

Міністерство освіти і науки України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра математики

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА (ПРОЄКТ)**  
**магістра**  
**з теми:**  
**«ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ**  
**ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО**  
**РІВНЯННЯ»**

**Виконав:**

студент 2-го курсу групи М1-М23  
спеціальності 014 Середня освіта  
(Математика)

**Таїров Олександр Борисович**

**Керівник:**

Геселева К.Г.,  
кандидат фізико-математичних наук

**Рецензент:**

---

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                          |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВСТУП.....</b>                                                                                                                        | <b>4</b>  |
| <b>РОЗДІЛ 1 МЕТОД ЄЙЛЕРА ТА ЙОГО МОДИФІКАЦІЇ.....</b>                                                                                    | <b>8</b>  |
| 1.1 МЕТОД ЄЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ...                                      | 8         |
| 1.1.1 Постановка задачі .....                                                                                                            | 8         |
| 1.1.2 Метод Ейлера .....                                                                                                                 | 9         |
| 1.1.3 Геометричний зміст методу Ейлера .....                                                                                             | 10        |
| 1.2. МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ЄЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.....                      | 13        |
| 1.2.1 Виправлений метод Ейлера .....                                                                                                     | 14        |
| 1.2.2 Удосконалений метод Ейлера (метод середньої точки) .....                                                                           | 15        |
| 1.2.3 Метод Ейлера-Коші (метод Хойна) .....                                                                                              | 15        |
| 1.2.4 Удосконалений метод Ейлера-Коші з ітераційною обробкою .....                                                                       | 16        |
| 1.2.5 Уточнений метод Ейлера .....                                                                                                       | 16        |
| <b>РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ РУНГЕ-КУТТИ, ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ .....</b>                                                                               | <b>18</b> |
| 2.1 Метод Рунге-Кутти задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку.....                                          | 18        |
| 2.2 Часткові випадки методу Рунге-Кутти .....                                                                                            | 19        |
| 2.3 Метод Рунге-Кутти-Мерсона (покроковий контроль точності) .....                                                                       | 26        |
| 2.4 Побудова наближених розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку методами Рунге-Кутти в MATLAB ..... | 29        |
| <b>РОЗДІЛ 3 ІНШІ ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ .....</b>                                                                                               | <b>32</b> |
| 3.1 БАГАТОКРОКОВІ МЕТОДИ .....                                                                                                           | 32        |
| 3.1.1 Метод Адамса-Бешфорса-Маултона .....                                                                                               | 36        |
| 3.1.2 Метод Мілна-Сімпсона .....                                                                                                         | 38        |
| 3.1.3 Метод Хеммінга .....                                                                                                               | 38        |

|                                                                                                                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2 ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ<br>ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З<br>ВИКОРИСТАННЯМ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ В МАТЛАВ ..... | 39        |
| 3.3 ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ<br>ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ<br>ПОРЯДКІВ.....                                         | 42        |
| 3.4 ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ<br>ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ<br>ДРУГОГО ПОРЯДКУ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ .....      | 44        |
| <b>ВИСНОВКИ .....</b>                                                                                                                                            | <b>48</b> |
| <b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>                                                                                                                           | <b>50</b> |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Сучасні наукові дослідження та інженерні розробки часто потребують моделювання складних процесів, які описуються звичайними диференціальними рівняннями. Це може стосуватися різних сфер: фізики, біології, економіки, екології тощо. У таких випадках аналітичні методи розв'язання цих задач можуть виявитися неефективними або взагалі недоступними. Тому чисельні методи, які дозволяють отримувати наближені рішення, стають незамінними.

Важливим аспектом чисельних методів є їхня точність та стабільність. Сучасні дослідження спрямовані на вдосконалення існуючих методів та розробку нових алгоритмів, які забезпечують високу точність розв'язків при збереженні стабільності обчислень. Це особливо актуально для задач з жорсткими системами диференціальних рівнянь, де невеликі зміни в початкових умовах можуть призводити до суттєвих відхилень у результатах.

Задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем мають широкий спектр застосування в різних наукових і практичних галузях. Це вимагає міждисциплінарного підходу до їхнього вирішення, що включає знання з математики, фізики, інформатики та інших наук. Дослідження чисельних методів сприяє інтеграції знань з цих дисциплін і відкриває нові горизонти для наукових досліджень.

З розвитком комп'ютерних технологій та програмного забезпечення з'явилися можливості для реалізації складних чисельних алгоритмів. Це дозволяє дослідникам і інженерам швидко отримувати результати, що є критично важливим у багатьох сферах, де час є вирішальним фактором. Чисельні методи, такі як метод Ейлера, метод Рунге-Кутти та інші, дозволяють ефективно вирішувати задачі Коші на комп'ютерах, що значно підвищує продуктивність досліджень.

Отже, тема «Чисельні методи побудови наближеного розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння» є актуальною в умовах сучасного розвитку науки і технологій. Вона відкриває нові можливості для досліджень, сприяє розвитку нових технологій і забезпечує підготовку кваліфікованих фахівців у різних галузях.

**Мета роботи:** дослідити чисельні методи побудови наближених розв'язків задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, а саме: метод Ейлера та його модифікації, метод Рунге-Кутти та його різновиди, окремі багатокрокові методи, такі як: метод Адамса-Бешфорса-Маултона, метод Мілна-Сімпсона, метод Хеммінга; реалізувати чисельні обрахунки в пакетах прикладних програм MATLAB побудови наближених розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку методами Рунге-Кутта та розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з використанням багатокрокових методів.

**Об'єкт дослідження:** задача Коші для звичайного диференціального рівняння, задача Коші для диференціального рівняння вищих порядків.

**Предмет дослідження:** точність методів, збіжність розв'язків.

**Методи дослідження:** огляд та аналіз наукової літератури за темою дослідження, теоретичні доведення, обґрунтування методів, обчислювальні схеми, застосування методів на ілюстративних прикладах, пакети прикладних програм середовища MATLAB.

**Структура роботи.** Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі детально розглядається метод Ейлера та його модифікації. У другому розділі розглянуто методи Рунге-Кутти побудови наближених розв'язків задачі Коші для звичайного диференціального рівняння та його часткові випадки, побудовано наближені розв'язки задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку методами Рунге-Кутта в

MATLAB. У третьому розділі розглянуто багатокрокові методи та чисельні методи розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь вищих порядків, наведено зразок розв'язання лінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку методом скінченних різниць.

**Практичне значення результатів.** У роботі розглянуто ряд чисельних методів та їхні модифікації побудови наближених розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь; розв'язано ілюстративні приклади; зроблено перевірку точності окремих методів у пакетах прикладних програм MATLAB. Отримані результати можуть бути використані здобувачами вищої освіти фізико-математичних факультетів для подальшого дослідження чисельних методів побудови наближених розв'язків різних задач прикладного та теоретичного характеру. Чисельні дозволяють вирішувати складні задачі, які не можуть бути розв'язані аналітично, забезпечуючи високий рівень точності і адаптивності до специфічних умов. Це робить їх важливими для розвитку нових технологій, оптимізації існуючих процесів і проведення наукових досліджень.

**Апробація.** Результати наукового дослідження доповідалися на звітній науковій конференції за підсумками науково-дослідної роботи у 2023 році магістрів та студентів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка 8-9 квітня 2024 року без публікації тез. Стаття «Реалізація методу Рунге-Кутти в середовищі MATLAB» опублікована у Збірнику наукових праць Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.

*Вихідні дані:* Таїров О. Б. Реалізація методу Рунге-Кутти в середовищі MATLAB. *Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.* Випуск 17.

Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний  
університет імені Івана Огієнка, 2024. С. 00-00.

## ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота є всебічним дослідженням чисельних методів побудови наближених розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. У роботі виконано детальне дослідження широкого спектру чисельних методів, від простих однокрокових до більш складних багатокрокових. Зроблено теоретичне обґрунтування цих методів, описано алгоритми обчислювальних схем і розв'язано ілюстративні приклади. Особлива увага приділена методам Рунге-Кутти, які широко застосовуються на практиці завдяки своїй точності та ефективності.

Робота демонструє, що існує велика кількість чисельних методів для розв'язання задачі Коші. Кожен метод має свої переваги та недоліки, що залежать від конкретної задачі та вимог до точності розв'язку. Акцентована увага на важливості таких характеристик чисельних методів, як точність і стійкість. Точність визначається тим, наскільки близько чисельний розв'язок наближається до точного розв'язку задачі, а стійкість – тим, наскільки знайдений розв'язок стійкий до похибок округлення та початкових умов. Ефективність методів оцінюється за кількістю обчислень, необхідних для досягнення заданої точності. Різні методи можуть мати різну ефективність залежно від складності задачі. Наведено приклади реалізації методів у середовищі MATLAB, що свідчить про практичну складову роботи та її доступність для широкого кола користувачів.

Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень чисельних методів, та їх застосування до задач в різних областях науки і техніки, де використовуються диференціальні рівняння.

Робота має значну практичну складову, оскільки надає інструменти для розв'язання різноманітних задач, які зводяться до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

Робота є цінним внеском у розвиток чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Вона представляє детальний огляд існуючих методів, їх теоретичне обґрунтування та практичну реалізацію. Результати дослідження можуть бути використані як теоретична основа для подальших досліджень в цій галузі, а також як практичний інструмент для розв'язання широкого кола задач.

Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь є важливим напрямком у математиці та її застосуваннях, оскільки багато реальних процесів описуються саме такими рівняннями. Чисельні методи дозволяють отримувати наближені розв'язки, коли аналітичні рішення недоступні.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вдосконалення існуючих чисельних методів, розробку нових алгоритмів з покращеною стабільністю та адаптивністю до специфіки задачі, а також на застосування чисельних методів для розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь.

Чисельні методи є потужним інструментом для розв'язання задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Їх використання дозволяє отримувати практично корисні результати в умовах, коли аналітичне рішення є складним або неможливим.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Morris Tenenbaum and Harry Pollard. Ordinary Differential Equations. Dover Publication. 2009. 604 p.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев : Наук. думка, 1986. 542 с.
3. Габрусєв Г.В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння : навчальний посібник для студентів які навчаються за напрямом автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. 172 с.
4. Габрусєв Г.В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тернопіль, 2014. 175 с.
5. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика: повний курс у прикладах і задачах. Навч. посіб.— К.: Книги України ЛТД, 2010. 470 с.
6. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.
7. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Наближені методи розв'язування операторних рівнянь. К. : Вища шк., 1974. 248 с.
8. Завгородній О.І. та ін. Звичайні диференціальні рівняння: основи теорії та методика розв'язування задач для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навч. інж. спец. Держ. біотехнол. ун-т. Харків: ДБТУ, 2024. 117 с.
9. Курпель Н. С., Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Киев : Наук. думка, 1968. 244 с..
10. Лучка А. Ю. Проекційно-ітеративні методи. Київ : Наук. думка, 1993. 288 с.