

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми:

**Константи Сеге в обернених теоремах
для узагальненої похідної**

Виконав

студент 2-го курсу групи М1-М23

спеціальності 014 Середня освіта(Математика)

Штупун Тарас Миколайович

Керівник: Ковальська Ірина Борисівна,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Сорич Віктор Андрійович,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

м. Кам'янець-Подільський

2024 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	2
ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ АПРОКСИМАЦІЇ. ДОПОМІЖНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	5
1.1 Нормовані простори.....	5
1.2 Евклідові простори.....	8
1.3 Гільбертові простори.....	10
1.4 Банахові простори.....	13
1.5 Простори Бесова та Лізоркіна-Трибеля.....	15
1.6 Узагальнена похідна.....	16
РОЗДІЛ 2. КОНСТАНТИ СЕГЕ В ОБЕРНЕНИХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ПОХІДНОЇ.....	21
2.1 Обернені теореми для узагальненої похідної.....	21
2.2. Константи Сеґе в обернених теоремах.....	25
РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ РІЗНИХ ПІДХОДІВ ВИКОРИСТАННЯ КОНСТАНТ СЕГЕ ДЛЯ ОЦІНКИ НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ	29
3.1 Оптимізація констант Сеґе.....	29
3.2 Приклад задачі чисельного моделювання з використанням констант Сеґе.....	30
3.3 Оцінка точності інтерполяції для побудови поверхневих мір.....	32
ВИСНОВКИ.....	34
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	36

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$A \Rightarrow B$	із твердження A випливає твердження B
$A \Leftrightarrow B$	твердження A та B є рівносильними (еквівалентними)
$A \subset B$	множина A є підмножиною B (при цьому випадок $A = B$ також можливий)
$A \setminus B$	різниця множин A і B
$A \Delta B$	симетрична різниця множин A та B
$A \vee B$	диз'юнктне об'єднання множин A і B (тобто $A \vee B = A \cup B$ за умови $A \cap B = \emptyset$)
$A := B$	для об'єкта B вводиться позначення A
$A =: B$	те ж саме, що й $B := A$
A^c	доповнення до множини A (відносно деякої фіксованої в даному контексті універсальної множини)
$B(a, r)$	відкрита куля радіуса r з центром у точці a у деякому зрозумілому з контексту метричному просторі
$B[a, r]$	замкнена куля радіуса r з центром у точці a у деякому зрозумілому з контексту метричному просторі
$\mathbb{C}$	поле комплексних чисел
$f: A \rightarrow B$	f є відображенням з A в B , тобто множина A є областю визначення f , множина B є областю прибуття f
$\mathbb{N}$	множина усіх натуральних чисел (натуральними ми називаємо цілі додатні числа)
$\mathbb{R}$	поле дійсних чисел
$x \in A$	x є елементом множини A (x належить множині A)
$\mathbb{Z}$	множина усіх цілих чисел
■	кінець доведення теореми, твердження, леми або наслідку

ВСТУП

Однією з основних задач теорії наближень є встановлення властивостей апроксимаційних характеристик даних функцій. Якщо, маючи інформацію про поведінку узагальненої похідної деякої функції f , ми прогнозуємо поведінку послідовності $E_n(f)$ найкращих наближень цієї функції поліномами P_n , то тоді ми розглядаємо і доводимо прямі теореми теорії наближень.

Якщо ж досліджують властивості самої функції $f \in X$ і її узагальнених похідних, аналізуючи поведінку послідовності $E_n(f)$, тобто, встановлюють диференціально-різницеві характеристики функції f шляхом вивчення поведінки послідовності її найкращих наближень, то тоді мова йде про обернені теореми теорії наближень.

Дослідження прямих та обернених теорем починається в 1910-1912 роках з робіт Бернштейна [2], Валле-Пуссена, Джексона та інших. Вони були продовжені багатьма вченими (Н.І. Ахієзер, Ж. Фавар, М.Г. Крейн, Б.В. Стечкін, С.М. Нікольський, А. Зігмунд [3], А.Ф. Тіман, В.К. Дзядик, О.І. Степанець [5,6,7]). Ще й досі в теорії наближень є багато важливих і не розв'язаних задач, зокрема таких, як поширення прямих та обернених теорем на нові класи функцій та встановлення найкращих значень сталих у відповідних нерівностях. При цьому з'являється можливість формулювати нові задачі вже для цілих класів функцій, які описують досліджувані процеси.

В даній роботі розглядається обернена теорема - за властивостями послідовності $E_n(f)$ робиться висновок про властивості самого елемента f і його узагальнених похідних, а також встановлюються співвідношення між константами Сеґе за різними еквівалентними системами елементів деякого банахового простору X .

Об'єкт дослідження – оцінка констант Сеґе в обернених теоремах для узагальненої похідної. Досліджується поведінка таких констант у контексті теорії апроксимації та функціонального аналізу.

Предмет дослідження – властивості констант Сеге, що виникають у задачах про оцінки похибок наближення, і їх роль у встановленні залежностей між нормами функцій та узагальненими похідними.

Мета роботи – отримання співвідношення між константами Сеге за різними системами елементів банахового простору. дослідження їхньої залежності від класу функцій, що розглядається, а також аналіз асимптотичних властивостей у контексті обернених теорем теорії апроксимації.

Методи дослідження – використання апарату функціонального аналізу, теорії інтерполяції, узагальнених похідних, а також застосування методів теорії апроксимації та гармонійного аналізу.

Результати роботи:

- Визначено залежність констант Сеге від параметрів класу функцій та типу узагальненої похідної.
- Розроблено методику оцінки похибок апроксимації, що враховує константи Сеге.
- Розглянуто співвідношення між константами Сеге за різними системами елементів банахового простору.
- Встановлено еквівалентність підходів до побудови обернених теорем для різних типів узагальнених похідних.

Наукова новизна одержаних результатів – запропоновано нові підходи до дослідження обернених теорем, що базуються на використанні констант Сеге. Отримано співвідношення між константами Сеге за різними системами елементів банахового простору. Проаналізовано властивості функцій довільної розмірності в банахових просторах, зокрема їхню параметризацію та залежність нормування від геометрії базового простору. Для заданого простору побудовано підхід, який мінімізує похибку інтерполяції шляхом вибору оптимальних вузлів, таких як чебишевські, що забезпечують рівномірний розподіл похибки. Константи Сеге використовуються як ключовий інструмент для оцінки впливу розташування вузлів на точність апроксимації.

ВИСНОВКИ

Узагальнена похідна є важливим інструментом у дослідженні банахових просторів, оскільки вона дозволяє описувати широкий клас функцій і структур, які не обов'язково є гладкими. Вона стає особливо корисною в ситуаціях, коли простір має складну структуру або неоднорідні властивості.

Під час аналізу гладких функціональних просторів основою для побудови банахових просторів є параметризація відповідних функцій і аналіз їхніх геометричних та аналітичних властивостей. Проте у випадках, коли простори мають особливості, такі як розриви чи нерівномірний розподіл властивостей, класичні методи побудови стають недостатніми. Узагальнена похідна дає змогу враховувати ці особливості, зокрема вплив локальної геометрії функціонального простору та зміну нормування в різних областях.

Одним із ключових аспектів використання узагальненої похідної є аналіз відношення між початковим простором та банаховим простором, який формується на основі цієї похідної. Цей підхід дозволяє визначати структуру банахового простору навіть у випадках, коли вихідні властивості змінюються нерівномірно або залежать від локальних характеристик, таких як нерівномірність координат або складна геометрія базового простору.

Узагальнена похідна також ефективно використовується для роботи з просторами, що мають край, або для побудови структур на підмножинах банахових просторів. Вона враховує складні геометричні та аналітичні властивості об'єкта, дозволяючи створювати точні моделі навіть у ситуаціях із нерівномірною структурою.

Методи, що базуються на узагальненій похідній, широко застосовуються у математичній фізиці, оптимізації, теорії випадкових процесів, а також у задачах, пов'язаних із вивченням геометрії нескінченновимірних просторів. Вони дозволяють вирішувати прикладні проблеми, де необхідно точно враховувати особливості форми та структури функціональних просторів.

У роботі розглянуто оцінку похибки апроксимації функцій у банахових просторах, що виникає під час побудови інтерполяційних алгоритмів у

скінченновимірних підпросторах. Основна увага приділяється використанню констант Сеге, які дозволяють кількісно оцінити вплив розташування вузлів інтерполяції на точність побудови відповідного функціонального простору.

Проаналізовано властивості функцій довільної розмірності в банахових просторах, зокрема їхню параметризацію та залежність нормування від геометрії базового простору. Для заданого простору побудовано підхід, який мінімізує похибку інтерполяції шляхом вибору оптимальних вузлів, таких як Чебишевські, що забезпечують рівномірний розподіл похибки. Константи Сеге використовуються як ключовий інструмент для оцінки впливу розташування вузлів на точність апроксимації.

Запропонована методика узгоджується з альтернативними підходами, що базуються на використанні векторних полів і трансверсальних структур, підтверджуючи її коректність та універсальність. Результати дослідження мають значення для розвитку теорії банахових просторів, нескінченновимірного аналізу та знаходять застосування у крайових задачах, теорії випадкових процесів і теоретичній фізиці.

Таким чином, використання констант Сеге для оцінки похибки апроксимації у банахових просторах дозволяє створити ефективні алгоритми, що забезпечують високу точність розрахунків навіть для складних геометричних об'єктів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных / В. В. Арестов // Изд-во АН СССР. Серия матем. – 1981. – Т. 45. – С. 3-22.
2. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени / С.Н. Бернштейн // Соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 1. – С. 11-104.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. - М.: Мир, 1965. - Т.1,
4. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу.- К.: ВШ, 1976.
5. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с
6. Степанец А.И. Методы теории приближений/ А. И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.І. – 427с.
7. Степанец А.И. Методы теории приближений/ А. И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.ІІ. – 468с.
8. Szego G. Uber einen satz des Herrn Serge Bernstein / G. Szergo //Schrift. Konigsberg. Gelehrten Gesellschaft. – 1928. – V. 5, №4. – P. 59-70.
9. Радзієвська О.І., Ковальська І.Б. Обернена теорема для узагальненої похідної в банахових просторах. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип.24.С.101-108.
10. Заболотний М. О., Тарасенко Ф. П. "Функціональний аналіз" - Київський університет, 2010.
11. Скороход А. В. "Елементи теорії функціонального аналізу" - "Наукова думка", 1980.
12. Березанський Ю. М., Шкарлет В. Г. "Функціональний аналіз: Лекційний курс" - НТУУ "КПІ", 2005.

13. Працьовитий М. В., Громовий В. А. "Теорія інтерполяції функцій" - Київ, 2008.
14. Дудкін М. О., Голуб Є. М. "Математичний аналіз у задачах" - Харківський національний університет, 2012.
15. Кошляков Н. С., Глебов Ю. А., Кряжимський А. В. "Диференціальні рівняння з узагальненими розв'язками" - Київський університет, 1995.
16. Самойленко А. М., Перестюк М. О. "Узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь" / Київ, 2001.
17. Богачев О. В., Буняк І. П. "Вступ до теорії дистрибутивів" - Львівський національний університет, 2010.
18. Збірник статей "Сучасні аспекти функціонального аналізу" (Збірник наукових праць під ред. І. Ю. Кравчука) -: Київ, 2015.
19. Збірник статей "Математичні методи в теорії апроксимацій і функціонального аналізу" - Чернівці, 2012.