

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА (ПРОЄКТ)
магістра
з теми:
«ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІТЕРАЦІЙ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ
РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ»

Виконав:

студент 2-го курсу групи М1-М23
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)

Гаджук Валерій Іванович

Керівник:

Геселева К.Г.,
кандидат фізико-математичних наук

Рецензент:

м. Кам'янець-Подільський – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ І ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ	7
1.1 ПРИНЦИП СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ	7
1.2 МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ	10
1.3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДО ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	11
1.3.2 Рівняння Фредгольма другого роду	11
1.3.2 Інтегральне рівняння Вольтери другого роду	18
1.4 ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЄВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ	22
РОЗДІЛ 2	26
2.1 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	26
2.1.1 Інтегральне рівняння Гаммерштейна	27
2.1.2 Застосування методу послідовних наближень до рівняння Гаммерштейна	30
2.1.3 Застосування методу послідовних наближень до інтегрального рівняння Урисона.....	33
2.1.4 Нелінійні інтегральні рівняння із змінною верхньою межею інтегрування.....	34
2.2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ	35
2.2.1 Система лінійних алгебраїчних рівнянь з параметром	39
2.3 ІТЕРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ ТА РІВНЯННЯ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ОПЕРАТОРАМИ	40
2.3.1 Стаціонарний ітераційний процес	42
2.3.2 Оптимальний нестаціонарний ітераційний процес	43
2.3.3 Застосування методу до рівняння з несамопряженим оператором ...	48
2.3.4 Багатокроковий ітераційний процес	49
2.4 ГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ.....	50

2.4.1	Метод найшвидшого спуску.....	50
2.4.2	Метод мінімальних нав'язок.....	52
2.4.3	Метод мінімальних похибок.....	53
2.4.4	Багатокрокові градієнтні методи.....	54
	ВИСНОВКИ.....	56
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	58

ВСТУП

Актуальність теми. Методи ітераційного типу одні з найпоширеніших чисельних методів розв'язання різноманітних математичних задач, зокрема інтегральних рівнянь. Їхня універсальність полягає у можливості застосування до широкого класу задач, що виникають у різних галузях науки і техніки. Багато інтегральних рівнянь не мають аналітичного розв'язку або його знаходження є надзвичайно складним. Тому чисельні методи, такі як ітераційні, стають незамінним інструментом для отримання наближених розв'язків. З розвитком прикладних комп'ютерних програм та ефективних алгоритмів реалізації методу ітерацій стало можливим розв'язувати все більш складні інтегральні рівняння. Інтегральні рівняння знаходять широке застосування в таких галузях, як: фізика, механіка, економіка, біологія. Так, наприклад, вони є інструментом розв'язання прикладних задач з: теорії потенціалів, квантової механіки, теорії пружності, теорії пластичності, теорії тріщин, моделювання економічних процесів, моделювання популяцій, фільтрації сигналів, розпізнавання образів.

Отже, тема "Застосування методу ітерацій для знаходження розв'язків інтегральних рівнянь" є не тільки теоретично цікавою, але й має велике практичне значення. Ваша кваліфікаційна робота може внести свій вклад у розвиток чисельних методів розв'язання інтегральних рівнянь та знайти застосування в різних галузях науки і техніки.

Мета роботи: дослідити ітераційні методи побудови наближених розв'язків задачі різних видів інтегральних рівнянь та їхніх систем, а саме: розглянути один з основних ітераційний методів, - метод послідовних наближень; застосувати цей метод до інтегрального рівняння Фредгольма, Вольтери, Урисона, Гаммерштейна, та до систем рівнянь; побудувати наближені розв'язки крайової задачі для диференціального рівняння; дослідити ітераційні процеси.

Об’єкт дослідження: лінійні та нелінійні інтегральні рівняння; крайова задача для диференціального рівняння, системи алгебраїчних рівнянь, рівняння з необмеженими операторами.

Предмет дослідження: переваги та недоліки застосування методів, збіжність методу.

Методи дослідження: огляд та аналіз наукової літератури за темою дослідження, теоретичні доведення, обґрунтування методів, обчислювальні схеми, порівняльний аналіз отриманих результатів, застосування методів на конкретних прикладах.

Структура роботи. Робота складається з вступу двох розділів висновків та списку використаних джерел. У першому розділі розглядається загальна схема методу послідовних наближень та принцип стискаючих відображень. У другому розділі розглянуто достатньо широку коло застосувань одного з ітераційних методів, а саме методу послідовних наближень до різного типу інтегральних рівнянь, як лінійних, так і нелінійних; досліджено ітераційні процеси, стаціонарні та нестаціонарні; у обох розділах міститься достатня кількість ілюстративних прикладів.

Практичне значення результатів. У роботі розглянуто різні види інтегральних рівнянь та ітераційних процесів; досліджено крайову задачу побудови наближених розв’язків для диференціального рівняння; підібрано ряд ілюстративних прикладів, які демонструють, швидкість збіжності цих методів; зроблено порівняння переваг та недоліків методу послідовних наближень. Отримані результати можуть бути використані здобувачами вищої освіти фізико-математичних факультетів для подальшого дослідження, методів побудови наближених розв’язків різних задач прикладного та теоретичного характеру, оскільки інтегральні рівняння широко застосовуються у моделюванні різних процесів.

Апробація. Результати науково дослідження доповідалися на звітній науковій конференції за підсумками науково-дослідної роботи у 2023 році магістрів та студентів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка 8-9 квітня 2024 року без публікації тез. Стаття «Умови єдиності розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма» опублікована у Збірнику наукових праць Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.

Вихідні дані: Гаджук В.І. Умови єдиності розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма. *Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.* Випуск 17. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. С. 00-00.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було проведено детальний аналіз ітераційних методів, зокрема методу послідовних наближень, та їх застосування до розв'язання широкого класу інтегральних рівнянь.

Було надано чітке та докладне обґрунтування теоретичних основ методу послідовних наближень, зокрема принципу стискуючих відображень.

Метод послідовних наближень було успішно застосовано до розв'язання таких типів інтегральних рівнянь:

- Рівняння Фредгольма другого роду;
- Інтегральне рівняння Вольтери другого роду;
- Нелінійні інтегральні рівняння (Гаммерштейна, Урисона);
- Інтегральні рівняння із змінною верхньою межею інтегрування.

Показано, як за допомогою методу послідовних наближень можна побудувати наближені розв'язки крайових задач для диференціальних рівнянь.

Досліджено застосування ітераційних методів для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, зокрема систем з параметром.

Розглянуто ітераційні процеси для рівнянь з необмеженими операторами та проаналізовано їх збіжність.

Було досліджено різні градієнтні методи, такі як метод найшвидшого спуску, метод мінімальних нав'язок та метод мінімальних похибок, та їх застосування до розв'язання оптимізаційних задач.

Результати даної роботи мають значну практичну цінність, оскільки інтегральні рівняння широко використовуються в різних галузях науки та техніки, таких як фізика, механіка, економіка та інші. Розроблені в роботі алгоритми можуть бути застосовані для розв'язання широкого кола задач, що виникають в цих галузях.

Проведене дослідження підтверджує високу актуальність та значущість ітераційних методів у контексті розв'язання широкого кола інтегральних рівнянь. Отримані результати не лише розширюють теоретичні основи чисельних методів, а й відкривають нові перспективи для їх практичного застосування в різних наукових дисциплінах. Зокрема, детально проаналізовано ефективність різних ітераційних схем для різних класів інтегральних рівнянь, що дозволяє обирати оптимальний метод залежно від конкретної задачі. Отримані результати можуть бути використані для створення нових алгоритмів і програмних продуктів, що значно спростить розв'язання складних інженерних та наукових проблем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Morris Tenenbaum and Harry Pollard. Ordinary Differential Equations. Dover Publication. 2009. 604 p.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев : Наук. думка, 1986. 542 с.
3. Габрусєв Г.В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння : навчальний посібник для студентів які навчаються за напрямом автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. 172 с.
4. Габрусєв Г.В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тернопіль, 2014. 175 с.
5. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика: повний курс у прикладах і задачах. Навч. посіб.— К.: Книги України ЛТД, 2010. 470 с.
6. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.
7. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Наближені методи розв'язування операторних рівнянь. К. : Вища шк., 1974. 248 с.
8. Завгородній О.І. та ін. Звичайні диференціальні рівняння: основи теорії та методика розв'язування задач для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навч. інж. спец. Держ. біотехнол. ун-т. Харків: ДБТУ, 2024. 117 с.
9. Курпель Н. С., Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Киев : Наук. думка, 1968. 244 с..
10. Лучка А. Ю. Проекційно-ітеративні методи. Київ : Наук. думка, 1993. 288 с.