмовно. Знайти ймовірність того, що прилад зібрано з високоякісних деталей.
10. У слюсаря є 3 конусних та 7 еліптичних валиків. Він бере один раз 2 валики, а потім ще 2. Яка ймовірність того, що останні взяті валики еліптичні?
11. Ймовірність у студента другого курсу перейти на третій курс рівна 0,9, а ймовірність закінчити університет – 0,8. З якою ймовірністю можна стверджувати, що студент третього курсу закінчить університет?

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Якщо подія A – виграш на один білет не менш як 20 грн., то із загальної кількості білетів $n=1000$ цій події сприяє $m=61$ випадків (на таку кількість білетів випадають виграші не менші як 20 гривень). Тому $P(A)=\dfrac{61}{1000}=0{,}061$.
2. Позначимо через A подію «надійшов на продаж костюм першого фасону», через B – «надійшов на продаж костюм другого фасону», через C – «два костюми, що надійшли на продаж, є костюмами різних фасонів». Подія C може відбутися тільки тоді, коли першою відбудеться

подія A, а другою – подія B, або першою – подія B, а другою – подія A. Імовірність появи події C визначимо за формулою: $P(C) = P$[(АВ) або (ВА)]. Події A і B залежні. Тому ймовірності $P(AB)$ і $P(BA)$ знаходимо за формулою: $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$, $P(BA) = P(B) \cdot P(A/B)$. В цьому випадку: $P(A) = 50/80$; $P(B) = 30/80$; $P(B/A) = 30/79$ і $P(A/B) = 50/79$. Отже, $P(AB) = 50/80 \cdot 30/79 = 75/316$, $P(BA) = 30/80 \cdot 50/79 = 75/316$. Події (AB) і (BA) незалежні. Знаходимо $P(C)$: $P(C) = P(AB) + P(BA) =$
$= 75/316 + 75/316 = 75/158$.

3. Позначимо події «продавець відпускає товар» з І відділу через A, а з ІІ – через B. Тоді події «продавець не відпускає товар» з І і з ІІ відділів будуть відповідно $\bar{A}$ і $\bar{B}$. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\bar{B}) = 1 - P(\text{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Події $\bar{A}$ і $\bar{B}$ незалежні. Тому $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.
4. Позначимо через A подію «складання іспиту на «5» всіма студентами», через A_1 – «складання іспиту на «5» першим студентом», через A_2 – «складання іспиту на «5» другим студентом», через A_3 – «складання іспиту на «5» третім студентом». Події A_1, A_2, A_3 незалежні, тоді $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Отже, маємо: $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$
$= 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$.
5. Нехай подія A – «безвідмовна робота приладу протягом 8 годин», A_1 – «безвідмовна робота першого вузла», A_2 – «безвідмовна робота другого вузла», A_3 – «безвідмовна робота третього вузла». Очевидно, що $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, тому $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$.
6. Позначимо через A подію «перша узята навмання електролампа виявилася нестандартною», а через B – «друга електролампа нестандартна за умови, що перша електролампа виявилася нестандартною». Подія «дві взяті лампи нестандартні» позначимо через C, тоді $C = AB$. Отже, ймовірність $P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$, де $P(A) = 3/50$, $P(B/A) = 2/49$. Отже, $P(C) = 3/50 \cdot 2/49 = 0{,}002$.
7. Позначимо через A_1, A_2, A_3 події «задачу буде розв'язано відповідно студентом першої, другої, третьої групи». Подію «задача буде вирішена» позначимо через B. Тоді маємо умовну подію. Отже, $P(A_1) = 0{,}2$;

$P(A_2) = 0{,}5$; $P(A_3) = 0{,}3$; $P(B/A_1) = 0{,}9$; $P(B/A_2) = 0{,}8$; $P(B/A_3) = 0{,}5$. За формулою повної ймовірності маємо: $P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 + + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}73$.

8. Нехай A_1 – подія «лампа надійшла з першого заводу», A_2 – «лампа надійшла із другого заводу», B – подія «лампа стандартна». Отже, $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}3$; $P(B/A_1) = 0{,}95$; $P(B/A_2) = 0{,}92$. За формулою Бейєса маємо:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}95}{0{,}7 \cdot 0{,}95 + 0{,}3 \cdot 0{,}92} = 0{,}71;$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}92}{0{,}7 \cdot 0{,}95 + 0{,}3 \cdot 0{,}92} = 0{,}29.$$

9. Позначимо через B подію «безвідмовна робота приладу», через A_1 – «прилад зібраний з високоякісних деталей», через A_2 – «прилад зібраний з деталей звичайної якості». За умовою задачі: $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}2$; $P(B/A_1) = 0{,}9$; $P(B/A_2) = 0{,}5$. За формулою Байєса маємо:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = 0{,}878.$$

10. Нехай подія A – останні 2 взяті валики еліптичні. Розглянемо гіпотези:

H_1 – перші 2 взяті валики конусні;

H_2 – з перших 2-х взятих валиків один – конусний, а один – еліптичний;

H_3 – перші 2 взяті валики еліптичні.

За формулою повної імовірності шукана ймовірність дорівнює:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{21}{28} + \frac{3}{15} \cdot \frac{15}{28} + \frac{7}{15} \cdot \frac{10}{28} = \frac{34}{105} = 0{,}32.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Студент приходить на залік, знаючи лише відповіді на 24 запитання із 30. Викладач поставив йому два запитання. Яка ймовірність того, що студент відповість на ці два запитання?
2. У кожній з трьох коробок лежить по десять деталей; у першій коробці дві деталі браковані, у другій – три, у третій – одна. З кожної коробки беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що:
   а) всі три взяті деталі браковані;
   б) всі три деталі стандартні.
3. Ймовірність попадання в мішень одним стрільцем становить 0,8, іншим – 0,7. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що принаймні один стрілець влучить в мішень?
4. Стрілець A_1 влучає в ціль з ймовірністю $P_1 = 0,8$, стрілець A_2 – з ймовірністю $P_2 = 0,7$, стрілець A_3 – з ймовірністю $P_3 = 0,9$ Знайти ймовірність хоча б одного попадання (подія A) при одному пострілі кожного зі стрільців.
5. Ймовірність у студента другого курсу перейти на третій курс рівна 0,9, а ймовірність закінчити університет – 0,8. З якою ймовірністю можна стверджувати, що студент третього курсу закінчить університет?
6. Деталі випускаються двома заводами, причому продуктивність першого заводу в n разів більша продуктивності другого. Доля браку у першого заводу P_1, а у другого – P_2. Навмання вибрана деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона випущена другим заводом?
7. У партії з 15 деталей 12 стандартних. Навмання взято дві деталі. Знайти ймовірність того, що хоч одна з них стандартна.
8. В урні 20 кульок. З них 4 білих, інші кольорові. Вийняли 3 кульки. Яка ймовірність того, що серед них є одна кольорова?
9. На електростанції працює 15 інженерів, з них 4 жінки. У зміні зайнято три особи. Знайти ймовірність того, що у випадково вибраній зміні чоловіків буде не менше трьох.

10. Два гравці по черзі кидають гральний кубик, кожний по одному разу. Виграє той, на чийому кубику випаде більше число. Знайти ймовірність виграшу для першого гравця.
11. Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її навмання. Визначити ймовірність того, що він зателефонує не більш, як у три абонентські точки.
12. В круг вписано квадрат. Яка ймовірність того, що навмання кинуті в круг 2 точки виявляться всередині квадрата?
13. В ящик, що містить чотири однакові деталі, помістили стандартну деталь, а потім навмання вийняли одну деталь. Знайти ймовірність того, що вийнята деталь стандартна якщо всі припущення про початкове число стандартних деталей в ящику рівноможливі.
14. В першій урні знаходиться 10 кульок, серед яких вісім білих. В другій урні – 20 кульок, з них 4 білі. З кожної урни навмання взяли по кульці, а потім з цих двох кульок взяли одну кульку. Знайти ймовірність того, що взята кулька біла.
15. В ящик, що містить 15 деталей, серед них 12 стандартних, кинули ще одну деталь. Після цього з ящика беруть 3 деталі, Яка ймовірність того, що всі деталі стандартні?
16. В піраміді 10 гвинтівок, чотири з яких із оптичним прицілом. Ймовірність влучення з такої гвинтівки 0.95, а з гвинтівки без оптичного прицілу = 0,18. Стрілець влучив у мішень з навмання взятої гвинтівки. Що ймовірніше: стрілець стріляв з гвинтівки з оптичним прицілом чи без нього?

Тема 4

СХЕМА БЕРНУЛЛІ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Означення1. Схемою Бернуллі в теорії ймовірностей називають схему послідовних незалежних випробувань з двома можливими наслідками при кожному випробуванні.

Тобто, схема Бернуллі має місце, якщо відбуваються послідовні незалежні випробування, при кожному з яких може трапитися одна з двох подій A або $\bar{A}$ зі сталими ймовірностями, відповідно, $P(A)=p$ та $P(\bar{A})=1-p=q$.

Випробування, при якому настає подія A, ми називаємо успіхом. Якщо ж настає подія $\bar{A}$, то, кажуть, що це невдача.

Прикладами випробувань Бернуллі можуть бути підкидання монети («успіх» – це випадання герба), постріли в мішень («успіх» – це влучення в мішень), підкидання грального кубика («успіх» – це випадання певної грані), перевірка якості виробів на підприємстві («успіх» – це доброякісний виріб), тощо.

Якщо через μ позначити число успіхів у серії з n послідовних незалежних випробувань Бернуллі, то для того, щоб знайти ймовірність випадання успіху $\mu = k$ $(0 \le k \le n)$ разів, використовуємо формулу Бернуллі:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Оскільки події $\mu = 0$, $\mu = 1$, …., $\mu = n$ – попарно несумісні і при кожній серії з n послідовних незалежних випробувань Бернуллі одна подія обов'язково відбувається, то сума всіх ймовірностей завжди рівна одиниці тобто

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=1.$$

За допомогою теореми додавання ймовірностей і формули Бернуллі обчислюються також ймовірності наступних подій:

$$P\{\mu \le k\}=\sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m q^{n-m}, \quad P\{k_1 \le \mu \le k_2\}=\sum_{m=k_1}^{k_2} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Якщо потрібно обчислити ймовірність принаймні одного успіху в серії з n послідовних незалежних випробувань, використовуємо формулу:

$$P\{\mu \geq 1\} = 1 - P\{\mu = 0\} = 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 - q^n = 1 - (1-p)^n.$$

Приклад 1. Проводиться 4 незалежних постріли в мішень. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що буде мати місце хоча б одне влучення в мішень.

Розв'язання. $P\{\mu \geq 1\} = 1 - (1 - 0{,}85)^4 = 1 - 0{,}0225^2 = 0.9995.$

Цікава, також, задача обчислення кількості послідовних незалежних випробувань для того, щоб ймовірність принаймні одного успіху була б не менша наперед заданого числа p_0. Для розв'язання цієї задачі розглянемо нерівність: $P\{\mu \geq 1\} = 1 - (1-p)^n \geq p_0$. Звідси слідує: $\ln(1-p_0) \leq \ln(1-p)^n$.

Отримуємо формулу: $n \geq \dfrac{\ln(1-p_0)}{\ln(1-p)}$.

Для визначення найімовірнішого числа успіхів у схемі Бернуллі використаємо співвідношення:

$$np - q \leq \kappa_0 \leq np + p.$$

З нього знаходимо ціле значення κ_0, яке задовольняє цю нерівність.

Приклад 2. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі становить 0, 96. Знайти найімовірніше число влучень при 80 пострілах.

Розв'язання. Маємо схему Бернуллі, де $n = 80, p = 0{,}96, q = 0{,}04$.

Число κ_0 знаходимо з нерівностей:

$$80 \cdot 0{,}96 - 0{,}04 \leq \kappa_0 \leq 80 \cdot 0{,}96 + 0{,}96,$$

$$76{,}76 \leq \kappa_0 \leq 77{,}76,$$

$$\kappa_0 = 77.$$

При досить великих значеннях n і k користуватися формулою Бернуллі для знаходження $P_n(k)$ незручно. На практиці тоді застосовують **локальну теорему Лапласа:**

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, яку називають функцією Гаусса, подаються в таблицях значень спеціальних функцій (Тема 11).

Якщо значеннях p досить малі (подія A малоймовірне явище), то застосовується наближена **формула Пуассона**:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!}\cdot e^{-\lambda},\ \lambda=np.$$

Сукупність значень $P(k),(\kappa=0,1,....)$ називають розподілом Пуассона.

Ймовірність $P\{k_1\le\mu\le k_2\}$ того, що подія A здійсниться при n випробуваннях від k_1 до k_2 разів, обчислюється за допомогою **інтегральної формули Муавра-Лапласа**:

$$P\{k_1\le\mu\le k_2\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{y^2}{2}}dy,\quad x_i=\frac{k_i-np}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислення даного інтегралу ускладнюється тим, що для функції $e^{-\frac{y^2}{2}}$ не існує первісної в елементарних функціях. Тому вводять спеціальну функцію

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

яку називають функцією Лапласа і яка теж табульована (Тема11).

Отже

$$P\{k_1\le\mu\le k_2\}\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1).$$

Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях приблизно дорівнює:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Приклад 3. Монету кидають 100 разів. Яка ймовірність того, що герб випаде не менше 40 разів?

Розв'язання. Маємо схему Бернуллі, де n = 100, $p=q=0,5$, $40\le\mu\le100$.

Тоді

$$P\{40 \le \mu \le 100\} \approx \Phi\left(\frac{100-100\cdot 0.5}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0,5}}\right)-\Phi\left(\frac{40-100\cdot 0,5}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0,5}}\right)=$$

$$=\Phi(10)-\Phi(-2)=0,5-0,4773=0,9773.$$

Практичне заняття № 5-6

СХЕМА БЕРНУЛЛІ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

1. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі.
2. Найімовірніше число «успіхів» у схемі Бернуллі.
3. Наближені формули для біномних ймовірностей.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. Ймовірність замовлення в технічній бібліотеці книг з відділу техніка дорівнює 0,7, а з відділу математика – 0,3. Яка ймовірність того, що з п'яти читачів, які зайшли в бібліотеку, усі замовлять книги з одного відділу?
2. Автопарк нараховує 12 автомашин. Ймовірність виходу на маршрут кожної з них p = 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку, якщо для цього на маршруті необхідно мати не менш 8 автомашин.
3. Стрілок зробив 4 постріли по мішені. Ймовірність влучення при кожному пострілі постійна і дорівнює p = 0,6. Знайти ймовірність того, що буде хоча б одне влучення у мішень.
4. Перевіряють партію електроламп, ймовірність непридатності електролампи рівна 0,05. Скільки ламп необхідно перевірити, щоб можна було зафіксувати хоча б одну непридатну лампу з ймовірністю 0,9?
5. Знайти найімовірніше число нестандартних деталей в партії із 100 деталей, якщо ймовірність того, що деталь нестандартна, p = 0,1.
6. Стріляють по групі з 24 танків. Ймовірність того, що танк буде вражено, дорівнює 0,6. Визначити k_0 – найімовірніше число підбитих танків.
7. Яку кількість лотерейних квитків потрібно купити, щоб найімовірніше число виграшів дорівнювало 16, якщо ймовірність виграшу для кожного квитка p = 0,01.
8. Ймовірність виявити нестандартний виріб p = 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 навмання відібраних виробів – 40 нестандартних?

9. Робітник обслуговує 1000 веретен. Ймовірність розриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини рівна 0,004. Яка ймовірність того, що протягом однієї хвилини нитка обірветься на 5 веретенах.
10. Схожість насіння пшениці дорівнює 95%. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних зернин пшениці не проростуть від 80 до 120 зернин.
11. Ймовірність випустити лампу з дефектом рівна 0,08. Яка ймовірність того, що для 1000 ламп відхилення від вказаного відсотка браку не буде перевищувати 0,01?

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. У задачі розглядається послідовність незалежних випробувань. Тут кількість незалежних випробувань $n=5$ і кількість замовлених одночасно книг $k=5$. Одночасно всі п'ять читачів можуть замовити книги з відділу математика або з відділу техніка. Ймовірність того, що всі п'ять читачів замовлять книги з математики, рівна $P_1 = C_5^5 \cdot (0,3)^5 \cdot (1-0,3)^0 =$ 0,00243. Ймовірність того, що всі п'ять читачів замовлять книги з техніки, рівна: $P_2 = C_5^5 \cdot (0,7)^5 \cdot (1-0,7)^0 =$ 0,16807. Події замовлення книг незалежні. Тоді шукана ймовірність P = 0,00243 + 0,16807 = 0,1705.
2. Роботу парку можна вважати нормальною, якщо на маршруті буде 8, 9, 10, 11 або 12 автомашин. Ці події попарно незалежні і несумісні. Знайдемо ймовірність нормальної роботи автопарку для кожного окремого випадку за формулою:

$$P_{12}(8) = C_{12}^{8} \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^4 \approx 0.1331;$$

$$P_{12}(9) = C_{12}^{9} \cdot (0,8)^9 \cdot (0,2)^3 \approx 0,2358;$$

$$P_{12}(10) = C_{12}^{10} \cdot (0,8)^{10} \cdot (0,2)^2 \approx 0,2825;$$

$$P_{12}(11) = C_{12}^{11} \cdot (0,8)^{11} \cdot 0.2 \approx 0,2062;$$

$$P_{12}(12) = C_{12}^{12} \cdot (0,8)^{12} \cdot (0,2)^0 \approx 0,0687.$$

Ймовірність нормальної роботи автопарку за умови, що на маршруті не менше 8 автомашин, дорівнює сумі цих ймовірностей, тобто:

$$P(k \geq 8) = P_{12}(8) + P_{12}(9) + P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12) =$$

$$= 0{,}1331 + 0{,}2358 + 0{,}2825 + 0{,}2062 + 0{,}0687 = 0{,}9263.$$

3. Знаходимо ймовірність здійснення протилежної події – «жодного влучення у мішень». Оскільки сума ймовірностей протилежних подій повинна дорівнювати одиниці, то $P_4(k \geq 1) = 1 - P_4(0)$, тут $P_4(0)$ – ймовірність того, що при чотирьох пострілах буде 0 влучень.

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^4 = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}4)^4 = 0{,}0256.$$

Отже, $P_4(k \geq 1) = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744.$

4. За умовою задачі маємо: $p = 0{,}05$, $P_n(1) = 0{,}9$. Ймовірність того, що лампа виявиться придатною, дорівнює $1 - p = 0{,}95$, а ймовірність придатності всіх ламп буде $(1-p)^n$. Тоді ймовірність протилежної події, тобто ймовірність того, що хоча б одна лампа серед n ламп виявиться непридатною, дорівнює $1 - (1-p)^n$. Ця ймовірність повинна бути не менша 0,9. Тому

$$1 - (1-p)^n \geq P_n(1);$$

$$1 - (1-p)^n \geq 0{,}9;$$

$$(0{,}95)^n \leq 0{,}1;$$

$$n \lg(0{,}95) \leq -1;$$

$$n \geq \frac{1}{\lg \frac{100}{95}} = 44{,}8.$$

Оскільки $n \in N$, то шукане число дорівнює 45.

5. Маємо: $n = 100$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$. Тому найімовірніше число k_0 буде задовольняти нерівності:

$$100 \cdot 0{,}1 - 0.9 \leq k_0 \leq 100 \cdot 0{,}1 + 0{,}1;$$

$$10 - 0{,}9 \leq k_0 \leq 10 + 0{,}1.$$

Отже, найімовірніше число нестандартних деталей у партії з 100 деталей дорівнює $k_0 = 10$.

6. Маємо: n =24; p = 0,6; q = 0,4. Тому найімовірніше число підбитих танків буде задовольняти нерівності:

$$24\cdot 0{,}6-0{,}4\le k_0\le 24\cdot 0{,}6+0{,}6\,;$$

Звідки 14 ≤ k_0 ≤ 15. У цьому випадку k_0 приймає два значення, тобто найімовірніша кількість підбитих танків – це 14 або 15.

7. За умовою k_0 = 16; p = 0,01; q = 0,99. Потрібно визначити кількість лотерейних квитків, для якої 16 є найімовірнішим числом виграшів. Маємо:

$$0{,}01n - 0{,}99 \le 16 \le 0{,}01n + 0{,}01.$$

Звідси $\begin{cases}15{,}99\le 0{,}01n\\16{,}99\ge 0{,}01n\end{cases}$ або $\begin{cases}n\ge 1599\\n\le 1699\end{cases}$. Отже, n_1 = 1599; n_2 = 1699. Тобто 16 є найімовірнішим числом виграшів, якщо кількість лотерейних квитків знаходиться в межах між 1599 і 1699.

8. Маємо: k = 40; p = 0,005; n = 10000; q = 0,995. Тому відповідно до локальної теореми Лапласа шукана ймовірність обчислюється за формулою:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Отже

$$P_n(k)\approx\frac{1}{7{,}05\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\; x=\frac{40-10000\cdot 0{,}005}{7{,}05}=1{,}42.$$

За таблицями (для функції Гауса) знаходимо: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ = 0,1456;

$$P_{10000}(40)\approx\frac{0{,}1456}{7{,}05} = 0{,}0206.$$

9. За умовою задачі n = 1000; p = 0,004; k = 5; q = 0,996. Оскільки n – число дуже велике, p – мале, то застосуємо формулу Пуассона: $P_n(k)\approx\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!}\cdot e^{-\lambda},\ \lambda=np.$

Тому

$$P_{1000}(5)\approx\frac{4^5}{5!}\cdot e^{-4}=0{,}1564.$$

10. Ймовірність того, що зерно не проросте, рівна 0,05. Маємо: p = 0,05; n = 2000; $k_1 = 80$; k_2 = 120; q = 0,95. Для розв’язування цієї задачі використовуємо інтеграл Лапласа:

$$P\{k_1 \le \mu \le k_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для нього обчислюємо межі: $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{80 - 2000 \cdot 0{,}05}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}} = -2{,}05;$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{120 - 2000 \cdot 0{,}05}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}} = 2{,}05.$$

Оскільки Ф(–α) = – Ф(α), по таблиці значень інтеграла Лапласа (Тема 11) знаходимо: Ф(–2,05) = – 0,4798. Шукана ймовірність дорівнює: $P\{80 \le \mu \le 120\} \approx$ 0,4798 + 0,4798 = 0,9596.

11. За умовою задачі n = 1000; p = 0,08; q = 0,92; ε = 0,01. Знайдемо шукану ймовірність за формулою $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$:

$$P(\varepsilon) = P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0{,}008\right| \le 0{,}01\right) \approx$$

$$\approx 2\Phi\left(0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{1000}{0{,}08 \cdot 0{,}0{,}92}}\right) = 2\Phi(1{,}17) \approx 2 \cdot 0{,}38 = 0{,}76.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Монету підкидають 10 разів. Яка ймовірність того, що:

   а) герб випаде 5 разів;

   б) не більше 5 разів?

2. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі становить 0,95. Знайти найімовірніше число влучень при 150 пострілах.
3. При комп’ютерному наборі тексту ймовірність помилки в набраному слові становить 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед 30000 набраних слів у 5 словах будуть помилки.
4. Яка ймовірність того, що в партії з 5000 деталей не менше 2 нестандартних, якщо ймовірність того, що деталь нестандартна, становить 0,001?

5. Ймовірність випуску бракованої деталі на станку дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що в партії з 10 випущених на цьому станку деталей рівно k будуть без браку. Розв'язати задачу для $k = 0, 1, 10$.
6. Ймовірність того, що телевізор має приховані дефекти, дорівнює 0,2. На склад поступило 20 телевізорів. Яка подія ймовірніша: що в цій партії є два телевізори з прихованими дефектами чи три?
7. Із n акумуляторів за рік зберігання k виходять з ладу. Навмання вибирають m акумуляторів. Визначити ймовірність того, що серед них l робочих. $n = 100$, $k = 7$, $m = 5$, $l = 3$.
8. Компанія має на біржі декілька дилерів, які діють незалежно один від одного. Ймовірність того, що дилер буде діяти вдало становить 0,7. Знайти ймовірність того, що з 5 дилерів будуть у збитках:

   а) 2 дилери;
   б) принаймні 2 дилери.

9. При скануванні текстового матеріалу в середньому на кожну тисячу символів зустрічаються два помилкові символи. Визначити ймовірність того, що після сканування тексту в 2500 символів виявиться помилкових:

   а) 6 символів;
   б) принаймні 6 символів.

10. Технологічний процес підприємства дозволяє одержати 90% стандартних виробів. Знайти найімовірніше число стандартних виробів серед 300 виготовлених та відповідну ймовірність.
11. Ймовірність того, що навмання взята електролампочка відпрацює передбачений термін становить 0,95. Знайти ймовірність того, що з 400 придбаних лампочок принаймні 370 відпрацюють передбачений термін, а також найімовірніше число таких лампочок та відповідну ймовірність.
12. Відомо, що 5% телевізорів виходять з ладу через перепади напруги в електромережі. Яка ймовірність того, що з 5 придбаних телевізорів принаймні 3 не вийдуть з ладу?
13. Відомо, що в технологічному процесі виготовлення мікросхем забезпечується 98% стандартної продукції. Яка ймовірність того, що серед 200 мікросхем виявиться не менше 3 бракованих?

14. На дорогах країни лише 80% автомобільних шин витримують гарантійний термін. Знайти найімовірніше число шин, що не витримують цього терміну в партії з 500 шин та відповідну ймовірність.
15. Ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться стандартною, дорівнює 0,8. Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з ймовірністю 0,3 можна було стверджувати, що 160 з них виявляться стандартними?
16. Відомо, що 0,1% молюсків має перли ювелірної цінності. Яка ймовірність того, що з 2000 виловлених за день молюсків, дістануть принаймні 3 перлини.

Тема 5

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Означення 1. Під випадковою величиною ξ ми розуміємо змінну величину, яка в даному випробуванні може приймати деякі числові значення з певними ймовірностями.

Приклад 1. Експеримент – підкидання грального кубика, випадкова величина ξ – число очок які випали в цьому випадку. Ця величина може приймати значення: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Приклад 2. Експеримент – підкидання монети до першого випадання герба, випадкова величина ξ – це кількість підкидань.

Приклад 3. Експеримент – виконання 3 пострілів у мішень, випадкова величина ξ – число влучень у мішень при 3-х пострілах. Така величина може приймати значення: 0, 1, 2, 3.

Означення 2. Функцією розподілу випадкової величини ξ називають функцію $F_\xi(x)$, яка визначається рівністю

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, x \in R.$$

Ця функція неспадна, неперервна зліва і прямує до нуля при $x \to -\infty$ та прямує до 1, якщо $x \to +\infty$

Означення 3. Випадкова величина ξ називається **дискретною**, якщо значення, які приймає випадкова величина, можна пронумерувати. **Законом розподілу** дискретної випадкової величини називається перелік всіх можливих її значень із відповідними ймовірностями, з якими вона приймає кожне із цих значень.

Він зазвичай задається таблицею, яку часто називають рядом розподілу:

ξ	x_1	x_2	…….	x_k	…….	x_n
P	p_1	p_2	…….	p_k	…….	p_n

Очевидно, що $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Закон розподілу можна ілюструвати графічно. Для цього на осі абсцис відкладаємо можливі значення випадкової величини, а на осі ординат – відповідні їм ймовірності і з'єднуємо точки $(x_i;\ p_i)$ відрізками прямих. Отриману ламану називають також багатокутником розподілу (рис. 1).

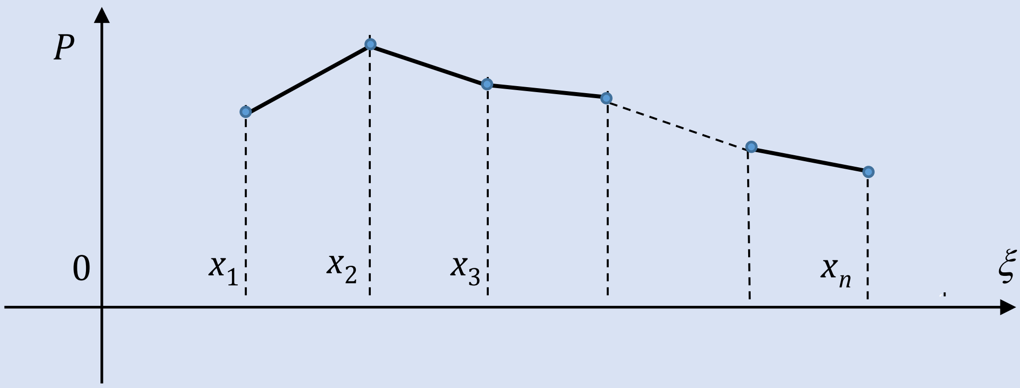


Рис. 1.

Приклад 4. Тричі підкидають монету. Випадкова величина ξ – число випадання герба. Побудувати закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини ξ.

Розв'язання. Можливими значеннями випадкової величини $\xi \in 0,1,2,3$. Використовуючи формулу Бернуллі, знаходимо ймовірності значень p_k:

$$p_k = P_k(3) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \frac{1}{8} C_3^k,\ k = \overline{0,3}.$$

Тому $p_0 = \frac{1}{8};\ p_1 = \frac{3}{8};\ p_2 = \frac{3}{8};\ p_3 = \frac{1}{8}$.

Закон розподілу випадкової величини ξ буде мати вигляд:

ξ	0	1	2	3
P	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Функцію розподілу будуємо у відповідності до формули $F(x) = \sum\limits_{x_k < x} p_k$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{8}, & 0 < x \le 1; \\ \frac{4}{8}, & 1 < x \le 2; \\ \frac{7}{8}, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Означення 4. Випадкова величина ξ називається **неперервною**, якщо її функція розподілу є неперервною функцією і її можна подати у вигляді

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(y)\mathrm{d}y,$$

де $p(x)$ – невід'ємна функція, яка задовольняє умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Функція $p(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей.

Функцію $F(x)$ називають інтегральною функцією розподілу, а функцію $p(x)$ – диференціальною функцією розподілу.

Приклад 6. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p(x)=\begin{cases} c, x \in [a;b]; \\ 0, x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Побудувати функцію розподілу $F(x)$.

З умови нормування знаходимо, що

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} c\mathrm{d}x = c\int_{a}^{b}\mathrm{d}x = c\,x\Big|_{a}^{b} = c(b-a).$$

Звідси $c=\frac{1}{b-a}$. Тому щільність розподілу ймовірностей

$$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a;b]; \\ 0, & x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Таким чином, функція розподілу цієї величини має вигляд:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} p(y)\mathrm{d}y=\begin{cases} 0, x<a; \\ \int_{a}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{b-a}, a\le x\le b; \\ 1, x>b. \end{cases} = \begin{cases} 0, x<a; \\ \frac{x-a}{b-a}, a\le x\le b; \\ 1, x>b. \end{cases}$$

Нехай дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

ξ	x_1	x_2	....	x_{i}	....
P	p_1	p_2	....	p_{i}	....

Означення 5. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини ξ називають число

$$M\xi=\sum_{\mathrm{i}} x_i p_i. \tag{1}$$

Множина значень випадкової величини ξ може бути скінченна або зчисленна. Якщо множина значень ξ скінченна, то $M\xi$ завжди існує, а якщо множина значень ξ зчисленна, то для існування $M\xi$ потрібно, щоб збігався ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\cdot p_i$.

Означення 6. Математичним сподіванням неперервної випадкової величини ξ називають число

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Для існування $M\xi$ потрібно вимагати абсолютної збіжності інтеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p(x)\mathrm{d}x<+\infty.$$

Якщо неперервну випадкову величину ξ задано законом розподілу $F(x)$, то знаходимо щільність розподілу $p(x)$ за правилом

$$p(x)=F'(x)$$

і обчислюємо $M\xi$ за формулою (2).

Якщо ξ – дискретна випадкова величина, яка має закон розподілу $P\{\xi = x_i\} = p_i$, то

$$Mf(\xi) = \sum_i f(x_i)p_i.$$

Якщо ж ξ – неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$, а $f(\xi)$ – неперервна функція, то

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\mathrm{d}x.$$

Ці формули поширюються на випадок функції декількох змінних. Зокрема, якщо (ξ,η) – дискретна випадкова величина з законом розподілу $p_{ik} = P\{\xi = x_i, \eta = y_k\}$, то

$$Mf(\xi,\eta) = \sum_{i,k} f(x_i, y_k)p_{i,k}.$$

А якщо (ξ,η) – неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу $p(x,y)$ і $f(\xi,\eta)$ – неперервна функція, то

$$Mf(\xi,\eta) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Означення 7. Дисперсією випадкової величини ξ називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \tag{3}$$

Означення 8. Арифметичне значення квадратного кореня з дисперсії називають середнім квадратичним відхиленням або стандартом і позначають $\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$.

Властивості математичного сподівання і дисперсії:

1. $M(C) = C$, *де* C – стала величина.
2. $M(C\xi) = CM\xi$.
3. $M(A\xi + B\eta) = AM\xi + BM\eta$.

4. $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$, якщо ξ і η – незалежні випадкові величини.

5. $D\xi \geq 0$, $DC = 0$.

6. $D(C\xi) = C^2 D\xi$.

7. $$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi. \tag{4}$$

8. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, *якщо* ξ *і* η – незалежні випадкові величини.

Формула (4) використовується замість формули (3) при практичному обчисленні дисперсії випадкової величини ξ. Для дискретних і неперервних випадкових величин ця формула відповідно набуває вигляду

$$D\xi = \sum_i x_i^2 p_i - M^2\xi \text{ або } D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}x - M^2\xi.$$

Крім математичного сподівання і дисперсії використовуються ще інші числові характеристики випадкової величини.

Означення 9. Початковим моментом k-го порядку $(k \in N)$ випадкової величини ξ називають число

$$\nu_k = M\xi^k.$$

Означення 10. Центральним моментом k-го порядку випадкової величини ξ називають число

$$\mu_\kappa = M(\xi - M\xi)^k.$$

Легко бачити, що $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D\xi$.

Практичне заняття № 7-8

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Дискретна випадкова величина.
2. Неперервна випадкова величина.
3. Функція розподілу дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини. Властивості.
4. Щільність розподілу випадкової величини.
5. Математичне сподівання.
6. Дисперсія та її властивості, середнє квадратичне відхилення.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. Ймовірність здачі екзамену на «5» для кожного із шести студентів рівна 0,4. Скласти таблицю закону розподілу кількості п'ятірок, отриманих студентами на екзамені і побудувати багатокутник цього розподілу. Розглядаючи кількість п'ятірок як випадкову величину ξ, обчислити її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.
2. Один з п'яти ключів відмикає замок. Скласти закон розподілу кількості спроб ξ відімкнути замок, якщо використаний ключ повертається до подальших випробувань.
3. Закон розподілу випадкової величини ξ має вигляд:

ξ	1	2	3	4
P	0,7	0,21	0,063	0,027

Знайти $F(x)$ інтегральну функцію розподілу випадкової величини ξ.

4. На дослідному полі площею 1000 га врожайність певного сорту пшениці має такий розподіл:

Врожайність, ц/га	17	18	19	20	21	22	23
Площа, га	40	100	150	360	210	80	60

Розглядаючи врожайність як випадкову величину ξ, обчислити її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

5. Серед 100 деталей є 75 деталей першого сорту. Скласти таблицю розподілу випадкової величини числа деталей першого сорту з 5 навмання узятих деталей, обчислити її математичне сподівання і дисперсію.
6. Незалежні випадкові величини ξ та η мають такі таблиці розподілу:

ξ	0	2	4	6	η	1	3	5
P	0,1	0,2	0,3	0,4	P	0,5	0,3	0,2

Скласти таблицю розподілу добутку випадкових величин ξ та η. На цьому прикладі перевірити, чому дорівнює математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин.

7. Кількість очок, набраних двома стрілками, характеризується такими законами розподілу:
   а) перший стрілок – ξ;
   б) другий стрілок – η.

ξ	3	4	5	η	2	3	4	5
P	0,1	0,4	0,5	P	0,1	0,1	0,5	0,3

Стрілки роблять по черзі постріли. Підраховується сума вибитих ними очок. Скласти закон розподілу цієї випадкової величини.

8. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ, якщо на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ її щільність розподілу ймовірностей $p(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x$ і $p(x)=0$ при $|x|>\frac{\pi}{2}$.
9. Неперервна випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, \; x<0; \\ x^3, 0\le x\le 1; \\ 1, \; x>1. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

10. Випадкова величина ξ розподілена за законом Коші, тобто її щільність розподілу ймовірностей визначається формулою

$$p(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}.$$

Чи існує математичне сподівання такої випадкової величини?

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Позначимо випадкову величину кількості п'ятірок, отриманих студентами на екзамені, через ξ. За умовою задачі p = 0,4; q = 0,6. Визначимо ймовірності, з якими ξ приймає відповідно значення: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\xi=0,\ P(0)=C_6^0\cdot(0,4)^0\cdot(0,6)^6\approx 0,047;$$

$$\xi=1,\ P(1)=C_6^1\cdot(0,4)^1\cdot(0,6)^5\approx 0,187;$$

$$\xi=2,\ P(2)=C_6^2\cdot(0,4)^2\cdot(0,6)^4\approx 0,311;$$

$$\xi=3,\ P(3)=C_6^3\cdot(0,4)^3\cdot(0,6)^3\approx 0,276;$$

$$\xi=4,\ P(4)=C_6^4\cdot(0,4)^4\cdot(0,6)^2\approx 0,138;$$

$$\xi=5,\ P(5)=C_6^5\cdot(0,4)^5\cdot(0,6)^1\approx 0,037;$$

$$\xi=6,\ P(6)=C_6^6\cdot(0,4)^6\cdot(0,6)^0\approx 0,004.$$

Закон розподілу цієї випадкової величини задає таблиця:

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	0,047	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

Багатокутник розподілу випадкової величини ξ подано на рисунку:

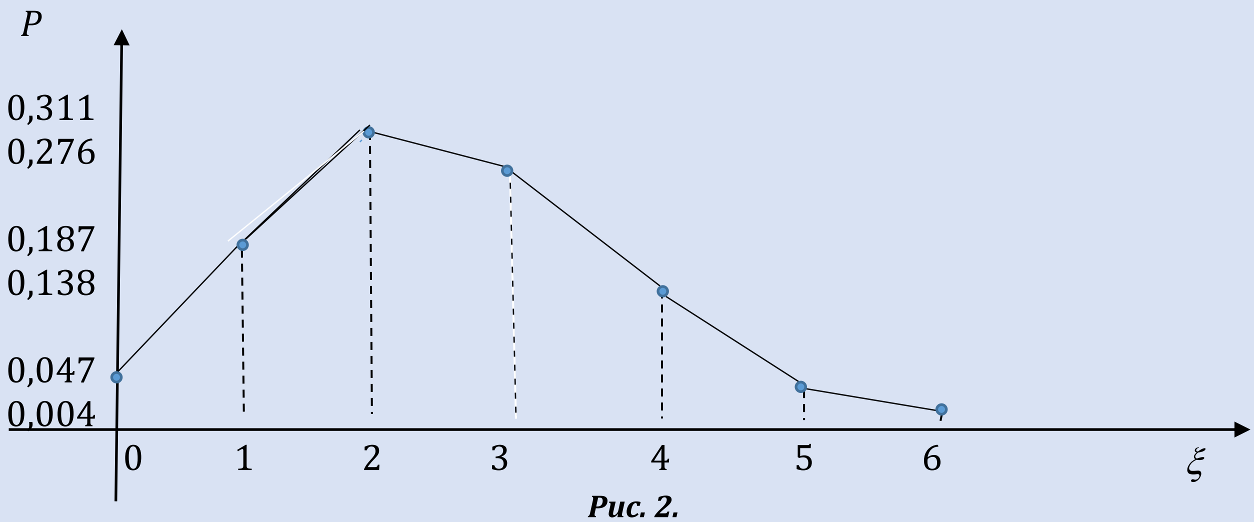


Рис. 2.

Обчислюємо математичне сподівання величини ξ за формулою (1):

$$M\xi = 0 \cdot 0{,}047 + 1 \cdot 0{,}187 + 2 \cdot 0{,}311 + 3 \cdot 0{,}276 +$$

$$+ 4 \cdot 0{,}138 + 5 \cdot 0{,}037 + 6 \cdot 0{,}004 = 2{,}398$$

Дисперсію величини ξ обчислюємо за формулою (4):

$$D\xi = 0{,}187 + 2^2 \cdot 0{,}311 + 3^2 \cdot 0{,}276 + 4^2 \cdot 0{,}138 + 5^2 \cdot 0{,}037 +$$

$$+ 6^2 \cdot 0{,}004 - (2{,}398)^2 = 1{,}442.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{1{,}442} = 1{,}201$.

2. Ймовірність відімкнути замок кожним із ключів $p = \frac{1}{5}$. Тоді $q = \frac{4}{5}$.

   Оскільки використаний ключ знову повертається, то випадкова величина ξ може приймати значення $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Ймовірність відімкнути замок при першій спробі $p_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Якщо ж у цьому випадку замок не відімкнули, то ймовірність відімкнути замок у другому випробуванні $p_2 = qp = 0{,}8 \cdot 0{,}2$. Ймовірність відімкнути замок при третьому випробуванні $p_3 = q^2 p = (0{,}8)^2 \cdot 0{,}2, \ldots, p_n = q^{n-1} p = (0{,}8)^{n-1} \cdot 0{,}2, \ldots$ і т. д.

Закон розподілу цієї випадкової величини задає таблиця:

ξ	1	2	3	4	5	6	……
P	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,08192	0,06553	…….

3. Випадкова величина не приймає значень, менших одиниці. Отже, для всіх $x \le 1$ події $\xi < x$ неможливі і $F(x) = 0$. Якщо $1 < x \le 2$, то $F(x) = 0{,}7$. Нехай, наприклад, $x = 1{,}5$. Тоді $F(1{,}5)$ визначає імовірність події, де $\xi < 1{,}5$. Але випадкова величина ξ лише в одному випадку приймає значення менше 1,5, і ймовірність цієї події 0,7.

Якщо $2 < x \le 3$, то $F(x) = 0{,}7 + 0{,}21 = 0{,}91$. Адже, якщо $x = 3$, то $F(3)$ виражає ймовірність події, де величина ξ приймає значення менше 3, тобто 2 або 1. Використовуючи теорему про додавання ймовірностей, одержимо $F(x) = 0{,}91$. Аналогічно знаходимо значення функції розподілу на інших інтервалах. Отримуємо вираз для такої інтегральної функції розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0; & x \le 1; \\ 0,7; & 1 < x \le 2; \\ 0,91; & 2 < x \le 3; \\ 0.973; & 3 < x \le 4; \\ 1; & x > 4. \end{cases}$$

4. Складемо таблицю, яка відображає закон розподілу даної випадкової величини:

Урожайність, ц/га (ξ)	17	18	19	20	21	22	23
Площа, га	0,04	0,1	0,15	0,36	0,21	0,08	0,06

Обчислюємо математичне сподівання величини ξ за формулою (1):

$$M\xi = 17 \cdot 0,04 + 18 \cdot 0,1 + 19 \cdot 0,15 + 20 \cdot 0,36 +$$

$$+ 21 \cdot 0,21 + 22 \cdot 0,08 + 23 \cdot 0,06 = 20,08.$$

Дисперсію величини ξ обчислюємо за формулою (3):

$$D\xi = (-3,08)^2 \cdot 0,04 + (-2,08)^2 \cdot 0,1 + (-1,08)^2 \cdot 0,15 + (-0,08)^2 \cdot 0,36 +$$

$$(0,92)^2 \cdot 0,21 + (1,92)^2 \cdot 0,08 + (2,92)^2 \cdot 0,06 = 1,9736.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{1,9736} = 1,4.$

5. Ймовірність взяти навмання деталь першого сорту із всієї партії $p = 0,75$. Тоді $q =$ 0,25. Обчислимо ймовірності того, що в партії з 5 деталей буде відповідно 0, 1, 2, 3, 4 і 5 деталей першого сорту:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot (0,75)^0 \cdot (0,25)^5 \approx 0,001;$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0,75)^1 \cdot (0,25)^4 \approx 0,0146$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0,75)^2 \cdot (0,25)^3 \approx 0,880;$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0,75)^3 \cdot (0,25)^2 \approx 0,2636;$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0,75)^4 \cdot (0,25)^1 \approx 0,3955;$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0,75)^5 \cdot (0,25)^0 \approx 0,02373.$$

Закон розподілу цієї випадкової величини задає таблиця:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0,001	0,0146	0,880	0,2636	0,3955	0.2373

Математичне сподівання даної випадкової величини ξ:

$M\xi = 1 \cdot 0{,}0146 + 2 \cdot 0{,}088 + 3 \cdot 0{,}3636 + 4 \cdot 0{,}3955 + 5 \cdot 0{,}2373 = 3{,}75.$

Дисперсія даної випадкової величини ξ:

$$D\xi = (-3{,}75)^2 \cdot 0{,}001 + (-2{,}75)^2 \cdot 0{,}0146 + (-1{,}75)^2 \cdot 0{,}088 +$$

$$(-0{,}75)^2 \cdot 0{,}2636 + (0{,}25)^2 \cdot 0{,}3955 + (1{,}25)^2 \cdot 0{,}2373 = 0{,}94.$$

6. Складемо таблицю добутків даних випадкових величин:

№ п/п	ξ	η	$\xi\eta$	Ймовірність результату
1	0	1	0	$0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$
2	0	3	0	$0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$
3	0	5	0	$0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$
4	2	1	2	$0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}10$
5	2	3	6	$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$
6	2	5	10	$0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$
7	4	1	4	$0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$
8	4	3	12	$0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$
9	4	5	20	$0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$
10	6	1	6	$0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}20$
11	6	3	18	$0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$
12	6	5	30	$0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$

За отриманими величинами складемо таблицю розподілу добутку випадкових величин ξ та η:

$\xi\eta$	0	2	4	6	10	12	18	20	30
$P(\xi\eta)$	0,1	0,1	0,15	0,26	0,04	0,09	0,12	0,06	0,08

Математичне сподівання випадкової величини ξ:

$$M\xi = 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}4 = 4.$$

Математичне сподівання випадкової величини η:

$$M\eta = 1 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}4,\ M\xi \cdot M\eta = 4 \cdot 2{,}4 = 9{,}6.$$

Математичне сподівання випадкової величини $\xi\eta$:

$$M(\xi\eta) = 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}26 + 10 \cdot 0{,}04 +$$

$$+ 12 \cdot 0{,}09 + 18 \cdot 0{,}12 + 20 \cdot 0{,}06 + 30 \cdot 0{,}08 = 9{,}6.$$

Отже $M\xi \cdot M\eta = M(\xi\eta)$.

7. Складемо таблицю сум даних випадкових величин:

№ п/п	ξ	η	$\xi+\eta$	Ймовірність результату
1	3	2	5	$0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$
2	3	3	6	$0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$
3	3	4	7	$0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$
4	3	5	8	$0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$
5	4	2	6	$0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$
6	4	3	7	$0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$
7	4	4	8	$0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}20$
8	4	5	9	$0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$
9	5	2	7	$0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$
10	5	3	8	$0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$
11	5	4	9	$0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$
12	5	5	10	$0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$

За отриманими величинами складемо таблицю розподілу суми очок, вибитих обома стрілками, як випадкових величин. Вона буде мати вигляд:

$\xi+\eta$	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,05	0,14	0,28	0,37	0,15

Математичне сподівання випадкової величини ξ:

$$M\xi = 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 0{,}4 = 4{,}4.$$

Математичне сподівання випадкової величини η:

$$M\xi = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cos^2 x\mathrm{d}x = M\eta = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 = 4.$$

Математичне сподівання випадкової величини $\xi+\eta$:

$$M(\xi+\eta) = 5 \cdot 0{,}01 + 6 \cdot 0{,}05 + 7 \cdot 0{,}14 + 8 \cdot 0{,}28 + 9 \cdot 0{,}37 + 10 \cdot 0{,}15 = 8{,}4.$$

Отже $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta = 4{,}4 + 4 = 8{,}4$.

8. Математичне сподівання випадкової величини ξ знаходимо за формулою (2):

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot x\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0 \cdot x\mathrm{d}x = 0.$$

Дисперсію неперервної випадкової величини ξ знаходимо за формулою

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - M^2\xi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{2}{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x - 0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2(1+\cos 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + x^2\cos 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2\sin 2x}{2} + \frac{x \cdot \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2-6}{12}.$$

9. Знаходимо щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ξ.

$$P(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \ x \notin [0;1], \\ 3x^2, \ x \in [0;1]. \end{cases}$$

Математичне сподівання

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 3x^2\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = 3 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}75.$$

Дисперсію цієї випадкової величини знаходимо за формулою

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - M^2\xi = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 \mathrm{d}x - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{80} = 0{,}0375.$$

10. Для існування $M\xi$ потрібно вимагати абсолютної збіжності інтеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

В цьому випадку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\mathrm{d}x}{\pi\left(1+x^2\right)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{+\infty} = +\infty.$$

Отже математичне сподівання не існує.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти числові характеристики дискретної випадкової величини ξ, розподіл якої задається такою таблицею:

ξ	-1	0	1	2
P	0,25	0,5	0,1	0,15

2. Заробітна плата за день за даними трьох підрозділів фірми задається так:

Заробітна плата, грн	10	20	25
Кількість працівників	30	50	20

Обчислити середнє квадратичне відхилення заробітної плати фірми.

3. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ, розподіленої рівномірно в інтервалі (a, b).
4. Незалежні випадкові величини ξ і η мають такі таблиці розподілу:

ξ	0	2	4	6	η	1	3	5
P	0,3	0,5	0,2	0,1	P	0,6	0,1	0,3

Скласти таблицю розподілу добутку випадкових величин ξ і η. На цьому прикладі перевірити, чому дорівнює математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин.

5. Числа очок, набраних двома стрілками, характеризуються такими законами розподілу:
   а) перший стрілок – ξ;
   б) другий стрілок – η.

ξ	6	7	8	η	2	3	4	5
P	0,8	0,1	0,1	P	0,2	0,2	0,1	0,5

Стрілки роблять по черзі постріли. Підраховується сума вибитих ними очок. Скласти закон розподілу цієї випадкової величини.

6. На дослідному полі площею 1000 га врожайність певного сорту пшениці має такий розподіл:

Урожайність, ц/га	10	11	12	13	14	15	16
Площа, га	40	100	150	360	210	80	60

Розглядаючи врожайність як випадкову величину, обчислити її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

7. В партії з 25 деталей є 6 нестандартних. Навмання виймають 3 деталі для перевірки їх якості. Випадкова величина ξ – це число нестандартних деталей у вибірці Побудувати закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини, знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

8. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $p(x)$, математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини та ймовірність того, що випадкова величина ξ набуде значень з інтервалу $(1;2,5)$.

9. Знайти математичне сподівання та дисперсію біномно розподіленої випадкової величини ξ, тобто такої величини, яка набуває значень $0,1,2,..,n$ з ймовірностями $p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{o,n}$.
10. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ з нормальним законом розподілу, для якого щільність розподілу ймовірності задається формулою $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Тема 6

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ.
ПОНЯТТЯ ПРО ЦЕНТРАЛЬНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ

Якщо ймовірність деякої події A дуже близька до одиниці, то, як правило, ця подія відбувається. Якщо ж ймовірність події A близька до нуля, то вона відбувається досить рідко. Тому подію A вважають практично достовірною, якщо $P(A)\approx 1$ і вважають практично неможливою, якщо $P(A)\approx 0$. Саме практика визначає, чи вважати подію A практично достовірною чи практично неможливою. В одних випадках можна вважати ймовірність 0,99 близькою до одиниці, а в інших – ні. Іноді подію з ймовірністю 0,001 можна вважати практично неможливою, а в деяких випадках цією ймовірністю знехтувати не можна. Тому однією з основних задач теорії ймовірностей є встановлення закономірностей, які мають місце з ймовірністю близькою до одиниці.

Означення 1. Під законом великих чисел розуміють твердження, в яких встановлюється, що при певних умовах деякі випадкові події є практично достовірними (або практично неможливими).

Першим твердженням типу закону великих чисел прийнято вважати **теорему Бернуллі:** якщо в кожному з n послідовних незалежних випробувань випадкова подія A настає з однією і тією ж ймовірністю p, то при досить великій кількості випробувань з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, частота $\frac{\mu}{n}$ буде відрізнятися від ймовірності p менше, ніж на як завгодно мале наперед задане $\varepsilon>0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$.

Часто при доведенні теорем, що виражають закон великих чисел, використовуються **нерівності Чебишева**: якщо випадкова величина ξ має скінченні математичне сподівання і дисперсію, то для будь-якого $\varepsilon>0$ виконуються нерівності: $P\{|\xi-M\xi|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ та $P\{|\xi-M\xi|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

Вказані теореми зручно формулювати в термінах збіжності за ймовірністю.

Означення 2. Послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається за ймовірністю до числа ξ, якщо для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1.$$

Це позначається $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Класичними формами закону великих чисел є теореми Чебишева і Маркова.

Теорема 1 (Чебишева). Нехай $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин із скінченними математичними сподіваннями $M\xi_i = a_i$ і рівномірно обмеженими дисперсіями $D\xi_i \le C = const$. Тоді справедливий закон великих чисел, тобто

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

Теорема 2 (Маркова). Якщо для послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ існують математичні сподівання $M\xi_i = a_i$ і виконується умова $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi i\right) = 0$, то справедливий закон великих чисел, тобто

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

Приклад 1. Чи підлягає закону великих чисел послідовність попарно незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданих їх законами розподілу:

ξ_k	$\sqrt{\ln k}$	$-\sqrt{\ln k}$
p_k	$1/2$	$1/2$

Розв'язання. Перевіримо для послідовності випадкових величин виконання умови теореми Маркова. Оскільки випадкові величини попарно незалежні, то умова набуває вигляду $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right) = 0$. Обчислимо

$$M\xi_k = \sqrt{\ln k} \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{\ln k} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Знайдемо дисперсії:

$$D\xi_k = M\xi_k^2 - M^2\xi_k = \left(\sqrt{\ln k}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(-\sqrt{\ln k}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - 0^2 = \ln k.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}$.

При відшуканні границі замість $n!$ використаємо еквівалентний вираз: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (формула Стірлінга). Тоді

$$\ln(n!) \sim \ln \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + n\ln\frac{n}{\mathrm{e}} = \frac{\ln(2\pi n)}{2} + n\ln n - n.$$

Звідси

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2n^2} + \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Означення 2. Неперервна випадкова величина ξ називається нормально розподіленою, якщо її щільність розподілу ймовірностей визначається формулою

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{5}$$

В цій формулі параметр a – це математичне сподівання, а параметр σ – середнє квадратичне відхилення (стандарт). Якщо випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом, то ймовірність того, що вона приймає якесь значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$ обчислюється за формулою:

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx,$$

або

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{6}$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ – функція Лапласа.

Якщо вивчати закони розподілу різних випадкових величин, то виявляється, що при досить загальних умовах закон розподілу суми великого числа незалежних випадкових величин близький до нормального закону розподілу. Твердження, в яких встановлюється цей факт, утворюють велику групу граничних теорем теорії ймовірностей. Вони об'єднуються під назвою **«центральна гранична теорема»**. Історично першою теоремою типу центральної граничної теореми можна вважати інтегральну теорему Муавра-Лапласа. На практиці використовується (як правило, при $\delta=1$) наступна теорема.

Теорема 3 (Ляпунова). Якщо для послідовності взаємно-незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна вказати таке число $\delta>0$, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k-M\xi_k\right|^{2+\delta}}{\left(\sum_{k=1}^{n} D\xi_k\right)^{1+\frac{\delta}{2}}}=0,$$

то справедлива центральна гранична теорема.

Практичне заняття № 9

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ПОНЯТТЯ ПРО ЦЕНТРАЛЬНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ

1. Збіжність за ймовірністю послідовності випадкових величин.
2. Нерівність Чебишева та її застосування.
3. Сформулювати закон великих чисел у формі теорем Чебишева та Бернуллі.
4. Центральна гранична теорема.
5. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. Дисперсія кожної з 2500 незалежних випадкових величин не перевищує 5. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середніх арифметичних цих випадкових величин від середніх арифметичних їх математичних сподівань не перевищить 0,4.
2. Монету підкидають 1000 разів. Чи можна з ймовірністю більшою ніж 0,97 твердити, що число появ герба буде в межах від 400 до 600?
3. Спортсмен здійснив 200 незалежних пострілів у мішень. Ймовірність влучення при кожному пострілі 0,8. Оцінити ймовірність того, що число влучень відрізняється від свого середнього значення не більше, ніж на 10.
4. Випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом з параметрами $a=0{,}5$, $\sigma^2=\frac{1}{8}$. Визначити ймовірність того, що значення випадкової величини ξ потрапить в проміжок $(0{,}4;0{,}6)$.
5. Випадкова величина ξ – це довжина деталі, яка виготовляється автоматом. Ця величина розподілена за нормальним законом з параметрами $a=10$, $\sigma^2=\frac{1}{200}$. Знайти ймовірність знаходження браку, якщо допустимі розміри деталі повинні бути $10\pm0{,}05$.

6. Зріст дорослих чоловіків є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Нехай її математичне сподівання дорівнює 170 см., а дисперсія – 36. Знайти щільність розподілу ймовірностей і функцію розподілу цієї випадкової величини. Обчислити ймовірність того, що хоча б один з навмання обраних чоловіків буде мати зріст 168-172 см. і хоча б один із чотирьох навмання обраних чоловіків буде мати зріст 168-172см.
7. Взаємно-незалежні випадкові величини ξ_k задано законами розподілу:

ξ_k	$-k$	k
p_k	1/2	1/2

Чи виконується для послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральна гранична теорема?
8. Визначити ймовірність попадання в смугу шириною $2l = 3{,}5$ м, якщо похибки стрільб підлягають нормальному закону розподілу з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1{,}9$.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Використаємо нерівність Чебишова $P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$. Отримаємо таку оцінку ймовірності: $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{D\xi}{n\varepsilon^2}$. Оскільки за умовою задачі $n = 2500, \varepsilon = 0{,}4$, то нерівність матиме вигляд:

$$P\left\{\left|\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{n}a_i\right| \le 0{,}4\right\} \ge 1 - \frac{5}{2500 \cdot 0{,}16}.$$

Отже

$$P\left\{\left|\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{n}a_i\right| \le 0{,}4\right\} \ge 0{,}9875.$$

2. Оскільки випадкова величина ξ – число появ герба розподілена за біномним законом, тобто вона набуває значень 0, 1, 2, ..., n з ймовір-

ностями $p\{\xi=k\}=C_n^k\cdot p^k q^{n-\kappa}$, $k=\overline{0,n}$, то математичне сподівання $M\xi=\sum_{k=0}^{n}x_k p_k=np=1000\cdot 0{,}5=500$, а дисперсія

$$D\xi=\sum_{k=0}^{n}x_k^2 p_k-(np)^2=kpq=1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=250.$$

Якщо $400<\xi<600$, то $-100<\xi-M\xi<100$ і тому $|\xi-M\xi|<100$. Використовуючи нерівність Чебишева, отримаємо:

$$P\{400<\xi<600\}=P\{|\xi-M\xi|<100\}\geq 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}=1-\frac{250}{100^2}=1-0{,}025=0{,}975>0{,}97.$$

3. Випадкова величина ξ – число влучень при 200 пострілах розподілена за біноміним законом, тому математичне сподівання $M\xi=np=200\cdot 0{,}8=160$, а дисперсія $D\xi=kpq=200\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=32$.

Використаємо нерівність Чебишова $P\{|\xi-M\xi|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$. Отримаємо таку оцінку ймовірності: $P\{|\xi-160|<10\}\geq 1-\frac{32}{100}=1-0{,}32=0{,}68$.

4. Використаємо формулу $P\{\alpha<\xi<\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ – функція Лапласа. Тоді $P\{0{,}4<\xi<0{,}6\}$ = $= 2\Phi\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot 0{,}1\right)=2\Phi(0{,}28) = 2\cdot 0{,}1103 = 0{,}22$.

5. В нашому випадку $a=10$, $\sigma^2=\frac{1}{200}$. Оскільки допустимі розміри деталі повинні бути $10\pm 0{,}05$, то $9{,}95\leq\xi\leq 10{,}05$.

Ймовірність знаходження браку

$$P=1-P\{\alpha\leq\xi\leq\beta\}=1-\left(\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\right),$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ – функція Лапласа. Отже

$$P=1-(2\Phi\left(0{,}05\cdot 10\sqrt{2}\right)=1-2\Phi(0{,}7071)=1-2\cdot 0{,}2580=1-0{,}52=0{,}48.$$

6. За умовою задачі $a=170$, $\sigma=\sqrt{36}=6$. Отже щільність розподілу ймовірностей даної випадкової величини за формулою (5) буде мати вигляд

$$f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-170)^2}{72}},$$

а інтегральна функція розподілу цієї випадкової величини буде дорівнювати

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(t-170)^2}{72}}dt=$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(t-170)^2}{72}}dt+\int_{0}^{x}e^{-\frac{(t-170)^2}{72}}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-170}{6}\right).$$

Ймовірність того, що зріст навмання обраного чоловіка буде перебувати в межах від 168 до 172 см., обчислимо за формулою (6):

$$P\{168<\xi<172\}=\Phi\left(\frac{172-170}{6}\right)-\Phi\left(\frac{168-170}{6}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)=0{,}2611.$$

Для обчислення ймовірності того, що хоча б один з чотирьох навмання обраних чоловіків має зріст 168-172 см., знайдемо ймовірність того, що із чотирьох навмання обраних чоловіків ніхто не має зріст 168–172 см.:

$$P_4(0)=C_4^0p^0q^4=(1-0{,}2611)^4\approx 0{,}2981.$$

Це імовірність протилежної події. Шукана ймовірність дорівнює 1 – 0,2981 = 0,7019.

7. Перевіримо виконання умови теореми Ляпунова (при $\delta=1$), так званої «умови $\frac{3}{2}$»:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}M|\xi_k-M\xi_k|^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}D\xi_k\right)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Обчислимо $M\xi_k=-k\cdot\frac{1}{2}+k\cdot\frac{1}{2}=0$; $D\xi_k=M\xi_k^2-M^2\xi_k=k^2\cdot\frac{1}{2}+k^2\cdot\frac{1}{2}=k^2$;

$$\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}; \; M\left|\xi_k - M\xi_k\right|^3 = M\left|\xi_k\right|^3 = k^3 \cdot \frac{1}{2} + k^3 \cdot \frac{1}{2} = k^3;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - M\xi_k\right|^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

В результаті отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M\left|\xi_k - M\xi_k\right|^3}{\left(\sum_{k=1}^{n} D\xi_k\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{6}}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^4(n+1)^4}{n^3(n+1)^3(2n+1)^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot 0 = 0.$$

Отже умова виконується і для послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ має місце центральна гранична теорема.

8. Використаємо формулу (6). В нашому випадку $\alpha = -1{,}75$, $\beta = 1{,}75$, $\sigma = 1{,}9$.

   Тоді отримуємо: $P\{-1{,}75 < \xi < 1{,}75\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1{,}75}{1{,}9}\right) = 2 \cdot 0{,}3212 = 0{,}643.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. У даній місцевості середня річна кількість сонячних днів дорівнює 100. Оцінити ймовірність того, що протягом року в цій місцевості буде не більше ніж 125 сонячних днів.
2. В деякій місцевості середня швидкість вітру на даній висоті дорівнює 20 км/год, а середнє квадратичне відхилення 4 км/год. Оцінити швидкість вітру на цій висоті з ймовірністю не меншою, ніж 0,9.
3. Скільки потрібно провести незалежних випробувань, щоб ймовірність нерівності $\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < 0{,}06$ перевищувала б 0,78, якщо ймовірність появи події в окремому випробуванні $p = 0{,}07$.
4. Банк обслуговує в середньому 100 клієнтів щодня. Оцінити ймовірність того, що деякого дня банк зможе обслужити:

а) не менше 200 клієнтів;

б) менше 150 клієнтів.

5. Сума всіх вкладів населення у деякому банку становить 3млн.грн., а ймовірність того, що випадково взятий вклад буде меншим від 10 тис. грн., дорівнює 0,8. У скількох людей є вклади в цьому банку?
6. Середньодобове споживання води мешканцем Одеси становить 300 л, а середнє квадратичне відхилення не перевищує 60 л. Оцінити ймовірність того, що у випадково обрану добу споживання води мешканцем менше за 600л.
7. Ймовірність появи події A в кожному досліді дорівнює 0,5. З допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що подія A настане в межах від 40 до 60 раз за умови проведення 100 незалежних випробувань.
8. Дискретна випадкова величина набуває двох значень 0,4 і 0,7 з ймовірністю 0,3 та 0,7. Оцінити ймовірність того, що $|\xi - M\xi| < 0{,}1$.
9. Послідовність незалежних випадкових величин задана законом розподілу

ξ_k	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p_k	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Чи підлягає ця послідовність закону великих чисел?

10. Послідовність незалежних випадкових величин задана законом розподілу

ξ_k	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p_k	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Перевірити для цієї послідовності виконання умов теореми Чебишева.

Модульна контрольна робота № 1

ВАРІАНТ

1. У розіграші першості країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібні і бронзова медалі?
2. З 40 стандартних і 4 нестандартних деталей для контролю взято навмання 8, які виявилися стандартними. Знайти ймовірність того, що наступна взята навмання деталь буде стандартною.
3. Підприємство нараховує 10 робітників. Ймовірність виходу на роботу кожного з них дорівнює p = 0,7. Знайти ймовірність нормальної роботи підприємства, якщо для цього на зміні необхідна присутність на робочих місцях не менше 6 осіб.
4. На дослідному полі площею 1000 га врожайність певного сорту пшениці має такий розподіл:

Урожайність, ц/га	17	18	19	20	21	22	23
Площа, га	40	100	150	360	210	80	60

5. Ймовірність появи події A в кожному досліді дорівнює 0,5. З допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що подія A настане в межах від 40 до 60 раз за умови проведення 100 незалежних випробувань.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Тема 7

Основи математичної статистики

Математична статистика – це розділ математики, в якому вивчаються методи систематизації випадкових явищ, їх обробка, а також використання цих статистичних даних для наукових і практичних висновків та застосувань.

Найпростіші задачі математичної статистики включають в себе:

1) оцінку ймовірності події за результатами експериментів;
2) оцінку функції розподілу, точний вираз якої нам невідомий;
3) оцінку параметрів розподілу за результатами проведених експериментів;
4) знаходження надійних інтервалів, тобто інтервалів, кінці яких є випадковими величинами і в яких з ймовірністю близькою до одиниці знаходиться значення деякого параметру;
5) знаходження емпіричних формул тобто функціональних залежностей між випадковими величинами ξ та η, встановлених за результатами експериментів;
6) перевірку статистичних гіпотез.

Означення 1. Статистичною сукупністю S будемо називати множину однорідних об'єктів, що об'єднані якою небудь загальною ознакою кількісного або якісного характеру. Якщо в сукупності обмежена кількість елементів то її називають скінченною, а якщо необмежена – то нескінченною.

Часто обстежити всі елементи статистичної сукупності S важко або неможливо. Через це обстежують не всі елементи сукупності, а тільки їх частину S', відібрану яким-небудь способом.

Означення 2. Множину елементів S' назвемо вибірковою сукупністю або **вибіркою**, а кількість елементів вибірки – її **об'ємом**. Уся сукупність елементів S називається ще загальною або генеральною сукупністю.

Вибірки можуть бути повторними і безповторними. **Повторною** називають вибірку, при якій відібраний об'єкт (перед відбором наступного) повертається у генеральну сукупність. **Безповторною** називають вибірку, при якій об'єкт у генеральну сукупність не повертається. **Репрезентативною** називається вибірка, яка правильно представляє пропорції генеральної сукупності. **Варіантою** називають спостережуване значення елемента вибірки. **Варіаційним рядом** називають послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку. **Частотою** $\boldsymbol{n_i}$ варіанти x_i називають число, яке показує скільки разів дана варіанта повторюється у вибірці. **Відносною частотою** $\boldsymbol{v_i}$ називають відношення частоти n_i до об'єму вибірки n.

Надалі будемо користуватися вибірковим методом. Суть його полягає в тому, що за знайденими значеннями характеристик вибіркової сукупності роблять певні висновки про значення відповідних характеристик генеральної сукупності.

Нехай задано випадкову вибірку

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

із генеральної сукупності S з невідомою теоретичною функцією розподілу $F(x)$.

Потрібно за результатами вибірки визначити з певною точністю функцію $F(x)$ та її числові характеристики: математичне сподівання $M\xi = a$ та дисперсію $D\xi = \sigma^2$. За отриманими значеннями варіант, частот і відносних частот можна побудувати таблиці:

x_i	x_1	x_2	…..	x_k
n_i	n_1	n_2	…..	n_k

x_i	x_1	x_2	…..	x_k
v_i	v_1	v_2	…..	v_k

Ці таблиці називають, відповідно, розподіл частот і відносних частот. Розподіли частот і відносних частот називають також статистичним розподілом вибірки. За законом розподілу можна побудувати емпіричну функцію розподілу

$$F_n(x)=\sum_{x_i<x}\frac{n_i}{n}. \tag{7}$$

Означення 3. Математичне сподівання і дисперсію розподілу вибірки називають, відповідно, **вибірковим середнім** $\bar{x}$ і **вибірковою дисперсією** S^2:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_i n_i x_i, \tag{8}$$

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_i n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \text{ або} \tag{9}$$

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_i n_i x_i^2-\left(\bar{x}\right)^2. \tag{10}$$

Приклад 1. Побудувати емпіричну функцію розподілу за даною вибіркою:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Розв'язання. $n=12+18+30=60$. Легко бачити, що $F_n(x)=0$, якщо $x\le 2$. При $2<x\le 6$ для $x_i<x$ можна вибрати лише $x_1=2$, яке повторювалось 12 разів. Отже, $F_n(x)=\dfrac{12}{60}=0{,}2$. Якщо $6<x\le 10$, то $x_1=2$ і $x_2=6$ спостерігались разом 12 + 18 = 30 разів. Тому $F_n(x)=\dfrac{30}{60}=0{,}5$. При $x>10$ сума відповідних частот 12 + 18 + 30 = 60 і $F_n(x)=\dfrac{60}{60}=1$. Шукана емпірична функція матиме вигляд:

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 0{,}2, & 2<x\le 6;\\ 0{,}5, & 6<x\le 10;\\ 1, & x>10.\end{cases}$$

Крім вибіркового середнього і вибіркової дисперсії використовують ряд інших числових характеристик варіаційного ряду.

Означення 4. Модою M_0 варіаційного ряду називають варіанту, яка має найбільшу частоту. Наприклад, для ряду в прикладі 1 $M_0 = 10$.

Означення 5. Медіаною M_e варіаційного ряду називають варіанту, яка ділить ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант. Якщо число варіант непарне, $k = 2m + 1$, то $M_e = x_{m+1}$. При парному $k = 2m$ медіана $M_e = \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$.

Для ряду в прикладі 1 $M_e = 18$.

Означення 6. Варіаційним розмахом R називають різницю між крайніми (найбільшою і найменшою) варіантами: $R = x_{max} - x_{min}$. Наприклад, для прикладу 1 варіаційний розмах $R = 30 - 12 = 18$.

Означення 7. Середнім абсолютним відхиленням θ називають середнє арифметичне з абсолютних значень відхилень варіант від вибіркового середнього значення:

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_i n_i \left| x_i - \overline{x} \right| \cdot$$

Означення 8. Коефіцієнтом варіації v_1 (за середнім абсолютним відхиленням) називають визначене в процентах відношення середнього абсолютного відхилення до вибіркового середнього:

$$v_1 = \frac{\theta}{\overline{x}} \cdot 100\%.$$

Означення 9. Коефіцієнтом варіації v_2 (за середнім квадратичним відхиленням) називають визначене в процентах відношення вибіркового середнього квадратичного відхилення до вибіркового середнього:

$$v_2 = \frac{S}{\overline{x}} 100\%.$$

Коефіцієнт варіації використовується для порівняння величин розсіювання двох варіаційних рядів: той ряд, у якого коефіцієнт варіації більший, має більше розсіювання.

Означення 10. Полігоном частот називають ламану, відрізки якої сполучають точки (x_1, n_1), (x_2, n_2),....,(x_k, n_k) в прямокутній системі координат. Для побудови полігону частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – частоти n_i. Точки (x_i, n_i) сполучають відрізками прямих.

Означення 11. Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої сполучають точки $(x_1, \nu_1), (x_2, \nu_2), ..., (x_k, \nu_k)$ в прямокутній системі координат.

У випадку, коли досліджувана випадкова величина ξ неперервна, будують гістограми. Для цього інтервал на осі Ox розбивають на декілька часткових інтервалів довжиною h і знаходять для кожного часткового інтервалу суму частот варіант, які потрапили в нього.

Означення 12. Гістограмою частот називають фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти цих прямокутників рівні $\frac{n_i}{h}$. Число $\frac{n_i}{h}$ називається щільністю частоти.

Аналогічно будується гістограма відносних частот. В цьому випадку висоти прямокутників рівні $\frac{\nu_i}{h}$. Цю величину називають щільністю відносної частоти.

Практичне заняття № 10

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Предмет і задачі математичної статистики.
2. Первинна обробка статистичного матеріалу.
3. Графічне зображення варіаційних рядів.
4. Емпірична функція розподілу. Вибіркові характеристики.
5. Варіаційний ряд та його характеристики. Полігон. Гістограма.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. Для даного розподілу побудувати полігон відносних частот:

x_k	2	4	6	8	10	30
v_k	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	1

2. Побудувати гістограму частот за даною вибіркою:

Частковий інтервал	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	$h=5$
n_i	4	6	16	36	24	10	4	$\Sigma=100$

3. Побудувати розподіли частот і відносних частот за результатами вибірки:

1, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 1.

Знайти моду M_0, медіану M_e, варіаційний розмах R. Обчислити $\bar{x}, S^2, \theta, v_1, v_2$.

4. Вибіркова сукупність задана таблицею розподілу:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Знайти моду M_0, медіану M_e, варіаційний розмах R. Обчислити $\overline{x}, S^2$.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. На осі абсцис відкладаємо варіанти, а на осі ординат – відносні частоти. Одержувані точки з'єднаємо ламаною (рис. 3).

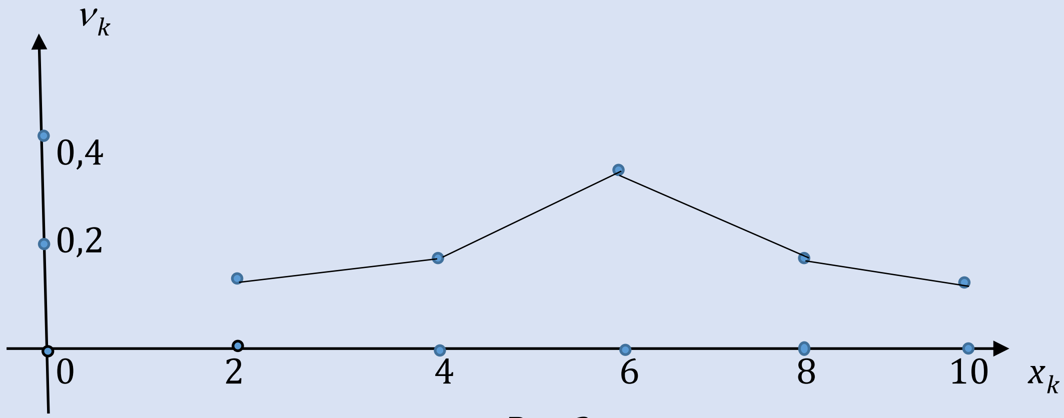


Рис. 3.

2. Обчислюємо щільності частот:

$n_i \diagup h$	0,8	1,2	3,2	7,2	4,8	2,0	0,8

На осі абсцис викладаємо часткові інтервали, а на осі ординат відкладаємо обчислені щільності частот. Вони розташовані ліворуч від осі ординат

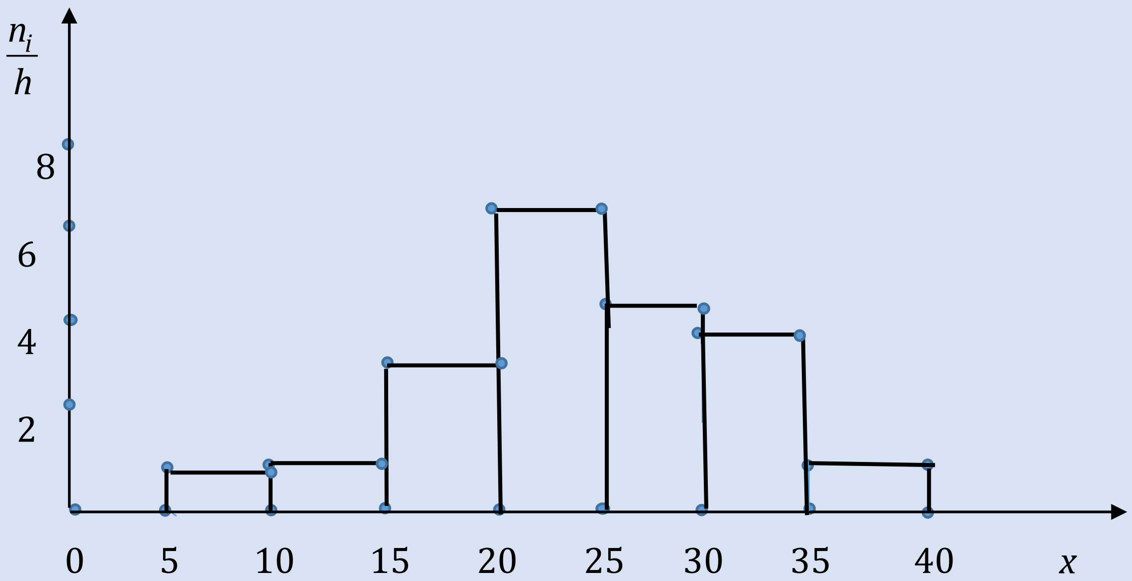


Рис. 4.

3. Варіанти 1, 2, 3, 4, 5 повторюються, відповідно, 5, 9, 6, 3, 2 разів. Об'єм вибірки $n = 25$. Відносні частоти

$$v_1=\frac{5}{25},\ v_2=\frac{9}{25},\ v_3=\frac{6}{25},\ v_4=\frac{3}{25},\ v_5=\frac{2}{25}.$$

Розподіл частот і відносних частот:

x_i	1	2	3	4	5
n_i	5	9	6	3	2
v_i	$\frac{5}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$

Контролюємо: $\sum_i n_i=5+9+6+3+2=25=n$;

$$\sum_i v_i=\frac{5}{25}+\frac{9}{25}+\frac{6}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}=1.$$

Знаходимо: $M_0=2$; $M_e=3$; $R=5-1=4$;

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}n_ix_i=\frac{1}{25}(5+18+18+12+10)=2{,}52;$$

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_i n_ix_i^2-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{1}{25}(5+36+54+48+50)-\left(2{,}52\right)^2=1{,}37;$$

$$\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}n_i\left|x_i-\overline{x}\right|\approx\frac{1}{25}(7{,}6+4{,}68+2{,}88+4{,}44+4{,}96)\approx 0{,}98;$$

$$v_1=\frac{\theta}{\overline{x}}\cdot 100\%=\frac{0{,}98}{2{,}52}\cdot 100\%=38{,}9\%;$$

$$v_2=\frac{S}{\overline{x}}\cdot 100\%=\frac{1{,}17}{2{,}52}\cdot 100\%=46{,}5\%.$$

4. Найбільша частота у варіанти $x_1=1$. Тому $M_0=1$.

Медіана $M_e=\frac{1}{2}(2+3)=2{,}5.$

Варіаційний розмах $R=4-1=3.$

Обчислимо $\sum_{i=1}^{4}n_i=50=n$; $\overline{x}=\dfrac{20\cdot1+15\cdot2+10\cdot3+5\cdot4}{50}=2$;

Для знаходження S^2 за формулою (10), обчислимо спочатку

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 = \frac{1}{50}\cdot\left(20\cdot 1^2 + 15\cdot 2^2 + 10\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2\right) = \frac{250}{50} = 5.$$

Тоді $S^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$ = 5 – 4 = 1.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Побудувати емпіричну функцію розподілу вибірки

X	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
P	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

2. Із прочитаних 16 слів 25 студентів правильно відтворили такі кількості слів: 8, 10, 6, 6, 7, 9, 7, 7, 3, 4, 7, 5, 7, 11, 8, 6, 10, 5, 6, 8, 6, 7, 7, 9, 10. Побудувати статистичний розподіл вибірки.
3. Для вибірки 7, 6, 7, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 3, 3, 6, 5, 7, 4, 4, 8, 7, 8, 7, 5, 6 знайти моду, медіану, варіаційний розмах, середнє абсолютне відхилення, побудувати полігон частот.
4. Побудувати гістограму частот інтервального розподілу

Інтервали	15-20	20-25	25-30	30-35
Частоти	4	8	6	2

5. Знайти середнє абсолютне відхилення для такого варіаційного ряду: 1, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 1.
6. Для розподілу частот

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	1	1	2	5	7	3	2	3	1

Побудувати емпіричну функцію розподілу, обчислити вибіркове математичне сподівання, дисперсію, середнє абсолютне відхилення та коефіцієнти кореляції.

7. Для вибірки 10, 11, 9, 9, 8, 10, 11, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 11, 9, 8, 10, 11, 10, 8 знайти моду, медіану, варіаційний розмах, середнє абсолютне відхилення, побудувати полігон частот.

8. Обчислити вибіркове середнє і незміщену вибіркову дисперсію вибірки, заданої розподілом частот:

x_i	0,01	0,03	0,04	0,06	0,07
n_i	1	2	3	3	1

Тема 8

СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

Нехай випадкова величина ξ має функцію розподілу $F_{\xi}(x)$, яка залежить від невідомих параметрів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$:

$$F_{\xi}(x) = F(x, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k).$$

Розглянемо вибірку з генеральної сукупності

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n.$$

За результатами цієї вибірки потрібно оцінити параметри розподілу.

Означення 1. Точковою оцінкою параметра α називається функція $\tilde{\alpha}$ від спостережуваних значень $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, яка мало відрізняється від цього параметра:

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n).$$

Точкові оцінки $\tilde{\alpha}$ також є випадковими величинами. Вони повинні задовольняти умовам спроможності, незміщеності та ефективності.

Означення 2. Оцінка $\tilde{\alpha}$ параметра α називається **спроможною**, якщо для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ \left| \tilde{\alpha}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) - \alpha \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

тобто $\tilde{\alpha}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \xrightarrow{P} \alpha$.

Означення 3. Оцінка $\tilde{\alpha}$ параметра α називається **незміщеною**, якщо для будь-якого $n \in N$ математичне сподівання $M\tilde{\alpha}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \alpha$.

Теорема. Якщо $\tilde{\alpha}$ – незміщена оцінка параметра α і її дисперсія $D\tilde{\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$, то вона спроможна.

Означення 4. Оцінка $\tilde{\alpha}$, яка має в певному класі оцінок мінімальну дисперсію, називається **ефективною**.

Щоб знайти точкові оцінки для математичного сподівання і дисперсії потрібно пам'ятати, що в класі лінійних функцій вибіркове середнє

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ є спроможною і незміщеною оцінкою для математичного сподівання $M\xi$, а **незміщена (виправлена) вибіркова дисперсія** $S_1^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{\kappa} n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ є спроможною і незміщеною оцінкою для дисперсії $D\xi$.

Приклад 1. Обчислити незміщену вибіркову дисперсію вибірки, заданої розподілом частот

x_i	-1	0	1	2	3	4
n_i	1	3	5	4	2	1

Розв'язання. Знайдемо об'єм вибірки n = 1 + 3 + 5 + 4 + 2 + 1 = 16 та вибіркове середнє $\bar{x} = \frac{1}{16}\left(-1+0+5+8+6+4\right) = \frac{22}{16}$ = 1,375.

Для обчислення вибіркової дисперсії використаємо формулу

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(1+0+5+16+18+16\right) - \left(1{,}375\right)^2 = 1{,}61.$$

Звідси незміщена вибіркова дисперсія $S_1^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{16}{15}\cdot 1{,}61 = 1{,}72$.

У тому випадку, коли варіанти x_i – великі числа і проводити обчислення вибіркових характеристик досить складно, доцільно від кожної варіанти відняти одне і те ж число C (умовний нуль) і перейти до **умовних варіант** $v_i = x_i - C$. Тоді вибіркове середнє обчислюється за формулою $\bar{x} = C + \bar{v} = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} v_i n_i$, а вибіркова дисперсія залишається незмінною:

$S^2\left(x\right) = S^2\left(v\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(v_i - \bar{v}\right)^2$.

Якщо варіанти x_i – десяткові дроби з k десятковими знаками після коми, то тоді доцільно помножити початкові варіанти на число $C = 10^k$, тобто перейти до умовних варіант $w_i = Cx_i$. В цьому випадку вибіркове середнє обчислюється за формулою $\bar{x} = \dfrac{\bar{w}}{10^k}$, *а* дисперсію обчислюємо за формулою $S^2(x) = \dfrac{S^2(w)}{10^{2k}}$.

Приклад 2. Обчислити вибіркове середнє і незміщену вибіркову дисперсію вибірки, заданої розподілом частот

x_i	2018	2019	2020	2021	2022
n_i	4	6	10	5	2

Розв'язання. Оскільки варіанти x_i – великі числа, то перейдемо до умовних варіант $v_i = x_i - 2020$. Дістанемо новий розподіл вибірки:

v_i	-2	-1	0	1	2
n_i	4	6	10	5	2

Обчислимо вибіркове середнє

$$\bar{x} = C + \bar{v} = 2020 + \frac{1}{27}(-8-6+5+4) = 2019{,}81$$

і вибіркову дисперсію

$$S^2(x) = S^2(v) = \frac{1}{n}\sum_i n_i v_i^2 - (\bar{v})^2 = \frac{1}{27}(16+6+0+5+8) - (-0{,}185)^2 = 1{,}26.$$

Для побудови точкових оцінок параметрів розподілу найчастіше використовують **метод моментів** та **метод найбільшої правдоподібності**.

Метод моментів полягає в прирівнюванні теоретичних моментів до відповідних їм емпіричних моментів того ж порядку.

Для цього розглянемо наступні означення.

Означення 5. Початковим емпіричним моментом m-го порядку називають число

$$\varepsilon_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^m,\ m = 1, 2, \dots$$

Легко бачити, що початковий момент першого порядку $\varepsilon_1 = \bar{x}$ (вибірковому середньому).

Означення 6. Центральним емпіричним моментом m-го порядку називають число

$$\delta_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^m,\ m = 1, 2, \ldots$$

Якщо $m=2$, то центральний емпіричний момент другого порядку рівний вибірковий дисперсії ($\delta_2 = S^2$), а центральний емпіричний момент першого порядку $\delta_1 = 0$. Крім того $\delta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2$.

В тому випадку, коли теоретичний розподіл визначається k параметрами, потрібно прирівняти k теоретичних моменти до відповідних k емпіричних моментів того ж порядку і отримати систему рівнянь з k невідомими. Розв'язуючи цю систему відносно шуканих параметрів, дістаємо їх точкові оцінки.

Приклад 3. Генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$$

з параметром λ. Знайти точкову оцінку цього параметра методом моментів.

Розв’язання. Для оцінки одного параметра із співвідношень $\nu_1 = M_\xi$ і $\varepsilon_1 = \overline{x}$ отримуємо $M_\xi = \overline{x}$. Для розподілу Пуассона знайдемо

$$M_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 0\cdot e^{-\lambda} + 1\lambda e^{-\lambda} + 2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + 3\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}_{+} + \ldots = \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Отже $\lambda = \overline{x}$. Тому точковою оцінкою параметра λ розподілу Пуассона є вибіркове середнє значення. Тобто, якщо вибірка задана розподілом частот

x_i	1	2	3	4	5
n_i	40	21	5	3	1

То $\lambda = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{1}{70}\left(40+42+15+12+5\right) = \frac{114}{70} = 1{,}63.$

Потрібно відмітити, що оцінки, отримані методом моментів, часто бувають зміщеними і неефективними.

Метод найбільшої правдоподібності точкової оцінки параметра розподілу α полягає у відшуканні максимуму деякої спеціальної функції оцінюваного параметра.

Означення 7. Функцією правдоподібності дискретної випадкової величини ξ називають функцію

$$L(\alpha)=P(x_1,\alpha)P(x_2,\alpha)\cdot \ldots \cdot P(x_n,\alpha),$$

де $P(x_i,\alpha)$ – ймовірність того, що внаслідок випробування випадкова величина ξ набуває значення x_i.

Для спрощення дослідження замість функції $L(\alpha)$ досліджують на максимум функцію $\ln L(\alpha)$, оскільки вони досягають максимуму при одному і тому ж значенні α.

Означення 8. Оцінкою найбільшої правдоподібності параметра α називають таке його значення $\tilde{\alpha}$, при якому функція правдоподібності досягає максимуму, а рівняння

$$\left.\frac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\tilde{\alpha}}=0$$

називають рівнянням правдоподібності.

Якщо $\left.\frac{d^2\ln L(\alpha)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\tilde{\alpha}}<0$, то $\tilde{\alpha}$ – шукана точка максимуму, яку приймають за оцінку найбільшої правдоподібності параметра α.

В багатьох випадках для невідомих параметрів потрібно знайти не точкову а **інтервальну оцінку**. Для цього необхідно побудувати інтервал, в який з наперед заданою ймовірністю потрапляє невідоме значення параметра.

Нехай дискретна випадкова величина ξ внаслідок n однакових незалежних випробувань набуває значень $x_1,x_2,\ldots,x_n$, а $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ і $f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – деякі функції від вибіркових значень $x_1,x_2,\ldots,x_n$, для яких завжди $f_1\le f_2$. Виберемо деяке дійсне число $\beta\in(0;\ 1)$, яке називають **надійним рівнем.**

Означення 9. Якщо для параметра α теоретичного закону розподілу виконується співвідношення

$$P\{f_1 \le \alpha \le f_2\} \ge \beta,$$

то f_1 і f_2 називають **надійними межами** для цього параметра, а інтервал $(f_1; f_2)$ – **надійним (довірчим) інтервалом**, що відповідає надійному рівню β.

Нехай потрібно за результатами проведених експериментів оцінити ймовірність настання деякої події A. Використаємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа. Розглянемо довільне число $\beta \in (0,1)$– надійний рівень. За таблицею 4 знайдемо число t_β таке, що $\Phi(t_\beta) = 0{,}5\beta$. Оскільки з нерівності $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon$ слідує, що $-\varepsilon \le \frac{m}{n} - p \le \varepsilon$, а $t_\beta = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, то звідси $\varepsilon = t_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}}$ і $P\left\{\frac{m}{n} - t_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}} \le p \le \frac{m}{n} + t_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} \approx \beta$. ймовірність p нам невідома, тому використаємо нерівність Коші $pq = p(1-p) \le \left(\frac{p + (1-p)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Отже

$$P\left\{\frac{m}{n} - \frac{t_\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} \le p \le \frac{m}{n} + \frac{t_\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}\right\} \ge \beta.$$

Означення 10. Інтервал $\left(\frac{m}{n} - \frac{t_\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}\ ; \frac{m}{n} + \frac{t_\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ називають надійним інтервалом, а його кінці – **надійними межами для невідомої ймовірності** $\boldsymbol{p}$ при надійному рівні β.

Приклад 4. При надійному рівні $\beta = 0{,}95$ знайти надійні межі для ймовірності події, яка настала 49 разів при 100 експериментах.

Розв'язання. За таблицею 4 знайдемо число t_β таке, що $\Phi\left(t_\beta\right)=0,5\beta$ **=** 0,475. Підставляючи $t_\beta=1,96$, $m=49$, $n=100$, знаходимо:

$$\frac{m}{n}-\frac{t_\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} = 0,49 - 0,98 \cdot 0,1 = 0,392; \quad \frac{m}{n}+\frac{t_\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} = 0,49 + 0,98 \cdot 0,1 = 0,588.$$

Отже $p\in(0,392;0,588)$.

Якщо потрібно знайти **надійні межі для математичного сподівання** при довільному законі розподілу генеральної сукупності з параметрами a і σ^2 та заданому надійному рівні β, то надійним інтервалом для невідомого математичного сподівання a буде проміжок

$$\left(\overline{x}-t_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x}+t_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де t_β є коренем рівняння $\Phi\left(t_\beta\right)=0,5\beta$. Число $\delta=t_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ називають **точністю оцінки.** Якщо дисперсія σ^2 невідома, то при побудові надійного інтервалу для a її замінюють незміщеною вибірковою дисперсією S_1^2.В цьому випадку отримаємо такий проміжок

$$\left(\overline{x}-t_\beta\frac{S_1}{\sqrt{n}};\overline{x}+t_\beta\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right).$$

При малому об'ємі вибірки $(n<30)$ t_β з даного проміжку визначається не за нормальним розподілом (через функцію Лапласа), а за розподілом Стьюдента (таблиця 5). В цьому випадку $t_\beta=t(\beta;n)$, при яких $P\left\{|t|<t_\beta\right\}=\beta$.

Щоб знайти **надійні межі для середнього квадратичного відхилення** $\boldsymbol{\sigma}$ при нормальному законі розподілу генеральної сукупності використовують проміжок

$$\left(S_1(1-q);S_1(1+q)\right),$$

де величину q <1 знаходять з таблиці 5 за відомими β і n.

Для визначення **мінімального об'єму вибірки $\boldsymbol{n}$**, який забезпечує потрібну точність δ і надійний рівень β, скористаємося формулою

$$n=t_\beta^2\frac{\sigma^2}{\delta^2}.$$

Практичне заняття №11-12

СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

1. Точкові оцінки параметрів розподілу.
2. Оцінки для математичного сподівання і дисперсії.
3. Метод умовних варіант.
4. Метод моментів.
5. Метод найбільшої правдоподібності.
6. Інтервальні оцінки параметрів розподілу.
7. Оцінка ймовірності події через частоту.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. Генеральна сукупність рівномірно розподілена на відрізку $[a;b](b>a)$. Знайти методом моментів точкові оцінки параметрів розподілу.
2. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом. Оцінити параметри розподілу методом моментів.
3. Використовуючи метод найбільшої правдоподібності знайти точкову оцінку параметра λ показникового закону розподілу, для якого щільність розподілу ймовірностей визначається формулою

$$\rho(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x} \ (x \geq 0).$$

4. Вибіркова сукупність задана таблицею розподілу:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Знайти вибіркове середнє $\overline{x}$, вибіркову дисперсію S^2, незміщену вибіркову дисперсію S_1^2.

5. Використовуючи метод умовних варіант, обчислити вибіркові дисперсії вибірки

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

6. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з відомим σ = 3. Знайти надійний інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання a, якщо вибіркове середнє $\overline{x} =$ 4,1, об'єм вибірки n = 36 і надійний рівень $\beta = 0{,}95$.
7. За результатами 23 незалежних спостережень отримали вибірку

x_i	7,9	8,3	8,6	9,2	9,5
n_i	3	4	9	5	2

Обчислити середнє вибіркове $\overline{x}$, незміщену вибіркову дисперсію S_1^2, знайти надійний інтервал для математичного сподівання, якщо надійний рівень $\beta = 0{,}95$.

8. Знайти надійні інтервали для математичного сподівання, користуючись
   а) нормальним розподілом;
   б) розподілом Стьюдента, якщо n = 6, $\overline{x}$ = 10, $\beta = 0{,}95$, S_1 = 1.
9. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю $\beta = 0{,}999$ забезпечується точність $\delta = 0{,}01$ оцінки математичного сподівання, якщо дисперсія дорівнює 1,5.
10. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом. Об'єм вибірки n = 100. Обчислено вибіркове середнє квадратичне відхилення S_1 = 0,9. Знайти надійний інтервал для стандарту σ з надійністю 0,999.
11. Знайти надійний інтервал для стандарту σ з надійністю 0,99, якщо генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, об'єм вибірки n = 10, вибіркове середнє квадратичне відхилення S_1 = 0,2.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Неперервна випадкова величина ξ вважається рівномірно розподіленою на відрізку $[a;b]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a;b]; \\ 0,\ x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Знайдемо $M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \frac{a+b}{2}$, $D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Потрібно оцінити два параметри, отже складаємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \nu_1 = \varepsilon_1 \\ \mu_2 = \delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\xi = \bar{x} \\ D\xi = S^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \bar{x} \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = S^2 \end{cases} \Rightarrow a = \bar{x} - \sqrt{3}S, \quad b = \bar{x} + \sqrt{3}S.$$

2. Неперервна випадкова величина ξ вважається нормально розподіленою, якщо її щільність розподілу ймовірностей

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Параметрами розподілу є a та σ. Числові характеристики нормально розподіленої випадкової величини знаходимо аналогічно до попередньої задачі.

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x = a, \ D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x - (a)^2 = \sigma^2.$$

В даній задачі потрібно оцінити два параметри, тому необхідно отримати систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} M\xi = \bar{x} \\ D\xi = S^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \bar{x} \\ \sigma^2 = S^2 \end{cases}.$$

Отже точковою оцінкою параметра a є вибіркове середнє $\bar{x}$, а параметра σ – вибіркове середнє квадратичне відхилення S.

3. За функцію правдоподібності неперервної випадкової величини ξ приймаємо функцію

$$L(\alpha) = p(x_1,\alpha)p(x_2,\alpha) \cdot \ldots \cdot p(x_n,\alpha) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\alpha),$$

де $p(x_i,\alpha)$ – ймовірність того, що внаслідок випробування випадкова величина ξ набуває значення x_i. В нашому випадку функція правдоподібності набуває вигляду

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i},\ (x_i\ge 0).$$

Запишемо для неї логарифмічну функцію правдоподібності:

$$l(\lambda)=\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} lnp(x_i\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i,\ (x_i\ge 0).$$

Знайдемо похідну цієї функції. Рівняння правдоподібності набуває вигляду

$$\frac{n}{\tilde{\lambda}}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0.$$

Звідси $\tilde{\lambda}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\overline{x}}$.

Знайдемо другу похідну логарифмічної функції правдоподібності

$$l''(\lambda)=-\frac{n}{\lambda^2}.$$

Вона завжди від'ємна Тому $\tilde{\lambda}$ – точка максимуму.

4. $$\overline{x}=\frac{20\cdot 1+15\cdot 2+10\cdot 3+5\cdot 4}{50}=2,$$

$$S_1^2=\frac{20(1-2)^2+15(2-2)^2+10(3-2)^2+5(4-2)}{50}=1,$$

незміщена вибіркова дисперсія $S_1^2=\dfrac{n}{n-1}S^2=\dfrac{50}{49}\cdot 2=2{,}04$

При досить великих n вибіркова і незміщена вибіркова дисперсії практично не відрізняються.

5. Об'єм вибірки n = 5 + 15 + 20 + 10 = 50. Перейдемо до умовних варіант $w_i=Cx_i$, де $C=10$. Отримаємо нову вибірку

w_i	1	5	6	8
n_i	5	15	20	10

В цьому випадку вибіркове середнє обчислюється за формулою $\overline{x}=\dfrac{\overline{w}}{10^k}$, а дисперсію обчислюємо за формулою $S^2(x)=\dfrac{S^2(w)}{10^{2k}}$. Обчислимо

$$\bar{w}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}w_i n_i = 0{,}02(5 + 75 + 120 + 80) = 0{,}02\cdot 280 = 5{,}6.$$

Тоді $\bar{x}$ = 5,6 : 10 = 0,56. Далі

$$S^2(w)=\frac{1}{n}\sum_i n_i w_i^2-(\bar{w})^2=\frac{1}{50}(5+375+720+640)-(5{,}6)^2=3{,}44.$$

А $S^2(x)=3{,}44:100$ = 0,0344. $S_1^2=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{50}{49}\cdot 0{,}0344$ = 0,0351.

6. Надійний інтервал для математичного сподівання a має вигляд: $\left(\bar{x}-t_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Величину t_β знаходимо з таблиці 4 для функції Лапласа: t_β = 1,96. Отже, δ = 1,96$\cdot\frac{3}{\sqrt{36}}=0{,}98$ Таким чином $a\in(4{,}1-0{,}98\,;4{,}1+0.98)$ = (3,12; 5,08).

7. Вибіркове середнє $\bar{x}$ = (7,9 · 3+8,3 · 4+8,6 · 9+9,2 · 5+9,5 · 2):23 = 8,67; вибіркова дисперсія S^2 = (7,9^2 · 3+8,3^2 · 4+8,6^2 · 9+9,2^2 · 5+9,5^2 · 2):23 – 8,67^2 = =0,224; незміщена вибіркова дисперсія $S_1^2=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{23\cdot 0{,}224}{22}=0{,}234$. Отже $S_1=0{,}483$. І, якщо дисперсія σ^2 невідома, то при побудові надійного інтервалу для a її замінюють незміщеною вибірковою дисперсією S_1^2. В цьому випадку отримаємо такий проміжок

$$\left(\bar{x}-t_\beta\frac{S_1}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_\beta\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right).$$

З таблиці розподілу Стьюдента (таблиця 5) для $\beta=0{,}95$ і n = 23 знайдемо t_β = 2, 093. Тоді $\bar{x}-t_\beta\frac{S_1}{\sqrt{n}}$ = 8,67 – 2,093$\cdot\frac{0{,}483}{\sqrt{23}}=8{,}46$; $\bar{x}+t_\beta\frac{S_1}{\sqrt{n}}$ = 8,67 + 2,093$\cdot\frac{0{,}483}{\sqrt{23}}=8{,}88$. Отже $a\in$(8,46; 8,88).

8. а) із рівняння $\Phi(t_\beta)=0{,}5\beta$ знаходимо за таблицями значень функції Лапласа t_β = 1,96. Надійний інтервал буде мати вигляд

$$(10 - 1{,}96\cdot\frac{1}{\sqrt{6}};\ 10 + 1{,}96\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}) = (9{,}2;\ 10{,}8).$$

б) за таблицями розподілу Стьюдента знаходимо $t_\beta = t(0{,}95;6)$ = 2,57. В цьому випадку шуканий проміжок

$$(10 - 2{,}57\cdot \frac{1}{\sqrt{6}};\ 10 + 2{,}57\cdot \frac{1}{\sqrt{6}}) = (8{,}95;\ 11{,}05).$$

Очевидно, що розподіл Стьюдента дає значне розширення надійного інтервала в порівнянні з нормальним законом розподілу

9. Для визначення мінімального об'єму вибірки n, який забезпечує точність $\delta = 0{,}01$ і надійний рівень $\beta = 0{,}999$, скористаємося формулою $n = t_\beta^2 \frac{\sigma^2}{\delta^2}$.

Оскільки $\sigma^2 = 1{,}5$ і $t_\beta = 3{,}3$ (таблиця 4), то $n = (3{,}3)^2 \cdot \frac{1{,}5}{(0{,}01)^2} = 163350$.

10. Щоб знайти надійні межі для середнього квадратичного відхилення (стандарту) σ при нормальному законі розподілу генеральної сукупності, використаємо проміжок

$$\left(S_1(1-q); S_1(1+q)\right),$$

де величину $q < 1$ знаходимо з таблиці 6 за відомими β і n: $q = q(0{,}999;100) = 0{,}27$. Тому $\sigma \in (0{,}9(1 - 0{,}27);\ 0{,}9(1+0{,}27))$. Звідси $\sigma \in (0{,}657; 1{,}143)$.

11. Знаходимо q з таблиці 6 за відомими β і n: $q = q(0{,}99;10) =$ 1,08. Оскільки $q \geq 1$, то $S_1(1-q) < 0$ і $\sigma \in \left(0; S_1(1+q)\right)$ = $(0;\ 0{,}27(1+1{,}08))$. Звідси $\sigma \in \left(0; 0{,}2(1+1{,}08)\right) = (0; 0{,}416)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Методом умовних варіант обчислити незміщену вибіркову дисперсію вибірки, заданої розподілом частот

x_i	40	45	50	55	60	65
n_i	5	12	20	30	15	8

2. Методом умовних варіант обчислити незміщену вибіркову дисперсію вибірки, заданої розподілом частот

x_i	0,002	0,004	0,005	0,007	0,009
n_i	2	4	10	3	1

3. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання, якщо надійний рівень $\beta = 0{,}95$; генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 6$; вибіркове середнє значення $\overline{x} = 10$; об'єм вибірки $n = 150$.
4. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,99 забезпечується точність 0,02 оцінки математичного сподівання, якщо дисперсія дорівнює 5,6.
5. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом з невідомою дисперсією. За даними вибірки об'ємом 9 знайдено вибіркове середнє значення $\overline{x} = 12$ і незміщену вибіркову дисперсію $S_1^2 = 2{,}56$. Оцінити математичне сподівання при надійному рівні $\beta = 0{,}95$.
6. Генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона з параметром λ. Знайти точкову оцінку цього параметра методом моментів.
7. Знайти надійні інтервали для математичного сподівання, користуючись:
   а) нормальним розподілом;
   б) розподілом Стьюдента, якщо $n = 9$, $\overline{x} = 12$, $\beta = 0{,}99$ $S_1 = 2$.
8. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання, якщо надійний рівень $\beta = 0{,}99$; генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 10$; вибіркове середнє значення $\overline{x} = 12$; об'єм вибірки $n = 100$.
9. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,999 забезпечується точність 0,01 оцінки математичного сподівання, якщо дисперсія дорівнює 1,5.
10. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом з невідомою дисперсією. За даними вибірки об'ємом 10 знайдено вибіркове середнє значення $\overline{x} = 25$ і виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $S_1 = 1{,}2$. Оцінити математичне сподівання при надійному рівні $\beta = 0{,}99$.
11. Генеральна сукупність розподілена за нормальним законом. За вибіркою об'ємом $n = 50$ вибіркове середнє квадратичне відхилення $S_1 = 15$ Знайти надійний інтервал що накриває стандарт з надійністю 0,95.

Тема 9

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

Між різними явищами і процесами навколишнього світу існують складні зв'язки. При математичному моделюванні їх можна певним способом класифікувати. Так, часто зустрічається функціональний зв'язок, коли кожному можливому значенню однієї множини поставлено у відповідність за певним правилом єдине значення з іншої множини. Тоді, коли зв'язок між випадковими величинами не є функціональним, можна розглядати залежність, при якій одна випадкова величина реагує на зміну іншої випадкової величини зміною свого закону розподілу. Такий зв'язок називають стохастичним. На практиці часто розглядають частковий випадок стохастичного зв'язку, який називають статистичним зв'язком При такій залежності умовне математичне сподівання однієї випадкової величини η є функцією значення, якого набуває друга величина ξ, тобто

$$f(x) = M\left(\eta\big|_{\xi=x}\right).$$

Оскільки всі висновки робляться за результатами деякої вибірки, тому замість теоретичного умовного математичного сподівання розглядають його умовне середнє значення

Означення1. Залежність між однією випадковою величиною і умовним середнім значенням другої випадкової величини називають кореляційною.

Кореляційний зв'язок характеризується формою і силою зв'язку. Про форму кореляційного зв'язку дізнаємось, досліджуючи функцію регресії.

Означення 2. Функція $f_\xi(y) = M\left(\xi\big|_{\eta=y}\right)$ называється функцією регресії ξ на η, а функція $f_\eta(x) = M\left(\eta\big|_{\xi=x}\right)$ называється функцією регресії η на ξ.

Означення 3. Умовним середнім значенням $\overline{y_x}$ називають середнє арифметичне значень випадкової величини η, які відповідають значенню випадкової величини ξ, що дорівнює x.

Означення 4. Умовним середнім значенням $\overline{x_y}$ називають середнє арифметичне значень випадкової величини ξ, які відповідають значенню випадкової величини η, що дорівнює y.

Означення 5. Кореляційною залежністю η від ξ називають функціональну залежність $\overline{y_x}$ від x:

$$\overline{y_x} = f(x).$$

Це рівняння називається рівнянням регресії η на ξ, а графік функції $f(x)$ називають кривою регресії η на ξ.

Кореляційною залежністю ξ від η називають функціональну залежність $\overline{x_y}$ від y:

$$\overline{x_y} = g(y).$$

А це рівняння називають рівнянням регресії ξ на η, і графік функції $g(y)$ називають кривою регресії ξ на η.

Означення 6. Якщо обидві функції регресії $f(x)$ і $g(y)$ лінійні, то кореляцію називають лінійною. В цьому випадку функції регресії мають вигляд:

$$f(x) = ax + b \text{ та } g(y) = cy + d,$$

тобто їх графіками є прямі лінії.

Задача полягає в тому, щоб за результатами вибірки знайти невідомі коефіцієнти a,b,c,d. Для відшукання цих коефіцієнтів використовується метод найменших квадратів або метод Гауса. Якщо вибірка з генеральної сукупності значень випадкового вектора $(\xi;\eta)$ така, що різні значення величини ξ і відповідні їм значення η спостерігались по одному разу, то для коефіцієнтів a та b використовуються такі формули:

$$a = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \cdot \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}; \quad b = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot \Sigma y_i - \sum x_i \cdot \Sigma x_i y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}. \qquad (11)$$

Підставивши отримані значення a і b в рівняння $y = ax + b$, будемо мати вибіркове рівняння регресії η на ξ. Аналогічно можна знайти вибіркове рівняння регресії ξ на η.

Якщо об'єм вибірки n великий і одне й те ж значення $\xi = x$ зустрічається n_x разів, одне і те ж значення $\eta = y$ – n_y разів, одна і та ж пара $(x;y)$ зустрічається n_{xy} разів, то в цьому випадку результати спостережень групують і заносять у таку таблицю, яку називають кореляційною:

η	ξ				
	x_1	x_2	$\dots$	x_k	n_y
y_1	n_{11}	n_{21}	$\dots$	n_{k1}	n_{y1}
y_2	n_{12}	n_{22}	$\dots$	n_{k2}	n_{y2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	n_{1m}	n_{2m}	$\dots$	n_{km}	n_{ym}
n_x	n_{x1}	n_{x2}	$\dots$	n_{xk}	n

Використовуючи тотожності $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$; $\sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}$; $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\overline{x^2}$; $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum n_{xy} xy$, в цьому випадку для коефіцієнтів a і b отримаємо наступні співвідношення:

$$a = \frac{\Sigma n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)};\ b = \frac{n\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy} xy}{n\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}. \qquad (12)$$

Ці коефіцієнти підставимо в рівняння регресії η на ξ

$$\overline{y_x} = f(x) = ax + b.$$

Рівняння набуде вигляду:

$$\overline{y_x} = \frac{\Sigma n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)} x + \frac{n\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy} xy}{n\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}.$$

Виконаємо тотожне перетворення даного співвідношення:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)} (x - \bar{x}).$$

Означення 7. Число

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)}$$

називають вибірковим коефіцієнтом регресії η на ξ.

Позначимо $\overline{x^2} - \overline{x}^2$ = s_x^2 і $\overline{y^2} - \overline{y}^2$ = s_y^2. Помножимо обидві частини рівності в означенні 7 на $\frac{s_x}{s_y}$.

Означення 8. Число

$$r_b = \frac{\Sigma n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{ns_x s_y}. \qquad (13)$$

Називають вибірковим коефіцієнтом кореляції, де $\rho_{yx} = r_b \frac{s_y}{s_x}$.

Використовуючи це позначення, рівняння регресії η на ξ можна записати у вигляді

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_b \frac{s_y}{s_x}\left(x - \overline{x}\right).$$

Аналогічно отримуємо рівняння регресії ξ на η:

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_b \frac{s_x}{s_y}\left(y - \overline{y}\right).$$

Означення 9. Якщо хоч одна з функцій кореляції нелінійна, то кореляцію називають нелінійною.

В цьому випадку лінія регресії являє собою деяку криву. На практиці часто зустрічаються випадки параболічної кореляції ($\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$, $\overline{y_x} = ax^3 + bx^2 + cx + d, ...$), гіперболічної кореляції ($\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b$), показникової кореляції ($\overline{y}_x = a^{bx}$), тощо. Для відшукання невідомих параметрів рівняння регресії використовують метод найменших квадратів.

Якщо кожен з n елементів вибірки має дві якісні ознаки A та B, то можна розташувати ці елементи у порядку погіршення або покращення якості. Присвоїмо кожному з них порядковий номер, який називається

рангом. Нехай за ознакою A елементи мають ранги $X_1, X_2, \ldots X_n$, а за ознакою B – Y_1, Y_2, ...,Y_n, де всі X і Y є перестановками перших чисел натурального ряду. Утворимо різниці $d_k = X_k - Y_k$.

Означення 10. Число

$$r_c = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{k=1}^{n} d_k^2$$

називають вибірковим **коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена.**

Цей коефіцієнт змінюється в межах від – 1 до 1. Чим ближче r_c до одиниці, тим сильніший зв'язок між ознаками. Нехай ранги елементів вибірки за ознакою A дорівнюють $X_1, X_2, \ldots X_n$, за ознакою B – Y_1, Y_2, ...,Y_n. Якщо праворуч від $Y_1 \in R_1$ рангів більших за Y_1, праворуч від $Y_2 \in R_2$ рангів більших за Y_2 і т. д., то позначимо $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$.

Означення 11. Число

$$r_k = \frac{4R}{n(n-1)} - 1$$

називають вибірковим **коефіцієнтом рангової кореляції Кендалла.**

Практичне заняття №13

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

1. Лінійна кореляція.
2. Нелінійна кореляція: параболічна кореляція, гіперболічна кореляція, вибіркове кореляційне відношення.
3. Рангова кореляція.

РОЗВ’ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії η на ξ за результатами вибірки:

ξ	2	4	6	8	10
η	4,5	7	8	7,5	9

2. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції і рівняння прямої лінії регресії η на ξ за даними кореляційної таблиці

η	ξ					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	n_y
0,5	0	0	2	21	1	24
0,6	2	4	12	14	0	32
0,7	0	2	3	0	0	5
0,8	8	9	1	0	0	18
n_x	10	15	18	35	1	79

3. Економісти двох заводів оцінили вплив одинадцяти факторів на технологічний процес і отримали дві послідовності рангів:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	1	2	3	5	4	9	8	11	6	7	10

Знайти вибіркові коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кендалла.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Коефіцієнти a та b з рівняння $\overline{y_x} = f(x) = ax + b$ знаходимо за формулами (11). Спочатку заповнимо таблицю

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
2	4,5	4	9
4	7	16	28
6	8	36	48
8	7,5	64	60
10	9	100	90
$\sum_{i=1}^{5} x_i = 30$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 36$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 220$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 235$

Знаходимо шукані параметри:

$$a = \frac{5\cdot 235 - 30\cdot 36}{5\cdot 220 - (30)^2} = 0,475; \;\; b = \frac{220\cdot 36 - 30\cdot 235}{5\cdot 220 - (30)^2} = 4,35.$$

Отримуємо рівняння прямої лінії регресії $y = 0,475x + 4,35$.

2. Вибірковий коефіцієнт кореляції обчислюємо за формулою (13), а рівняння регресії має вигляд

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}).$$

Виходячи з цього, потрібно обчислити величини:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma n_x x = \frac{1}{79}(5 + 9 + 12,6 + 28 + 0,9) = \frac{55,5}{79} \approx 0,7;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\Sigma n_x x^2 = \frac{1}{79}(2,5 + 5,4 + 8,82 + 22,4 + 0,81) = \frac{39,93}{79} \approx 0,51;$$

$$s_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{0,51 - 0,49} = \sqrt{0,02} \approx 0,14;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\Sigma n_y y = \frac{1}{79}(12 + 19,2 + 3,5 + 14,4) = \frac{49,1}{79} \approx 0,62;$$

$$\overline{y^2}=\frac{1}{n}\Sigma n_y y^2=\frac{1}{79}(6+11{,}52+2{,}45+11{,}52)=\frac{31{,}49}{79}\approx 0{,}4;$$

$$s_y=\sqrt{\overline{y^2}-(\overline{y})^2}=\sqrt{0{,}4-0{,}3844}=\sqrt{0{,}0156}\approx 0{,}12;$$

$$\Sigma n_{xy}xy = 0{,}7 + 8{,}4 + 0{,}45 + 0{,}6 + 1{,}44 + 5{,}04 +$$

$$+ 6{,}72 + 0{,}84 + 47 + 3{,}2 + 4{,}32 + 0{,}56 = 33{,}74.$$

Отже, вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_b=\frac{33{,}74-79\cdot 0{,}7\cdot 0{,}62}{79\cdot 0{,}14\cdot 0{,}12} = -\,0{,}41,$$

а рівняння прямої лінії регресії η на ξ має вигляд:

$$\overline{y}_x-0{,}62=-0{,}41\frac{0{,}12}{0{,}14}(x-0{,}7) \text{ або } \overline{y}_x = -\,0{,}35\,x + 0{,}87.$$

3. Для знаходження вибіркового коефіцієнта рангової кореляції Спірмена обчислимо різниці рангів: $d_1=0$, $d_2=0$, $d_3=0$, $d_4=-1$, $d_5=1$, $d_6=-3$, $d_7=-1$, $d_8=-3$, $d_9=3$, $d_{10}=3$, $d_{11}=1$. Звідси

$$\Sigma d_k^2 = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 9 + 1 + 9 + 9 + 9 + 1 = 40 \text{ і}$$

$$r_c=1-\frac{6}{n^3-n}\sum_{k=1}^{n}d_k^2=1-\frac{6}{11^3-11}40 = 1 - 0{,}18 = 0{,}82.$$

Для знаходження вибіркового коефіцієнта рангової кореляції Кендалла обчислимо величини R_k: $R_1=10$, $R_2=9$, $R_3=8$, $R_4=6$, $R_5=6$, $R_6=2$, $R_7=2$, $R_8=0$, $R_9=2$, $R_{10}=1$. Сума рангів $R=R_1+R_2+...+R_{10}$ = 46. Тоді

$$r_k=\frac{4R}{n(n-1)}-1=\frac{4\cdot 46}{11\cdot 10}-1 = 1{,}67 - 1 = 0{,}67.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії η на ξ за результатами вибірки:

ξ	2	3	4	5	6	7
η	1	5	9	13	17	21

2. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії η на ξ за результатами вибірки:

ξ	1,2	3,6	6	8,4	10
η	3	10	15	25	30

3. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції і рівняння прямої лінії регресії η на ξ за результатами кореляційної таблиці:

η	ξ			
	2	3	4	n_y
8	2	1	3	6
11	0	7	3	10
14	0	0	9	9
n_x	2	8	15	25

4. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції і рівняння прямої лінії регресії η на ξ за результатами кореляційної таблиці:

η	ξ			
	6	7	8	n_y
5	0	0	2	2
6	2	4	12	18
7	0	2	3	5
n_x	2	6	17	25

5. Знайти вибіркове рівняння параболічної лінії регресії 2-го порядку η на ξ за результатами вибірки:

ξ	1	3	5	7	9	11
η	4	16	36	64	100	144

6. Економісти двох підприємств оцінили вплив шістнадцяти факторів на технологічний процес і отримали дві послідовності рангів:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_i	2	1	4	3	5	7	6	8	9	11	12	10	14	13	16	15

Знайти вибіркові коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кендалла.

7. Арбітри оцінили майстерність 10 спортсменів, внаслідок чого було отримано 3 послідовності рангів:

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
C	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

Визначити пару арбітрів, оцінки яких найбільше узгоджується, використавши коефіцієнти рангової кореляції Спірмена та Кендалла.

Тема 10

ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

В багатьох галузях науки і техніки для з'ясування випадкових фактів висловлюють припущення або гіпотези, які можна перевірити, спираючись на результати досліджень випадкової вибірки. **Статистичною** називають гіпотезу про структуру невідомого закону розподілу або про параметри відомих розподілів. Разом з висунутою гіпотезою розглядають і протилежну до неї. Якщо висунута гіпотеза відхиляється, то протилежна гіпотеза вважається справедливою. Висунуту гіпотезу H_0 називають нульовою або основною гіпотезою, а гіпотезу H_1, яка суперечить H_0, називають альтернативною або конкурентною гіпотезою. Якщо перевірку проводити статистичними методами на основі деякої n – вимірної вибірки, то її називають статистичною. При статистичній перевірці гіпотези можливі помилки двох типів. Помилка першого роду полягає в тому, що відхиляється правильна гіпотеза. Помилка другого роду полягає в тому, що приймається неправильна гіпотеза. Можливі випадки ілюструє така таблиця:

Гіпотеза H_0	Вірна	Невірна
Відхиляється	Помилка 1-го роду	Правильне рішення
Приймається	Правильне рішення	Помилка 2-го роду

Означення 1. Статистичним критерієм називають спеціально підібрану для перевірки нульової гіпотези випадкову величину K, точний або наближений закон розподілу якої відомий.

Означення 2. Спостережуваним значенням критерію K_{cn} називають величину, яку отримують при перевірці гіпотези за результатами вибірок після обчислення значення величин, які входять до складу критерію.

Після вибору певного критерію множина всіх його можливих значень розбивається на дві неперерізні підмножини Q і W. Q складається із значень критерію, при яких гіпотеза H_0 приймається, а W складається із значень критерію при яких H_0 відхиляється. Підмножина W називається **критичною областю,** а підмножина Q – областю прийняття гіпотези або **областю допустимих значень.**

При статистичній перевірці статистичних гіпотез дотримуються основного принципу: якщо спостережуване значення критерію належить критичній області, то гіпотезу H_0 відхиляють. А якщо спостережуване значення критерію належить області допустимих значень, то гіпотезу H_0 приймають. Існують точки на числовій прямій, які розділяють області Q і W. Такі точки називають **критичними точками** і позначають k_{kp}. Розрізняють односторонню і двосторонню критичні області. **Правосторонньою** називається критична область, яка визначається нерівністю $K > k_{kp} > 0$, а **лівосторонньою** називають критичну область, для якої $K < k_{kp} < 0$. **Двосторонньою** називається критична область, для якої при $k_{kp}^2 > k_{kp}^1$ мають місце співвідношення $K < k_{k_p}^1$ або $K > k_{k_p}^2$.

Для відшукання критичної області досить знайти критичну точку. Для цього задаємо досить малу ймовірність (рівень значущості) α, тоді шукаєм критичну точку k_{kp} так, щоб за умови справедливості H_0 виконувалась рівність

$$P\left\{K > k_{\kappa p}\right\} = \alpha .$$

Для кожного практично важливого критерію складено спеціальні таблиці. За допомогою цих таблиць знаходять критичну точку, яка задовольняє дане співвідношення. Після цього обчислюють за даними вибірок спостережуване значення критерію і, якщо виявиться що $K_{cn} > k_{\kappa p}$, то гіпотезу H_0 відхиляють, а у протилежному випадку – приймають.

Коли в гіпотезі H_0 висловлюється припущення про параметри відомого закону розподілу, то статистичний критерій перевірки цієї гіпотези називається **параметричним.** Якщо ж в гіпотезі мова йде про невідомий розподіл, то статистичний критерій називають критерієм узгодження. Найбільш відомий – критерій узгодження Пірсона.

Щоб здійснити **статистичну перевірку гіпотез на ймовірність**, потрібно розв'язати задачу: при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0, яка припускає, що невідома ймовірність p дорівнює p_0. Для гіпотези H_0 можливі три альтернативні гіпотези: H_1 – $p \neq p_0$; H_2 – $p > p_0$; H_3 – $p < p_0$; Розглянемо випадкову величину $\nu = \frac{m}{n}$. Оскільки для неї при великих n закон розподілу близький до нормального, то математичне сподівання $a = p$ і $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$. За критерій K перевірки гіпотези H_0 приймають випадкову величину

$$K = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}, \ q_0 = 1 - p_0.$$

1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_1, потрібно обчислити спостережуване значення критерію $K_{сп} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$ і за таблицею значень функції Лапласа знайти критичну точку $k_{кр}$ двосторонньої критичної області із рівняння $\Phi(k_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$. Якщо $|K_{сп}| < k_{кр}$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо ж $|K_{сп}| \geq k_{кр}$, то H_0 відхиляють.
2. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_2, потрібно обчислити спостережуване значення критерію $K_{сп} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$ і за таблицею значень функції Лапласа знайти критичну точку $k_{кр}$ правосторонньої критичної області із рівняння $\Phi(k_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$. Якщо $K_{сп} < k_{кр}$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо ж $K_{сп} \geq k_{кр}$, то H_0 відхиляють.
3. Якщо ж потрібно при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_3, обчислюємо спосте-

режуване значення критерію $K_{cn}=\dfrac{\left(\dfrac{m}{n}-p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$ і за таблицею значень функції Лапласа із рівняння $\Phi\left(k_{кр}\right)=\dfrac{1-2\alpha}{2}$ знаходимо критичну точку $k_{кр}$ лівосторонньої критичної області. Якщо $K_{cn}>-k_{кр}$, то H_0 приймають. Якщо ж $K_{cn}\le -k_{кр}$, то її відхиляють.

Нехай при дослідженні випадкової величини ξ потрібно перевірити статистичну гіпотезу H_0, яка стверджує, що **випадкова величина ξ підлягає закону розподілу $F(x)$**. Щоб перевірити цю гіпотезу, потрібно дослідити $n-$ вимірну вибірку і побудувати емпіричну функцію розподілу $F_n(x)$. За допомогою спеціально вибраної випадкової величини, яку називають критерієм узгодження, порівняємо емпіричний і теоретичний закони розподілу. Найчастіше використовується **критерій χ^2 Пірсона**. Для його розгляду розіб'ємо область значень величини ξ на k інтервалів $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k$ і підрахуємо кількість елементів n_i, які потрапили в кожний інтервал $\Delta_i=\left(x_i;x_{i+1}\right)$. Обчислимо ймовірності $p_i=F\left(x_{i+1}\right)-F\left(x_i\right)$ попадання значень величини ξ в інтервал Δ_i та теоретичні частоти $\nu_i=np_i, \mathrm{i}=\overline{1,k}$. Результати подаємо у вигляді таблиці:

Інтервал Δ_i	Δ_1	Δ_2	.....	Δ_k
Емпіричні частоти n_i	n_1	n_2	.....	n_k
Теоретичні частоти ν_i	ν_1	ν_2	.....	ν_k

($\sum_{i=1}^{k} n_i=n$ – об'єм вибірки).

Порівняємо теоретичні та емпіричні частоти. Якщо вони сильно відрізняються, то нульову гіпотезу потрібно відхилити, а в протилежному випадку – прийняти. Критерій

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(n_i-np_i\right)^2}{np_i},$$

який характеризує ступінь розбіжності між критичними та емпіричними частотами, називають критерієм Пірсона з $l=k-r-1$ степенями вільності, де $r-$ число параметрів теоретичного розподілу, обчислених за результатами $n-$ вимірної вибірки. Правостороння критична область повинна будуватися, виходячи з вимоги, щоб

$$P\left\{\chi^2>\chi^2_{кр}(\alpha;l)\right\}=\alpha .$$

Тому вона визначається нерівністю $\chi^2>\chi^2_{кр}(\alpha;l)$, а область прийняття нульової гіпотези – нерівністю $\chi^2<\chi^2_{кр}(\alpha;l)$. За результатами вибірки обчислюємо $\chi^2_{сп}$ і за таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості α та числу степенів вільності $l=k-r-1$ знаходимо критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha;l)$. Якщо $\chi^2_{сп}<\chi^2_{кр}$, то нульову гіпотезу приймаємо, а якщо $\chi^2_{сп}>\chi^2_{кр}$, то H_0 відхиляємо.

Нехай при дослідженні випадкової величини ξ, розподіленої за нормальним законом з невідомим математичним сподіванням a, потрібно перевірити статистичну гіпотезу H_0, яка стверджує, що **при заданому рівні значущості α невідоме математичне сподівання $a=$ a_0**. Сформулюємо 3 альтернативні гіпотези: H_1 – $a\neq a_0$; H_2 – $a>a_0$; H_3 – $a<a_0$; Відомо, що за результатами $n-$ вимірної вибірки a оцінюється через вибіркове середнє $\bar{x}$. За критерій K перевірки гіпотези H_0 приймають випадкову величину

$$K=\frac{(\bar{\xi}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_1, потрібно обчислити спостережуване значення критерію $K_{сп}=\dfrac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ і за таблицею значень функції Лапласа знайти критичну точку $k_{кр}$ двосторонньої критичної області із рівняння $\Phi(k_{кр})=\dfrac{1-\alpha}{2}$. Якщо $|K_{сп}|<k_{кр}$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо ж $|K_{сп}|\geq k_{кр}$, то H_0 відхиляють.

2. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_2, потрібно обчислити спостережуване значення критерію $K_{cn}=\frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ і за таблицею значень функції Лапласа знайти критичну точку $k_{кр}$ правосторонньої критичної області із рівняння $\Phi(k_{кр})=\frac{1-2\alpha}{2}$. Якщо $K_{cn}<k_{кр}$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо ж $K_{cn}\ge k_{кр}$, то H_0 відхиляють.

3. Якщо ж потрібно при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_3, обчислюємо спостережуване значення критерію $K_{cn}=\frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ і за таблицею значень функції Лапласа із рівняння $\Phi(k_{кр})=\frac{1-2\alpha}{2}$ знаходимо критичну точку $k_{кр}$ лівосторонньої критичної області. Якщо $K_{cn}>-k_{кр}$, то H_0 приймають. Якщо ж $K_{cn}\le -k_{кр}$, то її відхиляють.

Нехай при дослідженні випадкової величини ξ, розподіленої за нормальним законом з невідомою дисперсією $\sigma^2(\xi)$, потрібно перевірити статистичну гіпотезу H_0, яка стверджує, що **при заданому рівні значущості α невідома дисперсія $\sigma^2=\sigma_0^2$**. Сформулюємо 3 альтернативні гіпотези: H_1 – $\sigma^2\ne\sigma_0^2$; H_2 – $\sigma^2>\sigma_0^2$; H_3 – $\sigma^2<\sigma_0^2$. За результатами $n-$ вимірної вибірки дисперсія оцінюється через незміщену вибіркову дисперсію S_1^2. Тому гіпотезу H_0 можна записати у вигляді $M(S_1^2)=\sigma_0^2$. За критерій K перевірки гіпотези H_0 виберемо випадкову величину

$$K=\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_0^2}.$$

1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_1, потрібно обчислити спостережуване значення критерію $K_{cn}=\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_0^2}$ і за таблицею критич-

них точок розподілу χ^2 знайти ліву критичну точку $k_{кр}^{л}\left(1-\frac{\alpha}{2};k\right)$ і праву критичну точку $k_{кр}^{п}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$. Якщо $k_{кр}^{л} < K_{сп} < k_{кр}^{п}$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо ж $K_{сп} \le k_{кр}^{л}$, або $K_{сп} \ge k_{кр}^{п}$, то H_0 відхиляють.

2. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_2, потрібно обчислити спостережуване значення критерію $K_{сп} = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_0^2}$ і за таблицею критичних точок розподілу χ^2 знайти критичну точку $k_{кр}(\alpha;k)$. Якщо $K_{сп} < k_{кр}$, то нульову гіпотезу приймають. Якщо ж $K_{сп} \ge k_{кр}$, то H_0 відхиляють.
3. Якщо ж потрібно при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_3, то ми обчислюємо спостережуване значення критерію $K_{сп} = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_0^2}$ і за таблицею критичних точок розподілу χ^2 знаходимо критичну точку $k_{кр}(1-\alpha;k)$. Якщо $K_{сп} > k_{кр}$, то H_0 приймаємо. При $K_{сп} \le k_{кр}$ нульову гіпотезу відхиляємо $R_в^2$.

Розглянемо двовимірну випадкову величину $(\xi;\eta)$, яка розподілена за нормальним законом. Здійснимо вибірку $(x_i;y_k)$ об'єму n з генеральної сукупності і за результатами вибірки обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції $R_в$. Якщо цей коефіцієнт не дорівнює нулю, то звідси ще не можна зробити висновок, що **коефіцієнт кореляції ρ генеральної сукупності** теж не дорівнює нулю. Тому необхідно при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0:\rho=0$ при альтернативній гіпотезі $H_1:\rho\neq 0$. Якщо нульова гіпотеза відхиляється, то це означає, що $\rho\neq 0$ і випадкові величини ξ та η корельовані. Якщо гіпотеза H_0 приймається, то вибірковий коефіцієнт кореляції приблизно рівний нулю і випадкові величини ξ та η некорельовані.

Для перевірки нульової гіпотези виберемо статистичний критерій $K = R_в\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_в^2}}$. Це випадкова величина, яка при справедливості нульової гіпотези розподілена за законом Стьюдента з $k=n-2$ степенями вільності. За результатами вибірки обчислюємо $K_{сп}=\frac{r_в\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_b^2}}$. Далі за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента для двосторонньої області при заданому рівні значущості α і числі k знаходимо критичну точку $k_{кр}(\alpha;k)$. Якщо $|K_{сп}|<k_{кр}$, то нульова гіпотеза приймається, якщо ж $|K_{сп}|\geq k_{кр}$, то H_0 відхиляється.

Для перевірки гіпотези про **вибірковий коефіцієнт ранговий кореляції Спірмена** розглянемо генеральну сукупність елементів, які мають дві якісні ознаки A і B і здійснимо вибірку об'єму n з цієї сукупності. Обчислимо вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена r_c. Якщо цей коефіцієнт відмінний від нуля, то внаслідок довільності вибірки ми не можемо стверджувати, що коефіцієнт рангової кореляції Спірмена ρ_c генеральної сукупності також відмінний від нуля. Тому потрібно при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0:\rho_c=0$ при альтернативній гіпотезі $H_1:\rho_c\neq 0$. Якщо нульова гіпотеза приймається, то отже між ознаками A і B немає рангового кореляційного зв'язку. Якщо ж нульова гіпотеза відхиляється, то це означає, що коефіцієнт Спірмена значно відрізняється від нуля і між ознаками A і B існує ранговий кореляційний зв'язок.

Для перевірки нульової гіпотези H_0 при альтернативній гіпотезі H_1 і заданому рівні значущості α обчислюємо критичну точку

$$k_{кр} = t_{кр}\,(\alpha;k)\sqrt{\frac{1-r_c^2}{n-2}},$$

де $t_{кр}(\alpha;k)$ – критична точка розподілу Стьюдента для двосторонньої критичної області з числом степенів вільності k – n – 2 і рівнем значущості α. Якщо $|r_c|<k_{kp}$, то нульову гіпотезу приймаємо. Якщо ж $|r_c|\geq k_{kp}$, то H_0 відхиляємо.

Аналогічно перевіряємо гіпотезу про **вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендалла.** Для цього розглянемо генеральну сукупність деяких елементів і здійснимо вибірку об'єму n з цієї сукупності. Обчислимо вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендалла r_k. Якщо цей коефіцієнт відмінний від нуля і ми не можемо стверджувати, що коефіцієнт рангової кореляції Кендалла ρ_k генеральної сукупності теж відмінний від нуля, то виникає задача: при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0: \rho_k = 0$ при альтернативній гіпотезі $H_1: \rho_k \neq 0$.

Для перевірки нульової гіпотези H_0 при альтернативній гіпотезі H_1 і заданому рівні значущості α обчислюємо критичну точку

$$k_{kp} = z_{kp}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}},$$

де z_{kp} – критична точка для двосторонньої критичної області з рівнем значущості α, яка знаходиться з рівняння $\Phi(z_{kp}) = \frac{1-\alpha}{2}$. Якщо $|r_k| < k_{kp}$, то нульову гіпотезу приймаємо. Якщо ж $|r_k| \geq k_{kp}$, то H_0 відхиляємо.

Практичне заняття №14

СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ

1. Статистична перевірка гіпотез про ймовірність.
2. Критерій узгодження χ^2 Пірсона.
3. Перевірка гіпотез про математичне сподівання і дисперсію.
4. Перевірка гіпотез про вибірковий коефіцієнт кореляції.
5. Перевірка гіпотез про вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена.
6. Перевірка гіпотез про вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендалла.

РОЗВ'ЯЗАТИ ВПРАВИ

1. За результатами 100 спостережень знайдено відносну частоту 0,45. При рівні значущості 0,01 перевірити нульову гіпотезу $H_0: p = p_0 = 0{,}75$ для альтернативної гіпотези $H_1: p \neq 0{,}75$ (H_2: $p > 0{,}75$; H_3: $p < 0{,}75$).
2. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні і теоретичні частоти

n_i	4	6	9	11	20
v_i	4,8	5,2	8,3	10,8	20,9

3. За вибіркою об'єму $n = 51$ здійсненої з двовимірної нормально розподіленої генеральної сукупності обчислено вибірковий коефіцієнт кореляції $r_в = 0{,}08$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: коефіцієнт кореляції генеральної сукупності $p = 0$ для альтернативної гіпотези $H_1: p \neq 0$.
4. За вибіркою об'єму $n = 11$ обчислено вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена $r_c = 0{,}91$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевіри-

ти нульову гіпотезу про рівність нулю генерального коефіцієнта рангової кореляції Спірмена.

5. За вибіркою об'єму $n=11$ обчислено вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендалла $r_к=0,67$. При рівні значущості $\alpha=0,01$ перевірити нульову гіпотезу про рівність нулю генерального коефіцієнта рангової кореляції Кендалла.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Обчислимо спостережуване значення критерію

$$K_{сп}=\frac{\left(\frac{m}{n}-p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}=\frac{(0,45-0,75)\sqrt{100}}{\sqrt{0,75\cdot 0,25}}=\frac{-3}{0.43}=-6,98.$$

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо критичну точку $k_{кр}$ двосторонньої критичної області із рівняння $\Phi\left(k_{кр}\right)=\frac{1-\alpha}{2}=\frac{1-0,01}{2}=0,495$. Отже $k_{кр}=2,57$. Оскільки $\left|K_{сп}\right|=6,98>k_{кр}=2,57$, то нульову гіпотезу відхиляємо.

Для того, щоб при заданому рівні значущості α = 0,01 перевірити нульову гіпотезу H_0 при альтернативній гіпотезі H_2: $p>0,75$, обчислюємо спостережуване значення критерію $K_{сп}=\frac{\left(\frac{m}{n}-p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}$ = – 6,98 і за таблицею значень функції Лапласа знаходимо критичну точку $k_{кр}$ правосторонньої критичної області із рівняння $\Phi\left(k_{кр}\right)=\frac{1-2\alpha}{2}=0,49$. Тут $k_{кр}=2,33$. Оскільки $K_{сп}=-6,98<k_{кр}=2,33$, то нульову гіпотезу приймаємо.

Перевіримо при заданому рівні значущості $\alpha=0,01$ нульову гіпотезу H_0: $p_0=0,75$ при альтернативній гіпотезі H_3: $p<0,75$. Для цього, знаючи спостережуване значення критерію $K_{сп}$= – 6,98, за таблицею значень функції Лапласа із рівняння $\Phi\left(k_{кр}\right)=\frac{1-2\alpha}{2}=0,49$ знаходимо критичну точку $k_{кр}=2,33$ лівосторонньої критичної області. Оскільки $K_{сп}=-6,98<-k_{кр}=-2,33$, то H_0 відхиляємо.

Надійність результату слідує з того, що для задачі виконується нерівність $np_0q_0 > 9$, а саме $100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 18{,}75 > 9$.

2. Обчислимо для даної вибірки об'ємом $n = 50$ спостережуване значення критерію $\chi^2_{сп} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$, враховуючи, що $np_i = \nu_i$.

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - \nu_i)^2}{\nu_i} = \frac{0{,}64}{4{,}8} + \frac{0{,}64}{5{,}2} + \frac{0{,}49}{8{,}3} + \frac{0{,}04}{10{,}8} + \frac{0{,}81}{20{,}9} = 0{,}357.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - \nu_i)^2}{\nu_i} = \sum_{i=1}^{5} \frac{n_i^2}{\nu_i} - n$, то для контролю правильності обчислень можна перевірити отримані результати для критерію $\chi^2_{сп}$:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{n_i^2}{\nu_i} - n = \frac{16}{4{,}8} + \frac{36}{5{,}2} + \frac{81}{8{,}3} + \frac{121}{10{,}8} + \frac{400}{20{,}9} - 50 = 0{,}357.$$

Число степенів вільності при $k = 5$ і $r = 2$ (число параметрів для нормального закону розподілу) $l = k - r - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$. Користуючись таблицею критичних точок розподілу, знаходимо $\chi^2_{кр}(\alpha; l) = \chi^2_{кр}(0.05; 2) = 6{,}0$.

Оскільки $\chi^2_{кр}(0.05; 2) = 6 > \chi^2_{сп} = 0{,}357$, то нульову гіпотезу приймаємо.

3. Для перевірки нульової гіпотези вибираємо статистичний критерій $K = R_в \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - R_в^2}}$. При справедливості нульової гіпотези ця випадкова величина розподілена за законом Стьюдента з $k = n - 2$ степенями вільності. Обчислюємо спостережуване значення критерію $K_{сп} = \frac{r_в\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_в^2}} = 0{,}08 \cdot \frac{\sqrt{51-2}}{\sqrt{1 - 0{,}064}} = 0{,}579$. За рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і $k = n - 2 = 51 - 2 = 49$ знаходимо за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента для двосторонньої області критичну точку $k_{кр}(\alpha; k) = k_{кр}(0{,}05; 49) = 2{,}01$. Оскільки $|K_{сп}| = 0{,}579 < k_{кр} = 2{,}01$, то нульову гіпотезу приймаємо. Це означає, що вибірковий коефіцієнт кореляції мало відрізняється від нуля і випадкові величини ξ і η – некорельовані.

4. Нам потрібно перевірити нульову гіпотезу H_0: генеральний коефіцієнт рангової кореляції Спірмена $p=0$ для альтернативної гіпотези $H_1: p \neq 0$. Для цього при заданому рівні значущості α = 0,01 обчислюємо критичну точку $t_{кр}(\alpha;k)$ розподілу Стьюдента для двосторонньої критичної області з числом степенів вільності $k = n - 2 = 11 - 2 = 9$:

$$t_{кр}(0{,}01;9) = 3{,}25.$$

Тоді знаходимо

$$k_{\text{кр}} = t_{кр}(\alpha;k)\sqrt{\frac{1-r_c^2}{n-2}} = 3{,}25 \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}91^2}{11-2}} = 3{,}25 \cdot 0{,}138 = 0{,}45.$$

Оскільки $|r_c| = 0{,}91 \geq k_{\text{кр}} = 0{,}45$, то H_0 відхиляємо. Отже вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена значно відрізняється від нуля і між ознаками A і B існує сильний ранговий кореляційний зв'язок.

5. Для перевірки нульової гіпотези H_0 при альтернативній гіпотезі H_1 і заданому рівні значущості α обчислюємо критичну точку z_{kp} для двосторонньої критичної області. Вона знаходиться з рівняння $\Phi(z_{kp}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}01}{2} = 0{,}495$. Звідси $z_{kp} = 2{,}57$. Тоді $k_{kp} = z_{kp}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}} = 2{,}57 \cdot \sqrt{\frac{2(22+5)}{99(11-1)}} = 2{,}57 \cdot 0{,}23 = 0{,}6$. Бачимо, що $|r_k| = 0{,}67 \geq k_{kp} = 0{,}6$, отже гіпотезу H_0 відхиляємо.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні і теоретичні частоти

n_i	13	15	24	25	13	10
v_i	14,64	19,33	24,67	21,19	12,79	7,38

2. За вибіркою об'єму $n = 66$ здійсненої з двовимірної нормально розподіленої генеральної сукупності обчислено вибірковий коефіцієнт ко-

реляції $r_в = 0{,}12$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : p = 0$ для альтернативної гіпотези $H_1 : p \neq 0$.

3. За вибіркою об'єму $n = 11$ обчислено вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена $r_c = 0{,}82$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу про рівність нулю генерального коефіцієнта рангової кореляції Спірмена.
4. Маємо дві незалежні вибірки деякого виробу обсягів m = 60 і n = 70 із двох нормальних розподілів для випадкових величин X та Y. Обчислені емпіричні середні $\overline{x}$ = 825 і $\overline{y}$ = 830 розглядуваного виробу. При рівні значимості α = 0,05, потрібно перевірити гіпотезу H_0 про рівність $M(X) = M(Y)$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $M(X) \neq M(Y)$, якщо відомо, що $D(X) = 35$ і $D(Y) = 50$.
5. За даними двох незалежних вибірок обсягів m = 12 і n = 17 з нормальних генеральних сукупностей X і Y обчислені емпіричні дисперсії $S^2(X) = 9{,}83$ й $S^2(Y) = 7{,}54$. Потрібно при рівні значущості α = 0,05, перевірити гіпотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : D(X) > D(Y)$.

Модульна контрольна робота № 2

ВАРІАНТ

1-2. Для вибірки 2, 5, 4, 5, 6, 3, 2, 7, 4, 5, 3, 6, 6, 5, 7, 6, 5, 6, 4, 8, 6, 5, 9, 6 побудувати розподіл частот, емпіричну функцію розподілу і полігон частот. Знайти моду, медіану, варіаційний розмах, середнє абсолютне відхилення, коефіцієнти варіації.

3. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання, якщо надійний рівень – 0,95; середнє квадратичне відхилення – 6; вибіркове середнє значення – 10; об'єм вибірки – 150.

4. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії η на ξ за результатами вибірки

ξ	3	5	7	8	10	12	14
η	5	9	14	18	24	25	30

5. Два викладачі оцінили роботи 10 студентів за 12-бальною шкалою:

12 11 10 9 8 7 6 5 4 2

11 12 10 7 9 5 8 4 6 2

Знайти вибіркові коефіцієнти рангової кореляції Спірмена та Кендалла між оцінками.

Тема 11

ТАБЛИЦІ ЗНАЧЕНЬ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

1. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ПУАССОНА $P(k)=\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!}\cdot e^{-\lambda}$.

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0.818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,902964
5	0,000000	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6	0,000000	0,000000	0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000003

m \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015326	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604

8	0,000001	0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008102
9	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000191	0,002701
10	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000038	0,000810
11	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000007	0,000221
12	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000055
13	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000013
14	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003
15	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001

λ / m	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,900123	0,000045
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454
2	0,146525	0, 084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270
3	0,195367	0, 140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007567
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055
7	0,059540	0, 104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,11260
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,12511

λ / m	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,99262	0,118580	0,12511
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,11374
12	0,000642	0,003434	0,001262	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13	0,000197,	0,001321	0,001262	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14	0,000056	0,000472	0,005199	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077

15	0,000015	0,000157	0,002228	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000004	0,000049	0,000891	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17	0,000001	0,000014	0,000334	0,000596	0,0022124	0,005786	0,012764
18	0,000000	0,000004	0,000118	0,000232	0,000944	0,002893	0,007991
19.	0,000000	0.000001	0,000039	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20.	0,000000	0,000000	0,000064	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	0,000000	0,000000	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	0,000000	0,000000	0,000000	0,000006	0,000022	0,000158	0,000404
23	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,600003	0,000016	0,000073
25	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000006	0,000029
26	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000002	0,000011
27	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000004
28	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001

2. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\sum_{k=m}^{\infty} P(k)$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
1	0,0952	0,1812	0,2592	0,3297	0,3935	0,4512	0,5034	0,5506	0,5934	0,6321
2	0,0047	0,0175	0,0369	0,0615	0,0902	0,1219	0,1558	0,1912	0,2275	0,2642
3	0,0001	0,0011	0,0036	0,0079	0,0143	0,0231	0,0341	0,0474	0,0628	0,0803
4		0,0001	0,0002	0,0008	0,0017	0,0034	0,0056	0,0091	0,0135	0,0189
5					0,0002	0,0004	0,0008	0,0014	0,0023	0,0036
6								0,0002	0,0003	0,0006

3. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ГАУСА $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,39894	0,45	0,36053	0,90	0,26609	1,35	0,16038	1,80	0,07895
0,01	0,39892	0,46	0,35889	0,91	0,26369	1,36	0,15822	1,81	0,07754
0,02	0,39886	0,47	0,35723	0,92	0,26129	1,37	0,15608	1,82	0,07614
0,03	0,39876	0,48	0,35553	0,93	0,25888	1,38	0,15395	1,83	0,07477
0,04	0,39862	0,49	0,35381	0,94	0,25647	1,39	0,15183	1,84	0,07341
0,05	0,39844	0,50	0,35207	0,95	0,25647	1,40	0,14973	1,85	0,07206
0,06	0,39822	0,51	0,35029	0,96	0,25164	1,41	0,14764	1,86	0,07074
0,07	0,39797	0,52	0,34849	0,97	0,24923	1,42	0,14556	1,87	0,06943
0,08	0,39767	0,53	0,34667	0,98	0,24681	1,43	0,14350	1,88	0,06814
0,09	0,39733	0,54	0,34482	0,99	0,24439	1,44	0,14146	1,89	0,06687
0,10	0,39695	0,55	0,34494	1,00	0,24197	1,45	0,13943	1,90	0,06562
0,11	0,39654	0,56	0,34105	1,01	0,23955	1,46	0,13742	1,91	0,06438
0,12	0,39608	0,57	0,33912	1,02	0,23713	1,47	0,13542	1,92	0,06316
0,13	0,39559	0,58	0,33718	1,03	0,23471	1,48	0,13944	1,93	0,06195
0,14	0,39505	0,59	0,33521	1,04	0,23230	1,49	0,13147	1,94	0,06077
0,15	0,39448	0,60	0,33322	1,05	0,22988	1,50	0,12952	1,95	0,05959
0,16	0,39387	0,61	0,33121	1,06	0,22747	1,51	0,12758	1,96	0,05844
0,17	0,39322	0,62	0,32918	1,07	0,22506	1,52	0,12566	1,97	0,05730
0,18	0,39253	0,63	0,32713	1,08	0,22265	1,53	0,12376	1,98	0,05618
0,19	0,39181	0,64	0,32506	1,09	0,22025	1,54	0,12188	1,99	0,05508
0,20	0,39104	0,65	0,32297	1,10	0,21785	1,55	0,12001	2,00	0,05399
0,21	0,39024	0,66	0,32086	1,11	0,21546	1,56	0,11816	2,01	0,05292
0,22	0,38940	0,67	0,31874	1,12	0,21307	1,57	0,11632	2,02	0,05186

0,23	0,38853	0,68	0,31659	1,13	0,21069	1,58	0,11450	2,03	0,05082
0,24	0,38762	0,69	0,31443	1,14	0,20831	1,59	0,11270	2,04	0,04980
0,25	0,38667	0,70	0,31225	1,15	0,20594	1,60	0,11092	2,05	0,04879
0,26	0,38568	0,71	0,31006	1,16	0,20357	1,61	0,10915	2,06	0,04780
0,27	0,38466	0,72	0,30785	1,17	0,20121	1,62	0,10741	2,07	0,04682
0,28	0,38361	0,73	0,30563	1,18	0,19886	1,63	0,10567	2,08	0,04586
0,29	0,38251	0,74	0,30339	1,19	0,19652	1,64	0,10396	2,09	0,04491
0,30	0,38139	0,75	0,30114	1,20	0,19419	1,65	0,10226	2,10	0,04398
0,31	0,38023	0,76	0,29887	1,21	0,19186	1,66	0,10059	2,11	0,04307
0,32	0,37903	0,77	0,29659	1,22	0,18954	1,67	0,09893	2,12	0,04217
0,33	0,37780	0,78	0,29430	1,23	0,18724	1,68	0,09728	2,13	0,04128
0,34	0,37654	0,79	0,29200	1,24	0,18494	1,69	0,09566	2,14	0,04041
0,35	0,37524	0,80	0,28969	1,25	0,18265	1,70	0,09405	2,15	0,03955
0,36	0,37391	0,81	0,28737	1,26	0,18637	1,71	0,09246	2,16	0,03871
0,37	0,37255	0,82	0,28504	1,27	0,17810	1,72	0,09089	2,17	0,03788
0,38	0,37115	0,83	0,28269	1,28	0,17585	1,73	0,08933	2,18	0,03706
0,39	0,36973	0,84	0,28034	1,29	0,17360	1,74	0,08780	2,19	0,03626
0,40	0,36827	0,85	0,27798	1,30	0,17137	1,75	0,08628	2,20	0,03547
0,41	0,36678	0,86	0,27562	1,31	0,16915	1,76	0,08478	2,21	0,03470
0,42	0,36526	0,87	0,27324	1,32	0,16694	1,77	0,08329	2,22	0,03394
0,43	0,36371	0,88	0,27086	1,33	0,16474	1,78	0,08183	2,23	0,03319
0,44	0,36213	0,89	0,26848	1,34	0,16256	1,79	0,08038	2,24	0,03246
2,25	0,03174	2,65	0,01191	3,11	0,00317	3,54	0,00076	3,97	0,00015
2,26	0,03103	2,66	0,01160	3,12	0,00307	3,55	0,00073	3,98	0,00014
2,27	0,03034	2,70	0,01042	3,13	0,00298	3,56	0,00071	3,99	0,00014
2,28	0,02965	2,71	0,01014	3,14	0,00288	3,57	0,00068		
2,29	0,02898	2,72	0,00987	3,15	0,00279	3,58	0,00066		

2,30	0,02833	2,73	0,00961	3,16	0,00271	3,59	0,00063		
2,31	0,02768	2,74	0,00935	3,17	0,00262	3,60	0,00061		
2,32	0,02705	2,75	0,00909	3,18	0,00254	3,61	0,00059		
2,33	0,02643	2,76	0,00885	3,19	0,00246	3,62	0,00057		
2,34	0,02582	2,77	0,00861	3,20	0,00238	3,63	0,00055		
2,35	0,02522	2,78	0,00837	3,21	0,00231	3,64	0,00053		
2,36	0,02463	2,79	0,00814	3,22	0,00224	3,65	0,00051		
2,37	0,02406	2,80	0,00792	3,23	0,00216	3,66	0,00049		
2,38	0,02349	2,81	0,00770	3,24	0,00210	3,67	0,00047		
2,39	0,02294	2,82	0,00748	3,25	0,00203	3,68	0,00046		
2,40	0,02239	2,83	0,00727	3,26	0,00196	3,69	0,00044		
2,41	0,02186	2,84	0,00707	3,27	0,00190	3,70	0,00042		
2,42	0,02134	2,85	0,00687	3,28	0,00184	3,71	0,00041		
2,43	0,02083	2,86	0,00668	3,29	0,00178	3,72	0,00039		
2,44	0,02033	2,87	0,00649	3,30	0,00172	3,73	0,00038		
2,45	0,01984	2,88	0,00631	3,31	0,00167	3,74	0,00037		
2,46	0,01936	2,89	0,00613	3,32	0,00161	3,75	0,00035		
2,47	0,01888	2,90	0,00595	3,33	0,00156	3,76	0,00034		
2,48	0,01842	2,91	0,00578	3,34	0,00151	3,77	0,00033		
2,49	0,01797	2,92	0,00562	3,35	0,00146	3,78	0,00031		
2,50	0,01750	2,93	0,00545	3,36	0,00141	3,79	0,00030		
2,51	0,01709	2,94	0,00530	3,37	0,00136	3,80	0,00029		
2,52	0,01667	2,95	0,00514	3,38	0,00132	3,81	0,00028		
2,53	0,01625	2,96	0,00499	3,39	0,00127	3,82	0,00027		
2,54	0,01585	2,97	0,00485	3,40	0,00123	3,83	0,00026		
2,55	0,01545	2,98	0,00470	3,41	0,00119	3,84	0,00025		
2,56	0,01506	2,99	0,00457	3,42	0,00115	3,85	0,00024		

2,57	0,01468	3,00	0,00443	3,43	0,00111	3,86	0,00023		
2,58	0,01431	3,01	0,00430	3,44	0,00107	3,87	0,00022		
2,59	0,01394	3,02	0,00417	3,45	0,00104	3,88	0,00021		
2,60	0,01358	3,03	0,00405	3,46	0,00100	3,89	0,00021		
2,61	0,01323	3,04	0,00393	3,47	0,06097	3,90	0,00020		
2,62	0,01289	3,05	0,00381	3,48	0,00094	3,91	0,00019		
2,63	0,01256	3,06	0,00370	3,49	0,00090	3,92	0,00018		
2,64	0,01223	3,07	0,00358	3,50	0,00087	3,93	0,00018		
2,67	0,01130	3,08	0,00348	3,51	0,00084	3,94	0,00017		
2,68	0,01100	3,09	0,00337	3,52	0,00081	3,95	0,00016		
2,69	0,01071	3,10	0,00327	3,53	0,00079	3,96	0,00016		

4. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162	1,83	0,4664
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,42	0,4236	1,88	0,4699
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719

0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319	1,94	0,4738
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429	2,06	0,4803
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441	2,08	0,4812
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452	2,10	0,4821
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463	2,12	0,4830
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505	2,20	0,4861
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515	2,22	0,4868
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525	2,24	0,4875
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4898
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591	2,38	0,4913
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918

0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625	2,46	0,4931
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633	2,48	0,4934
2,50	0,4938	2,64	0,4959	2,78	0,4973	2,92	0,4982	3,60	0,499841
2,52	0,4941	2,66	0,4961	2,80	0,4974	2,94	0,4984	3,80	0,499928
2,54	0,4945	2,68	0,4963	2,82	0,4976	2,96	0,4985	4,00	0,499968
2,56	0,4948	2,70	0,4965	2,84	0,4977	2,98	0,4986	4,50	0,499997
2,58	0,4951	2,72	0,4967	2,86	0,4979	3,00	0,49865	5,00	0,499997
2,60	0,4953	2,74	0,4969	2,88	0,4980	3,20	0,49931		
2,62	0,4956	2,76	0,4971	2,90	0,4981	3,40	0,49966		

5. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $t_\gamma = t(n,\gamma)$.

n \ γ	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,326	0,727	1,00	1,376	3,078	12,706	31,821	63,657	63,662
2	0,142	0,289	0,617	0,816	1,061	1,886	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,584	0,765	0,978	2,638	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,569	0,741	0,941	1,533	2,776	3,747	4,694	8,610
5	0,132	0,257	0,559	0,727	0,920	1,476	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,553	0,718	0,906	1,440	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,549	0,711	0,896	1,415	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,546	0,706	0,889	1,397	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,543	0,703	0,883	1,383	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,542	0,700	0,879	1,372	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,540	0,697	0,876	1,363	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,128	0,259	0,539	0,695	0,873	1,356	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,538	0,694	0,870	1,350	2,160	2,650	3,012	4,221

14	0,128	0,258	0,537	0,692	0,868	1,345	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,536	0,691	0,866	1,341	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,535	0,690	0,865	1,337	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,534	0,689	0,863	1,333	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,534	0,688	0,862	1,330	2,103	2,552	2,872	3,922
19	0,127	0,257	0,533	0,688	0,861	1,328	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,533	0,687	0,860	1,325	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,532	0,686	0,859	1,323	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,532	0,686	0,859	1,321	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,532	0,685	0,858	1,319	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,531	0,685	0,857	1,318	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,531	0,684	0,857	1,316	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,531	0,684	0,856	1,315	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,531	0,684	0,855	1,314	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,530	0,683	0,855	1,313	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,530	0,683	0,854	1,311	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,530	0,683	0,854	1,310	2,042	2,457	2,750	3,646

6. ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $q = q(\beta, n)$

n	β			n	β		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

7. КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ χ^2

Число ступенів вільності k	Рівень значущості a							
	0,2	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,6	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	23,9	27,3	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	38,7	40,3	42,5	46,0	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7

24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47,0	50,0	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53,0	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56,0	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7

8. КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ СТЬЮДЕНТА (t-РОЗПОДІЛУ)

Число ступенів вільності, k	Рівень значущості, α (двостороння критична область)						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07

16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
Рівень значущості, α (одностороння критична область)							

9. КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ ФІШЕРА (*f*-РОЗПОДІЛУ)

(k_1 – число степенів вільності більшої дисперсії,
K_2 – число степенів вільності меншої дисперсії)

Рівень значущості 0,05									
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	9,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8

24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Рівень значущості 0,01										
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9

16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,2	1,8	1,0

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: ВШ, 1979. 408 с.
2. Довідник по теорії ймовірностей і математичній статистиці / під ред. акад. АН УРСР В.С. Королюка. Київ: Наукова думка, 1978. 582 с
3. Конет І.М., Недокіс В.А. Практикум з теорії ймовірностей. Кам'янець Подільський: Абетка-світ, 2009. 216 с.
4. Конет І.М., Недокіс В.А. Практикум з математичної статистики. Кам'янець-Подільський: Абетка-світ, 2010. 212 с.
5. Конет І.М. Теорія ймовірностей та математична статистика. Кам'янець-Подільський: К-П ДПУ, 1999. 214 с.
6. Конет І.М. Теорія ймовірностей. Кам'янець-Подільський: Абетка-світ, 2009. 216 с.
7. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. Київ: Либідь, 1996. 440 с.
8. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А.А. Свешникова. Москва: Наука, 1970. 656 с.
9. Скороход А.В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. Київ: Либідь, 1990. 168 с.
10. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Київ: ВШ, 1975. 293 с.
11. Теорія ймовірностей. Збірник задач / за заг. ред. А.В.Скорохода. Київ: Вища школа, 1976. 384 с.
12. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. Київ: ВШ, 1994. 192 с.

Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

КОВАЛЬСЬКА Ірина Борисівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Підписано 29.11.2024. Формат 60х84/16. Гарнітура «Cambria».
Об’єм даних 5,85 Мб. Обл.-вид. арк. 7,5. Зам. № 1142.

Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Виготовлено в Кам’янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300.