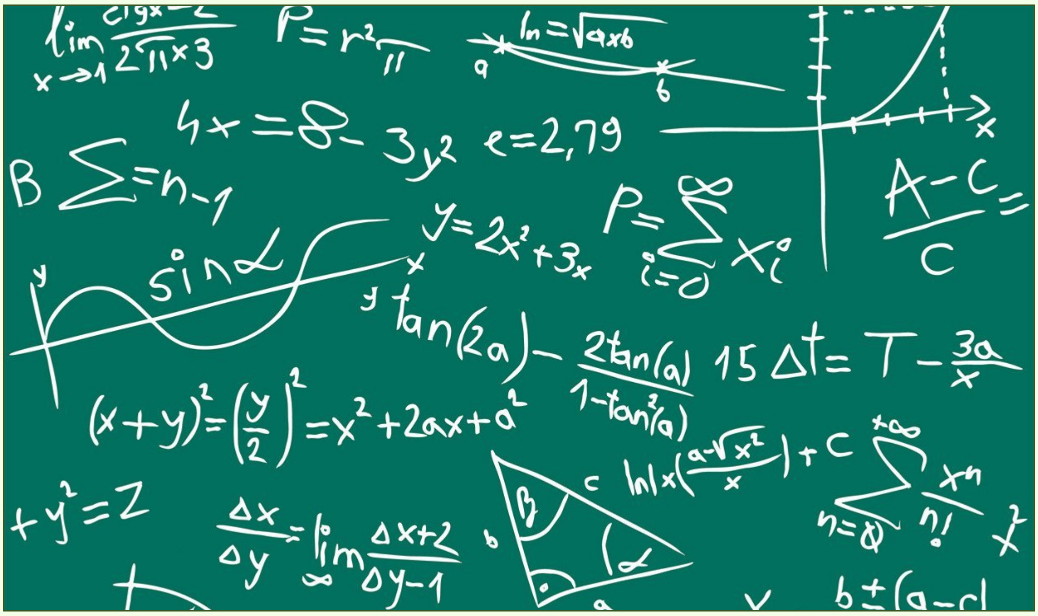
Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

В. А. СОРИЧ,
Н. М. СОРИЧ

ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК



ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Кам’янець-Подільський
2025

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.16
С65

Рекомендувала вчена рада Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 10 від 28.11.2024 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

І. В. Семенишина, кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичних дисциплін, інформатики і моделювання
Подільського державного аграрно-технічного університету;
К. Г. Геселева, кандидат фізико-математичних наук,
старший викладач кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка;
О. В. Шевчук, кандидат педагогічних наук, викладач кафедри цифрових,
освітніх та соціоекономічних технологій навчально-реабілітаційного
закладу вищої освіти «Кам'янець-Подільський державний інститут».

Сорич В. А., Сорич Н. М.
С65 **Вибрані питання математичного аналізу:** навчально-методичний посібник [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2025. 104 с.

Електронна версія посібника доступна за покликанням:
URL: http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8861

Навчально-методичний посібник покликаний поглибити та розширити знання студентів спеціальності «математика» з розділу математичного аналізу «Інтегральне числення функцій кількох змінних». Він містить всі теми практичних занять із повним переліком завдань як аудиторних, так і для самостійного розв'язання. В ньому також вміщено необхідний мінімум теоретичного матеріалу до кожної з семи тем та зразки розв'язання типових завдань. Призначений для організації проведення практичних занять по спецкурсу «Вибрані питання математичного аналізу».

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.16

© Сорич В. А., Сорич Н. М., 2025

ЗМІСТ

ХАРАКТЕРИСТИКА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ»

Найменування показників	**Характеристика навчальної дисципліни денна форма здобуття вищої освіти**
Рік навчання	3
Семестр вивчення	6
Кількість кредитів ЄКТС	4
Загальний обсяг годин	120
Кількість годин навчальних занять	40
Лекційні заняття	6
Практичні заняття	34
Самостійна та індивідуальна робота	80
Форма підсумкового контролю	залік

Статус дисципліни: вибірковий освітній компонент професійної підготовки.

Галузь знань – 01 Освіта / Педагогіка.

Спеціальність 014 Середня освіта (Матем.).

Освітній ступінь – бакалавр.

Характеристика навчальної дисципліни – вибіркова.

Модуль 1

ПОДВІЙНІ ТА ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Тема 1

ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Нехай в обмеженій замкненій області $\mathcal{D} \subset xOy$ задана обмежена функція $f(x;y)$; τ-поділ області $\mathcal{D}$ на квадрові частини $\mathcal{D}_k$ без спільних внутрішніх точок і $\Delta\mathcal{D}_k$ – їх площа; $T_k \in \mathcal{D}_k \left(k=\overline{1,n}\right)$. Сума вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} f(T_k)\Delta\mathcal{D}_k = \sigma(\tau;T_k)$ називається інтегральною, а границя $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(\tau;T_k)$, де $\lambda(\tau) = \max\limits_{1\le k\le n} d(\mathcal{D}_k)$, - подвійним інтегралом і позначається $\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy$.

Якщо область $\mathcal{D}$ є прямокутником із сторонами паралельними координатним осям: $D = \left\{(x;y) \middle| a \le x \le b; c \le y \le d\right\}$, то інтеграли вигляду $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)dy$ та $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx$ називають повторними. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на такій області, то подвійний інтеграл від цієї функції співпадає із обома повторними інтегралами.

Будемо казати, що область $\mathcal{D}$ є криволінійною першого типу, або правильно орієнтована вздовж осі Oy, якщо вона має такий вигляд $\mathcal{D} = \left\{(x;y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\right\}$. Якщо $\forall x \in [a,b]$ існує $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$, а функція $f(x;y)$ інтегрована в області $\mathcal{D}$, то

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$$

(останній інтеграл називається повторним).

Аналогічно при правильно орієнтованій області вздовж осі Ox (або криволінійній другого роду) тобто $\mathcal{D}=\{(x;y)\,|\,c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$,

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx.$$

Нехай область $Q\subset uOv$ за допомогою співвідношень $x=\varphi(u;v)$, $y=\psi(u;v)$ взаємно однозначно відображається на область $\mathcal{D}\subset xOy$, причому φ та ψ мають неперервні частинні похідні в Q. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на $\mathcal{D}$, то

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\iint\limits_Q f(\varphi(u;v);\psi(u;v))\left|J(u;v)\right|dudv,$$

де визначник

$$J(u;v)=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}$$

називають якобіаном.

При переході від декартових координат $(x;y)$ до полярних координат $(\varphi;\rho)$ заміна змінних в подвійному інтегралі відбувається згідно рівності

$$\iint\limits_P f(x;y)dxdy=\iint\limits_Q f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho.$$

Якщо при обчисленні подвійного інтеграла присутній вираз $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, то часто буває доцільним перейти від декартових координат до узагальнених полярних згідно рівностей $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, тоді $\left|J(\varphi;\rho)\right|=ab\rho$.

Об'єм циліндричного тіла V, обмеженого зверху поверхнею, що є графіком неперервної функції $z=f(x;y)$, причому $f(x;y)\ge 0$, знизу – замкненою обмеженою областю P площини $z=0$, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області, а твірні паралельні осі Oz, дорівнює $V=\iint\limits_P f(x;y)dxdy$.

Якщо поверхня σ є графіком функції $z=f(x;y),(x;y)\in D$, то при умові її диференційовності площа даної поверхні рівна наступному подвійному інтегралу

$$S(\sigma)=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(f_x{}'(x;y)\right)^2+\left(f_y{}'(x;y)\right)^2}\,dxdy.$$

Якщо матеріальна область $\mathcal{D}$ вміщена в систему координат xOy і відома функція поверхневої густини $\rho(x;y)$, то маса такого об'єкта рівна наступному подвійному інтегралу $m=\iint\limits_D \rho(x;y)dxdy$, статичні моменти відносно координатних осей цієї фігури такі:

$$M_x=\iint\limits_D y\rho(x;y)dxdy,\ M_y=\iint\limits_D x\rho(x;y)dxdy,$$

при цьому центр ваги має наступні координати $x_c=\dfrac{M_y}{m}$, $y_c=\dfrac{M_x}{m}$.

Якщо фігура однорідна, тобто $\rho(x;y)=const$, то координати центра ваги її наступні: $x_c=\dfrac{1}{S(P)}\iint\limits_P xdxdy$, $y_c=\dfrac{1}{S(P)}\iint\limits_P ydxdy$.

Приклад 1. Нехай $P=\left\{(x;y)\middle|1\le x\le 2;0\le y\le 1\right\}$, $f(x;y)=\sqrt{x-y}$. Обчислити обидва повторні інтеграли.

Розв'язання.

$$\Phi(x)=\int_0^1\sqrt{x-y}dy=-\int_0^1(x-y)^{\frac{1}{2}}d(x-y)=-\frac{2}{3}(x-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{y=0}^{y=1}=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Тоді

$$\int_1^2\Phi(x)dx=\frac{2}{3}\int_1^2\left(x^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{4}{15}\left(x^{\frac{5}{2}}-(x-1)^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_1^2=\frac{4}{15}(4\sqrt{2}-2)=\frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

Обчислимо другий повторний інтеграл.

$$\Psi(y)=\int_1^2\sqrt{x-y}dx=\frac{2}{3}(x-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{x=1}^{x=2}=\frac{2}{3}\left((2-y)^{\frac{3}{2}}-(1-y)^{\frac{3}{2}}\right),$$

тому

$$\int_0^1\Psi(y)dy=\frac{2}{3}\int_0^1\left((2-y)^{\frac{3}{2}}-(1-y)^{\frac{3}{2}}\right)dy=$$

$$=\frac{4}{15}\left((1-y)^{\frac{5}{2}}-(2-y)^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{15}(0-1-1+4\sqrt{2})=\frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

Приклад 2. Обчислити $\iint\limits_P \frac{x^2}{y^2}dxdy$, якщо область P обмежена лініями $y=x$, $xy=1$, $x=2$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування на координатній площині: рівнянням $y=x$ задається бісектриса першого-третього координатних кутів, рівнянням $xy=1$ – гіпербола $y=\frac{1}{x}$, а рівністю $x=2$ – вертикальна пряма (див. рис. 1)

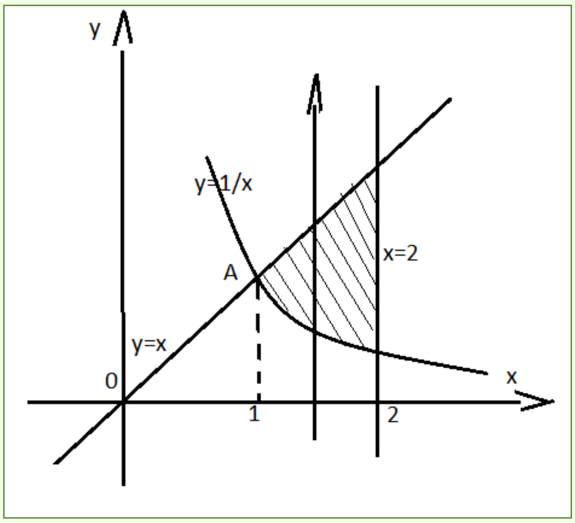


Рис. 1.

Якщо заштриховану фігуру розглядати як криволінійну область другого типу, то їх буде дві, а, отже, доведеться обчислювати два повторні інтеграли. Якщо ж розглядати цю фігуру як криволінійну область першого типу, то P задовольнятиме таким обмеженням:

$$P:\ 1\le x\le 2\,;\ \frac{1}{x}\le y\le x.$$

Як одержують ці обмеження? Спочатку шукаємо координати крайніх точок, в даному випадку це точка A, як розв'язок системи рівнянь, що задають лінії, на перетині яких лежить ця точка. Маємо $\begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$, звідки $x = \pm 1$. Область інтегрування лежить в першій чверті, тому A(1; 1). Далі шукаємо ортогональну проекцію області на вісь *Ox*, одержаний проміжок дає обмеження на змінну *x*. В нашому випадку $1\le x\le 2$.

З довільної точки сегмента $[a;b]$ проводимо промінь співнапрямлений з віссю *Oy*. Цей промінь перетне межу області інтегрування у двох точках. Нижню точку назвемо точкою входу в область, а верхню – точкою виходу. Лінію, на якій лежать точки входу в область, описуємо як графік залежності $y=\varphi_1(x)$, а лінію точок виходу – як графік залежності $y=\varphi_2(x)$. Тоді на змінну у накладаємо обмеження $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$. В нашому випадку $\frac{1}{x}\le y\le x$.

Далі застосовуємо правило обчислення подвійних інтегралів по криволінійних областях першого типу і маємо

$$\iint\limits_P \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} x^2y^{-2}dy=\int\limits_1^2 x^2dx\left.\frac{y^{-1}}{-1}\right|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}=\int\limits_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)dx=$$

$$=\int\limits_1^2(x^3-x)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2=\frac{9}{4}.$$

Відповідь. 9/4.

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_P ydxdy$, якщо область P обмежена лініями $x=y^2$, $x-y=2$.

Розв'язання. Рівністю $x=y^2$ задається парабола з вершиною в початку координат та вітками направо, а рівністю $x-y=2$ пряма, що перетинає координатні осі в точках (0; –2) та (2; 0), тому область інтегрування має такий вигляд (див. рис. 2). Дану фігуру оптимально розглядати як криволінійну область другого типу. Знайдемо координати точок A та B із системи рівнянь $\begin{cases} x=y^2 \\ x-y=2, \end{cases}$ звідки $y_1=-1$; $y_2=2$.

Отже, ортогональною проекцією області інтегрування на вісь Oy буде сегмент $[-1;2]$. Якщо з довільної точки цього проміжку провести промінь, співнапрямлений з віссю Ох, то точка входу в область лежить на дузі $\overset{\frown}{AB}$, яка є графіком залежності $x=y^2$, а точка виходу з області ле-

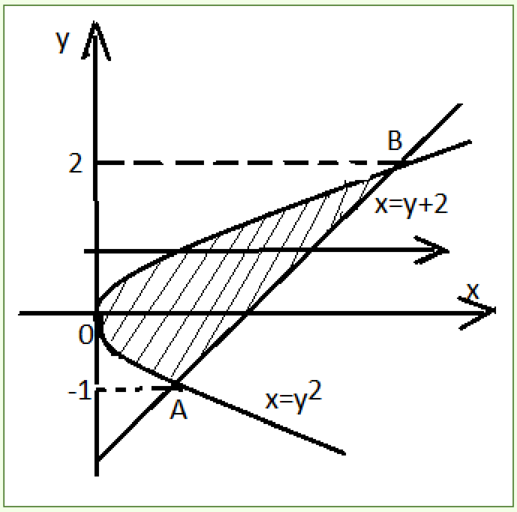


Рис. 2.

жить на відрізку прямої $x = y + 2$. Тому точки області P задовольняють таким обмеженням:

$$P: -1 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le y + 2.$$

За правилом обчислення подвійних інтегралів по криволінійних областях другого типу маємо

$$\iint_P y\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} y\,dx = \int_{-1}^{2} y\,dy\, x\Big|_{x=y^2}^{x=y+2} = \int_{-1}^{2} y(y + 2 - y^2)\,dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} + y^2 - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 4 - 4 - \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}.$$

Відповідь. 9/4.

Інколи спосіб обчислення подвійного інтеграла залежить не від типу області, а від підінтегральної функції. Проілюструємо це на такому прикладі.

Приклад 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_P e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$, якщо область P обмежена прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

Розв'язання. Область інтегрування має наступний вигляд (рис. 3).

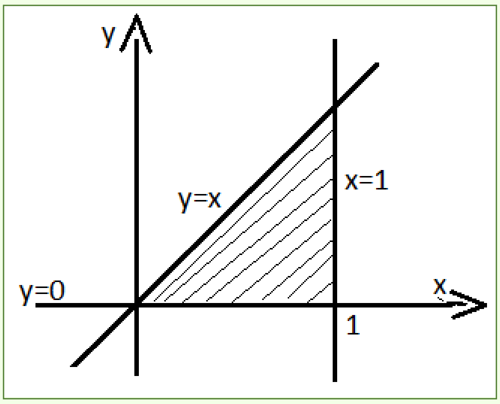


Рис. 3.

Вона є областю і першого, і другого типу одночасно. Проте при розгляді області P як криволінійної другого типу потрібно знайти первісну для функції $e^{\frac{y}{x}}$ по аргументу x, якої в елементарних функціях не існує. Отже, потрібно розглядати P як область першого типу. Як криволінійна область першого типу P задовольняє таким обмеженням: $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le x$, тому маємо:

$$\iint_P e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{\frac{y}{x}}\,dy = \int_0^1 \left(x e^{\frac{y}{x}} \Bigg|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 x(e-1)\,dx = \frac{1}{2}(e-1)x^2\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Відповідь. $\dfrac{e-1}{2}$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{P}(6x-3y)dxdy$, якщо область P – паралелограм, обмежений прямими $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$.

Розв'язання. Область інтегрування має такий вигляд (див. рис. 4).

Безпосереднє обчислення інтеграла по такій області надто громіздке, тому що як в напрямі осі Ox, так і в напрямі осі Oy область P треба спочатку розбити на частини, а потім по кожній з них обчислити три подвійні інтеграли.

Виконаємо таку заміну змінних:

$$\begin{cases} u = x + y; \\ v = 2x - y. \end{cases} \qquad (1)$$

Тоді прямі $x+y=1$, $x+y=2$ в системі координат Oxy переходять у прямі $u=1$ та $u=2$ в системі O_1uv, а прямі $2x-y=1$ та $2x-y=3$ відповідно в прямі $v=1$ та $v=3$. Таким чином, паралелограм P за допомогою відображення (1) переходить в системі координат O_1uv в прямокутник Q:

$$\begin{cases} 1 \le u \le 2; \\ 1 \le v \le 3. \end{cases}$$

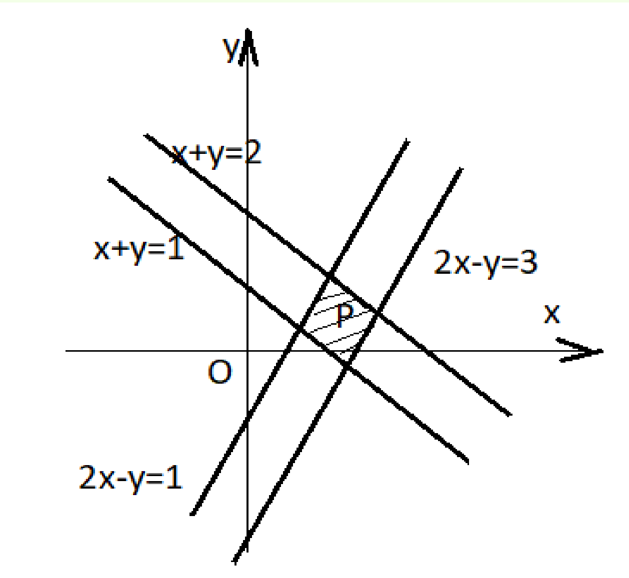


Рис. 4.

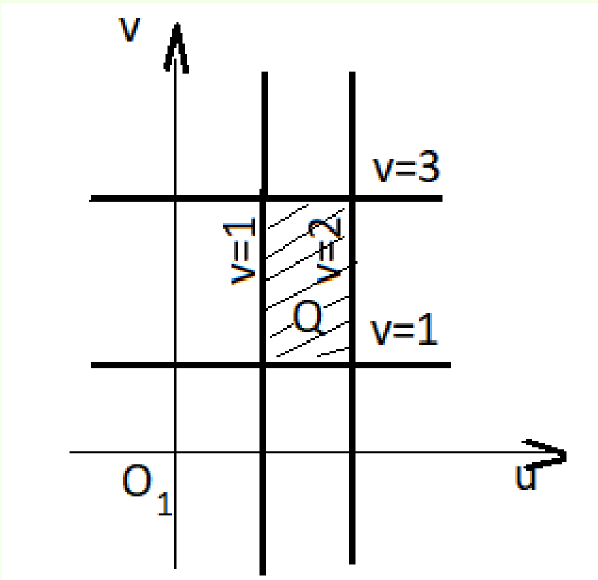


Рис. 5.

Далі знайдемо якобіан відображення (1). Для цього потрібно залежність між координатами x, y, u, v подати у вигляді

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases} : \begin{cases} u = x + y; \\ v = 2x - y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(u+v); \\ y = \frac{1}{3}(2u - v). \end{cases}$$

Отже, $J(u;v) = \begin{vmatrix} x'_u(u;v) & x'_v(u;v) \\ y'_u(u;v) & y'_v(u;v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$, тому $\left|J(u;v)\right| = \frac{1}{3}$.

За правилом заміни змінних в подвійному інтегралі

$$\iint\limits_P (6x - 3y)dxdy = \iint\limits_Q \left(6 \cdot \frac{1}{3}(u+v) - 3 \cdot \frac{1}{3}(2u - v)\right)\frac{1}{3}dudv =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_Q 3vdudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 3vdv = 4.$$

Відповідь. 4.

Найчастіше вживаним є перехід від декартових координат x, y до полярних ρ, φ. Як відомо, зв'язок між декартовими та полярними координатами описується співвідношеннями $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$, причому $\rho \geq 0$, а $\varphi \in [a; a + 2\pi)$.

Знайдемо якобіан цього переходу:

$$J(\varphi;\rho) = \begin{vmatrix} x'_\varphi(\varphi;\rho) & x'_\rho(\varphi;\rho) \\ y'_\varphi(\varphi;\rho) & y'_\rho(\varphi;\rho) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho \Rightarrow \left|J(\varphi;\rho)\right| = \rho.$$

Тому перехід від декартових координат до полярних в подвійному інтегралі здійснюється згідно рівності

$$\iint\limits_P f(x;y)dxdy = \iint\limits_Q f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho,$$

де Q – це область P, подана як криволінійний сектор.

Зауваження. У багатьох випадках цю формулу доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області P містить суму $x^2 + y^2$, оскільки в полярних координатах ця сума має простий вигляд: $x^2 + y^2 = \rho^2 cos^2\varphi + \rho^2 sin^2\varphi = \rho^2$. Якщо ж маємо вираз $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, то буває доцільним перехід до узагальнених полярних координат, а саме $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, при цьому $\left|J(\varphi,\rho)\right| = ab\rho$, а вираз $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2$.

Приклад 6. Обчислити $\iint\limits_P \sqrt{xy}dxdy$, якщо область P обмежена кривою $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ і лежить в першій чверті.

Розв'язання. Перейдемо в подвійному інтегралі до узагальнених полярних координат за формулами $\begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ y = \sqrt{3}\rho\sin\varphi \end{cases}$, тоді $\left|J(\varphi;\rho)\right| = \sqrt{6}\rho$, а рівняння кривої набуде такого вигляду $\rho^8 = \rho^2\sin\varphi\cos\varphi$, або $\rho = \sqrt[6]{\sin\varphi\cos\varphi}$. В першій чверті $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, тому

$$\iint\limits_P \sqrt{xy}dxdy = \iint\limits_Q \sqrt{\sqrt{6}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}\sqrt{6}\rho d\varphi d\rho = 6^{\frac{3}{4}}\iint\limits_Q \rho^2\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}d\varphi d\rho =$$

$$= \frac{6^{\frac{3}{4}}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \cos\varphi d\varphi = \frac{6^{\frac{3}{4}}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d(\sin\varphi) = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}.$$

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$.

Приклад 7. Знайти площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, яка лежить всередині циліндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \le a)$.

Розв'язання. Обидві поверхні симетричні відносно всіх координатних площин. Тому розглянемо восьму частину поверхні, площу якої необхідно обчислити, а саме ту, що знаходиться в першому октанті, тобто при $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$. Зобразимо цю поверхню: рис. 6

Рівняння сфери в першому октанті має наступний вигляд: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, тому

$$1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2 = 1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

$P-$ це четвертина внутрішності еліпса і як криволінійна область першого типу

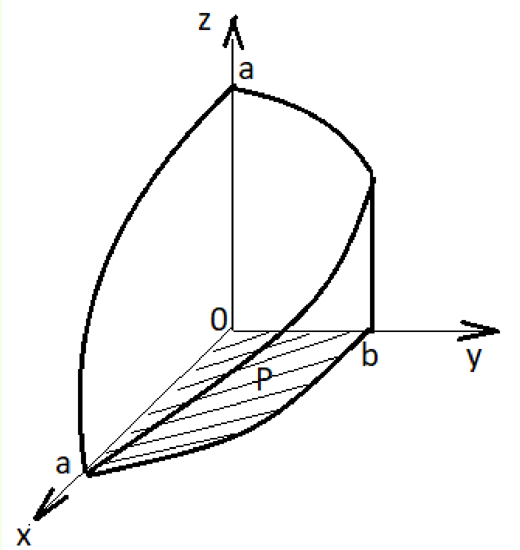


Рис. 6.

задовольняє обмеженням $\begin{cases} 0 \le x \le a; \\ 0 \le y \le \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \end{cases}$ Отже, маємо

$$S(\sigma) = 8\iint\limits_P \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - y^2}} =$$

$$= 8a\int\limits_0^a \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Bigg|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \right) dx = 8a\int\limits_0^a \arcsin\frac{b}{a} dx = 8a^2 \arcsin\frac{b}{a}.$$

Відповідь. $8a^2 \arcsin\dfrac{b}{a}.$

Приклад 8. Знайти координати центра ваги однорідної пластини, що обмежена лініями $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

Розв'язання. Зобразимо область, яка обмежена даними лініями (рис. 7)

Абсциси крайніх точок області шукаємо із системи $\begin{cases} ay = x^2; \\ x + y = 2a; \end{cases}$

$\Rightarrow a(2a - x) = x^2$, $x_1 = -2a$, $x_2 = a$. Тоді заштрихована множина як криволінійна область першого типу задовольняє обмеженням $\begin{cases} -2a \le x \le a \\ \dfrac{x^2}{a} \le y \le 2a - x \end{cases}.$

Оскільки пластина однорідна, то при відшуканні координат центра ваги скористаємось формулами $x_c = \frac{1}{S(P)}\iint\limits_P xdxdy$, $y_c = \frac{1}{S(P)}\iint\limits_P ydxdy$.

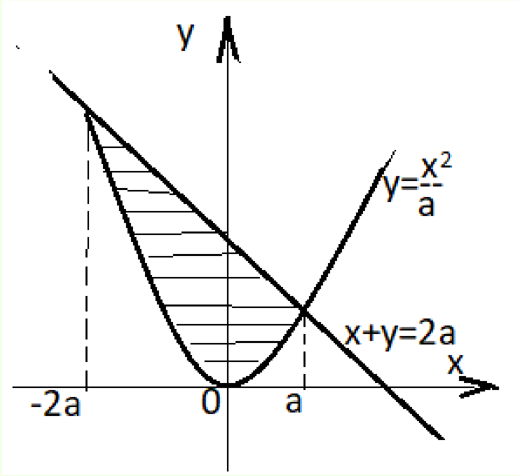


Рис. 7.

Маємо:

$$S(P) = \iint\limits_P dxdy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int\limits_{-2a}^{a}\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{9}{2}a^2.$$

Тоді

$$x_c = \frac{2}{9a^2}\int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} xdy = \frac{2}{9a^2}\int\limits_{-2a}^{a} x\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{9a^2}\int\limits_{-2a}^{a}\left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a}\right)dx = \frac{2}{9a^2}\left(ax^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = -\frac{a}{2};$$

$$y_c = \frac{2}{9a^2}\int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} ydy = \frac{2}{9a^2}\int\limits_{-2a}^{a}\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=\frac{x^2}{a}}^{y=2a-x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{9a^2}\int\limits_{-2a}^{a}\left((2a-x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right)dx = \frac{1}{9a^2}\left(-\frac{(2a-x)^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{8}{5}a.$$

Відповідь. $\left(-\frac{a}{2};\frac{8a}{5}\right)$.

Заняття 1.
ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПО ПРЯМОКУТНІЙ ТА КРИВОЛІНІЙНІЙ ОБЛАСТЯХ

1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла.
2. Означення подвійного інтеграла, його властивості.
3. Обчислення подвійного інтеграла у випадку прямокутної області.
4. Обчислення подвійного інтеграла по криволінійній області.

   Література: [1, с. 9-23]

5. Розв'язати вправи:

   1. Обчислити повторні інтеграли:

а) $a)\int_1^2 dx\int_0^1 (x+y^2)dy$;

б) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xy^2 dy$;

в) $\int_1^2 dy\int_{1+y}^{y+y^2} \sqrt{x-y}dx$;

г) $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a \rho^2\cos^2\varphi d\rho$.

2. Криволінійна область обмежена даними лініями. Зобразити цю область, та подвійний інтеграл по ній записати у вигляді повторних інтегралів двома способами:

а) $y = 0, y = x, x = 5$;

б) $y = x^3, x + y = 10, x - y = 4, y = 0$.

3. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі:

а) $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f\left(x,y\right)dy$;

б) $\int_{-6}^2 dy\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$.

4. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_P x\sqrt{y}dxdy, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1;$

б) $\iint\limits_P xe^{xy}dxdy, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2;$

в) $\iint\limits_P e^{\frac{x}{y}}dxdy,$ якщо область P обмежена лініями $x = 0, y = 1, x = y^2$;

г) $\iint\limits_P (x+y)dxdy,$ якщо область P обмежена лініями $y^2 = 2x, x + y = 4$.

6. Домашнє завдання.

1. Криволінійна область обмежена даними лініями. Зобразити область і подвійний інтеграл по ній подати двома способами через повторний:

а) $y - 2x \le 0, 2y - x \ge 0, xy \le 2$;

б) $x^2 + y^2 = 4, x + y = 2$ $(x \ge 0)$.

2. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

3. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_P \frac{dxdy}{\sqrt{ax-x^2}}$, де область P обмежена лініями $x = 0, y^2 = a^2 - ax$;

б) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx;$

в) $\iint\limits_P (x^2+y)dxdy,$ де область P обмежена параболами $y = x^2$ та $x = y^2$.

Заняття 2.
ЗАМІНА ЗМІННИХ В ПОДВІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

1. Відображення плоских областей. Визначник Якобі.
2. Заміна змінних у подвійному інтегралі.
3. Подвійний інтеграл у полярних координатах.

   Література: [1, с.23-30]

4. Розв’язати вправи:

1. Фігура P, обмежена параболами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ і гіперболами $xy = 1$, $xy = 2$. Знайти образ області P при відображенні $u = xy$, $v = \frac{y^2}{x}$ та якобіан цього відображення.

2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_P x^2 y dxdy$, якщо область P обмежена гіперболами $xy = 2$, $xy = 3$, прямими $y = 2x$, $y = x$, розташована в першій чверті (Виконайте заміну $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$).

3. Знайти площу паралелограма, який обмежений прямими $x + y = 0$, $x + y = 5$, $y + 2x = -1$, $y + 2x = 5$.

4. Перейти до полярних координат у інтегралі $\iint\limits_P f(x;y)dxdy$ і розставити межі інтегрування, якщо P:

а) круг $x^2 + y^2 \le 2x$;

б) круг $x^2 + y^2 \le 4y$;

в) спільна частина кругів $x^2 + y^2 \le 2x$ та $x^2 + y^2 \le 4y$;

г) фігура, що обмежена лемніскатою $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x \ge 0)$.

5. Обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_P \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dxdy$, якщо P – круг $x^2 + y^2 \le rx$;

б) $\iint\limits_P arctg \frac{y}{x} dxdy$, якщо область P – частина круга $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

в) $\iint\limits_P \sqrt{xy} dxdy$, якщо область P обмежена лінією $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ при умові $x \ge 0$, $y \ge 0$;

г) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy.$

5. Домашнє завдання.

1. Перейти в подвійному інтегралі $\iint\limits_P f(x;y)dxdy$ до полярних координат і розставити межі інтегрування, якщо область P:

а) обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ та прямими $y = x$, $y = 2x$;

б) визначається нерівностями $(x^2 + y^2)^3 \le 4a^2x^2y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

в) обмежена прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

2. Обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_{\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$;

б) $\iint\limits_P arctg\frac{y}{x}dxdy$, якщо P – частина кільця $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$ $y \le x\sqrt{3}$;

в) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$;

г) $\iint\limits_P (x+y)dxdy$, якщо область P обмежена лініями $y + x = 4$, $y + x = 12$, $y = 2x$, $y = 4x$.

Заняття 3.
ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР, ОБ’ЄМІВ ТІЛ ТА ПЛОЩ КРИВОЛІНІЙНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Формули для обчислення площ плоских фігур за допомогою подвійних інтегралів.
2. Задача про об’єм циліндричного бруса. Обчислення об’ємів тіл за допомогою подвійних інтегралів.
3. Обчислення площі криволінійної поверхні.
4. Формули для обчислення площі поверхні.

   Література: [1, с.30-38]

5. Розв’язати вправи:

   1. Обчислити площу фігури, що обмежена:

а) лініями $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}y$;

б) лемніскатою $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$;

в) кривими $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geq a^2$.

   2. Обчислити об’єм тіла, яке обмежене поверхнями:

а) координатними площинами, площиною $2x + 3y - 12 = 0$, циліндром $z = \frac{y^2}{2}$;

б) $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$;

в) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = x$, $z = 2x$;

г) $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

   3. Зобразити тіло, об’єм якого рівний інтегралу $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^2 + y^2\right) dy$.

   4. Знайти площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, яка попадає всередину циліндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b \leq a)$.

5. Обчислити площу частини поверхні конуса $x^2 - y^2 = z^2$, що розташована в першому октанті і обмежена площиною $y + z = a$.

6. Обчислити площу частини параболоїда $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$, що вирізається поверхнею $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$.

6. Домашнє завдання.

1. Зобразити тіло, об’єм якого подається інтегралом $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dy$.

2. Обчислити площу фігури, що обмежена

а) кривими $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = 0$, $y = x$;

б) лініями $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.

3. Обчислити об’єм тіла, яке обмежене:

а) площинами $x + y + z = 3$, $z = 0$, циліндром $x^2 + y^2 = 1$;

б) поверхнями $z = xy$, $y=\sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$, $z = 0$.

4. Обчислити площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, що знаходиться між площинами $x = -8$, $x = 6$.

5. Обчислити площу частини поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, яка вирізана циліндром $z^2 = 2py$.

Заняття 4.
ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ В МЕХАНІЦІ

1. Обчислення маси плоскої неоднорідної матеріальної фігури, її статичних моментів та моментів інерції відносно координатних осей. Обчислення координат центра ваги цієї фігури.

   Література: [1, с.38-44]

2. Розв’язати вправи:

1. Обчислити масу квадратної пластинки із стороною $2a$, якщо її густина пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і у вершинах квадрата дорівнює одиниці.

2. Визначити статичні моменти чверті круга $x^2 + y^2 = R^2$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ відносно координатних осей.

3. Обчислити статичний момент круга радіуса R відносно дотичної до нього.

4. Знайти центр ваги однорідної фігури, що обмежена лініями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = 4 - 2x$.

5. Обчислити моменти інерції трикутника, що обмежений прямими $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, відносно координатних осей.

6. Знайти момент інерції фігури, що обмежена кривою $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, відносно початку координат.

3. Домашнє завдання.

1. Обчислити масу пластинки, обмеженої лініями $y = 0$, $y = x^2$, $x + y = 2$, якщо густина пластинки в кожній точці $(x; y)$ дорівнює xy^2.

2. Знайти координати центра ваги фігури, що обмежена віссю Ox та циклоїдою $x = a(t - sint)$, $y = a(1 - cost)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. Знайти момент інерції однорідного круга радіуса R відносно точки, що лежить на колі, яке обмежує цей круг.

4. Обчислити статичний момент півкруга відносно його діаметра.

Тема 2

ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Кажуть, що область P правильно орієнтована вздовж осі Oz, якщо вона задовольняє таким обмеженням

$$P=\left\{(x;y;z)\middle|a\le x\le b;y_1(x)\le y\le y_2(x),z_1(x;y)\le z\le z_2(x;y)\right\}$$

або

$$P=\left\{(x;y;z)\middle|c\le y\le d;x_1(y)\le x\le x_2(y),z_1(x;y)\le z\le z_2(x;y)\right\}.$$

Потрійний інтеграл по такій області, якщо функція $f(x;y;z)$ інтегровна по ній, обчислюється через наступний повторний інтеграл

$$I=\iiint\limits_P f\left(x;y;z\right)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f\left(x;y;z\right)dz,$$

або ж

$$I=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f\left(x;y;z\right)dz.$$

Якщо область P правильно орієнтована вздовж інших координатних осей, то потрійний інтеграл по них обчислюється через аналогічні повторні інтеграли. Якщо область не є правильною, то її розбивають на скінченне число правильним і застосовують властивість адитивності кратних інтегралів.

Питання про заміну змінних у потрійному інтегралі вирішується таким самим чином, як і у випадку подвійного інтеграла. Якщо неперервно диференційовні функції $x=x(u;v;w),y=y(u;v;w),z=z(u;v;w)$ взаємно однозначно відображають область Q на область P, причому якобіан $J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}\ne 0$, то справедлива формула

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_Q f\left(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w)\right)\left|J\right|dudvdw.$$

Зокрема, в циліндричних координатах φ,ρ,z, де $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$, якобіан $\left|J\right|=\rho$, тому

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_Q f\left(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi;z\right)\rho d\varphi d\rho dz$$

положення точки визначається полярними координатами φ,ρ та аплікатою z, тому $\left|J\right|=\rho$. Сферичні координати ρ,φ,θ, точки M, де ρ – відстань від M до початку координат, φ – кут між віссю Ox та проекцією радіус-вектора OM на площину xOy, θ – кут між віссю Oz та вектором $\overline{OM}$, пов'язані із декартовими $x;y;z$ співвідношеннями:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta,$$

для яких якобіан $\left|J\right|=\rho^2\sin\theta$, тому

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_Q f(\rho\cos\varphi\sin\theta;\rho\sin\varphi\sin\theta;\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho.$$

Якщо при обчисленні потрійного інтеграла присутній вираз $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, то часто буває доцільним перейти від декартових координат до узагальнених циліндричних згідно рівностей $x=a\rho\cos\varphi, y=b\rho\sin\varphi, z=z$, тоді $\left|J\left(\varphi;\rho\right)\right|=ab\rho$. Якщо ж присутній вираз $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, то спростити процес обчислення потрійного інтеграла може перехід від декартових координат до узагальнених сферичних, а саме

$$x=a\rho\cos\varphi\sin\theta, y=b\rho\sin\varphi\sin\theta, z=c\rho\cos\theta,$$

при цьому $\left|J\right|=abc\rho^2\sin\theta$.

Об'єм V тіла P дорівнює $V=\iiint\limits_P dxdydz$ (в прямокутних декартових координатах), або $V=\iiint\limits_Q \rho d\varphi d\rho dz$ (в циліндричних координатах), або $V=\iiint\limits_{Q_1}\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho$ (в сферичних координатах).

Маса m тіла P з густиною $\rho = \rho(x;y;z)$ дорівнює $m = \iiint\limits_P \rho(x;y;z)dxdydz$. Статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} відносно координатних площин тіла P відповідно обчислюються за формулами

$$M_{xy} = \iiint\limits_P z\rho(x;y;z)dxdydz,\ M_{xz} = \iiint\limits_P y\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_P x\rho(x;y;z)dxdydz.$$

Координати (x_c, y_c, z_c) центра маси тіла P обчислюються за формулами $x_c = \frac{M_{yz}}{m}; y_c = \frac{M_{xz}}{m}, z_c = \frac{M_{xy}}{m}$. Якщо тіло P є однорідним $(\rho(x;y;z) = const)$, то

$$x_c = \frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P xdxdydz,\ y_c = \frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P ydxdydz, z_c = \frac{1}{V(P)}\iiint zdxdydz.$$

Якщо однорідне тіло має площину або вісь симетрії, то його центр ваги розташований на цій площині або осі.

Моменти інерції тіла P відносно координатних площин обчислюються за формулами

$$I_{xy} = \iiint\limits_P z^2\rho(xy;z)dxdydz,\ I_{xz} = \iiint\limits_P y^2\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_P x^2\rho(x;y;z)dxdydz,$$

а момент інерції цього тіла відносно початку координат рівний сумі усіх моментів інерції I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}.

Зауваження 1. Рівністю $F(x;y) = 0$ на координатній площині xOy задається деяка лінія, а в просторі – циліндрична поверхня, напрямною якої є дана лінія, а твірні паралельні осі Oz.

Зауваження 2. Аналогічно рівністю $F(x;z) = 0$ ($F(y;z) = 0$) на площині xOz (yOz) задається лінія, а в просторі циліндрична поверхня із напрямною даною лінією та твірними паралельними осі Oy (Ox).

Зауваження 3. Нехай просторова лінія Γ одержана в результаті перетину двох поверхонь, що задаються рівняннями $F(x;y;z) = 0$ та $G(x;y;z) = 0$. Щоб знайти рівняння ортогональної проекції Γ на площину

xOy (xOz, yOz), потрібно в системі рівнянь $\begin{cases} F(x;y;z)=0 \\ G(x;y;z)=0 \end{cases}$ в одному із рівнянь змінну z (змінну y, x) виражаємо через x та y (через x, z; через y, z) і це вираження підставити в інше рівняння.

Зауваження 4. Рівністю $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$задається поверхня обертання навколо осі Oz кривої $z=f(x)$, яка лежить в площині xOz. Аналогічно рівностями $y=f\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)\left(x=f\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)\right)$ задаються поверхні обертання навколо осі Oy (Ox) відповідних кривих.

Приклад 1. Область P обмежена координатними площинами та циліндричною поверхнею $x^2+y^2=1$ $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$і площиною z = 1. Подати її як правильно орієнтовану відносно всіх координатних осей.

Розв'язання. Зобразимо дану область і опишемо її, як просторову множину правильно орієнтовану вздовж осі Oz. Рівністю $x^2+y^2=1$ згідно зауваження 1 задається циліндрична поверхня із твірними паралельними осі аплікат, а напрямною слугує одиничне коло з центром в початку координат. Рівняння z = 1 – це рівняння площини, паралельної до координатної xOy і яка проходить через точку 1 на осі Oz. Область розташована в першому октанті (оскільки $z\geq 0; y\geq 0; z\geq 0$).

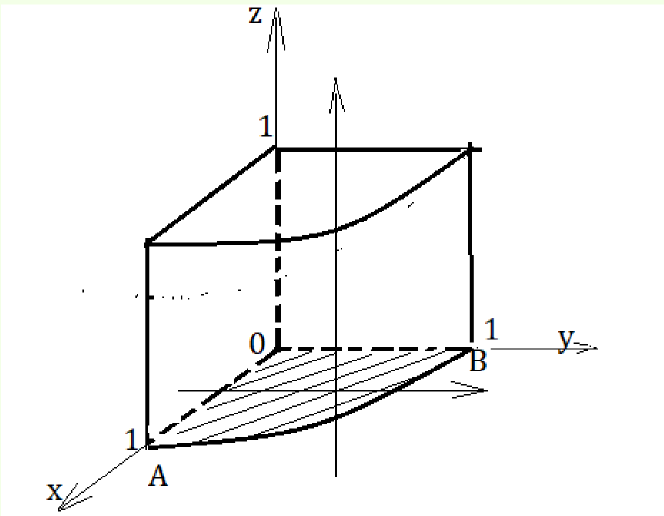


Рис. 1.

Ортогональною проекцією даної області на площину xOy є четвертина круга радіуса 1 з центром в початку координат. Як криволінійна область першого типу проекція задовольняє наступним обмеженням: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, оскільки дуга $\overset{\frown}{AB}$ є графіком функції $y = \sqrt{1-x^2}$. Знизу область обмежена площиною $z = 0$, а зверху – площиною $z = 1$. Отже, область P як правильно орієнтована вздовж осі Oz задається наступними обмеженнями:

$$P = \left\{ (x; y; z) \middle| 0 \le x \le 1; 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}; 0 \le z \le 1 \right\}.$$

Якби заштриховану фігуру розглядати як криволінійну область другого типу, то аналогічно до проведених міркувань можемо одержати, що $P = \left\{ (x; y; z) \middle| 0 \le y \le 1; 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}; 0 \le z \le 1 \right\}$.

А тепер розглянемо область P як правильно орієнтовану вздовж осі Ox (рис. 2). Ортогональною проекцією на площину yOz є квадрат: $0 \le y \le 1; 0 \le z \le 1$. «Знизу» P обмежена площиною yOz, рівняння якої $x = 0$, а «зверху» – циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = 1$, яка в першому октанті є графіком функції $x = \sqrt{1-y^2}$.

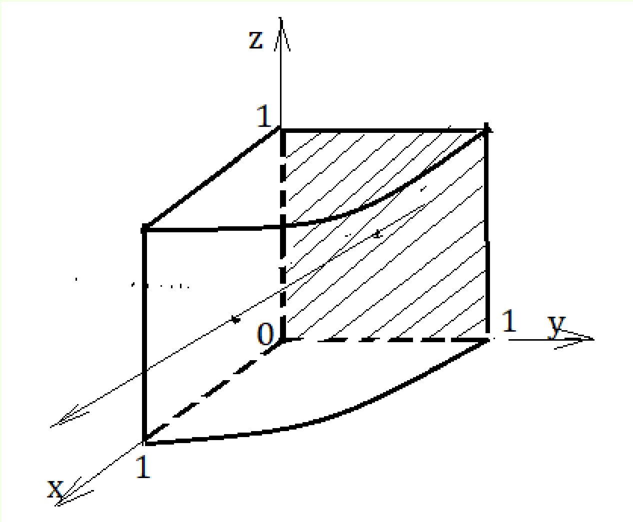


Рис. 2.

Тому область P як правильно орієнтована вздовж осі Ox задовольняє наступні обмеження:

$$P: \begin{array}{l} 0 \le y \le 1; \\ 0 \le z \le 1; \\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}. \end{array}$$

Аналогічні обмеження одержимо при дослідженні на правильну орієнтацію вздовж осі Oy: $P:\quad \begin{matrix} 0\le x\le 1; \\ 0\le z\le 1; \\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2}. \end{matrix}$

Відповідь:

$$P=\left\{(x;y;z)\middle|0\le x\le 1;0\le y\le \sqrt{1-x^2};0\le z\le 1\right\}=$$

$$=\left\{(x;y;z)\middle|0\le y\le 1;0\le z\le 1;0\le x\le \sqrt{1-y^2}\right\}=$$

$$=\left\{(x;y;z)\middle|0\le x\le 1;0\le z\le 1;0\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

Приклад 2. Обчислити $\iiint\limits_P y\cdot\cos(x+z)dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо область, враховуючи, що $z = 0$, $y = 0$ – це рівняння площин xOy та xOz; $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ – рівняння площини, що відтинає на осях Ox та Oz відрізки по $\dfrac{\pi}{2}$ і паралельна осі Oy; $y=\sqrt{x}$ це рівняння циліндричної поверхні із твірними паралельними до Oz. Область має такий вигляд (рис. 3):

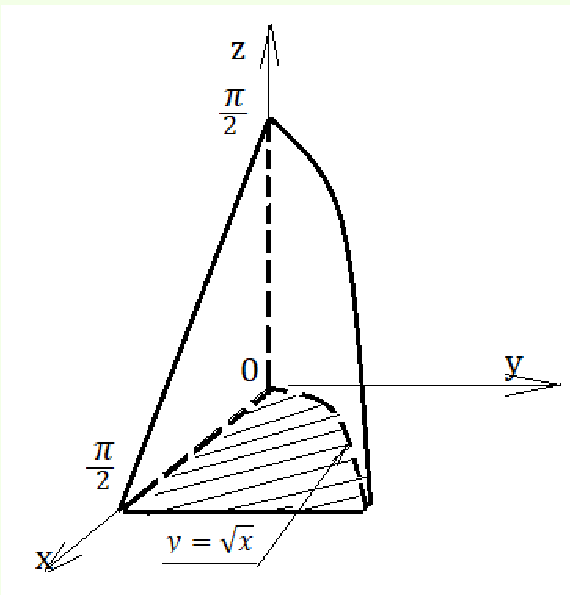


Рис. 3.

Ортогональна проекція на площину xOy як криволінійна область першого типу задовольняє обмеженням: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;
$0 \le y \le \sqrt{x}$.

Знизу область обмежена площиною $z = 0$, а зверху площиною $z = \frac{\pi}{2} - x$.

Тому згідно правила обчислення потрійних інтегралів по області правильно орієнтованій вздовж осі Oz будемо мати

$$\iiint\limits_P y \cdot \cos(x+z)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} ydy \sin(z+x)\Big|_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\cos x) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\left(x\,cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_P xyzdxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями

$$z = \frac{x^2+y^2}{m},\ z = \frac{x^2+y^2}{n},\ xy = a^2,\ xy = b^2,\ y = \alpha x,\ y = \beta x,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

$$(0 \le a \le b; 0 \le \alpha \le \beta; 0 \le m \le n).$$

Розв'язання. Пов'яжемо координати x; y; z та u; v; w наступними рівностями

$$u = xy, v = \frac{y}{x}, w = \frac{x^2+y^2}{z}. \tag{1}$$

Для застосування формули заміни змінних в потрійному інтегралі потрібно змінні x, y, z виразити через змінні u, v, w.

Для цього записуємо систему трьох останніх рівностей і розв'язуємо її відносно x, y, z як невідомих, одержуємо:

$$\begin{cases} x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}; \\ y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}; \\ z = u\left(v + \dfrac{1}{v}\right) w^{-1}. \end{cases}$$

Тому якобіан даного відображення матиме вигляд

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ \left(v + \frac{1}{v}\right) w^{-1} & u\left(1 - \frac{1}{v^2}\right) w^{-1} & -u\left(v + \frac{1}{v}\right) w^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{2w^2}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right).$$

Знайдемо образ області P при відображенні (1). Образом гіперболічних циліндрів $xy = a^2$, $xy = b^2$ будуть площини $u = a^2$ та $u = b^2$; площин $y = \alpha x$, $y = \beta x$ – площини $v = \alpha$, $v = \beta$, параболоїдів обертання $z = \dfrac{x^2 + y^2}{m}$, $z = \dfrac{x^2 + y^2}{n}$ – площини $w = m$, $w = n$. Отже, Q – паралелепіпед

$$Q = \left\{(u; v; w) \middle| a^2 \le u \le b^2; \alpha \le v \le \beta; m \le w \le n\right\}.$$

Згідно формули заміни змінних в потрійному інтегралі будемо мати

$$I = \iiint\limits_Q u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} u\left(v + \frac{1}{v}\right) \frac{1}{w} \frac{u}{2w^2}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right) du\,dv\,dw =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint\limits_Q u^3 \left(v + \frac{2}{v} + v^{-3}\right) w^{-3} du\,dv\,dw = \frac{1}{2} \int\limits_{a^2}^{b^2} u^3 du \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(v + \frac{2}{v} + v^{-3}\right) dv \int\limits_m^n w^{-3} dw =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left.\frac{u^4}{4}\right|_{a^2}^{b^2}\right) \cdot \left(\left.\left(\frac{v^2}{2} + 2\ln v - \frac{1}{2v^2}\right)\right|_{\alpha}^{\beta}\right) \cdot \left(\left.-\frac{1}{2w^2}\right|_m^n\right) =$$

$$=\frac{\left(b^8-a^8\right)\left(m^2-n^2\right)}{16m^2n^2}\left(\frac{1}{2}\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+2\ln\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Відповідь. $\frac{\left(b^8-a^8\right)\left(m^2-n^2\right)}{16m^2n^2}\left(\frac{1}{2}\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+2\ln\frac{\beta}{\alpha}\right).$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2\le Ry$.

Розв'язання. Рівністю $x^2+y^2+z^2=R^2$ задається сфера з центром в початку координат і радіусом R, а рівністю $x^2+y^2=Ry$ – циліндрична поверхня із твірними паралельними до осі Oz та напрямною колом $x^2+\left(y-\frac{R}{2}\right)^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$.

Ці дві поверхні симетричні відносно координатних площин xOy та yOz, тому розглянемо ту четвертину P досліджуваного тіла, яка розташована в першому октанті. Для неї $V_1=\iiint\limits_P dxdydz$. Перейдемо в цьому інтегралі до циліндричних координат, одержимо, що $V_1=\iiint\limits_Q \rho d\varphi d\rho dz$. Зобразимо P.

Коло $x^2+y^2=Ry$ в полярній системі координат описується рівністю $\rho=R\sin\varphi$, а сферична поверхня в циліндричній системі координат – рівністю $z=\sqrt{R^2-\rho^2}$. Тому в циліндричній системі координат область Q як правильно орієнтована вздовж осі Oz задовольняє наступним обмеженням:

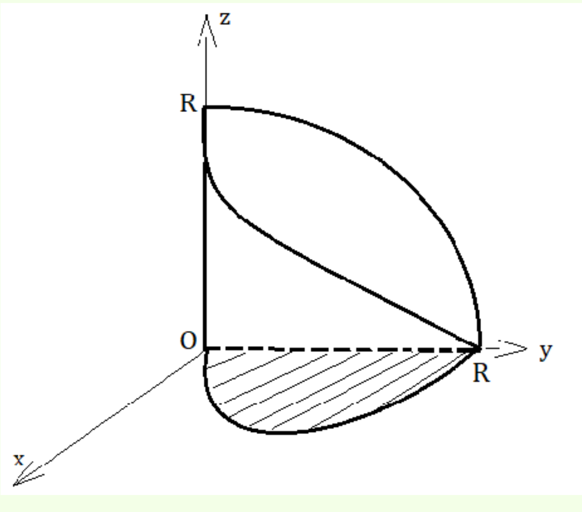


Рис. 4.

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$
$$Q: \ \ 0 \le \rho \le R\sin\varphi \ .$$
$$0 \le z \le \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

Приступаємо до безпосереднього обчислення потрійного інтеграла:

$$V_1 = \iiint\limits_Q \rho d\varphi d\rho dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\sin\varphi} d\rho \int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \rho dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\sin\varphi} \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\sin\varphi} \sqrt{R^2-\rho^2}\, d\left(R^2-\rho^2\right) = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[R^3\left(1-\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} - R^3 \right] d\varphi = \frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^3\varphi\right) d\varphi = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2!!}{3!!}\right) = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Отже, $V = 4V_1 = \frac{R^3}{3}\left(2\pi - \frac{8}{3}\right)$.

Відповідь. $\frac{R^3}{3}\left(2\pi - \frac{8}{3}\right)$.

Приклад 5. Обчислити $I = \iiint\limits_P \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, якщо область інтегрування задовольняє обмеження $x^2+y^2+z^2 \le z$.

Розв'язання. При переході до сферичних координат в даному інтегралі згідно формули переходу в потрійних інтегралах від декартових до сферичних координат отримаємо (оскільки $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$), що

$$I = \iiint\limits_Q \rho \cdot \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta d\rho.$$

Рівністю $x^2+y^2+z^2 = z$ або $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ описується сфера з центром на осі Oz в точці (0; 0; $\frac{1}{2}$) радіуса $\frac{1}{2}$. Рівняння даної сфери в сферичних координатах має вигляд: $\rho^2 = \rho\cos\theta \Rightarrow \rho = \cos\theta$.

Щоб перейти в останньому протрійному інтегралі до повторного, необхідно подати кулю Q як множину точок $(\varphi;\theta;\rho)$, яка задовольняє обмеження:

$$\alpha \le \varphi \le \beta;\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi);\ \rho_1(\varphi;\theta) \le \rho \le \rho_2(\varphi;\theta).$$

Щоб знайти ці обмеження, спочатку шукаємо ортогональну проекцію кулі на площину *xOy*, розглядаємо цю проекцію як криволінійний сектор і вказуємо межі зміни кута $\varphi : \alpha \le \varphi \le \beta$; потім перетинаємо область півплощиною, що проходить через вісь *Oz* та промінь $\varphi = \varphi_0$. Одержану фігуру розглядаємо знову як криволінійний сектор, для якого знаходимо межі зміни кута θ. І, наостанок, проводимо промінь з початку координат, він при вході в область Q перетинає поверхню $\rho = \rho_1(\varphi;\theta)$, а при виході з області інтегрування відбувається перетин з поверхнею $\rho = \rho_2(\varphi;\theta)$.

В даній задачі куля проектується на площину *xOy* у круг з центром в початку координат радіуса $\frac{1}{2}$. Тому для кута φ можемо вибрати наступні межі: $0 \le \varphi \le 2\pi$. При перерізі кулі Q будь-якою півплощиною, яка містить вісь *Oz*, одержуємо півкруг вигляду рис. 5.

Як видно з рисунку кут θ змінюється в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Куля дотикається площини *xOy*, тому $\rho \ge 0$, а «виходить» довільний промінь з кулі по сфері $\rho = \cos\theta$. Отже, $Q:\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le \cos\theta \end{cases}$.

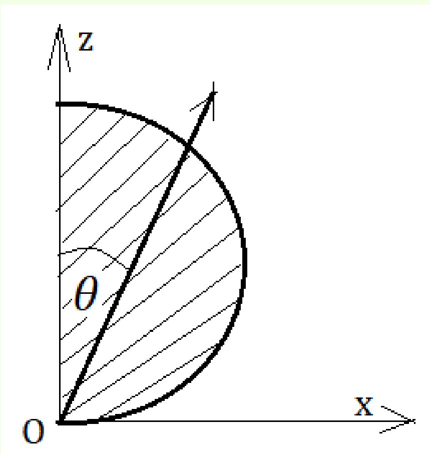


Рис. 5.

Тому

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\rho^3\sin\theta d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\rho=0}^{\rho=\cos\theta}=\frac{1}{4}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta d\theta=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d(\cos\theta)=-\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{\cos^5\theta}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{10}(0-1)=\frac{\pi}{10}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{10}$.

Приклад 6. Знайти масу кульового шару між поверхнями $x^2+y^2+z^2=a^2$ та $x^2+y^2+z^2=4a^2$, якщо густина в кожній точці обернено пропорційна відстані точки до початку координат.

Розв'язання. Рівняння $x^2+y^2+z^2=a^2$ та $x^2+y^2+z^2=4a^2$ є рівняннями сфер з центром в початку координат і радіуса відповідно a та $2a$. В точці $(x;\ y;\ z)$ густина згідно умови рівна $\rho(x;y;z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, тому

$$m=\iiint_P\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Згідно зауваження, зробленого на початку цієї теми, при обчисленні даного інтеграла доцільно перейти до сферичних координат. При цьому якобіан переходу рівний $J=\rho^2\sin\theta$, а функція густини в сферичних координатах така $\rho=\rho(\varphi;\theta;\rho)=\frac{1}{\rho}$. Отже, $m=\iiint_Q\rho\sin\theta d\varphi d\theta d\rho$.

Щоб подати цей інтеграл через повторний, потрібно з'ясувати межі зміни сферичних координат φ, θ, ρ. Проекцією кульового шару на площину, що проходить через центр кулі, буде круг в цій площині, тому для круга з центром в початку координат в площині xOy координата φ «пробігатиме» сегмент $[0;2\pi]$.

Переріз кульового шару півплощиною, що містить вісь Oz матиме вигляд: див. рис. 6.

Тому кут θ набуватиме значень від 0 до π. В сферичних координатах рівняння $x^2+y^2+z^2=a^2$ та $x^2+y^2+z^2=4a^2$ набудуть вигляду $\rho=a$ та $\rho=2a$. Отже,

$$Q:\ \begin{array}{l} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\pi \\ a\le\rho\le 2a \end{array}.$$

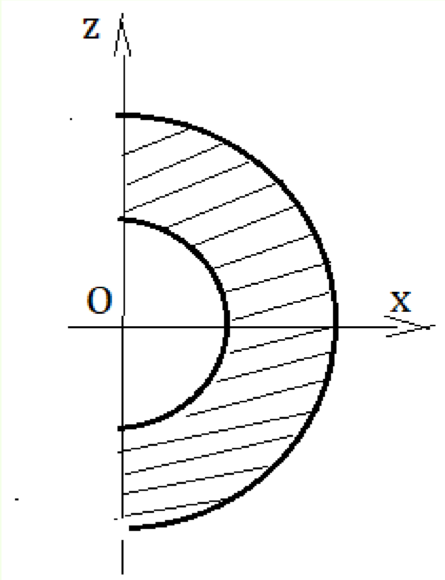


Рис. 6.

Тому шукана маса буде рівна наступному повторному інтегралу

$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_a^{2a}\rho\sin\theta d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_a^{2a}=2\pi\cdot\frac{3a^2}{2}\left.(-\cos\theta)\right|_0^{\pi}=6\pi a^2.$$

Відповідь. $6\pi a^2$

Приклад 7. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, яке обмежене поверхнями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c, c>0$.

Розв'язання. Тіло однорідне, обмежене частиною конічної поверхні $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$, частиною площини $z=c$ і симетричне відносно осі Oz. Отже, його центр ваги $(x_c;y_c;z_c)$ лежить на цій осі і $x_c=0, y_c=0$. За формулами координат центра ваги для однорідного тіла маємо: $z_c=\frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P zdxdydz$. В інтегралі $V(P)=\iiint\limits_P dxdydz$ перейдемо до узагальнених циліндричних координат, одержимо: $V(P)=\iiint\limits_Q ab\rho d\varphi d\rho dz$.

Проекцією області Q на площину xOy буде фігура, що обмежена еліпсом, рівняння якого в узагальнених циліндричних координатах має вигляд $\frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1 \Rightarrow \rho=1$.

«Знизу» область Q обмежена конічною поверхнею, рівняння якої в узагальнених циліндричних координатах наступне: $\rho^2=\frac{z^2}{c^2} \Rightarrow z=c\rho$, а «зверху» – площиною $z = c$. Отже, як орієнтована вздовж осі Oz область Q задовольняє таким обмеженням:

$$Q:\begin{array}{l} 0\le\varphi\le 2\pi; \\ 0\le\rho\le 1; \\ c\rho\le z\le c. \end{array}$$

Тому

$$V(P)=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_{c\rho}^{c}dz=2\pi ab\int_0^1\rho(c-c\rho)d\rho=2\pi abc\int_0^1(\rho-\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{3}abc.$$

Аналогічно вчинимо і при обчисленні іншого потрійного інтеграла.

$$\iiint\limits_P zdxdydz=ab\iiint\limits_Q z\rho d\varphi d\rho dz=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_{c\rho}^{c}zdz=2\pi ab\int_0^1\rho\left.\frac{z^2}{2}\right|_{c\rho}^{c}d\rho=$$

$$=\pi abc^2\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=\frac{1}{4}\pi abc^2.$$

Таким чином, маємо: $z_c=\frac{3}{\pi abc}\cdot\frac{1}{4}\pi abc^2=\frac{3}{4}c$.

Відповідь. $\left(0;0;\frac{3}{4}c\right)$.

Заняття 5.
ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Означення потрійного інтеграла, його властивості.
2. Обчислення потрійних інтегралів у випадку прямокутного паралелепіпеда.
3. Обчислення потрійних інтегралів у випадку довільної області.

   Література: [1, с.47-59]
4. Розв'язати вправи:

1. Область P обмежена поверхнями. Подати її як правильно орієнтовану відносно осі Oz та потрійний інтеграл по цій області виразити через повторний:

а) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, x=0, y=0, z=0$ $(a>0, b>0, c>0)$;

б) $z=x^2+y^2, z=1$.

2. Обчислити повторні інтеграли:

а) $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y xyzdz$;

б) $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$.

3. Обчислити потрійні інтеграли:

а) $\iiint_P (x-y^2-z^3)dxdydz$, де P – паралелепіпед, обмежений площинами $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$;

б) $\iiint_P (x+y+1)dxdydz$, де P – тіло, обмежене площинами $3x + 3y + 2z = 6$, $x = 0, y = 0, z = 0$;

в) $\iiint_P zdxdydz$, де P – область, яка визначається нерівностями: $0\le x\le\frac{1}{2}$, $x\le y\le 2x$, $0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$;

г) $\iiint\limits_{T} xy^2z^4dxdydz$, де область T обмежена поверхнями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

5. Домашнє завдання.

1. Розставити межі інтегрування в $\iiint\limits_{P} f(x;y;z)dxdydz$ в порядку:

а) x, y, z;

б) y, z, x, якщо область інтегрування обмежена координатними площинами, площиною $x + y = 1$, циліндром $y^2 + z^2 = 1$.

2. Обчислити потрійні інтеграли інтеграли:

а) $\iiint\limits_{P} yzdxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$;

б) $\iiint\limits_{P} xydxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x + y = 1$, $z \geq 0$, $z = xy$;

в) $\iiint\limits_{P} xyzdxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ $(x \geq 0, y \geq 0)$.

Заняття 6.
ЗАМІНА ЗМІННИХ В ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛАХ.
ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Заміна змінних у потрійному інтегралі.
2. Обчислення потрійних інтегралів шляхом переходу до циліндричних та сферичних координат.
3. Обчислення об'ємів тіл за допомогою потрійних інтегралів.

   Література: [1, с.59-69]
4. Розв'язати вправи:

1. Нехай змінні x, y, z та u, v, w пов'язані між собою співвідношеннями $u = x + y + z$, $uv = y + z$, $uvw = z$. Знайти якобіан даного відображення.

2. Обчислити $\iiint\limits_{P} x^2dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $z = y^2$, $z = 4y^2$, $y > 0$, $z = x$, $z = 4x$, $z = 0$, $z = 1$.

3. Переходячи до циліндричних координат, обчислити $\iiint\limits_P (x^2+y^2)dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

4. Переходячи до сферичних координат, обчислити $\iiint\limits_P \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, якщо область P обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=z$.

5. Виконавши відповідну заміну змінних, обчислити $\iiint\limits_P \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, де P – внутрішність еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

6. Знайти об'єми тіл, які обмежені поверхнями:

а) $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$;

б) $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

в) $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\le z^2$.

5. Домашнє завдання.

1. Обчислити $\iiint\limits_P xyzdxdydz$, де область P обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

2. Обчислити $\iiint\limits_P \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

3. Знайти об'єми тіл, які обмежені поверхнями:

а) $2z=x^2$, $z=0$, $y=0$, $3x+2y=12$;

б) $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=z$, $z=8$;

в) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$.

Заняття 7.
ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З МЕХАНІКИ

1. Обчислення маси неоднорідного просторового тіла.
2. Обчислення статичних моментів тіла відносно координатних площин.
3. Обчислення координат центра ваги просторового тіла.
4. Обчислення моментів інерції тіла відносно координатних площин, осей координат, початку координат.

   Література: [1, с.69-77]
5. Розв'язати вправи:

1. Обчислити масу кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le 2x$, якщо густина розподілу маси в точці рівна відстані від точки до початку координат.

2. Обчислити статичний момент однорідного конуса ($\rho = 1$) з радіусом основи R, висотою H відносно площини, що проходить через вершину паралельно основі.

3. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене поверхнями $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, x + y + z = 3$.

4. Обчислити моменти інерції відносно координатних площин однорідного тіла, яке обмежене поверхнями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

5. Знайти момент інерції кулі радіуса R відносно дотичної до неї.

6. Домашнє завдання.

1. Знайти координати центра ваги однорідної півкулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$.

2. Знайти координати центра ваги тіла, що обмежене поверхнями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z = c > 0$.

3. Обчислити момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла, що обмежене поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z > 0$).

4. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного тіла, яке обмежене поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$.

Заняття 8.
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ (ПІДГОТОВКА ДО МКР № 1)

Розв'язати завдання:

1. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$, $xy = 1, xy = 2$ (Виконайте заміну $u = xy, v = \dfrac{y^2}{x}$).

2. Знайти площу поверхні $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ при $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$.

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x + y + z = 3, x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4. Обчислити координати центра ваги півкулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$.

Література: [4, с.430-557]

Розв'язання.

1. Площа плоскої фігури P може бути обчислена за формулою $S(P) = \iint\limits_P dxdy$.

Зобразимо фігуру P на рисунку:

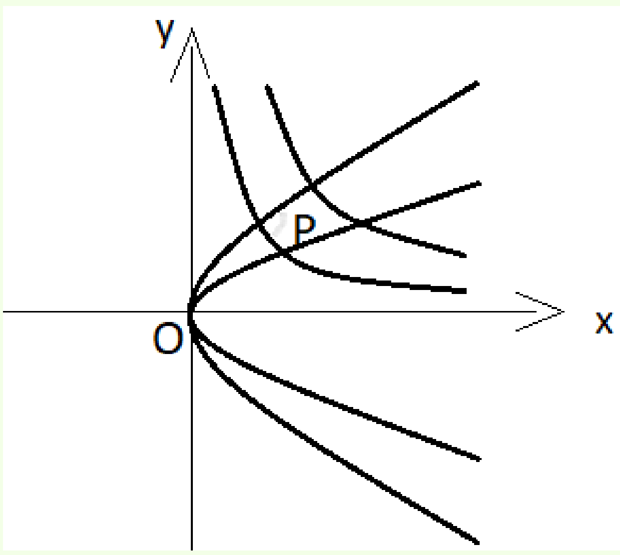


Рис. 1.

Легко бачити, що дана фігура не є криволінійною ні першого, ні другого типу, а якщо розбивати її на частини, то таких буде в обох випадках три, що потягне за собою обчислення трьох подвійних інтегралів. Щоб зменшити кількість обчислень виконаємо запропоновану заміну змінних: $u = xy, v = \frac{y^2}{x}$.

Знайдемо вираження змінних x, y через змінні u, v: $x = u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}}, y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}$. Далі знайдемо якобіан цього перетворення:

$$J(u;v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v}.$$

Параболи $y^2 = 2x, y^2 = 3x$ відобразяться у прямі $v = 2, v = 3$, а гіперболи $xy = 1, xy = 2$ – у прямі $u = 1, u = 2$. Отже, образом області P буде прямокутник $Q: 1 \le u \le 2, 2 \le v \le 3$. Таким чином, остаточно будемо мати

$$S(P) = \iint_Q |J(u;v)| dudv = \iint_Q \frac{dudv}{3v} = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_2^3 \frac{dv}{v} = \frac{1}{3} \cdot \ln v \Big|_2^3 = \frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}$.

2. Поверхня σ є графіком функції $z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$, тому при обчисленні площі поверхні σ можемо скористатись формулою $S(\sigma) = \iint_P \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy$, де P є ортогональною проекцією σ на площину xOy. Оскільки $z'_x = -\frac{c}{a}$, $z'_y = -\frac{c}{b}$, то

$$S(\sigma) = \iint_P \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dxdy = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} \iint_P dxdy = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} S(P).$$

Поверхня σ є площиною, що відтинає на координатних осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c відповідно, тому проекція P – це прямокутний трикутник із катетами a, b. Отже,

$$S(\sigma)=\frac{1}{2}ab\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+c^2b^2+c^2a^2}\,.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+c^2b^2+c^2a^2}$.

3. Тіло P обмежене знизу площиною Oxy, зверху площиною $x+y+z=3$, а збоку циліндром, напрямною для якої слугує одиничне коло $x^2+y^2=1$ в площині Oxy, а твірні паралельні осі Oz. Зобразимо його:

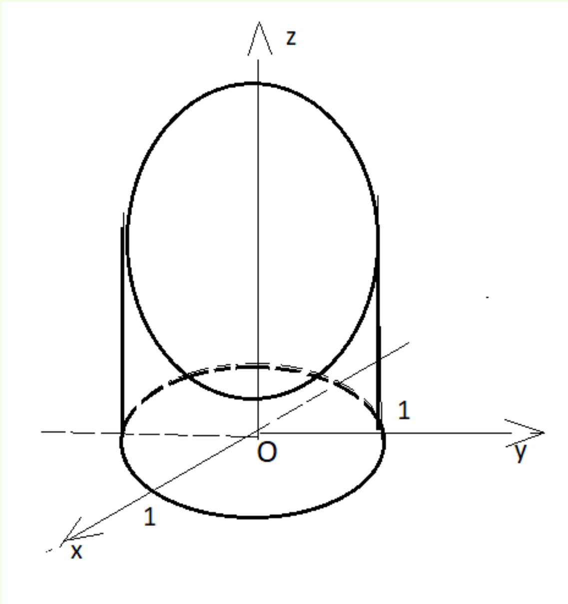


Рис. 2.

Маємо $V(P)=\iiint\limits_{P} dxdydz$.

Перейдемо в даному інтегралі до циліндричних координат, одержимо: $V(P)=\iiint\limits_{Q} \rho d\varphi d\rho dz$.

Ортогональна проекція P на площину Oxy задовольняє обмеженням $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$. Змінна z задовольняє нерівність $0\le z\le 3-x-y$, або в циліндричних координатах $0\le z\le 3-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)$. Тому область Q в циліндричних координатах задовольняє обмеженням $Q{:}0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$, $0\le z\le 3-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)$.

Маємо:

$$V(P)=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho d\rho\int\limits_0^{3-\rho(cos\varphi+\sin\varphi)} dz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho\big(3-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)\big)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{3}{2}\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3(\sin\varphi+\cos\varphi)\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)\right)d\varphi=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 2\pi-\frac{1}{3}(-\cos\varphi+\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi}=3\pi .$$

Відповідь: 3π.

4. В умові відсутня інформація про густину півкулі, отже, тіло однорідне. Крім того, вісь Oz є віссю симетрії тіла P, тому центр ваги тіла розташований на цій осі. Отже, $x_c=y_c=0$, а $z_c=\frac{1}{V(P)}\iiint\limits_P zdxdydz$.

Об'єм півкулі радіуса R рівний $\frac{2}{3}\pi R^3$. Залишилось обчислити потрійний інтеграл. Перейдемо в ньому до циліндричних координат, матимемо: $\iiint\limits_P zdxdydz=\iiint\limits_Q z\rho d\varphi d\rho dz$. Ортогональною проекцією даної півкулі на площину Oxy є круг радіуса R із центром в початку координат, тому змінні φ та ρ задовольняють обмеженням $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le R$. Промінь співнапрямлений з додатним напрямом осі Oz перетинає тіло P спочатку по площині $z=0$, а потім по верхній півсфері $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-\rho^2}$. Отже, циліндричні координати області Q задовольняють наступним обмеженням: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le R$, $0\le z\le\sqrt{R^2-\rho^2}$. Обчислимо потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_Q z\rho d\varphi d\rho dz=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \rho d\rho\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} zdz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \rho(R^2-\rho^2)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\int_0^R\left(\rho R^2-\rho^3\right)d\rho=\pi\left(R^2\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R=\frac{\pi R^4}{4}.$$

Підставимо одержані значення об'єму та потрійного інтеграла у формулу для абсциси центра ваги і матимемо:

$$z_c=\frac{\pi R^4}{4}\cdot\frac{3}{2\pi R^3}=\frac{3R}{8}.$$

Відповідь: $\left(0;0;\frac{3R}{8}\right)$.

Модуль 2

КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Тема 3

Криволінійні інтеграли першого роду

Якщо $f(x;y;z)$ – функція, неперервна в точках гладкої кривої L, яку задано параметрично рівняннями $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ і dl – диференціал дуги, то криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L f(x;y;z)dl$ зводиться до визначеного інтеграла

$$\int\limits_L f(x;y;z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t);y(t);z(t)\right)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt .$$

Зокрема, якщо плоску криву L у площині Oxy задано функцією

$y=\varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, то $\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_a^b f\left(x;\varphi(x)\right)\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx$,

Якщо криву задано як графік функції $x=\psi(y)$ $(c \le y \le d)$, то $\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_c^d f\left(\psi(y);y\right)\sqrt{1+\psi'^2(y)}dy$, якщо ж криву L задано полярним рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, то

$$\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi;\rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi .$$

Нехай $f(x;y)\ge 0$, тоді інтеграл $\int\limits_L f(x;y)dl$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні σ, у якої напрямна L лежить в площині xOy, твірні паралельні осі Oz, зверху ця циліндрична поверхня обмежена поверхнею $z=f(x;y)$, а знизу – площиною $z=0$: $S(\sigma)=\int\limits_L f(x;y)dl$.

Якщо вздовж кривої L розподілено певну масу з лінійною густиною $\rho=\rho(x;y)$ (або $\rho=\rho(x;y;z)$), то маса m кривої L рівна інтегралу $m=\int\limits_L \rho(x;y)dl$ (або $m=\int\limits_L \rho(x;y;z)dl$), а статичні моменти кривої відносно координатних осей (або координатних площин) наступні:

$$M_x=\int\limits_L y\rho(x;y)dl, \quad M_y=\int\limits_L x\rho(x;y)dl$$

$$\left(M_{xy}=\int\limits_L z\rho(x;y;z)dl, M_{yz}=\int\limits_L x\rho(x;y;z)dl, M_{xz}=\int\limits_L y\rho(x;y;z)dl\right).$$

При цьому координати центра маси кривої знаходять за формулами для плоского випадку

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\int\limits_L x\rho(x;y)dl}{\int\limits_L \rho(x;y)dl};\ y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\int\limits_L y\rho(x;y)dl}{\int\limits_L \rho(x;y)dl} \quad ;$$

для просторового випадку

$$x_c=\frac{\int\limits_L x\rho(x;y;z)dl}{\int\limits_L \rho(x;y;z)dl};\ y_c=\frac{\int\limits_L y\rho(x;y;z)dl}{\int\limits_L \rho(x;y;z)dl};\ z_c=\frac{\int\limits_L z\rho(x;y;z)dl}{\int\limits_L \rho(x;y;z)dl}.$$

Моменти інерції кривої L відносно осей $Ox, Oy (Ox, Oy, Oz)$ і початку координат відповідно дорівнюють $I_x=\int\limits_L y^2\rho(x;y)dl$, $I_y=\int\limits_L x^2\rho(x;y)dl$

$$\left(I_x=\int\limits_L (y^2+z^2)\rho(x;y;z)dl, I_y=\int\limits_L (x^2+z^2)\rho(x;y;z)dl, I_z=\int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x;y;z)dl\right),$$

$$I_o=I_x+I_y \ (I_o=I_x+I_y+I_z).$$

Якщо крива однорідна, то вважають $\rho\equiv 1$. Якщо однорідна крива має вісь чи площину симетрії, то її центр ваги знаходиться на цій осі чи площині.

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{x}{y}dl$, якщо $\overset{\frown}{AB}$ – дуга параболи $y^2=2x$, що лежить між точками $\left(1;\sqrt{2}\right)$ і $(2;2)$.

Розв'язання. Дуга $\overset{\frown}{AB}$ задана рівністю $y=\sqrt{2x}, 1\le x\le 2$, (корінь беремо зі знаком плюс тому, що всі точки дуги мають додатні ординати), знайдемо диференціал дуги:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}, dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx.$$

Згідно правила обчислення криволінійного інтеграла першого роду по кривій, що задана явно рівнянням в декартових координатах $y=\varphi(x)$ $(a\le x\le b)$ маємо:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\frac{x}{y}dl=\int\limits_1^2\frac{x}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx=\frac{1}{4}\int\limits_1^2(1+2x)^{\frac{1}{2}}d(1+2x)=\frac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}).$$

Відповідь. $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})$.

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}dl$, де L – коло $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$.

Розв'язання. Коло L розташоване в правій півплощині, дотикається осі Oy в початку координат, тому не може бути графіком лише однієї функції ні від змінної x, ні від змінної y. Тому задамо його рівністю в полярних координатах: $\rho=a\cos\varphi, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Застосуємо при обчисленні даного криволінійного інтеграла формулу

$$\int\limits_L f(x;y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi;\rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi,$$

для цього знайдемо диференціал дуги

$$dl=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=ad\varphi.$$

Маємо:

$$\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}dl=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(a\cos^2\varphi\right)^2+\left(a\cos\varphi\sin\varphi\right)^2}ad\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos\varphi d\varphi=2a^2.$$

Відповідь. $2a^2$.

Приклад 3. Обчислити масу дуги параболи $y^2=2px\left(0\le x\le\frac{p}{2}\right)$, якщо лінійна щільність параболи в точці $(x;y)$ дорівнює $|y|$.

Розв'язання. Згідно формули $m=\int\limits_L\rho(x;y)dl$ шукана маса рівна такому інтегралу $m=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}|y|dl$.

Зобразимо дугу $\overset{\frown}{AB}$: (рис. 1). Розглянемо її як графік функції $x=\frac{y^2}{2p}, -p\le y\le p$.

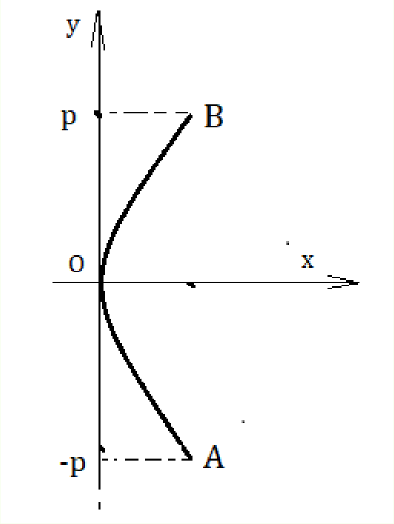


Рис. 1.

Застосуємо формулу $\int\limits_L f(x;y)dl=\int\limits_c^d f\left(\psi(y);y\right)\sqrt{1+\psi'^2(y)}dy$ до обчислення *m.* Одержимо диференціал дуги у вигляді

$$dl=\sqrt{1+x'^2}dy=\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy=\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy.$$

Тоді згідно цієї формули будемо мати:

$$m=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}|y|dl=\frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p}|y|\sqrt{y^2+p^2}dy=\frac{2}{3p}\left(y^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^p=\frac{2p^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Відповідь. $\frac{2p^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

Приклад 4. Знайти центр ваги частини однорідної циклоїди

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)\ (0 \le t \le \pi).$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо диференціал дуги:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Тоді $l_{\overset{\frown}{AB}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dl = \int\limits_0^{\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = 4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a$. Тому, зважаючи на однорідність дуги, будемо мати

$$x_c = \frac{1}{4a}\int\limits_0^{\pi} a(t-\sin t)2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{a}{2}\int\limits_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{a}{2}\int\limits_0^{\pi}(t\sin\frac{t}{2} - 2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2})dt =$$

$$= \frac{a}{2}\left(-2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}2\sin\frac{t}{2}dt - 4\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(4 + 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}\ \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{4a}{3}.$$

$$y_c = \frac{1}{4a}\int\limits_0^{\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{a}{2}\left(-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(2 - \left(\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{4a}{3}.$$

Відповідь. $x_c = y_c = \dfrac{4a}{3}$.

Приклад 5. Знайти площу частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = Rx$, що знаходиться всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розв'язання. Обидві поверхні симетричні відносно координатних площин *xOy* та *xOz*, тому розглянемо тільки ту частину циліндра, що знаходиться в першому октанті ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$). Це буде четверта частина циліндричної поверхні, площу якої потрібно обчислити (див. рис. 2). Напрямною для даної циліндричної поверхні є півколо $\left(x - \dfrac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{4}$, $y \ge 0$.

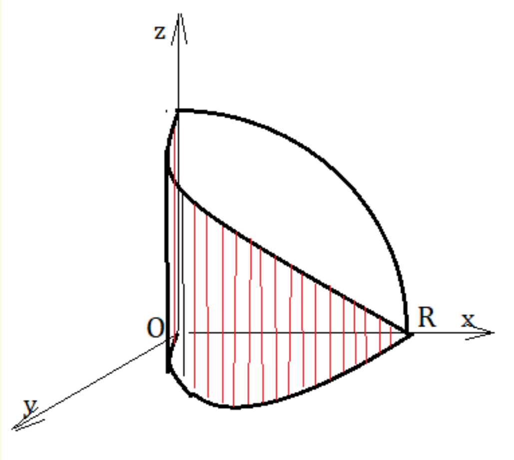


Рис. 2.

Зверху циліндрична поверхня обмежена верхньою півсферою, що є графіком функції $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Отже, $S(\sigma)=4S_1$, де $S_1=\int\limits_{\overset{\frown}{OR}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dl$.

Якщо дугу $\overset{\frown}{OR}$ задати явно рівнянням в декартових координатах при обчисленні даного криволінійного інтеграла першого роду, то ми одержимо невласний інтеграл другого роду, відшукання якого потягне за собою більшу кількість операцій, аніж у випадку задання дуги рівнянням в полярних координатах. Задамо дугу $\overset{\frown}{OR}$ рівнянням в полярних координатах:

$$\overset{\frown}{OR}:\rho=R\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-Rx}=\sqrt{R^2-R^2\cos^2\varphi}=R\sin\varphi.$$

Знайдемо диференціал дуги

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi=\sqrt{R^2\cos^2\varphi+R^2\sin^2\varphi}d\varphi=Rd\varphi.$$

Отже, остаточно отримаємо: $S_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\varphi\cdot Rd\varphi=R^2$.

Відповідь. $S(\sigma)=4R^2$.

Заняття 9.
ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПЕРШОГО РОДУ

1. Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла І роду.
2. Означення криволінійного інтеграла І роду і способи його обчислення.

   Література [1, с. 79-86]

3. Розв'язати вправи:

   Обчислити криволінійні інтеграли першого роду:

   1. $\int\limits_L (x-y)dl$, де L – відрізок прямої від точки $A(1, 1)$ до точки $B(5, 4)$.
   2. $\int\limits_K (x+y)dl$, де K – контур трикутника $A(0;0), B(1;0), C(0;1)$.
   3. $\int\limits_L y^2 dl$, де L – арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.
   4. $\int\limits_K (x+y)dl$, де K – права пелюстка лемніскати $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
   5. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$.
   6. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, якщо L – частина гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.
   7. $\int\limits_K x dl$, де K – лінія, що задана параметричними рівняннями: $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, (-\infty < t \le 0)$.

   Література: [1, с.79-86]

4. Домашнє завдання.

   Обчислити:

   1. $\int\limits_L x^2 dl$, якщо L – верхня половина кола $x^2 + y^2 = a^2$.
   2. $\int\limits_L xy dl$, якщо L – прямокутник, обмежений прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 2$.

3, $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, якщо L – лінія, задана рівнянням $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ $\left(x\ge 0\right)$ (половина лемніскати).

4. $\int\limits_K \sqrt{\dfrac{2y}{a}}\,dl$, де K – лінія, що задана параметричними рівняннями: $x=at$, $y=\dfrac{a}{2}t^2$, $z=\dfrac{a}{3}t^3$ $(0\le t\le 1)$.

Заняття 10.
ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПЕРШОГО РОДУ

1. Застосування інтегралів I роду при обчисленні площ циліндричних поверхонь.
2. Застосування інтегралів I роду при розв'язуванні задач з механіки (обчислення маси неоднорідної лінії, її статичних моментів та моментів інерції відносно координатних осей чи площин, відшукання центра ваги).

   Література: [1, с.86-91]
3. Розв'язати вправи:

1. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла першого роду площу циліндричної поверхні $y^2 = 2x$, яка знизу обмежена площиною xOy, а зверху графіком функції $z=\sqrt{2x-4x^2}$.

2. Обчислити площу частини циліндра $x^2 + y^2 = Rx$, яка знаходиться всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3. Знайти масу:

а) дуги параболи $y^2 = 2px$ $\left(0\le x\le \dfrac{p}{2}\right)$, якщо лінійна густина $\rho(x; y) = |y|$;

б) дуги лінії $y=\ln x$, $1\le x\le e$, якщо лінійна густина змінюється за законом $\rho(x,y)=x^2$.

4. Обчислити статичні моменти відносно координатних осей частини однорідної астроїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,(x\ge 0;\, y\ge 0)$.

5. Знайти центр ваги однорідного півкола $x^2+y^2=R^2$, $y\ge 0$.

6. За допомогою криволінійного інтеграла обчислити довжину астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

4. Домашнє завдання:

1. Обчислити площу циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, що лежить між площиною xOy та поверхнею $z=\frac{xy}{2R}$.

2. Знайти масу кривої $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\mathrm{arctg}t - t$ на ділянці $0 \le t \le 1$, якщо її лінійна густина $\rho(x;y)=\frac{y}{e^x}$.

3. Знайти центр ваги кривої $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(-a \le x \le a)$.

4. Обчислити статичний момент відносно площини xOy першого витка конічної гвинтової лінії $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $(0 \le t \le 2\pi)$, якщо густина $\rho(x; y; z) = z^2$.

Тема 4

Криволінійні інтеграли другого роду

Якщо криву L задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то криволінійний інтеграл другого роду (криволінійний інтеграл за координатами) $\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ зводиться до визначеного інтеграла за формулою

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \left[P\big(x(t);y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)y'(t) \right] dt .$$

Зокрема, якщо криву L задано рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b \left[P\big(x;y(x)\big) + Q\big(x;y(x)\big)y'(x) \right] dx .$$

Якщо криву L задано функцією $x = x(y)$ $(c \le y \le d)$, то

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_c^d \left[P\big(x(y);y\big)x'(y) + Q\big(x(y);y\big) \right] dy .$$

Криволінійний інтеграл другого роду

$$\int\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$$

вздовж просторової кривої L, заданої параметрично $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, знаходять так:

$$\int\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left[P\big(x(t);y(t);z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t);y(t);z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t);y(t);z(t)\big)z'(t) \right] dt .$$

Зауважимо, що інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x;y)dx = 0$, якщо $\overset{\frown}{AB}$ – відрізок, паралельний осі Oy, а інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x;y)dy = 0$, якщо $\overset{\frown}{AB}$ – відрізок, паралельний осі Ox.

Якщо L – межа замкненої області D і функції P, Q, P'_y, Q'_x неперервні в цій області, то справедлива формула Гріна

$$\oint_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(Q'_x(x;y) - P'_y(x;y)\right)dxdy,$$

де обхід контура обирається так, щоб область лишалася ліворуч.

Якщо в деякій однозв'язній області D функції P, Q, P'_y, Q'_x неперервні і тотожно виконується рівність $\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}$, то криволінійний інтеграл $\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ в цій області не залежить від ФОРМИ шляху інтегрування, при цьому справедливі твердження:

1) інтеграл по будь-якому контуру $\gamma \subset D$ рівний нулю $\oint_\gamma P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$;
2) підінтегральний вираз $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x;y)$.

Функцію $u(x;y)$ можна знайти за формулою

$$u(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(t;y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x;t)dt + C,\ (x_0;y_0) \in D.$$

Якщо функції $P(x;y;z), Q(x;y;z), R(x;y;z)$ неперервні в однозв'язній області $D \subset R^3$, мають на ній неперервні частинні похідні, причому тотожно виконуються рівності

$$\frac{\partial P(x;y;z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x;y;z)}{\partial x}; \frac{\partial Q(x;y;z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial y}; \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x;y;z)}{\partial z},$$

то криволінійний інтеграл в цій області не залежить від форми шляху інтегрування, при цьому також вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції трьох змінних $u(x;y;z)$, яку можна знайти за допомогою рівності

$$u(x;y;z) = \int_{x_0}^{x} P(t;y_0;z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x;t;z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x;y;t)dt + C,\ (x_0;y_0;z_0) \in D.$$

Якщо криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування, то його позначають ще і так:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy,$$

де $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$. Крім того, зазвичай при обчисленні цього інтеграла шлях інтегрування обирають як ламану, ланки якої паралельні координатним осям.

Площа фігури P, яка обмежена контуром L, обчислюється за такими формулами $S(P) = -\oint\limits_L ydx = \oint\limits_L xdy = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$, де обхід контура L обирається проти годинникової стрілки.

Роботу A змінної сили $\vec{F} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ вздовж шляху L знаходять за формулою $A = \int\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$.

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$, де $\overset{\frown}{AB}$ – дуга параболи $y = x^2$ $(-1 \le x \le 1)$.

Розв'язання. Даний криволінійний інтеграл зводиться до визначеного інтеграла згідно формули

$$\int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b \left[P\left(x;y(x)\right) + Q\left(x;y(x)\right)y'(x)\right]dx.$$

Підставимо в підінтегральний вираз $y = x^2$, $dy = 2xdx$, одержимо:

$$I = \int\limits_{-1}^{1}\left(x^2 - 2x^3 + (x^4 - 2x^3)2x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}.$$

Відповідь. $-\frac{14}{15}$.

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$I = \int\limits_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy,$$

де L – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, рух по якому здійснюється проти годинникової стрілки.

Розв’язання. Запишемо параметричні рівняння еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$, і застосуємо формулу обчислення криволінійного інтеграла другого роду у випадку задання кривої параметрично. Перетворимо підінтегральний вираз:

$$(x+y)dx + (x-y)dy = (acost + b\sin t)d(a\cos t) + (a\cos t - b\sin t)d(b\sin t) =$$

$$= (-a^2 \sin t \cos t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2 \sin t \cos t)dt = \left(ab\cos 2t - \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t \right)dt.$$

Отримаємо:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(ab\cos 2t - \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t \right)dt = \left(\frac{1}{2}ab\sin 2t + \frac{a^2+b^2}{4}\cos 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Відповідь. 0.

Приклад 3. Застосувавши формулу Гріна, обчислити $I = \oint\limits_C xy^2 dy - x^2 y dx$, де C – коло $x^2 + y^2 = a^2$.

Розв’язання. Позначимо через D замкнену множину точок на координатній площині, які задовольняють обмеженню: $x^2 + y^2 \le a^2$. Оскільки $P(x;y) = -x^2 y$ та $Q(x;y) = xy^2$, то

$$Q'_x(x;y) - P'_y(x;y) = y^2 - (-x^2) = x^2 + y^2.$$

Тому за формулою Гріна $I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 \right) dxdy$. При обчисленні даного подвійного інтеграла перейдемо від декартових до полярних координат (див. тему 1):

$$I = \iint\limits_F \left(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \right) \rho d\varphi d\rho = \iint\limits_F \rho^3 d\varphi d\rho,$$

де F як криволінійний сектор задовольняє обмеженням: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le a$. Матимемо:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi a^4}{2}$.

Приклад 4. Обчислити $I = \int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$.

Розв'язання. Маємо $P(x;y) = x^4 + 4xy^3$; $Q(x;y) = 6x^2y^2 - 5y^4$, тоді $P'_y = 12xy^2$; $Q'_x = 12xy^2$. Оскільки $P'_y = Q'_x$, то шлях інтегрування може бути довільним. Виберемо ламану ACB, де $A(-2;-1)$, $C(-2;0)$, $B(3;0)$. (див. рис. 1).

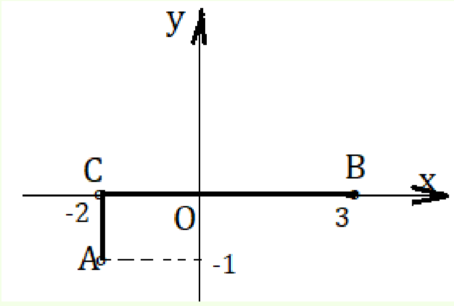


Рис. 1.

Маємо: $I = \int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} Pdx + Qdy = \int\limits_{[AC]} Pdx + Qdy + \int\limits_{[CB]} Pdx + Qdy.$

Оскільки $[AC] \| Oy$, а $[CB] \| Ox$, то $\int\limits_{[AC]} Pdx = 0$; $\int\limits_{[CB]} Qdy = 0.$

Тому остаточно одержимо, що $I = \int\limits_{[AC]} Qdy + \int\limits_{[CB]} Pdx$.

Відрізок $[AC]$ задається умовами: $x = -2, -1 \le y \le 0$, тому

$$\int\limits_{[AC]} Qdy = \int\limits_{-1}^{0} Q(-2;y)dy = \int\limits_{-1}^{0} (24y^2 - 5y^4)dy = \left(8y^3 - y^5\right)\Big|_{-1}^{0} = 8 - 1 = 7.$$

А відрізок $[CB]$задається умовами: $y = 0, -2 \le x \le 3$, тому

$$\int\limits_{[CB]} Pdx = \int\limits_{-2}^{3} P(x;0)dx = \int\limits_{-2}^{3} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{3} = 55.$$

Отже, $I = 7 + 55 = 62$.

Відповідь. 62

Приклад 5. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вздовж верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \ge 0)$ від точки $M(a;0)$ до точки $N(-a;0)$.

Розв'язання. Траєкторія руху тіла має такий вигляд:

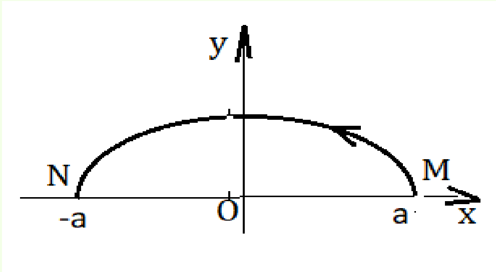


Рис. 2.

Роботу силового поля вздовж дуги будемо шукати за формулою $A=\int\limits_L P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz$. Оскільки в нашому випадку дуга розташована в площині $z=0$, та $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}+0\vec{k}$, то формула для A набуває вигляду $A=\int\limits_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy$. Отже,

$$A=\int\limits_{\overset{\frown}{MN}} ydx-xdy.$$

Для обчислення даного інтеграла задамо дугу $\overset{\frown}{MN}$ параметрично: $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi$. Тоді згідно формули обчислення криволінійного інтеграла другого роду у випадку задання кривої параметрично одержимо:

$$A=\int\limits_0^{\pi}(b\sin t\cdot(-a\sin t)-a\cos t\cdot b\cos t)dt=-ab\int\limits_0^{\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=-\pi ab.$$

Відповідь. $-\pi ab$.

Приклад 6. Знайти площу фігури, що обмежена астроїдою $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

Розв'язання. Площу фігури, що обмежена замкненим контуром L, обчислимо за формулою $S(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx$. Підставляючи значення параметра t рівним 0; $\frac{\pi}{2}$; π;$\frac{3\pi}{2}$ переконуємося, що обхід по контуру відбувається проти годинникової стрілки, тому

$$S(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(acos^3t(a\sin^3 t)'-a\sin^3 t(a\cos^3 t)')dt=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\cos^3t\cdot 3\sin^2 t\cos t+\sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\sin t)dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\cos^4t\cdot\sin^2 t+\cos^2 t\cdot\sin^4 t)dt=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2t\cos^2 tdt=$$

$$=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{3}{8}a^2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

Відповідь. $\frac{3\pi a^2}{8}$.

Приклад 7. Перевірити, чи є вираз $\left(3x^2y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\frac{x}{y^2}\right)dy$ повним диференціалом функції $u(x;y)$ і якщо це так, то знайти цю функцію.

Розв'язання. Переконаємося в тому, що вираз $\left(3x^2y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\frac{x}{y^2}\right)dy$ є повним диференціалом деякої функції двох змінних:

$$P(x;y)=3x^2y+\frac{1}{y}\,;\,Q(x;y)=x^3-\frac{x}{y^2}.$$

Маємо: $P'_y=3x^2-\frac{1}{y^2};Q'_x=3x^2-\frac{1}{y^2}.$

Отже, $P'_y(x;y)=Q'_x(x;y)$.

Тому за формулою $u(x;y)=\int_{x_0}^{x}P(t;y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x;t)dt+C$, $(x_0;y_0)\in D$, функцію $u(x;y)$ відновимо, вибравши за початкову точку (0;1):

$$u(x;y)=\int_0^x P(t;1)dt+\int_1^y Q(x;t)dt+C=\int_0^x(3t^2+1)dt+\int_1^y\left(x^3-\frac{x}{t^2}\right)dt=$$

$$=\left(t^3+t\right)\Big|_0^x+\left(x^3t+\frac{x}{t}\right)\Bigg|_1^y=x^3+x+x^3y+\frac{x}{y}-x^3-x+C=x^3y+\frac{x}{y}+C.$$

Відповідь. $x^3y+\frac{x}{y}+C$.

Заняття 11.
ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДРУГОГО РОДУ

1. Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла другого роду.
2. Означення та обчислення криволінійних інтегралів другого роду.
3. Властивості криволінійних інтегралів другого роду.
4. Формула Гріна.

   Література: [1, с.]92-103
5. Розв’язати вправи:

   1. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:

а) $\int\limits_L xdy$, якщо L – відрізок прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ від точки (a; 0) до точки (0; b);

б) $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy$, якщо L – перша арка циклоїди

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ (0\le t\le 2\pi);$$

в) $\oint\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$, якщо L – еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, рух по якому здійснюється в додатному напрямі;

г) $\int\limits_L \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, якщо L – права пелюстка лемніскати $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

д) $\oint\limits_L xdy$ де L – контур трикутника, який утворений координатними осями і прямою $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, рух по якому здійснюється в додатному напрямі;

е) $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, якщо L – відрізок прямої від точки (1; 1; 1) до точки (2; 3; 4);

є) $\int\limits_L y^2dx+x^2dy+x^2dz$, де L – лінія перетину сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ і циліндра $x^2+y^2=Rx$ $(z\ge 0)$, рух здійснюється проти годинникової стрілки.

2. За допомогою формули Гріна перетворити криволінійний інтеграл

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}dx + y\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy.$$

3. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L x^2 ydx + xy^2 dy$, де L – коло радіуса R з центром в початку координат.

6. Домашнє завдання.

1. Обчислити криволінійні інтеграли II роду:

а) $\int_L \left(x^2-y^2\right)dx$, якщо L – дуга параболи $y = x^2$ від точки (0; 0) до точки (2; 4);

б) $\int_L 4x\sin^2 ydx + y\cos^2 2xdy$ вздовж прямої лінії від точки (0; 0) до точки (3; 6);

в) $\oint_L xdy - ydx$, якщо L – коло $x^2 + y^2 = 2x$.

2. Застосовучи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L x^4 ydx + xy^4 dy$, де L – коло радіуса R з центром в початку координат.

Заняття 12.
ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДРУГОГО РОДУ

1. Обчислення площ плоских фігур при допомозі криволінійних інтегралів.
2. Умови незалежності криволінійних інтегралів другого роду від форми шляху інтегрування.
3. Відновлення функції 2-ох (3-ох) змінних за її повним диференціалом.

   Література: [1, с.103-111]
4. Розв'язати вправи:

1. Довести, що величина інтеграла $\oint_L (2xy-y)dx + x^2 dy$ рівна площі області, обмеженої контуром L.

2. Обчислити площі фігур, які обмежені такими кривими:

а) астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

б) параболою $(x + y)^2 = ax$ $(a \ge 0)$ і віссю Ox;

в) лемніскатою $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$, $a > 0$.

3. Переконавшись в тому, що даний криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, підібрати шлях інтегрування так, щоб обчислення криволінійного інтеграла було найпростішим:

а) $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$;

б) $\int\limits_{(0;0)}^{(2;2)} (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy$,

в) $\int\limits_{(1;1)}^{(3;2)} \frac{x}{(x+y)^2}dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}dy$;

г) $\oint\limits_{L} (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$,

якщо L – коло радіуса 1 із центром в точці (1;0).

4. Відновити функцію 2-х змінних за її повним диференціалом (двома способами): $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$.

5. Відновити функцію 3-х змінних за її повним диференціалом: $\frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x + z^3}{z^2}dz$.

5. Домашнє завдання:

1. Обчислити $\oint\limits_{C}\left(yx^3 + e^y\right)dx + \left(xy^3 + xe^y - 2y\right)dy$, якщо C – коло $x^2 + y^2 = r^2$.

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена кардіоїдою $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

3. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$;

б) $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} \left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy$.

4. Відновити функцію 2-х змінних за її повним диференціалом: $\dfrac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}$.

Тема 5

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Якщо функція $f(x;y;z)$ неперервна на гладкій поверхні σ, що задана рівнянням $z=z(x;y)$ і однозначно проектується на площину Oxy в область D_{xy}, то поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\sigma} f(x;y;z)dS$ можна обчислити за формулою

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y;z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f\left(x;y;z(x;y)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Аналогічно можна записати формули, що виражають інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли за її проекціями на площини Oxz та Oyz.

За допомогою поверхневого інтеграла першого роду можна обчислювати:

а) площу поверхні σ: $S(\sigma)=\iint\limits_{\sigma} dS$;

б) масу неоднорідної матеріальної поверхні σ із відомою функцією поверхневої густини поверхні $\rho=\rho(x;y;z)$: $m=\iint\limits_{\sigma}\rho(x;y;z)dS$;

в) статичні моменти поверхні σ із відомою функцією поверхневої густини відносно координатних площин:

$$M_{xy}=\iint\limits_{\sigma} z\rho(x;y;z)dS;\, M_{xz}=\iint\limits_{\sigma} y\rho(x;y;z)dS;\, M_{yz}=\iint\limits_{\sigma} x\rho(x;y;z)dS;$$

г) координати центра ваги поверхні із відомою функцією поверхневої густини $\rho=\rho(x;y;z)$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma} x\rho(x;y;z)dS}{\iint\limits_{\sigma} \rho(x;y;z)dS};\ y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma} y\rho(x;y;z)dS}{\iint\limits_{\sigma} \rho(x;y;z)dS};z_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} z\rho(x;y;z)dS}{\iint\limits_{\sigma} \rho(x;y;z)dS}.$$

Якщо поверхня однорідна, то ці формули набувають вигляду

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma} xdS}{S(\sigma)};\ y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma} ydS}{S(\sigma)};z_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} zdS}{S(\sigma)}.$$

Якщо однорідна поверхня має площину або вісь симетрії, то центр ваги поверхні лежить на цій площині або осі.

д) моменти інерції матеріальної поверхні σ із відомою функцією поверхневої густини відносно координатних площин

$$I_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z^2\rho(x;y;z)dS;I_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y^2\rho(x;y;z)dS;I_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x^2\rho(x;y;z)dS.$$

Моменти інерції відносно координатних осей складаються із відповідних моментів інерції відносно координатних площин, а саме:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz},I_y = I_{xy} + I_{yz},I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{S}(x+y+z)ds$, якщо $S-$півсфера $x^2+y^2+z^2=a^2\left(z\geq 0,\, a>0\right)$.

Розв'язання. Поверхня S є графіком функції $z = f(x;y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Ортогональною проекцією даної півсфери на площину xOy є круг $x^2+y^2\leq a^2$; це і буде область інтегрування P у подвійному інтегралі.

Маємо $f'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$; $f'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, тому

$$1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2 = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}.$$

Згідно формули обчислення поверхневого інтеграла першого роду через подвійні інтеграли одержимо

$$\iint\limits_{S}(x+y+z)ds = \iint\limits_{P}\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$=a\iint\limits_P \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy+a\iint\limits_P \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy+a\iint\limits_P dxdy=a\left(I_1+I_2+I_3\right).$$

Область $P-$ це круг радіуса a із центром в початку координат. Його можна розглядати як криволінійну область першого типу

$$\begin{cases} -a\le x\le a, \\ -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}; \end{cases} \text{ або другого типу } \begin{cases} -a\le y\le a, \\ -\sqrt{a^2-y^2}\le x\le\sqrt{a^2-y^2}. \end{cases}$$

Тому $I_1=\int\limits_{-a}^{a}dy\int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=0$ як інтеграл від непарної по x функції по симетричному проміжку $\left[-\sqrt{a^2-y^2};\sqrt{a^2-y^2}\right]$. Аналогічно можемо показати, що $I_2=0$ також. Оскільки $I_3=\iint\limits_P dxdy=S(P)=\pi a^2$, то $\iint\limits_S (x+y+z)ds=\pi a^3$.

Відповідь. πa^3.

Приклад 2. Обчислити масу сфери радіуса R, якщо поверхнева густина в кожній точці рівна квадрату відстані цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери.

Розв'язання. Розташуємо сферу так, щоб центр її співпадав із початком координат, а фіксований діаметр лежав на осі аплікат. Тоді функція поверхневої густини матиме такий вигляд: $\rho=\rho(x;y;z)=x^2+y^2$, а рівняння сфери – $x^2+y^2+z^2=R^2$. Окрім того, матеріальна сфера симетрична відносно координатної площини xOy. Тому згідно п. б) даної теми матимемо $m=2\iint\limits_\sigma\left(x^2+y^2\right)ds$, де поверхня σ – це верхня півсфера, що є графіком функції $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Проекцією даної поверхні на площину xOy буде круг P: $x^2+y^2\le R^2$, тому згідно формули обчислення поверхневого інтеграла першого роду через подвійні інтеграли будемо мати:

$$m=2\iint\limits_P\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=$$

$$=2\iint_P\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy=2R\iint_P\frac{\left(x^2+y^2\right)dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Перейдемо в останньому подвійному інтегралі до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $|J|=\rho$, при цьому Q як криволінійний сектор задовольняє обмеженням: $Q:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le R^2.\end{cases}$

Тоді $m=2R\iint_Q\frac{\rho^3}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\varphi d\rho=2R\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^R\frac{\rho^3d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=4\pi R\int_0^R\frac{\rho^3d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$.

Обчислюючи одержаний невласний інтеграл другого роду (підінтегральна функція необмежена в околі верхньої межі), виконаємо таку заміну $t=\sqrt{R^2-\rho^2}$ і одержимо $\int_0^R\frac{\rho^3d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\lim_{c\to R}\int_{\sqrt{R^2-c^2}}^R\left(R^2-t^2\right)dt=\frac{2R^3}{3}$.

Отже, остаточно $m=\frac{8\pi R^4}{3}$.

Відповідь. $m=\frac{8\pi R^4}{3}$.

Приклад 3. Знайти положення центра ваги однорідної конічної поверхні $\frac{z^2}{h^2}=\frac{x^2+y^2}{R^2}$, $z\ge 0$, $x^2+y^2\le R^2$.

Розв'язання. Поверхня σ однорідна і вісь аплікат є її віссю симетрії, тому центр ваги даної поверхні лежить на осі Oz, тобто $x_c=y_c=0$. Обчислимо z_c згідно формул п. г) даної теми у випадку однорідної поверхні.

Рівністю $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ при обмеженнях $x^2+y^2\le R^2$ описується поверхня σ – бічна поверхня прямого кругового конуса із радіусом основи R та висотою h.

Тому площа $S(\sigma)=\pi Rl=\pi R\sqrt{R^2+h^2}$ ($l-$довжина твірної конуса). Обчислимо $\iint_\sigma zds$. Щоб скористуватись правилом обчислення поверхневого інтеграла першого роду через подвійні інтеграли знайдемо частинні похідні функції, графіком якої є поверхня σ:

$$z'_x=\frac{h}{R}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y=\frac{h}{R}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\ \text{Тоді } 1+(z'_x)^2+(z'_y)^2=1+\frac{h^2}{R^2}.$$

Отже,

$$\iint_\sigma zds=\iint_D\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{R}dxdy=\frac{h\sqrt{R^2+h^2}}{R^2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

(D – ортогональна проекція σ на площину xOy – це круг $x^2+y^2\le R^2$).

Перейдемо в останньому подвійному інтегралі до полярних координат ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $|J|=\rho$) і одержимо $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_Q\rho^2d\varphi d\rho$.

Нагадуємо, що область Q як криволінійний сектор D задовольняє обмеженням: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le R$, тому матимемо наступний повторний інтеграл:

$$\iint_Q\rho^2d\varphi d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^2 d=2\pi\int_0^R\rho^2d\rho=\frac{2\pi R^3}{3},\ \text{звідки}\ \iint_\sigma zds=\frac{2\pi Rh\sqrt{R^2+h^2}}{3}.$$

Отже, $z_c=\dfrac{2\pi Rh\sqrt{R^2+h^2}}{3}\cdot\dfrac{1}{\pi R\sqrt{R^2+h^2}}=\dfrac{2h}{3}$.

Відповідь. $\left(0;0;\dfrac{2h}{3}\right)$.

Приклад 4. Обчислити момент інерції однорідної конічної оболонки $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0\ (0\le z\le b)$ відносно прямої $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-b}{0}$.

Розв'язання. Відомі формули по обчисленню моментів інерції поверхні відносно координатних осей. Тому нам доведеться виконати такий рух поверхні, щоб пряма $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-b}{0}$ зайняла положення деякої координатної осі, при цьому, звичайно, зміниться рівняння конічної оболонки. Задана пряма паралельна осі Ox і проходить через точку $(0;0;b)$ на осі Oz. Зробимо паралельне перенесення конічної поверхні та прямої на вектор $(0;0;-b)$. Тоді рівняння конічної поверхні набуде вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z+b)^2}{b^2}=0,\ -b\le z\le 0.$$

А пряма $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$ займе положення осі Ox, і нам потрібно буде знайти момент інерції поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z+b)^2}{b^2}=0$, $-b\le z\le 0$ відносно осі Ox.

В умові відсутня інформація про величину поверхневої густини однорідної поверхні, тому ми для простоти будемо вважати, що $\rho_0\equiv 1$, і згідно п. в) $I_x=\iint\limits_{\sigma}\left(y^2+z^2\right)ds$. Для приведення цього інтеграла до подвійного задамо поверхню σ як графік функції від змінних x та y:

$$\sigma: z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b,\ -b\le z\le 0.$$

Маємо $z'_x=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{b}{a}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, тоді

$$ds=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy.$$

Ортогональною проекцією поверхні σ на площину xOy є круг $P: x^2+y^2\le a^2$. За формули обчислення поверхневого інтеграла першого роду через подвійні інтеграли одержимо

$$I_x=\iint\limits_{\sigma}\left(y^2+z^2\right)ds=\iint\limits_{P}\left(y^2+\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2\right)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy.$$

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $|J|=\rho$, Q: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le a$, і остаточно одержимо:

$$I_x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint\limits_{Q}\rho\left(\rho^2\sin^2\varphi+\left(\frac{b}{a}\rho-b\right)^2\right)d\varphi d\rho=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint\limits_{Q}\left(\rho^3\sin^2\varphi+\frac{b^2}{a^2}\rho^3-\frac{2b^2}{a}\rho^2+b^2\rho\right)d\varphi d\rho=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{a^4}{4}\sin^2\varphi+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^4}{4}-\frac{2b^2}{a}\cdot\frac{a^3}{3}+b^2\cdot\frac{a^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(\frac{a^4}{4}\cdot\pi+\frac{a^2b^2}{4}\cdot 2\pi-\frac{2}{3}a^2b^2\cdot 2\pi+\frac{a^2b^2}{2}\cdot 2\pi\right)=$$

$$=\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a^3}{4}+\frac{ab^2}{3}\right)=\frac{\pi\sqrt{a^2+b^2}}{12}\left(3a^2+2b^2\right).$$

Відповідь. $\frac{\pi\sqrt{a^2+b^2}}{12}\left(3a^2+2b^2\right)$

Заняття 13.
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ. ОБЧИСЛЕННЯ

1. Задача, що приводить до поняття поверхневого інтеграла першого роду.
2. Означення та обчислення поверхневих інтегралів першого роду.

   Література: [1, с.113-128]
3. Розв'язати вправи:

   Обчислити поверхневі інтеграли І роду:

1. $\iint\limits_{\sigma}\left(z+\frac{4}{3}y+2x\right)ds$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$, що лежить в першому октанті.

2. $\iint\limits_{\sigma} x\,ds$, де σ – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, яка лежить в першому октанті.

3. $\iint\limits_{\sigma}\left(x+y+z\right)ds$, де σ – поверхня $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

4. $\iint\limits_{\sigma}\frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, де σ – циліндр $x^2 + y^2 = R^2$, обмежений площинами $z = 0$, $z = H > 0$.

5. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)ds$, де σ – межа тіла $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$.

4. Домашнє завдання.

Обчислити інтеграли:

1. $\iint\limits_{\sigma} xyzds$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$, що лежить в першому октанті.

2. $\iint\limits_{\sigma} x^2 y^2 ds$, якщо σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

3. $\iint\limits_{\sigma} (xy + yz + xz) ds$, де σ – частина конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що вирізана поверхнею $x^2 + y^2 = 2x$.

Заняття 14.
ЗАСТОСУВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ІНТЕГРАЛІВ ПЕРШОГО РОДУ

1. Застосування поверхневих інтегралів І роду до розв'язування задач з механіки (обчислення маси матеріальної поверхні, статичних моментів та моментів інерції відносно координатних площин цієї поверхні, її координат центра ваги).

   Література: [1, с.129-134]
2. Розв'язати задачі:

1. Обчислити масу параболічної оболонки $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ $(0 \le z \le 1)$, густина якої змінюється за законом $\rho(x; y; z) = z$.

2. Знайти масу сфери радіуса 2, якщо поверхнева густина в кожній точці рівна квадрату відстані цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери.

3. Обчислити статистичні моменти однорідної трикутної пластинки $x + y + z = a$ $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$ відносно координатних площин.

4. Знайти координати центра ваги частини однорідної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вирізаної поверхнею $x^2 + y^2 = ax$.

5. Знайти момент інерції циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$ $(0 \le z \le H)$ відносно початку координат.

3. Домашнє завдання.

1. Знайти масу частини поверхні гіперболічного параболоїда $2az = x^2 - y^2$, що відтинається циліндром $x^2 + y^2 = a^2$, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні $\rho(x, y, z) = 15|z|$.

2. Обчислити координати центра маси однорідної поверхні верхньої частини конуса $\frac{R^2 z^2}{H^2} = x^2 + y^2$, обмеженої площиною $z = H$.

3. Знайти моменти інерції півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ відносно:

а) площини основи;
б) осі симетрії.

Тема 6

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ

Нехай S – гладка орієнтована поверхня, що однозначно проектується на координатну площину Oxy в область S_{xy}, при цьому вона є графіком функції $z = z(x; y), (x; y) \in S_{xy}$, то поверхневий інтеграл другого роду вигляду $\iint\limits_S R(x; y; z)dxdy$, де $R(x; y; z)$ – неперервна на заданій поверхні S функція, зводиться до наступного подвійного інтеграла $\iint\limits_S R(x; y; z)dxdy = \pm\iint\limits_{S_{xy}} R\big(x; y; z(x; y)\big)dxdy$, причому знак перед подвійним інтегралом беремо плюс у випадку гострого кута γ між нормаллю до поверхні S та додатним напрямом осі Oz, а при тупому куті беремо знак мінус. Зауважимо, якщо S – циліндрична поверхня із твірними паралельними до осі Oz, то $\iint\limits_S R(x; y; z)dxdy = 0$.

Аналогічно, якщо поверхня S однозначно проектується на площину Oxz в область S_{xz} і є графіком функції $y = y(x; z)$, функція $Q(x; y; z)$ неперервна на S, то для поверхневого інтеграла другого роду справедлива рівність $\iint\limits_S Q(x; y; z)dxdz = \pm\iint\limits_{S_{xz}} Q\big(x; y(x; z); z\big)dxdz$, де при гострому куті β

між нормаллю до S та додатним напрямом осі Oy вибирають знак плюс, а противному випадку – знак мінус, а якщо S – циліндрична поверхня із твірними паралельними до осі Oy, то $\iint\limits_S Q(x;y;z)dxdz=0$. Якщо поверхня S однозначно проектується на площину Oyz в область S_{yz} і є графіком функції $x=x(y;z)$, функція $P(x;y;z)$ неперервна на S, то для наступного поверхневого інтеграла другого роду справедлива рівність $\iint\limits_S P(x;y;z)dydz=\pm\iint\limits_{S_{yz}} P\left(x(y;z);y;z\right)dydz$, де при гострому куті α між нормаллю до S та додатним напрямом осі Ox вибирають знак плюс, а противному випадку – знак мінус. Якщо S – циліндрична поверхня із твірними паралельними осі Ox, то $\iint\limits_S P(x;y;z)dydz=0$. Тому загальний поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$ зводиться до суми трьох подвійних інтегралів

$$\iint\limits_S P(x;y;z)dydz+Q(x;y;z)dxdz+R(x;y;z)dxdy=$$
$$=\pm\iint\limits_{S_{yz}} P\left(x(y;z);y;z\right)dydz\pm\iint\limits_{S_{xz}} Q\left(x;y(x;z);z\right)dxdz\pm\iint\limits_{S_{xy}} R\left(x;y;z(x;y)\right)dxdy$$

(знаки перед подвійними інтегралами беруться згідно раніше зроблених зауважень).

Нехай замкнена поверхня S обмежує область $G\subset R^3$, тоді зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні S (нормаль до поверхні направлена назовні) та потрійним інтегралом по області G встановлює формула Остроградського-Гаусса:

$$\iint\limits_S P(x;y;z)dydz+Q(x;y;z)dxdz+R(x;y;z)dxdy=$$
$$=\iiint\limits_G\left(\frac{\partial P(x;y;z)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x;y;z)}{\partial y}+\frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Нехай функції P,Q,R неперервні в області $T\subset R^3$ разом із своїми частинними похідними $P'_y,P'_z,Q'_x,Q'_z,R'_x,R'_y$ та мішаними похідними. Для того, щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz$ в області $T\subset R^3$ не за-лежав від шляху інтегрування необхідно та достатньо, щоб виконувалась одна з умов:

1) для будь-якого контуру $\gamma \subset T$ $\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

2) підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції

$$u(x;y;z):\ du = P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz;$$

3) в будь-якій точці області T виконуються рівності

$$Q'_x(x;y;z) = P'_y(x;y;z); R'_y(x;y;z) = Q'_z(x;y;z); P'_z(x;y;z) = R'_x(x;y;z).$$

Якщо вираз $P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x;y;z)$, то знайти дану функцію можна згідно рівності $u(x;y;z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t;y_0;z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;t;z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;t)dt + C$.

Нехай задано деяке векторне поле

$$\vec{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$$

та орієнтована поверхня S.

Поверхневий інтеграл другого роду

$$\iint\limits_{S} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dxdz + R(x;y;z)dxdy = \Pi_S(\vec{F})$$

називають потоком векторного поля $\vec{F}(x;y;z)$ через поверхню S. Він чисельно рівний кількості речовини, що протікає в заданому напрямі через поверхню S за одиницю часу із швидкістю $\vec{F}$. Формула Остроградського-Гаусса дає змогу обчислювати потік вектора через замкнену поверхню.

Дивергенцією векторного поля $\vec{F}(x;y;z)$ називають скалярну функцію

$$div\vec{F}(x;y;z) = P'_x(x;y;z) + Q'_y(x;y;z) + R'_z(x;y;z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ротором векторного поля $\vec{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$

називають вектор $rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x;y;z) & Q(x;y;z) & R(x;y;z) \end{vmatrix}$.

Криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, що обмежує поверхню S, виражається через поверхневий інтеграл другого роду за допомогою формули Стокса:

$$\oint\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz \, .$$

При цьому нормаль до поверхні S напрямлена так, щоб видимий з її кінця обхід контура L відбувався проти годинникової стрілки.

Інтеграл $\oint\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ називають циркуляцією вектора $\vec{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ вздовж замкненого контура L. Він чисельно рівний роботі, яку виконує змінна сила $\vec{F}$ при переміщенні тіла одиничної маси вздовж кривої L. Формула Стокса виражає циркуляцію заданого вектора $\vec{F}$ через потік іншого вектора, який залежить від даного і називається ротором вектора $\vec{F}$.

Якщо $div\vec{F}(x;y;z) = 0$, то поле $\vec{F}$ називають соленоїдальним. Якщо $\vec{F}(x;y;z) = grad\, u(x;y;z)$, то поле $\vec{F}$ називають потенційним. Для того, щоб поле $\vec{F}$ в деякій області було потенційним необхідно та досить, щоб в цій області $rot\,\vec{F} = \vec{0}$. Якщо $div\vec{F} = 0$, $rot\vec{F} = \vec{0}$, то поле $\vec{F}$ називають гармонічним.

Наведемо приклади обчислення поверхневих інтегралів другого роду.

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma zdxdy$, де σ – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Розв'язання. Спершу застосуємо при обчислення даного інтеграла властивість адитивності, тобто інтеграл по об'єднанню областей рівний сумі інтегралів по частинах, що входять до цього об'єднання. Розіб'ємо сферу на дві півсфери (верхню та нижню), що є графіками функцій від змінних *x* та *y*: $\sigma = \sigma_1 \bigcup \sigma_2$. Маємо: $\sigma_1 :\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\sigma_2 :\ z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; причому ортогональною проекцією на площину *xOy* обох поверхонь буде круг $P : x^2 + y^2 \le 1$. Маємо: $\iint\limits_\sigma zdxdy = \iint\limits_{\sigma_1} zdxdy + \iint\limits_{\sigma_2} zdxdy$. При обчисленні даних інтегралів застосуємо формулу $\iint\limits_{S} R(x;y;z)dxdy = \pm\iint\limits_{S_{xy}} R\left(x;y;z(x;y)\right)dxdy$ та зауваження після неї (на σ_1 нормаль із зовнішньої сторони поверхні утворює із віссю *Oz* гострий кут, а на σ_2 нормаль «на зовні» з віссю *Oz* утворює тупий кут) одержимо:

$$\iint\limits_{\sigma} zdxdy = \iint\limits_{P} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy + \left(-\iint\limits_{P} -\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy\right) = 2\iint\limits_{P} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy.$$

Далі виконаємо в подвійному інтегралі перехід до полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ |J| = \rho,\ P \Leftrightarrow Q: 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1,$$

матимемо

$$\iint\limits_{\sigma} zdxdy = 2\iint\limits_{Q} \rho\sqrt{1-\rho^2}d\varphi d\rho = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho = 4\pi\int\limits_0^1 \left(1-\rho^2\right)\rho d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2}4\pi\int\limits_0^1 \left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d(1-\rho^2)d\rho = -2\pi \left.\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Відповідь. $\dfrac{4\pi}{3}$

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I = \iint\limits_{\sigma} x^2zdydz + xydxdz + y^2zdxdy$, якщо $\sigma -$ зовнішня сторона циліндричної поверхні $x^2+y^2=1$, яка лежить в першому октанті і обмежена площинами $z=0$ *і* $z=1$.

Розв'язання. За властивістю лінійності $I = I_1 + I_2 + I_3$, де

$$I_1 = \iint\limits_{\sigma} x^2zdydz,\ I_2 = \iint\limits_{\sigma} xydxdz,\ I_3 = \iint\limits_{\sigma} y^2zdxdy.$$

Перш за все, відмітимо, що σ – циліндрична поверхня із твірними паралельними до осі *Oz*, тому $I_3 = 0$.

Щоб обчислити інтеграл I_1, то згідно формули $\iint\limits_{S} P(x;y;z)dydz = \pm\iint\limits_{S_{yz}} P\left(x(y;z);y;z\right)dydz$ потрібно знайти ортогональну проекцію σ на площину yOz, подати поверхню σ як графік функції $x = f(y;z)$ та з'ясувати межі зміни кута між нормаллю до поверхні σ та віссю Ox.

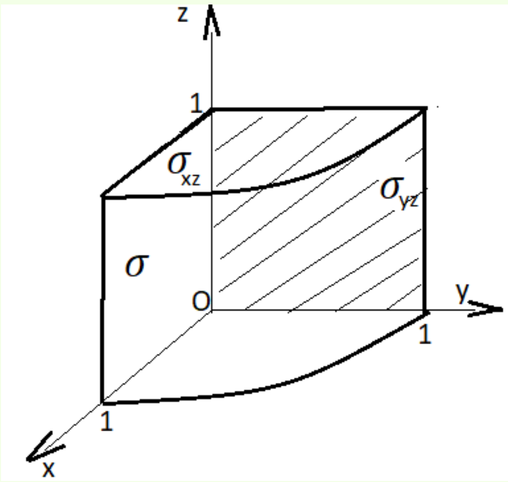


Рис. 1.

Маємо: $\sigma_{yz}:\begin{cases}0\le y\le 1,\\ 0\le z\le 1,\end{cases}\sigma: x=\sqrt{1-y^2}\,,\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$

Тому поверхневий інтеграл I_1 згідно рівності

$$\iint_S P(x;y;z)dydz = \iint_{S_{yz}} P\big(x(y;z);y;z\big)dydz$$

рівний наступному подвійному інтегралу

$$I_1 = \iint_{\sigma_{yz}}(1-y^2)zdydz = \int_0^1(1-y^2)dy\int_0^1 zdz = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Аналогічно можемо обчислити I_2:

$$\sigma_{xz}:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le z\le 1,\end{cases}\ \sigma: y=\sqrt{1-x^2}\,,\ \beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

$$I_2 = \iint_{\sigma_{xz}} x\sqrt{1-x^2}dxdz = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx\int_0^1 dz = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}d(1-x^2) = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Тому остаточно $I = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0 = \frac{2}{3}$.

Відповідь. $\frac{2}{3}$.

Приклад 3. Обчислити поверхневий інтеграл

$$\iint_{\sigma} y^2 z dxdy + xzdydz + x^2 ydxdz ,$$

де σ – зовнішня сторона поверхні, що розташована в першому октанті і складена із параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і координатних площин (див. рис. 2).

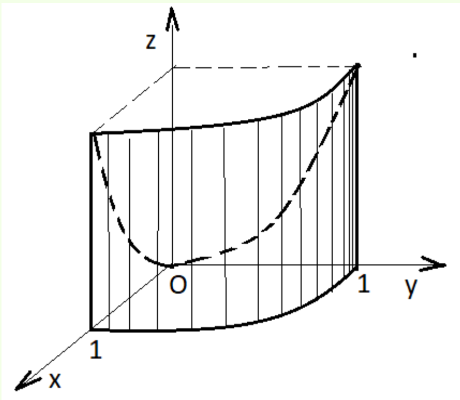


Рис. 2.

Розв'язання. Поверхня σ замкнена, тому при обчисленні даного поверхневого інтеграла скористаємося формулою Гаусса-Остроградського. Маємо: $P(x;y;z) = xz, Q(x;y;z) = x^2 y, R(x;y;z) = y^2 z$. Тому $P'_x + Q'_y + R'_z = z + x^2 + y^2$. Отже, згідно формули Гаусса-Остроградського

$$I = \iint_{\sigma} y^2 z dxdy + xzdydz + x^2 ydxdz = \iiint_{T} \left(z + x^2 + y^2\right) dxdydz ,$$

де T – тіло, зображене на рис. 2.

При обчисленні даного потрійного інтеграла доцільно перейти до циліндричних координат: $x = \rho\cos\varphi; y = \rho\sin\varphi; z = z; |J| = \rho$, одержимо $I = \iiint_{D} (z + \rho^2)\rho d\varphi d\rho dz$. Подамо область D як орієнтовану вздовж осі Oz в циліндричних координатах.

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; \\ 0 \le \rho \le 1; \\ 0 \le z \le \rho^2. \end{cases}$$

Тоді

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho^2}(z+\rho^2)\rho dz=\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho\left(\frac{z^2}{2}+\rho^2 z\right)\Bigg|_{z=0}^{z=\rho^2}d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{3}{2}\rho^5 d\rho=\frac{\pi}{8}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8}$.

Приклад 4. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$I=\iint_\sigma (x-y)dxdy+(y-z)dydz+(z-x)dxdz,$$

де σ зовнішня сторона конічної поверхні $z^2=x^2+y^2, 0\le z\le R$.

Розв'язання. Оскільки в даному випадку поверхня σ не є замкненою, то при обчисленні запропонованого інтеграла не можемо безпосередньо використати формулу Гаусса-Остроградського. Поступимо так:

Доповнимо поверхню σ поверхнею $\sigma_1: z=R,\ x^2+y^2\le R^2$. Тоді $\sigma_2=\sigma\bigcup\sigma_1$ буде замкненою поверхнею, для якої застосовна формула Гаусса-Остроградського.

Маємо:

$$\iint_{\sigma_2}(x-y)dxdy+(y-z)dydz+(z-x)dxdz=$$

$$=\iiint_T\left((y-z)'_x+(z-x)'_y+(x-y)'_z\right)dxdydz=\iiint_T 0dxdydz=0.$$

Тоді за адитивністю

$$0=\iint_{\sigma_2}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$

$$=\iint_\sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdy+\iint_{\sigma_1}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy,$$

звідки $I=-\iint_{\sigma_1}(x-y)dxdy+(y-z)dydz+(z-x)dxdz$. Оскільки площина $z=R$ паралельна до осей *Ox* та *Oy*, тобто є циліндричною із твірними паралельними до осей Ox та Oy, то $\iint_{\sigma_1}(y-z)dydz=0$, $\iint_{\sigma_1}(x-z)dxdz=0$, тому

$I = -\iint\limits_{\sigma_1} (x - y)dxdy$. Ортогональною проекцією σ_1 на площину xOy є круг (див. рис. 3) $D: x^2 + y^2 \le R^2$. Тому $I = -\iint\limits_{D} (x - y)dxdy$.

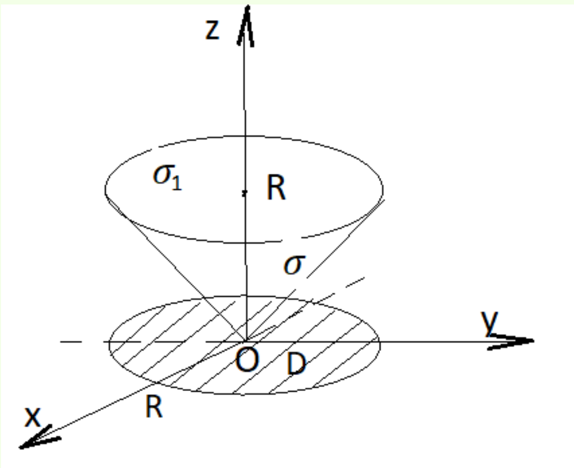


Рис. 3.

При обчисленні цього інтеграла перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $|J| = \rho$, $D \Leftrightarrow Q: 0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le R$, одержимо

$$I = -\iint\limits_{Q} \rho(\rho\cos\varphi - \rho\cos\varphi)d\varphi d\rho = -\int\limits_{0}^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi \int\limits_{0}^{R} \rho^2 d\rho =$$

$$= -\frac{R^3}{3} \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Відповідь. 0.

Приклад 5. Інтеграл $\oint\limits_{L} (x^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, який розглядають по деякому контуру *L*, привести за допомогою формули Стокса до поверхневого інтеграла другого роду по поверхні, для якої контур *L* є межею.

Розв'язання. Маємо

$$P(x; y; z) = y^2 + z^2, Q(x; y; z) = x^2 + z^2, R(x; y; z) = x^2 + y^2.$$

Тому

$$P'_y = 2y, Q'_x = 2x, Q'_z = 2z, R'_y = 2y, R'_x = 2x, P'_z = 2z.$$

Нехай S – поверхня, яку «стягує» контур *L*, тоді згідно формули Стокса справедлива рівність:

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz=$$

$$=\iint_S (2x-2y)dxdy+(2y-2z)dydz+(2z-2x)dxdz\,.$$

Відповідь. $2\iint_S (x-y)dxdy+(y-z)dydz+(z-x)dxdz\,.$

Приклад 6. Перевірити, що вираз $\dfrac{2(xzdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}$ є повним диференціалом деякої функції $u(x;y;z)$ і знайти цю функцію.

Розв'язання. Якщо $Pdx+Qdy+Rdz=\dfrac{2(xzdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}$, то в цьому випадку $P=-\dfrac{2yz}{(x-yz)^2};Q=\dfrac{2xz}{(x-yz)^2};R=\dfrac{2xy}{(x-yz)^2}$. Перевіримо виконання умов $Q'_x(x;y;z)=P'_y(x;y;z);R'_y(x;y;z)=Q'_z(x;y;z);P'_z(x;y;z)=R'_x(x;y;z)$. Маємо: $P'_y=-2z\dfrac{(x-yz)^2+2yz(x-yz)}{(x-yz)^4}=-\dfrac{2z(x+yz)}{(x-yz)^3}$; аналогічно можемо показати, що $Q'_x=-\dfrac{2z(x+yz)}{(x-yz)^3}$. Оскільки функція P симетрична відносно змінних y, z, то $P'_z=-\dfrac{2y(x+yz)}{(x-yz)^3}$. Також можна показати, що $Q'_z=\dfrac{2x(x+yz)}{(x-yz)^3}=R'_y$ та $R'_x=\dfrac{2y(x+yz)}{(x-yz)^3}$. Бачимо, що умови $Q'_x=P'_y\,,R'_y=Q'_z\,,P'_z=R'_x$ виконуються, тому шукана функція u існує. Знайдемо її згідно рівності

$$u(x;y;z)=\int_{x_0}^{x}P(t;y_0;z_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x;t;z_0)dt+\int_{z_0}^{z}R(x;y;t)dt+C\,,$$

вибравши точку $(x_0;y_0;z_0)=(1;0;0)$. Одержимо:

$$u(x;y;z)=\int_1^x P(t;0;0)dt+\int_0^y Q(x;t;0)dt+\int_0^z R(x;y;t)dt+C=$$

$$=\int_0^x 0dt+\int_0^y 0dt+\int_0^z \frac{2xy}{(x-yt)^2}dt+C=-2x\int_0^z (x-yt)^{-2}d(x-yt)+C=$$

$$=\frac{2x}{x-yt}\Bigg|_{t=0}^{t=z}+C=\frac{2x}{x-yz}+C.$$

Відповідь. $u(x;y;z)=\dfrac{2x}{x-yz}+C.$

Приклад 7. Знайдіть потік поля $\vec{F}=(x^2;y^2;z^2)$ через зовнішній бік повної поверхні піраміди, обмеженої площинами $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0.$

Розв'язання. Спочатку обчислимо дивергенцію даного поля згідно формули

$$div\vec{F}(x;y;z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}:\ div\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right)=2x+2y+2z.$$

Тоді потік через замкнену поверхню обчислюємо, використовуючи формулу Остроградського-Гаусса : $П_s(\vec{F})=\iiint\limits_T(2x+2y+2z)dxdydz$. Подамо дану піраміду, як орієнтовану вздовж осі Oz просторову фігуру:

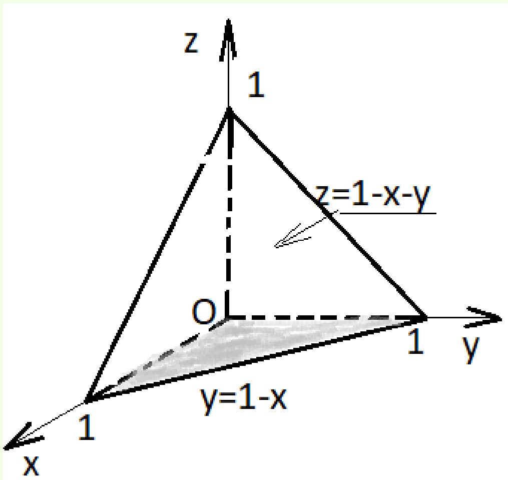


Рис. 4.

$$T:\begin{cases}0\le x\le 1;\\ 0\le y\le 1-x;\\ 0\le z\le 1-x-y;\end{cases}$$

тоді потрійний інтеграл буде рівний наступному повторному

$$П_S(\vec{F})=2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{(x+y+z)^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y}\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(1-(x+y)^2\right)dy=\int_0^1\left(1-x-\frac{(x+y)^3}{3}\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{2}{3}-x+\frac{1}{3}x^3\right)dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь. $\frac{1}{4}$.

Приклад 8. Показати, що векторне поле

$$\vec{F}(x;y;z)=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$$

гармонічне.

Розв'язання. Перевіряємо умову гармонічності векторного поля:

$$div\vec{F}=0,rot\vec{F}=\vec{0}.\ \ div\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(y+z)+\frac{\partial}{\partial y}(x+z)+\frac{\partial}{\partial z}(x+y)=0.$$

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=(1-1)\vec{i}-(1-1)\vec{j}+(1-1)\vec{k}=\vec{0}.$$

Відповідь. Векторне поле $\vec{F}$ гармонічне.

Заняття 15.
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ. ОБЧИСЛЕННЯ

1. Орієнтація поверхні. Означення і обчислення поверхневих інтегралів II роду.
2. Формула Остроградського-Гаусса.
   Література: [1, с.136-151]
3. Розв'язати задачі:

1. Обчислити поверхневі інтеграли II роду:

а) $\iint_\sigma x^2y^2zdxdy$, якщо σ– зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

б) $\iint\limits_{\sigma}(x-y)dxdy+(y-z)dydz$, якщо σ – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$;

в) $\iint\limits_{\sigma} y^2 zdxdy+xzdydz+x^2 ydxdz$, якщо σ – зовнішня сторона межі тіла, яке обмежене поверхнями $z=x^2+y^2$; $x^2+y^2=1$; $x=0$;

$$y=0;\ z=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0).$$

2. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчислити поверхневі інтеграли II роду:

а) $\iint\limits_{\sigma} xzdxdy+xydydz+yzdxdz$, якщо σ – зовнішня сторона піраміди, утвореної координатними площинами та площиною $x + y + z = 1$;

б) $\iint\limits_{\sigma}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$, якщо σ – зовнішня сторона поверхні $|x| + |y| + |z| = 1$.

4. Домашнє завдання.

Обчислити поверхневі інтеграли II роду:

1) $\iint\limits_{\sigma} z^2 dxdy$, де σ – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

2) $\iint\limits_{\sigma} x^2 dydz+y^2 dzdx+z^2 dxdy$, де σ – зовнішня сторона куба

$$0\le x\le a;\ 0\le y\le a;\ 0\le z\le a\ ;$$

3) $\iint\limits_{S}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$, де S – зовнішня сторона конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$, де $0\le z\le h$.

Заняття 16.
ЗАСТОСУВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ІНТЕГРАЛІВ ІІ РОДУ

1. Формула Стокса.
2. Умови незалежності поверхневого інтеграла ІІ роду від функції трьох змінних від форми шляху інтегрування.

   Література: [1, с.151-163]
3. Розв'язати задачі:

1. Перевірити, чи є вираз повним диференціалом функції $u(x; y; z)$ і, якщо так, то знайти функцію: $\left(x^2-2yz\right)dx+\left(y^2-2xz\right)dy+\left(z^2-2xy\right)dz$.

2. За допомогою формули Остроградського-Гаусса обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_{\sigma} zdxdy + ydxdz + xdydz$, де σ – зовнішня поверхня еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

б) $\iint\limits_{S} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона межі куба $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$.

3. Застосовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{L} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, де L – контур трикутника MNT з вершинами $M(a, 0, 0)$, $N(0, a, 0)$, $T(0, 0, a)$.

4. В яких точках простору $Oxyz$ градієнт поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

а) перпендикулярний до осі Oz;

б) паралельний до осі Oz?

5. Обчислити дивергенцію поля $\vec{F} = \dfrac{-x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точці $M(3,4,5)$.

4. Домашнє завдання:

1. Обчислити поверхневі інтеграли ІІ роду:

а) $\iint\limits_{\sigma} z^2dxdy$, де σ – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

б) $\iint\limits_{\sigma} z^3dxdy+x^3dydz+y^3dxdz$, де σ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2. Знайти функцію $u(x;y;z)$, якщо

$$du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz$$

3. Застосовуючи формулу Стокса, обчислити

$$\oint\limits_L \left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz,$$

якщо L – межа частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка лежить в першому октанті (при русі по контуру L поверхня залишається зліва).

Тема 7

ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА

Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на деякій замкненій області $\{(x;y)|c\le y\le d;\varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$, то функція $F(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ неперервна на сегменті $[c;d]$, тобто $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx=\int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x;y_0)dx$, зокрема, якщо область є прямокутною: $a\le x\le b; c\le y\le d$, то

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x;y)dx=\int_a^b f(x;y_0)dx.$$

Якщо функція $f(x;y)$ та її похідна $f'_y(x;y)$ – неперервні при $a\le x\le b; c\le y\le d$, то для всякого $y\in[c;d]$ справедлива формула

$$\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x;y)dx\right)=\int_a^b f'_y(x;y)dx,$$

якщо ж межі інтегрування також залежать від параметра y, то дана формула набуває такого вигляду

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x;y)dx\right) = f\big(b(y);y\big)b'(y) - f\big(a(y);y\big)a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x;y)dx .$$

Якщо область D проста, тобто має вигляд

$$D = \left\{(x;y)\middle| a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\} = \left\{(x;y)\middle| c \le y \le d; \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\},$$

де функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, а функції $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$– на відрізку $[c;d]$, функція $f(x;y)$ неперервна в області D, то

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx .$$

Зокрема, якщо функція $f(x;y)$ неперервна по x та y в прямокутнику $a \le x \le b; c \le y \le d$, то справедлива формула $\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy$.

(Цю формулу ще називають формулою Фуббіні про зміну порядку інтегрування).

Приклад 1. Користуючись рівністю

$$F(y) = \int_0^1 \cos yx\, dx = \begin{cases} \dfrac{\sin y}{y}, \text{якщо } y \ne 0, \\ 1, \text{якщо } \quad y = 0, \end{cases}$$ довести, що $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$.

Розв'язання. Функція $cos\, yx$ неперервна на всій площині xOy, тому і в квадраті $\left\{(x;y)\middle| 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\right\}$. Отже, функція $F(y)$ неперервна на сегменті $[0;1]$, звідки, зокрема в точці $y = 0$, тобто $\lim\limits_{y \to 0} F(y) = F(0)$. Або цю рівність можна записати так $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \dfrac{y^b - y^a}{\ln y} dy \quad (0 < a < b)$.

Розв'язання. Нехай $F(y) = \int_a^b y^x dx$, $y \ge 0$, $x \in [a;b]$. Розглянувши випадки $y = 0$, $y = 1$, $y \in (0;1)$ безпосередньо одержуємо, що

$$F(y)=\begin{cases} 0,\ y=0, \\ \dfrac{y^b-y^a}{\ln y},\ y\in(0;1), \\ b-a,\ y=1. \end{cases}$$

Знайдемо наступні границі: $\lim\limits_{y\to 0+0}\dfrac{y^b-y^a}{\ln y}=0$ (як частка нескінченно малої на нескінченно велику в околі точки 0 функцій) та із застосуванням правил Лопіталя:

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^b-y^a}{\ln y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 1}\frac{\left(y^b-y^a\right)'}{\left(\ln y\right)'}=\lim_{y\to 1}\frac{by^{b-1}-ay^{a-1}}{y^{-1}}=\lim_{y\to 1}(by^b-ay^a)=b-a.$$

Як бачимо, функція $F(y)$ непереррвна на проміжку $[0;1]$, тому інтеграл $\int\limits_0^1\dfrac{y^b-y^a}{\ln y}dy$ існує, проте первісна для підінтегральної функції не є елементарною. Застосування в даному випадку формули Ньютона-Лейбніца неможливе.

Розглянемо функцію двох змінних $f(x;y)=y^x$ на прямокутнику $\Delta=\left\{(x;y)\middle|\, a\le x\le b, 0\le y\le 1\right\}$, вона є неперервною на ньому. Застосуємо формулу Фуббіні і дістанемо

$$\int_0^1 F(y)dy=\int_0^1\left(\int_a^b y^x dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_0^1 y^x dy\right)dx=\int_a^b\left(\left.\frac{y^{x+1}}{x+1}\right|_0^1\right)dx=$$

$$=\int_a^b\frac{dx}{x+1}=\ln(x+1)\Big|_a^b=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Отже, $\int\limits_0^1\dfrac{y^b-y^a}{\ln y}dy=\int\limits_0^1 F(y)dy=\ln\dfrac{b+1}{a+1}$.

Відповідь: $\ln\dfrac{b+1}{a+1}$.

Приклад 3. Знайти похідні заданих функцій:

а) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}(x^2+\alpha^2)\sin(x^2-\alpha^2)dx$;

б) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin\left(x^2+y^2-\alpha^2\right)dy.$

Розв'язання. а) Функція $f(x;\alpha)=(x^2+\alpha^2)\sin(x^2-\alpha^2)$ неперернна при будь-яких x та α. Застосуємо формулу

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x;y)dx\right)=f\left(b(y);y\right)b'(y)-f\left(a(y);y\right)a'(y)+\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x;y)dx$$

і одержимо

$$F'(\alpha)=2\alpha^2\sin 0\cdot 1-\alpha^2\sin(-\alpha^2)\cdot 0+\int\limits_0^{\alpha}\left(2\alpha\sin(x^2-\alpha^2)-2\alpha(x^2+\alpha^2)\cos(x^2-\alpha^2)\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^{\alpha}\left(2\alpha\sin(x^2-\alpha^2)-2\alpha(x^2+\alpha^2)\cos(x^2-\alpha^2)\right)dx.$$

б) Позначимо: $f(x;\alpha)=\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin\left(x^2+y^2-\alpha^2\right)dy$. Тоді $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha^2} f(x;\alpha)dx.$

Тому за правилом відшукання похідної інтеграла з параметром одержимо:

$$F'(\alpha)=f(\alpha^2;\alpha)\cdot 2\alpha-f(0;\alpha)\cdot 0+\int\limits_0^{\alpha^2} f'_\alpha(x;\alpha)dx=2\alpha f(\alpha^2;\alpha)+\int\limits_0^{\alpha^2} f'_\alpha(x;\alpha)dx.$$

Але в свою чергу

$$f'_\alpha(x;\alpha)=\sin\left(x^2+(x+\alpha)^2-\alpha^2\right)+\sin\left(x^2+(x-\alpha)^2-\alpha^2\right)-$$

$$-2\alpha\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos\left(x^2+y^2-\alpha^2\right)dy=\sin(2x^2+2x\alpha)+\sin(2x^2-2x\alpha)-$$

$$-2\alpha\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy=2\sin 2x^2\cos 2x\alpha-2\alpha\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy.$$

Таким чином, остаточно одержуємо:

$$F'(\alpha)=2\alpha\int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2)dy+2\int\limits_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x\,dx-$$

$$-2\alpha\int\limits_0^{\alpha^2}dx\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy.$$

Відповідь:

а) $$\int_0^{\alpha}\left(2\alpha\sin(x^2-\alpha^2)-2\alpha(x^2+\alpha^2)\cos(x^2-\alpha^2)\right)dx;$$

б) $$2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2)dy+2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x\,dx-$$

$$-2\alpha\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy.$$

Заняття 17.
ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА

1. Неперервність інтеграла, залежного від параметра.
2. Інтегрування та диференціювання інтеграла за параметром.

   Література: [4, с.336-402; 7, с.231-248]

3. Розв'язати задачі:

1. Обчислити границі:

$$\lim_{y\to 0}\int_1^2 x^3\cos xy dx;\ \lim_{y\to 0}\int_0^1\sqrt[3]{x^4+y^2}dx;\ \lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}.$$

2. Знайти похідні заданих функцій:

$$f(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha x}{x}dx;\ f(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx.$$

3. Функцію $f(x)=x^2$ на проміжку $1\le x\le 3$ наближено замінити лінійною функцією $a+bx$ так, щоб $I(a;b)=\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx=\min$.

4. Знаючи, що $\int_0^1\frac{dx}{1+\alpha x}=\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha)$, обчислити $\int_0^1\frac{xdx}{(1+\alpha x)^2}$, диференціюючи по y.

Розв'язування задач (підготовка до МКР №2)

1. Обчислити масу дуги $y=\frac{x^2}{2}(1\le x\le 2)$, якщо густина дуги $\rho(x;y)=\frac{y}{x}$.

2. Відновити функцію за її повним диференціалом $(e^{2y}-5y^3e^x)dx+(2xe^{2y}-15y^2e^x)dy$.

3. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS$, де S – частина конічної поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, яка обрізана площиною $z = 1$;

б) $I=\iint\limits_\sigma (x+y+z)dxdy$, де σ – верхня сторона частини площини $x+2y+3z=12$, яка розташована в першому октанті.

Література: [4, с.558-662].

Розв'язання:

1. Масу дуги будемо обчислювати за допомогою криволінійних інтегралів першого роду за формулою $m=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x;y)dl$. В даному випадку це наступний інтеграл: $m=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{x}dl$. Дуга $\overset{\frown}{AB}$ є графіком функції $y=\frac{1}{2}x^2(1\le x\le 2)$, тому диференціал дуги рівний $dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+x^2}dx$. Отже,

$$m=\int_1^2 \frac{\frac{1}{2}x^2}{x}\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{4}\int_1^2 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2)=$$

$$=\frac{1}{4}\left.\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}).$$

Відповідь. $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$.

2. Перевіримо чи є вираз $(e^{2y}-5y^3e^x)dx+(2xe^{2y}-15y^2e^x)dy$ повним диференціалом деякої функції двох змінних. Маємо $P(x;y)=e^{2y}-5y^3e^x$, $Q(x;y)=2xe^{2y}-15y^2e^x$, тоді $P'_y=2e^{2y}-15y^2e^x$, $Q'_x=2e^{2y}-15y^2e^x$. Оскільки $P'_y=Q'_x$, то існує функція $u(x;y)$, для якої $du(x;y)=P(x;y)dx+Q(x;y)dy$, причому ми можемо відшукати її за допомогою наступного криволінійного інтеграла другого роду $u(x;y)=\int\limits_0^x P(t;0)dt+\int\limits_0^y Q(x;t)dt+C$. В даному випадку $P(t;0)=1$, $Q(x;t)=2xe^{2t}-15t^2e^x$. Отже,

$$u(x;y)=\int\limits_0^x dt+\int\limits_0^y\left(2xe^{2t}-15t^2e^x\right)dt+C=x+\left(xe^{2t}-5t^3e^x\right)\Big|_{t=0}^{t=y}+C=$$

$$=x+xe^{2y}-5y^3e^x-x+C=xe^{2y}-5e^xy^3+C.$$

Відповідь. $xe^{2y}-5e^xy^3+C$.

3. При обчисленні даного поверхневого інтеграла першого роду використаємо наступну формулу переходу від поверхневого інтеграла до подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_S F(x;y;z)ds=\iint\limits_{S_{xy}} F(x;y;f(x;y))\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}dxdy,$$

де поверхня S є графіком функції $z=f(x;y)$, а S_{xy} – ортогональна проекція S на координатну площину Oxy. Поверхня S є графіком функції $z=\sqrt{x^2+y^2}$, тому $1+(z'_x)^2+(z'_y)^2=1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=2$. Зобразимо цю конічну поверхню (див. рис. 1), яка зверху обрізана площиною $z=1$, паралельною до Oxy:

Отже,

$$I=\iint\limits_{S_{xy}}(x^2+y^2+x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=2\sqrt{2}\iint\limits_{S_{xy}}(x^2+y^2)dxdy.$$

Щоб знайти ортогональну проекцію S_{xy}, знайдемо проекцію лінії, по якій перетинаються конічна поверхня та площина $z=1$, на площину Oxy.

Для цього із системи $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1 \end{cases}$ вилучимо змінну z, одержимо $x^2+y^2=1$. Отже, S_{xy} – одиничний круг із центром в початку координат. Тому при обчисленні I перейдемо від декартових до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, |J|=\rho \Rightarrow I=2\sqrt{2}\iint\limits_Q \rho^3 d\varphi d\rho$. Q як криволінійний сектор задовольняє обмеженням $0\le\varphi\le 2\pi$,$0\le\rho\le 1$, тому

$$I=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho=2\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1=\pi\sqrt{2}.$$

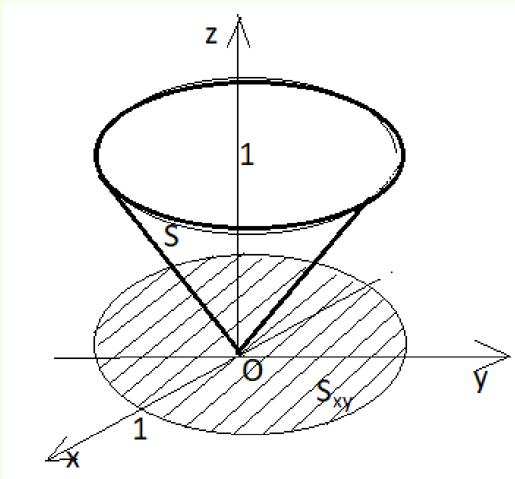


Рис. 1.

Відповідь. $\pi\sqrt{2}$.

4. При обчисленні поверхневого інтеграла другого роду $\iint\limits_\sigma R(x;y;z)dxdy$ скористаємося формулою

$$\iint\limits_\sigma R(x;y;z)dxdy=\pm\iint\limits_{\sigma_{xy}} R\big(x;y;z(x;y)\big)dxdy.$$

Зобразимо поверхню σ (див. рис. 2).

Як бачимо, нормаль до верхньої частини даного трикутника утворює з віссю Oz гострий кут, тому в останній рівності інтегралів виберемо знак «плюс». Крім того, ця поверхня є графіком функції $z=\dfrac{12-x-2y}{3}$, тому одержимо, що

$$I=\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(x+y+\frac{12-x-2y}{3}\right)dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{\sigma_{xy}}(12+2x+y)dxdy\,.$$

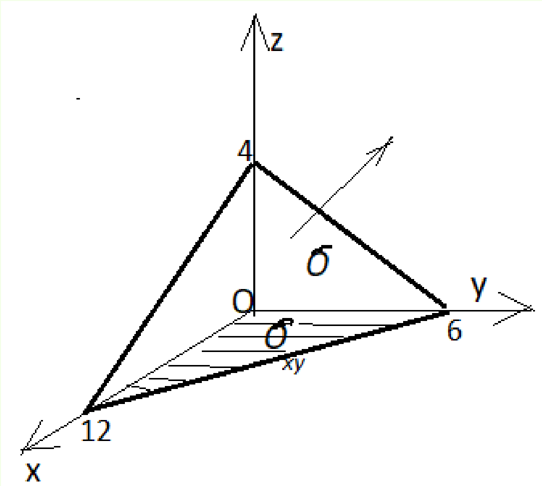


Рис. 2.

Проекція σ_{xy} як криволінійна область першого роду задовольняє наступним обмеженням: $0\le x\le 12, 0\le y\le\frac{12-x}{2}$.

Отже,

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{12}dx\int_0^{\frac{12-x}{2}}(12+2x+y)dy=\frac{1}{3}\int_0^{12}dx\left.\frac{(12+2x+y)^2}{2}\right|_{y=0}^{y=\frac{12-x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{12}\left((12+2x+6-\frac{1}{2}x)^2-(12+2x)^2\right)dx=\frac{1}{6}\int_0^{12}\left((18+\frac{3}{2}x)^2-(12+2x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}(18+\frac{3}{2}x)^3\Big|_0^{12}-\frac{1}{6}(12+2x)^3\Big|_0^{12}\right)=\frac{1}{6}\left[\frac{2}{9}(36^3-18^3)-\frac{1}{6}(36^3-12^3)\right]=264\,.$$

Відповідь. 264.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Сорич В.А., Сорич Н.М. Інтегральне числення функції кількох змінних: навчальний посібник. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. 168 с.
2. Сорич В.А., Сорич Н.М. Інтегральне числення функції кількох змінних: навчальний посібник [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. 128 с.
3. Ващук Ф.Г., Поляк С.С. Практикум з математичного аналізу. Ч. 2 Інтегральне числення: навчальний посібник. Ужгород, 2000. 188 с.
4. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. Ч. 2 Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Киев: Вища школа, 1977. 672 с.
5. Сорич Н.М., Сорич В.А. Практикум з математичного аналізу: навчальний посібник. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. 67 с.
6. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лещенко М.Я. та ін. Математичний аналіз в прикладах і задачах: у 2-х ч. Київ: Вища школа, 2002. Ч. 2. 470 с.
7. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: підручник: у 3-х ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. 2-е вид., перероб. і допов. Київ: Вища школа, 1991. 383 с.
8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібн. Київ: А.С.К., 2006. 648 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. Видавництво Лань, 2009. Т. 2. 800 с.
10. Гнатюк Ю.В., Сорич В.А., Сорич Н.М. Подвійний інтеграл та його застосування: метод. рекомендації для самостійної роботи студ. фіз.-мат. фак-ту. Індивідуальні завдання. Кам’янець-Подільський: ПП «Медобори», 2011. 40 с.
11. Сорич Н.М., Сорич В.А. Математичний аналіз. Плани практичних занять. Кам’янець-Подільський: ПП «Медобори-2006», 2018. 52 с.
12. Вища математика. Елементи теорії поля і теорія рядів. Розрахункова робота: навч. посіб. для студ. спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» [Електронний ресурс] / уклад.: О.І. Кушлак-Дивульська, Н.В. Поліщук. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 110 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

ДЕЯКІ КРИВІ НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ

1. Пряма a може бути задана:

1) загальним рівнянням $Ax+By+C=0$, де вектор $\vec{n}=(A;B)$ перпендикулярний до прямої;
2) рівнянням з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$, при цьому $k=tg\varphi$, де $\varphi-$кут між прямою a та віссю абсцис;
3) рівнянням у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, при цьому a та b – відрізки, що відтинає пряма на відповідних координатних осях;
4) рівнянням через дві дані точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y};$$

5) параметрично співвідношеннями $x=mt+x_0$; $y=nt+y_0$, де вектор $\vec{s}$ = $(m; n)$ паралельний прямій, а точка $M_0(x_0;y_0)$ лежить на прямій.

2. Еліпс може бути заданий:

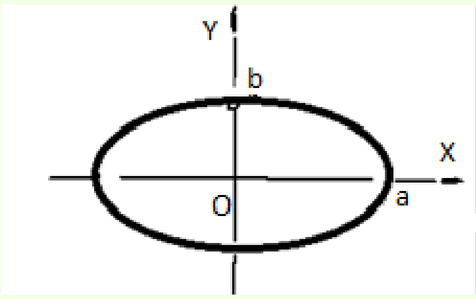


Рис. 1.

1) канонічно рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) параметрично рівностями $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi.$

3. Парабола:

1) задається рівністю $y = ax^2 + bx + c$, при цьому $a \ne 0$, а вітки направлені вгору, або вниз;
2) канонічне рівняння має вигляд $y^2 = 2px$, при цьому вітки направлені вправо або вліво, фокус має координати $(\frac{p}{2};0)$ а графік функції такий $(p > 0)$:

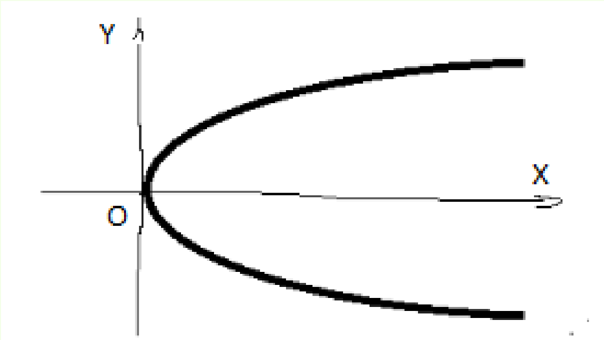


Рис. 2.

3) в полярній системі координат парабола може бути задана рівністю $\rho = \frac{p}{1 \pm \cos\varphi}$, при цьому фокус попадає в початок координат.

4. Гіпербола:

1) задається як графік оберненої пропорційності $xy = k$;
2) канонічне рівняння має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, і графік цієї залежності наступний

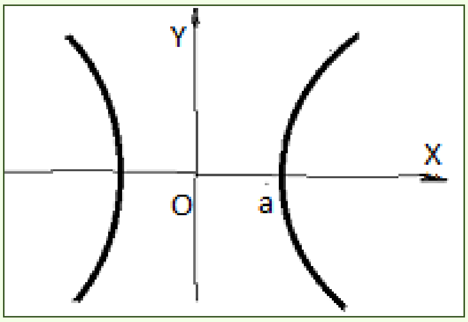


Рис. 3.

5. Циклоїда задається параметрично так: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, її перша арка $(0 \le t \le 2\pi)$ виглядить наступним чином:

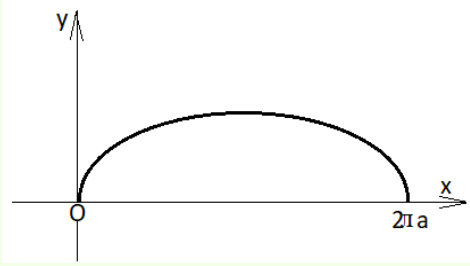


Рис. 4.

6. Астроїда може бути задана:

1) рівнянням в декартовій системі координат $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;
2) параметрично співвідношеннями : $\begin{cases} x = acos^3 t \\ y = asin^3 t \end{cases}$ і вигляд у астроїди наступний

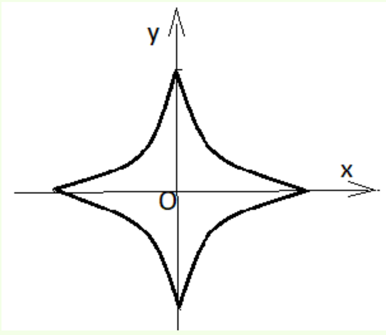


Рис. 5.

7. Кардіоїда може бути задана таким рівняння в полярній системі координат $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ і її графік має вигляд

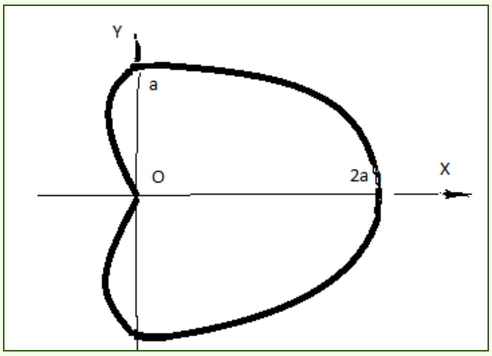


Рис. 6.

8. Лемніската Бернуллі може бути задана:

1) рівнянням в полярній системі координат $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$;
2) рівнянням в декартовій системі координат $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ і її графік має наступний вигляд

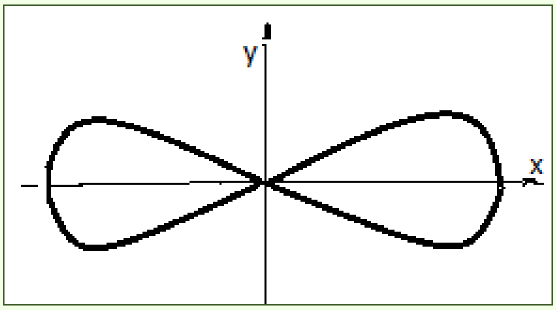


Рис. 7.

3) рівнянням в полярній системі координат $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$;
4) рівнянням в декартовій системі координат $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy$ і її графік має наступний вигляд

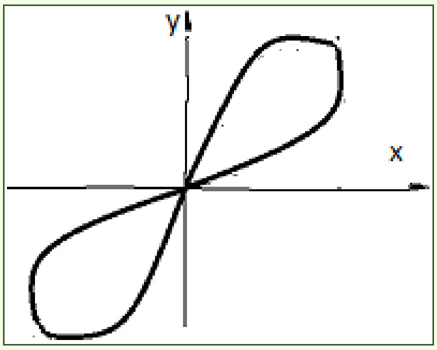


Рис. 8.

Додаток 2

ДЕЯКІ ПОВЕРХНІ

1. Еліпсоїд задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ і має вигляд

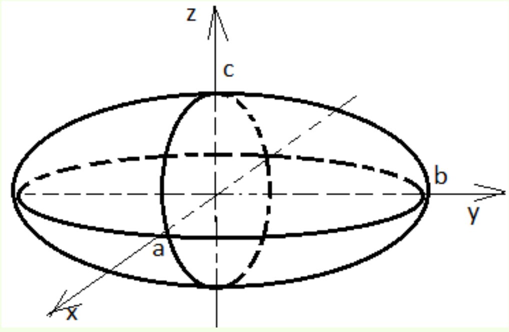


Рис. 1.

2. Еліптичний циліндр задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ і має вигляд

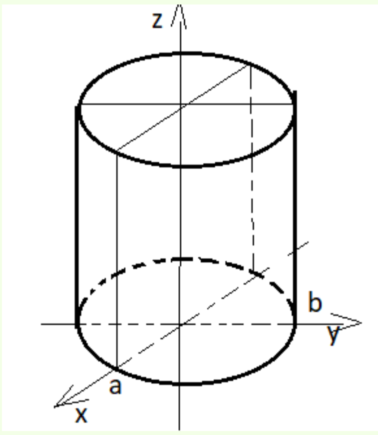


Рис. 2.

3. Параболічний циліндр задається рівнянням $y^2=2px$, зокрема при $p>0$ має вигляд

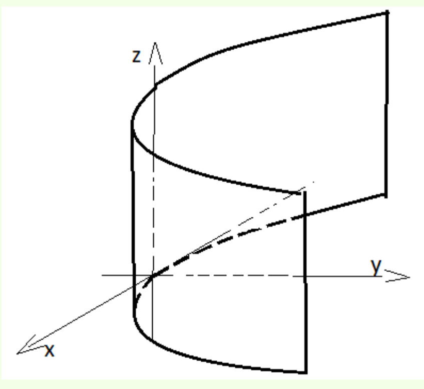


Рис. 3.

4. Гіперболічний циліндр задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і має вигляд

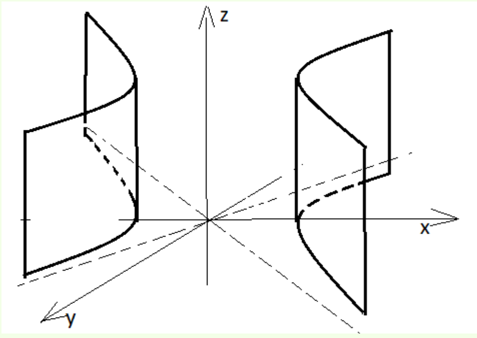


Рис. 4.

5. Параболоїд еліптичний задається рівнянням $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ і має вигляд

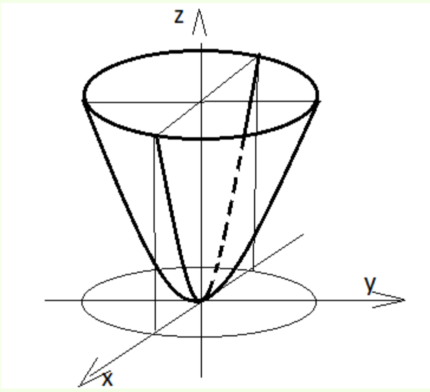


Рис. 5.

6. Однопорожнинний гіперболоїд задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ і має вигляд

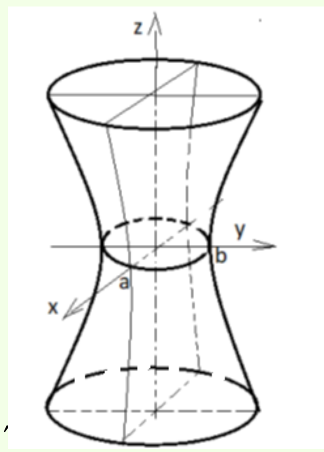


Рис. 6.

7. Двопорожнинний гіперболоїд задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ і має вигляд

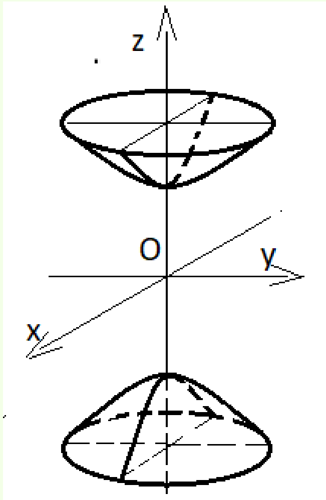


Рис. 7.

8. Гіперболічний параболоїд задається рівнянням $2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ і має вигляд

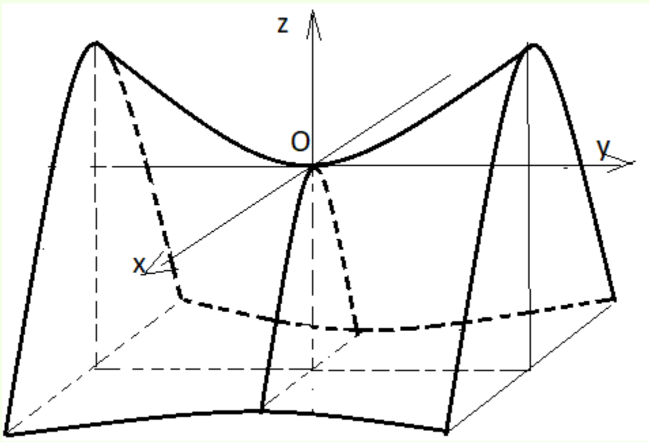


Рис. 8.

Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**СОРИЧ Віктор Андрійович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам’янець-Подільського
національного університет імені Івана Огієнка**

**СОРИЧ Ніна Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент**

ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Підписано 04.03.2025. Формат 60x84/16. Гарнітура «Cambria».
Об’єм даних 2,57 Мб. Обл.-вид. арк. 4,8. Зам. № 1162.

Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Виготовлено в Кам’янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300.