

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка**  
**Фізико-математичний факультет**  
**Кафедра математики**

**ДИПЛОМНА РОБОТА**

**«Побудова найкращого лінійного методу сумісного  
наближення диференційовних функцій та їх похідних»**

Студентки М1-М23 групи фізико-математичного факультету  
спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика, інформатика)

**Гнатюк Наталії Сергіївни**

**Науковий керівник:**

Кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри математики  
Сорич В.А.

**Рецензент:**

Кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри математики  
Гудима У. В.

Кам'янець- Подільський, 2024

## Зміст

|                                                                                                                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Вступ .....                                                                                                                                                             | 3         |
| 0.1. Перелік умовних позначень .....                                                                                                                                    | 5         |
| 0.2. Класи функцій .....                                                                                                                                                | 8         |
| 0.3. Короткий огляд результатів та історичні відомості .....                                                                                                            | 15        |
| 0.4. Відношення порядку для $(\psi; \bar{\beta})$ похідних .....                                                                                                        | 20        |
| <b>Розділ I. Побудова найкращих лінійних методів сумісного наближення .....</b>                                                                                         | <b>25</b> |
| 1.1. Постановка задачі дипломної роботи та інтегральне подання лінійних методів наближення .....                                                                        | 25        |
| 1.2. Теорема існування найкращого лінійного методу сумісного наближення диференційовних функцій .....                                                                   | 31        |
| 1.3. Побудова найкращого лінійного методу сумісного наближення суми функцій, породжених ядрами Бернуллі та ядрами Пуассона в рівномірній та інтегральній метриках ..... | 36        |
| <b>Розділ II. Побудова найкращих лінійних методів сумісного наближення деяких класів функцій .....</b>                                                                  | <b>44</b> |
| 2.1. Властивості ядра згортки сумісного наближення функцій та їх похідних .....                                                                                         | 44        |
| 2.2. Найкраще сумісне наближення деяких класів функцій .....                                                                                                            | 48        |
| 2.3. Побудова найкращого лінійного методу сумісного наближення деяких класів функцій .....                                                                              | 52        |
| Висновки .....                                                                                                                                                          | 62        |
| Список використаних джерел .....                                                                                                                                        | 67        |

## Вступ

В роботі вивчено питання можливості побудови найкращих лінійних методів сумісного наближення диференційовних функцій та їх похідних тригонометричними поліномами на класах періодичних функцій дійсної змінної, що задаються за допомогою  $(\psi, \beta)$ – похідних, у рівномірній та інтегральній метриках. Показано, що на класах  $C_{\beta, \infty}^{\psi}$  і  $L_{\beta, 1}^{\psi}$ , при відповідних значеннях параметрів задачі  $\psi_i, \beta_i$  досліджуваний лінійний метод наближення є найкращим тригонометричним поліномом степеня  $n-1$  в просторах  $C$  і  $L$  відповідно.

В 1983 році О.І. Степанцем були введені класи  $2\pi$  –періодичних функцій, які при конкретних значеннях параметрів, що їх задають співпадають із відомими раніше класами диференційовних функцій, та здатні враховувати властивості функцій, які в сітці відомих класів здійснити було неможливо.

Напрямок, пов'язаний із дослідженням найкращих наближень  $2\pi$  – періодичних функцій тригонометричними поліномами бере свій початок у роботах П.Л. Чебишева, який ще у 50-х роках 19 –го сторіччя розглянув задачу знаходження полінома, що найближче знаходиться від наперед заданої неперервної функції. Пізніше такого напрямку дослідження в теорії наближення розвинулися завдяки роботам К. Вейєрштрасса, Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, Валле-Пуссена та інших видатних математиків. На перших етапах досліджень теорії наближень проводилось вивчення наближень індивідуальних функцій. Завдяки працям А.М. Колмогорова, Ж. Фавара, Н.І. Ахієзера, М.Г. Крейна, Б. Надя, С.М. Нікольського починаючи з 30-х років двадцятого сторіччя вивчення найкращих наближень чи інших апроксимативних характеристик зміщується на класи функцій, котрі володіють певними диференціально – різницеvими, а чи гладкісними властивостями. Вперше точні значення найкращих рівномірних наближень

тригонометричними поліномами порядку не вищого, за  $n-1$ , на класах  $W_{\infty}^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , обчислив Ж. Фавар в 1936 році, довівши, що

$$E_n(W_{\infty}^r)_C = \sup_{f \in W_{\infty}^r} \inf_{t_{n-1}} \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C = \frac{K_r}{n^r}, \quad (B.1)$$

де  $K_r = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$ ,  $r = 0, 1, \dots$  - добре відомі в математичній літературі, як константи Фавара.

Отримання точних значень найкращих наближень в рівномірній та інтегральній метриках для різноманітних функціональних компактів було завданням багатьох видатних математиків 20 –го сторіччя: Н.І. Ахієзера, М.Г. Крейна, Б. Надя, С.М. Нікольського, В.К. Дзядика, С.Б. Стєчкіна, Сунь Юн Шена, М.П. Корнейчука, В.Ф. Бабенка, О.І. Степанця та ін.

## Висновки

В дипломній роботі я розглядала можливість побудови найкращих лінійних методів сумісного наближення деяких класів функцій в інтегральній  $L_1$  та неперервній  $C$  метриках. С.М. Нікольським отримано ряд тверджень зального характеру що відносяться до лінійних методів наближення. У випадку сумісного наближення функцій із заданого класу та їх похідних можна довести аналогічні теореми. Безпосередньо, в першому розділі даної роботи вказані в явному вигляді ( через коефіцієнти Фур'є твірних ядер згортки функцій Бенулі  $B_{r,\beta}(t)$ , та Пуассона  $\mathcal{P}_\gamma^q(t)$  з елементами одиничних куль з відповідних просторів  $L_1$  та  $C$ ) найкращі лінійні методи наближення, що забезпечують на класах  $U_\infty^0(U_1^0)$  найкраще наближення на випадок побудови двох лінійних методів сумісного наближення. Отримані результати досліджень відображені в дипломній роботі у вигляді наслідку до інтерполяційних формул, що є аналогами аналогічних співвідношень С.Надя, В.К. Дзядика, О.І. Степанця.

**Наслідок.** Нехай  $r > 0$ ,  $0 < q < 1$ ,  $\beta, \gamma \in R$ . Якщо виконується одна з умов:

- 1)  $r \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 1 \pmod{4}$ ;
- 2)  $r \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 3 \pmod{4}$ ;
- 3)  $r \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- 4)  $r \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- 5)  $0 < r \leq 1$ ,  $r + 4s \leq \beta \leq 2 - r + 4s$ ,  $s \in Z$ ,  $\gamma \equiv 1 \pmod{4}$ ;
- 6)  $r \equiv \beta \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\gamma \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- 7)  $r \equiv \beta \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\gamma \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- 8)  $0 < r \leq 1$ ,  $4s \leq \beta \leq r + 4s$ ,  $s \in Z$ ,  $\gamma \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- 9)  $0 < r \leq 1$ ,  $4s + 2 \leq \beta \leq r + 2 + 4s$ ,  $s \in Z$ ,  $\gamma \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- 10)  $0 < r \leq 1$ ,  $4s + 2 - r \leq \beta \leq 4s + 2$ ,  $s \in Z$ ,  $\gamma \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- 11)  $0 < r \leq 1$ ,  $4s + 4 - r \leq \beta \leq 4s + 4$ ,  $s \in Z$ ,  $\gamma \equiv 2 \pmod{4}$ ,

тоді виконуються рівності:

$$\begin{aligned}
 E_{n,2}(U_{\infty}^0)_C &= \mathcal{E}_{n,2}(U_{\infty}^0)_C = E_{n,2}(U_1^0)_L = \mathcal{E}_{n,2}(U_{\infty}^0)_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L \\
 &= \|K * \text{sigsinn}(\cdot)\|_C = \\
 &= \frac{4}{\pi} \left| \frac{1}{n^r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin[(2v+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}]}{(2v+1)^{r+1}} + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{q^{(2v+1)n}}{2v+1} \sin\left[(2v+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right] \right|,
 \end{aligned}$$

де системи чисел

$$M^* = \left\{ \mu_{k,1}^* \right\}_{k=0}^{n-1}, N^* = \left\{ \nu_{k,1}^* \right\}_{k=0}^{n-1},$$

які визначають тригонометричний многочлен  $t_{n-1}^*(t)$  найкращого наближення суми функцій різних класів, означаються згідно формул

$$\mu_0^* = 2 \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2nv)^r} \cos\left(2v\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) + q^{2nv} \cos\left(2v\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 \mu_k^* &= \frac{1}{k^r} \cos \frac{\beta\pi}{2} + q^k \cos \frac{\gamma\pi}{2} + \\
 &+ \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2nv-j)^r} \cos\left(2v\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right. \\
 &\left. + q^{2nv-k} \cos\left(2v\theta_n\pi - \frac{\gamma\pi}{2}\right) + q^{2nv+k} \cos\left(2v\theta_n\pi - \frac{\gamma\pi}{2}\right) \right\},
 \end{aligned}$$

$$k = \overline{1, n-1},$$

$$\nu_k^* = \frac{1}{k^r} \sin \frac{\beta\pi}{2} + q^k \sin \frac{\gamma\pi}{2} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2nv-j)^r} \sin\left(2v\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) + q^{2nv-k} \sin\left(2v\theta_n\pi - \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{\gamma\pi}{2}\right) + q^{2nv+k} \sin\left(2v\theta_n\pi - \frac{\gamma\pi}{2}\right) \right\}, k = \overline{1, n-1},
 \end{aligned}$$

а  $\theta_n$  – єдиний на  $[0; 1)$  корінь рівняння

$$\frac{1}{n^r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2v+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right]}{(2v+1)^{r+1}} + \sum_{v=0}^{\infty} q^{(2v+1)n} \cos\left[(2v+1)\theta_n\pi - \frac{\gamma\pi}{2}\right] = 0.$$

Отримані результати досліджень першого розділу узагальнені та перенесені на випадок побудови найкращих лінійних методів сумісного наближення довільних  $m$  – ( $m \in \mathbb{N}$ ) доданків сум функцій ядер Бернуллі та Пуассона взятих із різних класичних класів. Результати наукових пошуків відображені в таких твердженнях.

**Теорема 3.** Нехай  $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m < r, 0 < q < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m \leq 1, \beta, \beta_i, \gamma, \gamma_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$ .

Тоді, при виконанні однієї з умов:

- 1)  $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv \gamma - \gamma_i \equiv 1 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 2)  $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv \gamma - \gamma_i \equiv 3 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 3)  $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv \gamma - \gamma_i \equiv 0 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 4)  $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv \gamma - \gamma_i \equiv 2 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 5)  $0 < r - r_i \leq 1, r - r_i + 4s \leq \beta - \beta_i \leq 2 - r + r_i + 4s, s \in \mathbb{Z}, \gamma - \gamma_i \equiv 1 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 6)  $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv 1 \pmod{4}, \gamma - \gamma_i \equiv 0 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 7)  $r - r_i \equiv \beta - \beta_i \equiv 3 \pmod{4}, \gamma - \gamma_i \equiv 2 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 8)  $0 < r - r_i \leq 1, 4s \leq \beta - \beta_i \leq r - r_i + 4s, s \in \mathbb{Z}, \gamma - \gamma_i \equiv 0 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 9)  $0 < r - r_i \leq 1, 4s + 2 \leq \beta - \beta_i \leq r - r_i + 2 + 4s, s \in \mathbb{Z}, \gamma - \gamma_i \equiv 2 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 10)  $0 < r - r_i \leq 1, 4s + 2 - r + r_i \leq \beta - \beta_i \leq 2 + 4s, s \in \mathbb{Z}, \gamma - \gamma_i \equiv 0 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$
- 11)  $0 < r - r_i \leq 1, 4s + 4 - r + r_i \leq \beta - \beta_i \leq 4 + 4s, s \in \mathbb{Z}, \gamma - \gamma_i \equiv 2 \pmod{4}, i = \overline{1, m};$

виконується рівність при кожному натуральному  $n$

$$E_{n,m}(U_{\infty}^0)_c = \varepsilon_{n,m}(U_{\infty}^0)_c = E_{n,m}(U_1^0)_L = \varepsilon_{n,m}(U_{\infty}^0)_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L = \|K *$$

$$\sin n(\cdot)\|_C = \frac{4}{\pi} \left| \frac{1}{n^r} \sum_{i=1}^m \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin[(2v+1)\theta_n\pi - (\beta - \beta_i)\frac{\pi}{2}]}{(2v+1)^{r+1-r_i}} + \right.$$

$$\left. q^n \sum_{i=1}^m \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{q}{q_i}\right)^{(2v+1)n} \sin[(2v+1)\theta_n\pi - (\gamma - \gamma_i)\frac{\pi}{2}]}{2v+1} \right|,$$

де  $\theta_n$  є єдиним коренем рівняння

$$\frac{1}{n^r} \sum_{i=1}^m \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\cos[(2v+1)\theta_n\pi - (\beta - \beta_i)\frac{\pi}{2}]}{(2v+1)^{r-r_i}} +$$

$$+ q^n \sum_{i=1}^m \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{q}{q_i}\right)^{2vn} \cos[(2v+1)\theta_n\pi - (\gamma - \gamma_i)\frac{\pi}{2}] = 0 \quad ,$$

а системи чисел

$$M^* = \{\mu_k^*\}_{k=0}^{n-1}, N^* = \{\nu_k^*\}_{k=0}^{n-1},$$

за якими будують тригонометричний многочлен  $T_{n-1}^*(t)$  найкращого наближення в задачі інтерференції функцій із різних класів означаються згідно формул (2.28)-(2.30) дипломної роботи.

Якщо розглянути випадок, коли ядро

$$K(t) = \sum_{i=1}^m (n^{-r_i} B_{r-r_i, \beta-\beta_i}(t) + q_i^n \mathcal{P}_{\gamma-\gamma_i}^{\frac{q}{q_i}}(t))$$

містить неоднакову кількість доданків ядер Бернуллі та Пуассона, зокрема, як у випадку

$$K(t) = \sum_{i=1}^{m_1} n^{-r_i} B_{r-r_i, \beta-\beta_i}(t) + \sum_{i=1}^{m_2} q_i^n \mathcal{P}_{\gamma-\gamma_i}^{\frac{q}{q_i}}(t),$$

то ввівши позначення  $\sigma_{i,1} = \begin{cases} 1, i \leq m_1 \\ 0, i > m_1 \end{cases}$ ,  $\sigma_{i,2} = \begin{cases} 1, i \leq m_2 \\ 0, i > m_2 \end{cases}$ ,  $m = \max\{m_1, m_2\}$ ,

прийдемо до раніше розглянутого випадку, а саме, покладемо

$$K(t) = \sum_{i=1}^m (n^{-r_i} \sigma_{i,1} B_{r-r_i, \beta-\beta_i}(t) + q_i^n \sigma_{i,2} \mathcal{P}_{\gamma-\gamma_i}^{\frac{q}{q_i}}(t)).$$

І аналогічно отримаємо таке твердження.

**Теорема 4.** Нехай  $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{m_1} < r, 0 < q < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{m_2} \leq 1$ ,

$$\beta, \beta_i, \gamma, \gamma_i \in R, i = \overline{1, m}, \sigma_{i,1} = \begin{cases} 1, i \leq m_1 \\ 0, i > m_1 \end{cases}, \sigma_{i,2} = \begin{cases} 1, i \leq m_2 \\ 0, i > m_2 \end{cases}, m = \max\{m_1, m_2\}.$$

Якщо виконується одна з умов теореми 3, то при кожному натуральному  $n$  виконується рівність

$$E_{n,m}(U_\infty^0)_C = \mathcal{E}_{n,m}(U_\infty^0)_C = E_{n,m}(U_1^0)_L = \mathcal{E}_{n,m}(U_\infty^0)_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L = \|K * \sin n(\cdot)\|_C =$$

$$\frac{4}{\pi} \left| \frac{1}{n^r} \sum_{i=1}^m \sigma_{i,1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\sin \left[ (2v+1) \theta_n \pi - (\beta - \beta_i) \frac{\pi}{2} \right]}{(2v+1)^{r+1-r_i}} + \right.$$

$$\left. q^n \sum_{i=1}^m \sigma_{i,2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{q}{q_i} \right)^{(2v+1)n} \sin \left[ (2v+1) \theta_n \pi - (\gamma - \gamma_i) \frac{\pi}{2} \right]}{2v+1} \right|$$

де  $\theta_n$  є єдиним коренем рівняння

$$\frac{1}{n^r} \sum_{i=1}^m \sigma_{i,1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\cos \left[ (2v+1) \theta_n \pi - (\beta - \beta_i) \frac{\pi}{2} \right]}{(2v+1)^{r-r_i}} +$$

$$+ q^n \sum_{i=1}^m \sigma_{i,2} \sum_{v=0}^{\infty} \left( \frac{q}{q_i} \right)^{2vn} \cos \left[ (2v+1) \theta_n \pi - (\gamma - \gamma_i) \frac{\pi}{2} \right] = 0.$$

### Список використаних джерел

- 1.Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами. Тр.МИАН СССР, 1945.-Т.15.-С.1-58.
- 2.Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер. Мат. заметки. -1974.-16.-С.691-701.
3. Степанец А.И. Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье. Докл.АН СССР, - 1980. -254.-С.543-544.
4. Сорич Н.Н. Совместное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье. Мат. заметки. - 1984.- 36.- С.873-882.
5. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций.К.: Наук. думка, 1987.-268с.
6. Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten Entwicklungen, I.Periodischer Fall, Berichte der math.Phys. Acad.der Wiss. zu Leipzig. – 1938. – 90.- Р. 103-104.
7. Крейн М.Г. К теории наилучшего приближения периодических функций. Докл. АН СССР. – 1938.- 18. – С. 245-249.
8. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. Изв. АН СССР, сер. мат. -1946.- 10.- С.207-256.
9. Бушанский А.В. О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций. Исследования по теории приближения функций и их производных. – К.: Ин-т математики, 1978.- С.29-37.
10. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.- 936 с.
- 11.Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную  $s$ -ю производную ( $0 < s < 1$ ). Изв. АН СССР, сер. мат. – 1953.- 17. – С. 135-162.
12. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.- 320 с.
13. Шевалдин В.Т. Поперечники классов сверток с ядрами Пуассона. Мат.заметки, 1992.- 51.- С.126-136.

14. А.В. Сорич, В.А. Сорич, Н.М. Сорич. Найкращі лінійні методи лінійної комбінації ядер Пуассона. Зб. наук. пр. Кам'янець- Подільського держ. ун-ту. Серія фізико-математична ( Математика).- Кам'янець-Подільський: ПП" Аксіома", 2005, - Вип.8.- С. 136-144.
15. Сорич В.А., Сорич Н.М. Найкраще наближення суми функцій різних класів. Наукові праці Кам'янець- Подільського національного університету імені Івана Огієнка: зб. за підсумками звіт.наук. конф. викл., доктлоантів і асп., вип.16, у 3 т.- Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. Ун-т, 2017.-Т.2., С.
16. В.А. Сорич, Н.М. Сорич Найкраще наближення лінійної комбінації ядер Пуассона. Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: зб.наук.пр.( за матеріалами Всеукраїнської науково- методичної конференції) – Київ- Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ.ун-т, інформаційно-видавничий відділ. 2004. С. 60-69.
17. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.-Л.: ГИИЕЛ, 1947.- 323с.
18. Степанец А.И. Классификация периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. Изв. АН УССР, ин-т. математики.-К.:1983.- 57с.
19. Сорич Н.Н. Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье.- Киев, 1985. С.22-63. (Препринт/ Ин-т математики АН УССР, 89.19).
20. Степанец А.И. Методы теории приближения. В 2ч. НАН Украины, ин-т математики. –К: 2002. – ч.ІІ . - 468 с.
21. Степанец А.И., Новикова А.К. Приближение периодических функций суммами Фурье. АН УССР, ин-т математики. - Киев. 1984. – (Препринт Ин-т математики АН УССР), -54 с.
22. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И.- Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981, - 768 с.
23. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.І., гл. І.-615 с.

24. Никольський С.М. Ряд Фур'є функцій с данним модулем неперервности. Докл. АН СССР. -1946.- 52, -с.191- 193.

25.Сорич В.А., Сорич Н.М. Інтерференція найкращого сумісного наближення функцій із різних класів. Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка: збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів: у 3-х томах. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип. 20. Т. 2. С. 313-315.