Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота магістра

з теми: **“ЗАДАЧА ТИПУ ЗАДАЧІ ШТЕЙНЕРА
У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ”**

Виконав: студент ІІ курсу, М1-М23 групи
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Терехов Денис Вадимович

Керівник: Гнатюк В. О.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Щирба В. С.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена задачі типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі. Доведено, зокрема, теореми існування та єдиності екстремального елемента для цієї задачі, встановлено для неї співвідношення двоїстості та критерій екстремальності допустимого елемента, оснований на співвідношенні двоїстості.

Актуальність теми. Спочатку задача Штейнера розглядалась на площині у такій постановці: у площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника мінімальна. Цією задачею займалися багато відомих математиків XVII століття: Б. Кавальєрі, Е. Торрічеллі, П. Ферма. У XIX столітті цією та іншими подібними задачами займався німецький геометр Якоб Штейнер. В зв’язку з цим цю та інші задачі, які її узагальнюють, називають задачами Штейнера.

Розв’язком сформульованої вище задачі Штейнера на площині є точка Торрічеллі, тобто точка, з якої сторони трикутника видно під кутом 120 градусів (див. рис. 0.1).

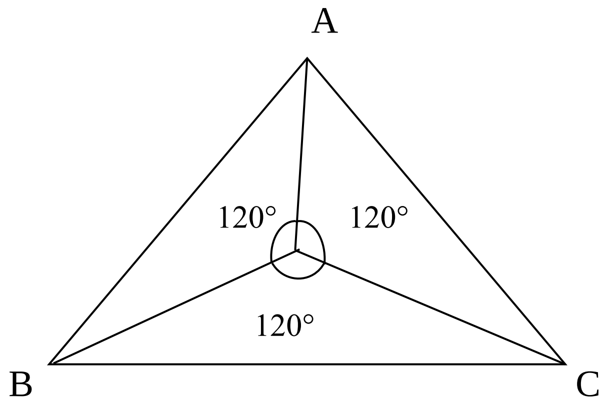

Рис. 0.1.

Якщо трикутник має кут $\geq 120°$, то точка Торрічеллі є вершиною цього кута (див., наприклад, [1, с. 17]).

Загальнішою і набагато складнішою є така задача: для n точок $A_1, A_2, ..., A_n,$ заданих на площині, знайти таку точку $A \in V,$ де V – множина цієї площини, щоб величина $|AA_1| + |AA_2| + ... + |AA_n|$ була б найменшою.

Ця задача має велике практичне значення, зокрема, для побудови найкоротшої мережі ліній (електропередач, телекомунікацій тощо).

Якщо задані точки є вершинами опуклого чотирикутника, а V є всією площиною, то шуканою точкою є точка перетину його діагоналей (див., наприклад, [1, с. 17]). Якщо ж $n \geq 5,$ то, зазвичай, розв'язок задачі уже не вдається одержати явно. Для відшукання наближеного розв'язку цієї узагальненої задачі Штейнера потрібно уже розробляти (використовувати) збіжні чисельні методи (див., наприклад, [1, с. 17]), провівши спочатку необхідні теоретичні дослідження. Тим більше, це стосується абстрактної класичної задачі Штейнера, яка розглядається в довільному лінійному нормованому просторі і полягає в наступному.

Нехай $\left(E, \|\cdot\|\right)$ є лінійним нормованим простором, $a_i,\ i=\overline{1,m},$ – фіксовані елементи $E,$ а V – опукла множина, в тому числі V може співпадати з простором $E.$ Ставиться задача відшукання величини

$$\beta_V^*\left(a_1,\ldots,a_m\right) = \inf_{x\in V} \sum_{i=1}^{m} \|x-a_i\| \tag{0.1}$$

(див., наприклад, [2, с. 314]), тобто у множині V потрібно знайти таку точку $x^*,$ сума відстаней від якої до фіксованих точок $a_i,\ i=\overline{1,m},$ була б найменшою в тому розумінні, що $\sum_{i=1}^{m}\|x^*-a_i\| \leq \sum_{i=1}^{m}\|x-a_i\|,\ x\in V.$ Якщо така точка x^* існує, то її називають точкою Штейнера для точок $a_i,\ i=\overline{1,m},$ відносно множини $V.$

В задачі (0.1) відхилення (відстань) точки $x\in V$ до точки $a_i \in \{a_1,\ldots,a_m\},$ $i=\overline{1,m},$ визначається нормою і дорівнює $\|x-a_i\|.$

Проте, на практиці зустрічаються і розглядаються задачі, в яких цим відхиленням (відстаням) приписують різні вагові коефіцієнти, вагові характеристики. В результаті отримуємо задачу, в якій необхідно у множині V знайти точку, сума «зважених» відстаней від якої до фіксованих точок $a_i,$ $i=\overline{1,m},$ була б найменшою (див., наприклад, [3-5]).

Легко бачити, що частковим випадком задачі відшукання величини (0.1) є задача найкращого наближення елемента a_1 множиною V, тобто задача відшукання величини

$$\beta_V^*\left(a_1\right)=\inf_{x\in V}\left\|x-a_1\right\|, \tag{0.2}$$

основні результати дослідження якої підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [6], В. К. Дзядика [7], М. П. Корнєйчука [8], О. І. Степанця [9, 10] та ін.

Останнім часом серед задач апроксимації чільне місце займають задачі теорії найкращого наближення в розумінні, так званої, «викривленої» метрики: задача найкращого наближення за переднормою, сублінійною функцією, функцією повільного зростання, будь-якою опуклою неперервною функцією тощо (див., наприклад, [11-14]), тобто задачі такого виду

$$\beta_V^*\left(a_1;p\right)=\inf_{x\in V} p\left(x-a_1\right). \tag{0.3}$$

Якщо у множині V необхідно знайти точку, «викривлена» відстань p від якої до мережі точок $a_1,...,a_m$ є найменшою, то прийдемо до необхідності досліджувати та розв'язувати задачі типу задачі Штейнера такого виду

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m;p\right)=\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^{m} p\left(x-a_i\right), \tag{0.4}$$

частковим випадком якої є задача (0.3) (див., наприклад, [15]).

Якщо в задачі (0.4) «викривлена» метрика $p\left(x\right)=\left\|x\right\|^2$, $x\in E,$ то одержимо задачу відшукання

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m;\left\|\cdot\right\|^2\right)=\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^{m}\left\|x-a_i\right\|^2, \tag{0.5}$$

яка є задачею типу задачі Штейнера, в якій «викривлена» відстань від точки $x\in V$ до фіксованих точок a_i, $i=\overline{1,m},$ визначається функцією $p\left(x\right)=\left\|x\right\|^2$, $x\in E,$ де p є невід'ємною, неперервною та опуклою на E функцією.

В схему постановки задачі (0.5) типу задачі Штейнера включається низка задач практичного змісту. Прикладами можуть бути такі задачі геометричного змісту.

Задача 0.1. *На заданій прямій знайти таку точку, щоб сума квадратів відстаней від неї до двох фіксованих точок площини була найменшою.*

Задача 0.2. *Знайти точку, сума квадратів відстаней від якої до вершин тетраедра була б найменшою.*

Задача 0.3. *Довести, що сума квадратів відстаней від вершин правильного n-кутника до будь-якої прямої, що проходить через його центр, є сталою.*

Очевидно, що актуальність задачі відшукання величини (0.5) та її екстремального елемента випливає уже зі змісту самої задачі, адже у множині V шукається точка, сума квадратів відстаней від якої до кількох фіксованих точок була б найменшою. Ця актуальність підвищується ще й тим, що у схему постановки задачі (0.5) вкладається низка задач із різних галузей науки і практики. Результати дослідження задачі відшукання величини (0.5) та її екстремального елемента дозволять з єдиних позицій отримувати результати для тих задач, які вкладаються у схему задачі (0.5) як часткові випадки.

В дипломній роботі задача відшукання величини (0.5) розглядається в гільбертовому просторі, що дозволить, крім результатів загального характеру, які мають місце для всіх лінійних нормованих просторів, отримати глибші та дієвіші результати, основані на означенні та властивостях гільбертового простору, тобто розглядається наступна задача.

Нехай E – гільбертів простір над полем дійсних чисел, $\langle x, y \rangle$ – скалярний добуток елементів x та y цього простору, a_i, $i=\overline{1,m}$, – фіксовані елементи простору E, V – опукла множина E, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in E$. Ставиться задача відшукання величини

$$\alpha_V^*(a_1,...,a_m) = \inf_{x\in V} \sum_{i=1}^{m} \|x-a_i\|^2 = \inf_{x\in V} \sum_{i=1}^{m} \langle x-a_i, x-a_i \rangle \tag{0.6}$$

та її екстремального елемента, тобто точки $x^* \in V$, такої, що

$$\sum_{i=1}^{m} \left\| x^* - a_i \right\|^2 \le \sum_{i=1}^{m} \left\| x - a_i \right\|^2, \; x \in V.$$

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження

Метою роботи є: доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задачі (2.1) ((0.6)) типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі E; розгляд деяких прикладів задач типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі та доведення існування і єдиності екстремальних елементів для цих задач; розгляд екстремальних функціоналів й екстремальних операторів для задачі відшукання величини (2.1) та встановлення їх властивостей; побудова задач апроксимації в гільбертовому просторі E^m, еквівалентних задачі відшукання величини (2.1), та дослідження екстремальних функціоналів й екстремальних операторів цих еквівалентних задач; встановлення співвідношення двоїстості для величини (2.1); доведення критерію екстремальності допустимого елемента для величини (2.1), основаного на співвідношенні двоїстості для цієї величини, його конкретизація на часткові випадки для задачі відшукання величини (2.1).

Об'єктом дослідження є задача типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі (задача відшукання величини (2.1)).

Предметом дослідження є теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі (для задачі відшукання величини (2.1)); екстремальні функціонали та екстремальні оператори для задачі відшукання величини (2.1); задачі апроксимації в гільбертовому просторі E^m, еквівалентні задачі відшукання величини (2.1); співвідношення двоїстості для величини (2.1); критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) та її часткових випадків, оснований на співвідношенні двоїстості.

Задачами дослідження є:

– постановка задачі дослідження (задачі відшукання величини (2.1));

– доведення опуклості і неперервності функції $p(x)=\|x\|^2$, $x\in E$, заданої на лінійному нормованому просторі $(E,\|\cdot\|)$;

– доведення теорем про існування та єдиність екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та деяких її часткових випадків;

– розгляд властивостей декартового степеня E^m, $m\in N$, гільбертового простору E;

– встановлення властивостей екстремального функціонала та екстремального оператора задачі відшукання величини (2.1);

– доведення еквівалентності задачі відшукання величини (2.1) деяким задачам теорії апроксимації в просторі E^m;

– розгляд властивостей екстремального функціонала та екстремального оператора задач теорії апроксимації, еквівалентних задачі відшукання величини (2.1);

– доведення наслідку з нерівності Коші-Буняковського в евклідовому просторі;

– розгляд питань, пов'язаних з ортогональністю у гільбертовому просторі та із загальним виглядом лінійних неперервних функціоналів, заданих на гільбертовому просторі;

– встановлення співвідношення двоїстості для величини (2.1);

– доведення критерію екстремальності допустимого елемента для величини (2.1), основаного на співвідношенні двоїстості для цієї величини, та наслідків з нього.

При написанні дипломної роботи використовувалися методи математичного аналізу, функціонального аналізу, теорії апроксимації та оптимізації, теорії екстремальних задач.

Наукова новизна отриманих результатів

Результати дипломної роботи є новими і полягають у наступному:

Для задачі відшукання величини (2.1) (задачі типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі):

1. Доведено опуклість і неперервність функції $p(x)=\|x\|^2$, $x\in E,$ заданої на лінійному нормованому просторі $(E,\|\cdot\|)$.

2. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та деяких її часткових випадків.

3. Розглянуто властивості декартового степеня E^m, $m\in N,$ гільбертового простору $E.$

4. Встановлено властивості екстремального функціонала та екстремального оператора задачі відшукання величини (2.1).

5. Доведено еквівалентність задачі відшукання величини (2.1) деяким задачам теорії апроксимації в просторі E^m.

6. Розглянуто властивості екстремального функціонала та екстремального оператора задач теорії апроксимації, еквівалентних задачі відшукання величини (2.1).

7. Доведено наслідок з нерівності Коші-Буняковського в евклідовому просторі.

8. Розглянуто питання, пов'язані з ортогональністю у гільбертовому просторі та із загальним виглядом лінійних неперервних функціоналів, заданих на гільбертовому просторі.

9. Встановлено співвідношення двоїстості для величини (2.1).

10. Доведено критерій екстремальності допустимого елемента для величини (2.1), оснований на співвідношенні двоїстості для цієї величини, та наслідки з нього.

Практичне значення отриманих результатів

Дипломна робота має теоретичний характер. Результати роботи можуть бути використані для розв'язування задач теоретичного і практичного характерів, в математичній моделі яких необхідно знайти інфімум суми квадратів відстаней від точок деякої множини лінійного нормованого простору до кількох фіксованих точок цього простору (див. задачі 0.1-0.3 геометричного змісту), задач теорії найкращого у розумінні квадрата відстані наближення точки множини лінійного нормованого простору множиною цього простору, побудови збіжних чисельних методів розв'язування цих задач.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка створена при кафедрі математики, науковій конференції студентів і магістрантів за підсумками НДР у 2023-2024 навчальному році (9 квітня 2024 р., м. Кам'янець-Подільський).

Публікації за результатами дослідження:

Гнатюк В.О., Гудима У.В., Терехов Д.В. Існування та єдиність екстремального елемента для задачі типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Випуск 17. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. С. 32-36.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та опису використаних джерел.

Перший розділ містить деякі поняття та твердження. Серед них деякі поняття та твердження, що стосуються лінійних над полем дійсних чисел просторів, лінійних над полем дійсних чисел нормованих просторів, метричних, повних метричних, банахових, евклідових, гільбертових просторів; просторів, спряжених з лінійними нормованими просторами.

У другому розділі розглянуто постановку задачі типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі (задачу відшукання величини (2.1)); доведено опуклість і неперервність функції $p(x)=\|x\|^2,\ x\in E,$ заданої на лінійному нормованому просторі $(E,\|\cdot\|)$; доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та деяких її часткових випадків; розглянуто деякі властивості декартового степеня $E^m,\ m\in N,$ гільбертового простору E; встановлено властивості екстремального функціонала та екстремального оператора задачі відшукання величини (2.1).

В третьому розділі дипломної роботи доведено еквівалентність задачі відшукання величини (2.1) деяким задачам теорії апроксимації в просторі E^m; розглянуто властивості екстремального функціонала та екстремального оператора цих еквівалентних задач теорії апроксимації; доведено наслідок з нерівності Коші-Буняковського в евклідовому просторі; розглянуто питання, пов’язані з ортогональністю у гільбертовому просторі та із загальним виглядом лінійних неперервних функціоналів, заданих на гільбертовому просторі; встановлено співвідношення двоїстості для величини (2.1); доведено критерій екстремальності допустимого елемента для величини (2.1), оснований на співвідношенні двоїстості для цієї величини, та наслідки з нього.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі «Задача типу задачі Штейнера у гільбертовому просторі»:

1. Доведено опуклість і неперервність функції $p(x)=\|x\|^2$, $x \in E$, заданої на лінійному нормованому просторі $(E,\|\cdot\|)$.

2. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та деяких її часткових випадків.

3. Розглянуто властивості декартового степеня E^m, $m \in N$, гільбертового простору E.

4. Встановлено властивості екстремального функціонала та екстремального оператора задачі відшукання величини (2.1).

5. Доведено еквівалентність задачі відшукання величини (2.1) деяким задачам теорії апроксимації в просторі E^m.

6. Розглянуто властивості екстремального функціонала та екстремального оператора задач теорії апроксимації, еквівалентних задачі відшукання величини (2.1).

7. Доведено наслідок з нерівності Коші-Буняковського в евклідовому просторі.

8. Розглянуто питання, пов'язані з ортогональністю у гільбертовому просторі та із загальним виглядом лінійних неперервних функціоналів, заданих на гільбертовому просторі.

9. Встановлено співвідношення двоїстості для величини (2.1).

10. Доведено критерій екстремальності допустимого елемента для величини (2.1), оснований на співвідношенні двоїстості для цієї величини, та наслідки з нього.

Результати роботи можуть бути використані для розв'язування задач теоретичного і практичного характерів, в математичній моделі яких необхідно знайти інфімум суми квадратів відстаней від точок деякої множини лінійного нормованого простору до кількох фіксованих точок цього простору (див. задачі

0.1-0.3 геометричного змісту), задач теорії найкращого у розумінні квадрата відстані наближення точки множини лінійного нормованого простору множиною цього простору, побудови збіжних чисельних методів розв’язування цих задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації : Навчальний посібник / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама – Україна, 2005. – 698 с.

2. Зуховицкий С. И. Линейное и выпуклое программирование / С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. – М. : Наука, 1967. – 460 с.

3. Крейн М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. – М. : Наука, 1973. – 552 с.

4. Рубинштейн Г. Ш. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве / Г. Ш. Рубинштейн // Сиб. матем. журн. – 1965. – Вып. 6, № 3. – С. 711-714.

5. Гудима У. В. Умови існування екстремального елемента для узагальненої задачі Штейнера в метричному просторі обмежених замкнених множин лінійного нормованого простору / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Вісник Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. – Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. – Вип. 14. – С. 8-13.

6. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М. : Наука, 1965. – 407 с.

7. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 510 с.

8. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М. : Наука, 1976. – 320 с.

9. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.

10. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. II. – 468 с.

11. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М. : Мир, 1975. – 497 с.

12. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щерба // Укр. мат. журн. – 1982. – 4, № 5. – С. 608-613.

13. Гнатюк Ю. В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю. В. Гнатюк // Доп. НАН України. – 1995. – № 6. – С. 23-26.

14. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 9. – С. 1183-1193.

15. Гудима У. В. Умови існування екстремального елемента узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі, в якій відхилення між елементами визначаються з допомогою сублінійних функціоналів / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. – Вип. 24. – С. 45-62.

16. Гудима У. В. Опуклий аналіз : навчальний посібник / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. – 112 с.

17. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : Підручник : У двох частинах. Частина 1 / А. Я. Дороговцев. – К. : Либідь, 1993. – 320 с.

18. Ус С. А. Функціональний аналіз : навч. посібник / С. А. Ус. – Д. : Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.

19. Боярищева Т. В. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів спеціальностей «Математика», «Прикладна математика», «Статистика» / Т. В. Боярищева, Т. В. Гудивок, О. О. Погоріляк. – Ужгород : Інвазор, 2013. – 125 с.