Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

Магістра

З теми: **«Сумісне наближення класів диференційовних функцій насиченими методами»**

Виконав: студент 2 курсу, групи М1-М23
спеціальності 014.04 Середня освіта
(Математика, інформатика)
Джулія Андрія Олександровича
Науковий керівник:
Кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики
Сорич В.А.
Рецензент:
Кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики
Сорич Н.М.

Кам’янець-Подільський 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Майже у всіх галузях математики важливу роль відіграють задачі про наближення (заміну) складних об'єктів простішими по структурі або із відомими потрібними характеристиками (диференційовність, обмеженість, неперервність та ін.). Теорія наближення, або як її називають в математичному аналізі теорія апроксимації, має зазвичай справу із наближенням окремих функцій чи класів функцій за допомогою скінченно вимірних лінійних підпросторів. Для періодичних функцій та їх класів в ролі таких підпросторів вибирають множини тригонометричних многочленів заданого порядку n, або деякі підмножини цієї множини.

Задачі апроксимаційного змісту в багатьох випадках є задачами на екстремум: потрібно було відшукати точну верхню грань похибки наближення функцій із заданого класу заданим методом наближення. Першою такою задачею було дослідження асимптотичної поведінки при $n \to \infty$ величини $\mathcal{E}(W^r; S_n) = \sup\limits_{f \in W^r} \| f(x) - S_n(f;x) \|_C$, де

$W^r = \left\{ f \middle| \| f^{(r)}(x) \|_\infty \le 1, f^{(r)} \perp 1 \right\}, r \in N,$ а $S_n(f;x) -$ частинна сума Фур'є.

В 1935 р. Колмогоров ([ ])показав, що при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(W^r, S_n) = \sup_{f \in W^r} \rho_n(f) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + \mathcal{O}(1) n^{-r}.$$

(1)

Поряд із сумами Фур'є в якості наближуючих агрегатів використовуються і інші побудовані по функції тригонометричні многочлени. Це викликано тим, що в окремих випадках суми Фур'є функції $f(x)$ збігаються до неї дуже повільно, а то і взагалі розбіжні, навіть якщо наближаюча функція є неперервною. Вказаний факт спонукає знаходити інші способи побудови послідовностей таких наближаючих поліномів, які б уже рівномірно збігалися до початкової функції на всьому просторі С. Роль таких многочленів успішно виконали, як відомо з курсу математичного аналізу, суми Фейєра.

Аналог асимптотичної рівності (1) на класі $W^r H^\omega = \left\{ f \,|\, f^{(r)} \in H^\omega ,\, f^{(r)} \perp 1 \right\}$

був одержаний С.М. Нікольським ([ ]). Ці дослідження Колмогорова та Нікольського поклали початок новому напряму в теорії наближення функцій і підсумовування рядів Фур'є. Результати цих досліджень поширювали на інші класи функцій, а за агрегати наближення розглядалися тригонометричні поліноми $U_n(f;x)$, породжені різними методами U_n підсумовування рядів Фур'є.

Задача про відшукання асимптотичних при $n \to \infty$ рівностей для величин $\mathcal{E}_n(\mathrm{M}, U_n)_X = \sup\limits_{f \in \mathrm{M}} \| f(x) - U_n(f, \Lambda, x) \|_X$ стала однією з найбільш важливих в теорії наближення функцій. Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(n) = \varphi(\mathrm{M}, U_n, n)$ така, що при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність $\mathcal{E}_n(\mathrm{M}, U_n, n) = \varphi(n) + o(\varphi(n))$, то кажуть що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського на класі M для методу Λ в метриці X.

Нехай деяка $\psi(k), k = 0,1,2,...,$ числова послідовність, а сума функціонального ряду $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$ є деякою сумовною функцією.

Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ пов'язані рівністю $f(x) = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(x+t)\Psi(t)dt = \varphi * \Psi$, то кажуть, що f є згорткою φ та Ψ , при цьому Ψ називають ядром згортки.

Мета даної роботи. Нехай $\Psi_{i,\beta_i}(t)$ – сумовні ядра, $\varphi(t) \in U_\infty^0$, $f_i(x) = \varphi * \Psi_{i,\beta_i}$, $i = \overline{1,m}$. Мета даної роботи полягає в тому, щоб дослідити асимптотичну поведінку при $n \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}_{n,m}(U_\infty^0; \sigma_n) = \sup_{\varphi \in U_\infty^0} \left\| \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - \sigma_n(f_i; x)| \right\|_c$$

при деяких обмеженнях на параметри $\psi_i(k), k \in N, \beta_i \in R$.

Для досягнення поставлених завдань використовуються наступні **методи наукового дослідження:**

1. Аналіз наукових праць із розглядуваної тематики.
2. Узагальнення попередньо отриманих результатів.
3. Обґрунтування справедливості нових тверджень, використовуючи вже відомі результати.
4. Систематизація наукових відомостей з даної теми.

Об'єктом дослідження даної роботи буде поведінка величини сумісного наближення $\mathcal{E}_{n,m}(U_\infty^0; \sigma_n)$, а **предметом дослідження** — точна верхня грань цієї величини у просторі неперервних функцій.

Наукова новизна магістерської роботи полягає у тому, що в ній розв'язано аналог задачі Колмогорова-Нікольського на класах Степанця для сум Фейєра в рівномірній метриці для випадку сумісного наближення при настанні насиченості для методу Фейєра.

Практичне значення роботи полягає у тому, що отримані результати можуть бути використані у подальших дослідженнях наближення функцій сумами Фейєра, при розв'язанні задач сумісного наближення іншими методами підсумовування рядів Фур'є на різних класах функцій.

Структура роботи. Магістерська робота, обсягом 62 друкованих аркушів, складається зі списку основних позначень, вступу, двох розділів, в кожному з яких по чотири параграфи, висновку та списку використаної літератури.

У першому розділі представлені класи диференційованих функцій, зокрема клас диференційовних по Степанцю функцій, який буде об'єктом наближення, лінійні методи підсумовування рядів Фур'є, умови регулярності для цих методів, умови насиченості для найпоширеніших методів.

В другому розділі в першому параграфі розглянуто постановку задачі сумісного наближення. Також наводяться результати її розв'язання на класах $W^r H_\omega, W_\beta^r H_\omega$, отримані О.І. Степанцем у випадку наближення сумами Фур'є, а також асимптотична рівність для сумісного наближення функцій із класу $W^r H_\omega$ сумами Валле-Пуссена, отримана Н.М. Задерей. В другому параграфі викладено наближення періодичних диференційовних функцій сумами Фейєра у випадку насичення. В третьому параграфі одержано деякі допоміжні твердження, потрібні в четвертому параграфі для власне розв'язання задачі сумісного наближення.

ВИСНОВОК

В даній магістерській роботі розглядалася задача Колмогорова-Нікольського на класах Степанця $C^{\psi_i}_{\beta_i,\infty}$ для сум Фейєра в рівномірній метриці.

Досліджувалась асимптотична при $n \to \infty$ поведінка величини

$$\mathcal{E}_{n,m}(U^0_\infty;\sigma_n) = \sup_{\varphi\in U^0_\infty} \left\| \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - \sigma_n(f_i;x)| \right\|_c ,$$

при умові, що $f_i = \varphi * \Psi_i$, де $\Psi_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_i(k) cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2}\right)$ і послідовності $k^s\psi_i(k)$ $(s > 1)$ — монотонно спадні до нуля і опуклі донизу послідовності, $i = \overline{1,m}.$ В цьому випадку метод підсумовування (метод Фейєра) є насиченим та класи, на яких розглядають відхилення функцій від їх сум Феєйра, включаються в класи насичення для методу Фейєра, тобто класи $C^{\psi_i}_{\beta_i} \subset W^1$.

Було отримано наступні результати:

Нехай $\beta_i \in R, \gamma_i = \left\{\frac{\beta_i}{2}\right\}, i = \overline{1,m}$. Тоді при $\gamma_i \in \left[0;\frac{1}{2}\right], i = \overline{1,m}$; або ж $\gamma_i \in [\frac{1}{2};1), i = \overline{1,m}$ при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,m}(U^0_\infty;\sigma_n) =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k) \cos(kt + \gamma_i \pi) - C^* \right| dt + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{O}(1)\psi_i(n) \ln n, n \to \infty ,$$

де C^* — стала найкращого наближення в метриці L підінтегральної функції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. Задерей Н.Н. Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Валле-Пуссена. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. — 32 с. — (Препринт, АН УССР, Ин-т математики, 81.24).
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: в 2 т. — М.: Мир, 1965. Т. 1. — 1965. — 616 с.
4. Колмогоров А. Н. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fouriershen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. — 1935. -36.-S. 521-526.
5. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
6. Никольский С.М. Асимптотическая оценка остатка при приближении сумами Фурье. Докл. АН СССР. — 1941.-22, №6.- С. 386-389.
7. Никольский С.М. Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности. ДАН СРСР. — 1946. Т. 52. — 1946. — С. 191-194.
8. Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля. Изв. АН СССР. — 1940. — Т. 4, № 6. — С. 521-528.
9. Сорич В.А., Сорич Н.М., Сорич А.В. Сумісне наближення класів $\overline{\psi}$ - інтегралів // Наукові праці Кам’янець-Подільського державного університету: в 3-х томах. — Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський державний педагогічний університет, інформаційно-видавничий відділ, 2003. — (вип. 2). Т. 2. — 2003. — С. 15—18.
10. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.
11. Степанец А.И. Классификация периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1983. — 57 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики, 63.69).

12. Степанец А.И. Классификация и приблежение переодических функций/ А.И. Степанец. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.
13. Степанец А.И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАНУ, 2002 – Т.1.
14. Теляковский С. А. Приближение периодическихфункций сумами Валле-Пуссена. Докл. АН СССР.-1958.-121, №3.-С.426-429.
15. Теляковский С. А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1961-62 — С. 61-97.
16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. — М.: Наука, 1962. Т. 3. — 1966. — 656 с.