

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра комп'ютерних наук

Кваліфікаційна робота бакалавра

з теми: «**Аналіз руху залізничного потяга на основі його комп'ютерної моделі**»

Виконав: здобувач вищої освіти групи KN1-B21
спеціальності 122 Комп'ютерні науки

Іжицький Павло Володимирович

Керівник: Федорчук Володимир Анатолійович,
професор кафедри комп'ютерних наук, доктор
технічних наук, професор

Рецензент: Ковальська Ірина Борисівна,
доцент кафедри математики, кандидат фізико-
математичних наук, доцент

м. Кам'янець-Подільський – 2025 р.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ	3
ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ АНАЛІЗУ РУХУ ЗАЛІЗНИЧНОГО ПОТЯГА	6
1.1 Аналіз сучасних підходів до моделювання руху потяга	6
1.2 Особливості механіки залізничного руху: основні параметри та характеристики	9
1.3 Постановка задачі дослідження	11
Висновки до розділу 1	13
РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА КОМП'ЮТЕРНОЇ МОДЕЛІ РУХУ ПОТЯГА	14
2.1 Вибір математичної моделі руху потяга	14
2.1.1 Апроксимація моделі методом прямих	14
2.1.2 Побудова моделі з урахуванням нелінійних ефектів	16
2.1.3 Вибір програмного засобу для числової реалізації моделі	17
2.2 Реалізація комп'ютерної моделі у програмному середовищі	18
Висновки до розділу 2	20
РОЗДІЛ 3. РЕАЛІЗАЦІЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ.....	21
3.1 Загальна структура моделі.....	21
3.2 Проведення обчислювальних експериментів	23
3.2.1 Лінійна модель (без Dead Zone).....	23
3.2.2 Модель із зоною нечутливості (Dead Zone).....	26
3.3 Аналіз результатів моделювання	30
3.4 Оцінка точності та адекватності моделі.....	31
Висновки до розділу 3	34
ВИСНОВКИ.....	35
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	36

АНОТАЦІЯ

Кваліфікаційна робота присвячена розробці та аналізу комп'ютерної моделі руху залізничного потяга в середовищі комп'ютерного моделювання. В роботі проаналізовано сучасні методи моделювання динаміки залізничного транспорту, розглянуто основні параметри та характеристики, що впливають на рух потяга.

Проведено аналіз математичних підходів до моделювання, на основі якого обрано метод представлення залізничного потяга як системи дискретних мас із пружними та демпфувальними зв'язками. Реалізована Simulink-модель дозволяє враховувати важливі нелінійні ефекти, зокрема наявність люфтів у зчепленнях між вагонами, що суттєво впливає на передачу сили та динаміку руху рухомого складу.

Проведено числові експерименти для двох основних випадків: лінійної моделі без люфтів і нелінійної моделі із зоною нечутливості. Виявлено, що наявність люфтів призводить до ступінчастого характеру передачі тягового зусилля та виникнення затримок передачі зусилля, що відповідає реальній поведінці довгих залізничних рухомих складів.

Оцінено точність та адекватність отриманих результатів, проведено порівняння числових значень швидкості з аналітичними розрахунками. Отримано високу точність, що підтверджує ефективність моделі для практичного застосування.

Розроблена модель є ефективним інструментом для прогнозування поведінки залізничного потяга та може використовуватися для задач оптимізації руху, підвищення ефективності й забезпечення безпеки залізничного транспорту. Робота містить 37 сторінок, включає 3 розділи, 14 рисунків, 1 таблицю та список з 24 джерел.

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний транспортний сектор потребує впровадження новітніх технологій для забезпечення ефективності, безпеки та оптимізації перевезень. Залізничний транспорт відіграє ключову роль у перевезенні вантажів і пасажирів, але для досягнення максимальної ефективності необхідно розуміти та моделювати складні динамічні процеси, що відбуваються під час руху потяга [8; 24]. Комп'ютерне моделювання дозволяє вивчати поведінку залізничного рухомого складу за різних умов експлуатації, аналізувати взаємодію вагонів та прогнозувати вплив зовнішніх факторів [14; 20]. Проблема ефективного аналізу динаміки руху залізничного потяга є актуальною з огляду на необхідність підвищення енергоефективності, зменшення зносу елементів рухомого складу та покращення безпеки залізничного транспорту [8].

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження є процес руху залізничного потяга. Предметом дослідження є методи та інструменти комп'ютерного моделювання динаміки руху залізничного потяга.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є створення комп'ютерної моделі руху залізничного потяга для аналізу його динаміки та оцінки впливу взаємодії вагонів на параметри руху. Для досягнення мети необхідно виконати такі завдання:

1. Провести аналіз існуючих методів моделювання динаміки руху потяга.
2. Розробити математичну модель взаємодії елементів залізничного потяга.
3. Побудувати комп'ютерну модель на основі обраного програмного середовища.
4. Провести обчислювальні експерименти для дослідження впливу різних факторів на рух потяга.

5. Проаналізувати отримані результати та сформулювати рекомендації для подальшого використання моделі.

Методи дослідження. У роботі застосовуються аналітичні методи для розробки математичних моделей [7; 14], методи комп'ютерного моделювання для реалізації цифрових моделей [10], а також методи аналізу даних для оцінки результатів обчислювальних експериментів [12].

Практичне значення одержаних результатів. Розроблена комп'ютерна модель дозволяє досліджувати динаміку руху залізничного потяга з урахуванням взаємодії між вагонами. Її використання сприятиме підвищенню точності прогнозування поведінки потяга, покращенню безпеки руху та оптимізації експлуатаційних параметрів залізничного транспорту.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (23). У першому розділі подано огляд теоретичних підходів до моделювання динаміки залізничного транспорту. Другий розділ присвячений розробці математичної та комп'ютерної моделі руху потяга. У третьому розділі проведено аналіз отриманих результатів обчислювальних експериментів.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ АНАЛІЗУ РУХУ ЗАЛІЗНИЧНОГО ПОТЯГА

1.1 Аналіз сучасних підходів до моделювання руху потяга

Моделювання руху залізничного потяга є складною інженерною задачею, яка потребує врахування багатьох динамічних процесів, таких як взаємодія колеса з рейкою, сила тяги, опір руху, коливання вагонів та зчеплення. Для аналізу динаміки руху використовують різні математичні підходи, які можна поділити на дві основні групи: *аналітичні* та *обчислювальні* методи [7; 22].

Аналітичні методи моделювання базуються на використанні диференціальних рівнянь руху та законів механіки. Основними підходами є:

Моделювання потяга як системи зі скінченним числом ступенів свободи. У цьому підході потяг представлено як набір мас (локомотив і вагони), з'єднаних між собою пружними елементами. Кожен елемент моделі має свої *кінематичні параметри*: масу, швидкість, прискорення, силу тяги та опору. Рух потяга описується системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, де розглядається взаємодія сусідніх вагонів через сили пружності та демпфування [1; 6].

Моделювання потяга як пружного стержня. У цьому підході потяг розглядається як *неперервне тіло* із розподіленими параметрами маси та жорсткості. Така модель описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, що враховують деформації та хвильові процеси під час руху [3]. Цей метод краще описує поведінку дуже довгих залізничних складів, оскільки дозволяє врахувати поширення хвиль напружень та їхній вплив на коливання потяга.

Аналітичні методи дозволяють отримати теоретично точні рішення, однак вони є ефективними лише для простих випадків, коли система не містить значних нелінійностей, наприклад, при моделюванні ідеально рівної колії та ідеальних пружних зчеплень [16; 22].

Обчислювальні методи моделювання. Через складність динаміки залізничного складу для практичних розрахунків використовуються *обчислювальні методи*, які дозволяють обчислювати поведінку потяга у реальних умовах. Найпоширенішими є:

- **Метод скінченних різниць** (Finite Difference Method, FDM). Використовується для *апроксимації диференціальних рівнянь* та їхнього розв'язку у дискретних точках часу. Дозволяє моделювати динаміку потяга на складних ділянках колії, де змінюється нахил чи кривизна [15].
- **Метод скінченних елементів** (Finite Element Method, FEM). Використовується для поділу потяга на дискретні елементи, які можуть мати різні механічні характеристики. Застосовується для аналізу деформацій вагонів, взаємодії колеса з рейкою та динамічних навантажень [3].
- **Метод багатотільної динаміки** (Multibody System Dynamics, MBD). У цьому методі потяг представлено як систему твердих тіл, що взаємодіють через пружні зв'язки. Дозволяє моделювати ударні навантаження, люфти у зчепленнях та коливання вагонів. Часто використовується у програмних комплексах, таких як MATLAB/Simulink, Scilab/Xcos, Universal Mechanism [10; 17; 20].

Вибір програмного середовища для моделювання. Для числового аналізу руху потяга застосовуються різні програмні засоби:

- **MATLAB/Simulink** – широко використовується для створення математичних моделей потяга, у яких можна аналізувати динаміку руху та вплив різних факторів.
- **Scilab/Xcos** – це відкрите середовище для чисельного моделювання, яке дозволяє будувати та аналізувати динамічні моделі залізничного транспорту. Є альтернативою MATLAB/Simulink для інженерних розрахунків.
- **Universal Mechanism** – дозволяє будувати детальні моделі потяга, включаючи його взаємодію з колією та коливання вагонів.

Кожен підхід має свої переваги та обмеження. У таблиці 1 подано порівняння кожного методу.

Таблиця 1

Порівняльний аналіз методів

Метод	Переваги	Недоліки
Аналітичні методи	Дає точне рішення в ідеалізованих умовах	Не підходять для реальних складних систем
Метод скінченних різниць (FDM)	Простий у реалізації	Чутливий до вибору кроку дискретизації
Метод скінченних елементів (FEM)	Дозволяє аналізувати деформації	Вимагає значних обчислювальних ресурсів
Метод багатотільної динаміки (MBD)	Моделює складні системи з ударами та люфтами	Може потребувати великих обчислювальних потужностей

Аналіз існуючих підходів до моделювання руху потяга показує, що найбільш ефективними є *обчислювальні методи*, оскільки вони дозволяють врахувати складні динамічні ефекти, що виникають у процесі руху потяга. Для подальшого дослідження було обрано метод *багатотільної динаміки* у середовищі *MATLAB/Simulink*, оскільки він дозволяє моделювати взаємодію вагонів та вплив зовнішніх факторів, таких тертя та люфти у зчепленнях.

1.2 Особливості механіки залізничного руху: основні параметри та характеристики

Динаміка руху залізничного потяга визначається сукупністю фізичних процесів, що відбуваються між локомотивом та вагонами у рухомому складі. Основними чинниками, які впливають на поведінку потяга, є *сила тяги*, сили *опору руху*, а також взаємодія вагонів між собою через *зчеплення*. Чітке розуміння цих процесів необхідне для розробки адекватної комп'ютерної моделі [4; 6; 12].

Сила тяги локомотива є рушійною силою і залежить від потужності локомотива, кількості ведучих осей та зчіпних характеристик між колесами і рейками [6]. Ця сила повинна забезпечувати подолання *опору руху*, а також створювати необхідне прискорення рухомого складу [7].

Опір руху потяга визначає сукупність сил, які перешкоджають його руху. Основними компонентами, що розглядаються у цій роботі, є опір *кочення*, зумовлений тертям у механічних частинах вагонів (наприклад, у підшипниках), а також сили, що виникають внаслідок *демпфування* у зчепленнях між вагонами [1; 21]. Саме ці компоненти були враховані під час моделювання. Інші види опору, такі як аеродинамічний опір та опір на ухилах і поворотах, в межах даної роботи не розглядались.

Особливу увагу у моделі приділено поздовжнім динамічним навантаженням, які виникають внаслідок прискорення руху потяга та наявності *люфтів* у зчепленнях між вагонами. Ці люфти спричиняють характерні затримки у передачі тягової сили від локомотива до останніх вагонів, що було продемонстровано обчислювальними експериментами з використанням моделі. Динамічні навантаження такого типу мають важливе значення для аналізу реальних ситуацій, де передача сили не є миттєвою [12].

Важливими характеристиками, що враховані у цій роботі, є *маса* вагонів, коефіцієнти *жорсткості* та *демпфування* у зчепленнях. Саме ці параметри визначають швидкість поширення поздовжніх коливань і впливають на загальну динамічну поведінку потяга [6; 12].

Отже, рух залізничного потяга у даній роботі розглядається як процес взаємодії вагонів між собою через *зчеплення* з урахуванням *сил тяги*, *демпфування* та *жорсткості зв'язків*. Обмеженням моделі є те, що вона не враховує вертикальні та бокові коливання, взаємодію колеса з рейкою, а також вплив профілю колії, оскільки ці аспекти виходять за межі поставленої задачі.

Наступний етап роботи присвячено формулюванню математичної моделі та реалізації обчислювальних експериментів, які відповідають зазначеним вище факторам та особливостям руху потяга.

1.3 Постановка задачі дослідження

Моделювання руху залізничного потяга є складним завданням, що потребує урахування *динамічних процесів* та взаємодії елементів потяга між собою. Основними факторами, які впливають на динаміку руху, є *сила тяги* локомотива, сили *опору руху* та динамічні навантаження, спричинені наявністю *люфтів* у зчепленнях між вагонами [1; 6; 12]. Саме ці фактори є ключовими у межах даного дослідження.

У дослідженні використовується модель потяга, що складається з 20 вагонів, кожен з яких має масу 82,5 т і довжину 14,5 м. Загальна довжина потяга значно перевищує стандартні рухомі склади, що робить необхідним детальний аналіз процесів передачі тягового зусилля та поширення динамічних коливань уздовж усього рухомого складу [6; 12]. Через велику довжину потяга необхідно враховувати вплив *хвильових ефектів* у поздовжній динаміці, які можуть призводити до нерівномірного розподілу навантаження та значних імпульсних навантажень у зчепленнях.

Для аналізу руху потяга обрано підхід, у якому він подається як *система дискретних мас*, з'єднаних між собою *пружними зв'язками*. Така система описується системою диференціальних рівнянь (1), в яких враховано масу вагонів, жорсткість та демпфування зчеплень між ними, а також зовнішню силу тяги, прикладену до першого елемента [7; 12].

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + h_i \frac{dx_i}{dt} + C_i(x_i - x_{i+1}) + F_{ci} = F_i + F_{i-1}(x_{i-1} - x_i), \quad (1)$$

де $i = 1, 2, \dots, n$; n – число дискретних зосереджених мас, з яких складається залізничний рухомий склад (індекс $i=1$ відповідає локомотиву потяга); m_i – маса i -го елемента рухомого складу; x_i – переміщення i -го елемента; C_i – жорсткість зв'язку між елементами i та $i+1$; n_i – коефіцієнт опору руху i -го елемента; F_{ci} – зовнішня сила опору руху i -го елемента, $F_{ci} = k_j P_i + W_{0i} P_i$; k – питомий опір від нахилу шляху; j – нахил шляху; W_{0i} – початковий питомий опір руху; P_i – маса i -го елемента; F_i – сила тяги, прикладена до i -го елемента.

Реалізована комп'ютерна модель враховує нелінійні ефекти у вигляді люфтів (зони нечутливості) в зчепленнях. Завдяки цьому модель може відтворювати ступінчастий характер передачі тягового зусилля, що виникає внаслідок необхідності вибірки люфтів між вагонами [9; 12]. Це дозволяє більш точно оцінити розподіл навантаження вздовж потяга, а також затримки, пов'язані з передачею сили від локомотива до кінцевих вагонів.

У моделі не враховуються вертикальні та бокові коливання, взаємодія коліс із рейками, вплив профілю залізничного полотна (ухили та повороти), а також гальмівні процеси та аеродинамічний опір. Ці фактори виходять за межі даного дослідження та можуть бути розглянуті в подальших дослідженнях.

Таким чином, у рамках цього дослідження основна увага зосереджена саме на поздовжній динаміці залізничного потяга, що дозволяє детально аналізувати процеси передачі сили, поширення коливань та вплив нелінійностей у зчепленнях на загальну поведінку рухомого складу. Отримані результати моделювання дозволять прогнозувати поведінку потяга в реальних умовах експлуатації та визначати режими руху, за яких можуть виникати небажані динамічні ефекти.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі розглянуто теоретичні основи аналізу руху залізничного потяга та проведено аналіз підходів до математичного моделювання динаміки багатовагонних рухомих складів. Визначено основні механічні параметри, що впливають на динаміку руху, а також сформульовано задачу дослідження відповідно до цілей цієї роботи.

Особливу увагу було приділено аналізу поздовжніх коливань, які виникають унаслідок наявності люфтів у зчепленнях між вагонами. Ці коливання мають значний вплив на передачу тягової сили вздовж потяга, особливо у довгих рухомих складах. Також розглянуто вплив сили тяги локомотива та сил опору руху на динаміку потяга, зокрема з урахуванням демпфування в з'єднаннях між вагонами.

Серед математичних підходів було виділено представлення потяга у вигляді системи дискретних мас, з'єднаних пружними зв'язками. Такий підхід дозволяє побудувати математичну модель на основі системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що придатні для реалізації в середовищі комп'ютерного моделювання.

У межах даної роботи модель обмежується аналізом поздовжньої динаміки потяга, без врахування вертикальних і бокових коливань, а також без моделювання впливу профілю колії, аеродинамічного опору та взаємодії коліс з рейками. Зосередження на обраних факторах дозволяє сфокусовано дослідити вплив пружних і демпфувальних характеристик, а також наявності люфтів у зчепленнях на загальну динаміку рухомого складу.

Сформульована задача дослідження ґрунтується на необхідності побудови комп'ютерної моделі залізничного потяга, що дозволить дослідити характер поширення сил уздовж рухомого складу, оцінити затримку в передачі дії та виявити динамічні особливості взаємодії вагонів при різних умовах навантаження.

РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА КОМП'ЮТЕРНОЇ МОДЕЛІ РУХУ ПОТЯГА

2.1 Вибір математичної моделі руху потяга

Моделювання руху залізничного потяга є складним завданням, що потребує врахування розподілених параметрів, нелінійних взаємодій між вагонами та динамічних характеристик руху. У рамках цього дослідження використано підхід, який дозволяє апроксимувати поведінку потяга за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Такий підхід дає змогу представити залізничний рухомий склад як систему мас, з'єднаних між собою пружними та демпфувальними елементами, що відтворюють зчеплення між вагонами [6; 13].

2.1.1 Апроксимація моделі методом прямих

Для числової реалізації моделі руху залізничного потяга необхідно перейти від складних диференціальних рівнянь з частинними похідними до простішої системи рівнянь другого порядку. З цією метою застосовується метод прямих, що дозволяє перетворити початкову модель із розподіленими параметрами в систему звичайних лінійних диференціальних рівнянь [4; 5]. У початковому вигляді математична модель описує одновимірний рух об'єкта з розподіленими параметрами. Така модель включає сили інерції, опору руху та пружності, що описуються диференціальним рівнянням у частинних похідних (1) з відповідними граничними умовами (2) [1].

$$m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \mu(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - k(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (1)$$

$(m, \mu, k > 0)$

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \varphi_0(t); u(x_0 + l, t) = \varphi_l(t); (t_0 \leq t \leq T), \\ u(x, t_0) = \psi_0(x); u(x, T) = \psi_T(x); (x_0 \leq x \leq x_0 + l), \end{cases} \quad (2)$$

Використання методу прямих передбачає апроксимацію похідних за просторовою координатою через скінченні різниці, що дозволяє перейти до системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку (3). Отримана в результаті система характеризується тим, що кожне рівняння описує динаміку окремого дискретного елемента моделі, якими в даній роботі є окремі вагони (чи їх частини) потяга. Так, кожен елемент системи пов'язаний з двома сусідніми елементами, утворюючи взаємопов'язану динамічну структуру в середовищі Simulink (рис. 2.1).

$$m_i \ddot{u}_i(t) + \mu_i \dot{u}_i(t) - \frac{k_i}{h^2} [u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)] = f_i(t) + O(h^2), \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), \text{ де } x_i = x_0 + ih, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad h = \frac{l}{n+1}, \quad x_i(t) = u(t, x_i).$$

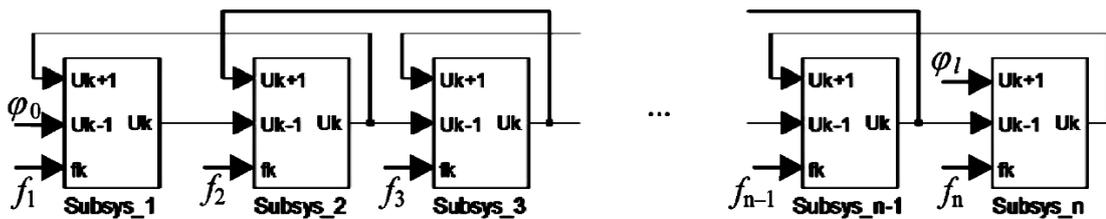


Рис. 2.1. Структура моделі в Simulink

Кожен блок цієї системи у структурній реалізації в Simulink відповідає окремому вагону (чи його частині) та реалізує своє рівняння руху. Особливістю цієї структури є наявність прямих і зворотних зв'язків, які дозволяють описати взаємодію вагонів у рухомому складі. Завдяки цьому система є оборотною, тобто забезпечує передачу впливів як від першого до останнього вагона, так і навпаки. Це дає змогу враховувати не лише лінійні взаємодії, а й реалізувати різноманітні нелінійні залежності, наприклад, сили опору, що залежать від швидкості руху вагона. Використання методу прямих та структурна реалізація моделі у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь у Simulink забезпечує можливість ефективного та точного чисельного аналізу динаміки руху потяга з урахуванням складних нелінійних ефектів та взаємозв'язків між його елементами.

2.1.2 Побудова моделі з урахуванням нелінійних ефектів

Для більш точного моделювання руху залізничного потяга важливо враховувати не лише лінійні взаємодії між його елементами, а й різноманітні нелінійні ефекти, що виникають у реальних умовах експлуатації [13]. Такі нелінійності можуть бути спричинені люфтами у зчепленнях між вагонами або нелінійною поведінкою окремих елементів потяга при зміні навантажень.

У рамках цього дослідження для опису нелінійних взаємодій між елементами моделі застосовано підхід, що включає використання блоку Dead Zone (зона нечутливості) у середовищі Simulink. Такий блок дозволяє моделювати взаємодію вагонів через зчеплення з люфтом, тобто механічне з'єднання, що має певну зону, в межах якої взаємодія відсутня або значно ослаблена. Ця зона нечутливості характеризується параметром ширини, який визначає величину люфту між вагонами.

Для реалізації нелінійних ефектів система диференціальних рівнянь другого порядку, отримана після застосування методу прямих, представлена в еквівалентній формі з використанням перетворення Лапласа (4) [6].

Така форма рівнянь зручна для побудови моделей у середовищі Simulink, оскільки дозволяє реалізувати інтегрування рівнянь за допомогою стандартних блоків [2].

$$X_i(p) = \frac{k_i}{m_i h^2} [X_{i+1}(p) - 2X_i(p) + X_{i-1}(p)] \frac{1}{p^2} - \frac{\mu_i}{m_i} X_i(p) \frac{1}{p} + \frac{1}{m_i} F_i(p) \frac{1}{p^2}, (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Особливістю побудованої Simulink-підсистеми є включення блоку Dead Zone до схеми обчислення сили пружності, яка виникає внаслідок деформації зв'язків між сусідніми вагонами. Ця сила визначається різницею переміщень сусідніх елементів рухомого складу, а блок Dead Zone дозволяє враховувати, що взаємодія вагонів проявляється лише після подолання певного порогу зміщень, який відповідає зоні нечутливості.

Окрім цього, побудована Simulink-модель дозволяє легко встановлювати індивідуальні параметри для кожної окремої підсистеми, що відображає характеристики окремих вагонів або зчеплень. Завдяки цьому модель здатна представляти неоднорідні властивості реального об'єкта, враховувати нелінійності та розподіленість параметрів уздовж усього складу потяга. Включення нелінійних елементів дозволяє значно покращити адекватність моделі реальним процесам і забезпечити точність аналізу динаміки руху потяга [6; 13].

2.1.3 Вибір програмного засобу для числової реалізації моделі

Одним із ключових етапів у процесі дослідження динаміки руху залізничного потяга є вибір програмного середовища для числової реалізації математичної моделі. Сучасні засоби комп'ютерного моделювання дозволяють ефективно розв'язувати складні динамічні задачі, проводити обчислювальні експерименти, аналізувати та візуалізувати отримані результати [6; 10].

Початково для реалізації моделі був обраний програмний засіб *Scilab/Xcos*, який є відкритим програмним середовищем із широкими можливостями для розв'язування систем диференціальних рівнянь, побудови блокових діаграм і виконання обчислювальних експериментів. Однак у процесі роботи з *Xcos* було виявлено суттєвий недолік — нестабільність результатів при зміні кроку інтегрування та типу чисельного методу (солвера), що проявлялось у некоректному відтворенні зворотних зв'язків у системі. Ці проблеми обмежували можливості точного і стабільного аналізу складних динамічних систем із нелінійними зв'язками.

Враховуючи зазначені недоліки, було прийнято рішення використати програмне середовище MATLAB/Simulink. MATLAB є одним із найпотужніших сучасних програмних комплексів, який широко використовується для аналізу, моделювання та розв'язання широкого кола задач інженерної механіки, автоматичного керування, динаміки рухомого складу та інших технічних систем [6; 15].

Simulink, як інтегрована частина MATLAB, дозволяє реалізовувати моделі у вигляді блокових діаграм, застосовувати різні солвери, контролювати кроки інтегрування та отримувати стабільні й надійні результати моделювання [10]. Перевагами *Simulink*, що визначили вибір цього програмного середовища, стали:

- можливість реалізації складних блокових моделей із зворотними зв'язками та нелінійними елементами (зокрема зони нечутливості — *Dead Zone*);
- широкий вибір обчислювальних методів інтегрування (солверів), що забезпечує стабільність розрахунків навіть при використанні складних і нелінійних моделей;
- інтеграція з MATLAB для подальшої обробки та аналізу результатів обчислювальних експериментів;
- зручні можливості для візуалізації отриманих результатів моделювання у вигляді графіків та таблиць.

Таким чином, використання *MATLAB/Simulink* дозволило забезпечити стабільність і точність реалізованої комп'ютерної моделі, що суттєво підвищило якість і надійність результатів дослідження динаміки руху залізничного потяга.

2.2 Реалізація комп'ютерної моделі у програмному середовищі

Реалізація моделі у MATLAB/Simulink була виконана з використанням блокової структури, де кожен вагон представлено як окрему функціональну одиницю, що складається з чотирьох підсистем. Загалом модель включає 80 підсистем для 20 вагонів і окрему підсистему для локомотива, що забезпечує прикладання зовнішньої сили. Типова структура однієї з підсистем зображена на рисунку 2.2. Вхідний параметр (блок «3») відповідає за зовнішню силу тяги та використовується лише для підсистеми локомотива. Інші підсистеми взаємодіють між собою лише через пружні та демпфувальні зв'язки.

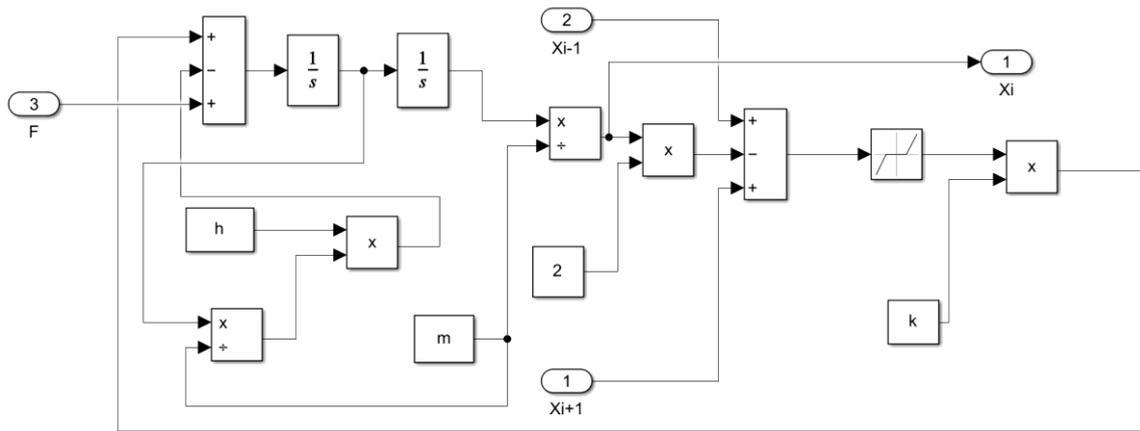


Рис. 2.2. Підсистема, що реалізує локомотив

Основні параметри, використані у підсистемах, мають наступні значення:

- **Маса вагона:** $m = 82500/4$ кг;
- **Параметр демпфування(μ):** $h = 1230$ кг/с;
- **Густина матеріалу вагонів:** $\rho = 7990$ кг/м³;
- **Модуль Юнга матеріалу:** $E = 2.1 \times 10^{11}$ Па;
- **Довжина вагона:** $l = 14.5/4$ м;
- **Коефіцієнт жорсткості зчеплення між вагонами:** $k = \frac{E \cdot m}{\rho \cdot l}$
- **Зона нечутливості для моделювання люфту в зчепленнях:** $qq = 0.0005$ м

Кожна підсистема реалізує диференціальні рівняння другого порядку, які описують переміщення окремого елемента. Інтегрування цих рівнянь здійснюється за допомогою стандартних блоків Simulink (1/s). Зворотні зв'язки в підсистемах забезпечують передачу взаємодії між сусідніми вагонами, що дає змогу моделювати складні динамічні режими — такі як розгін, гальмування та передача зусилля вздовж довгого складу.

Важливим аспектом моделі є нелінійний блок **Dead Zone**, що використовується для моделювання люфтів у зчепленнях між вагонами. Цей блок активується тільки після того, як різниця переміщень сусідніх вагонів досягає порогового значення, що відповідає реальним механічним властивостям зчеплень.

Висновки до розділу 2

У другому розділі роботи розглянуто процес побудови та реалізації комп'ютерної моделі динаміки руху залізничного потяга, що складається з 20 вагонів. Було проаналізовано методи апроксимації складної моделі з розподіленими параметрами до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що забезпечує зручність їх чисельного розв'язку.

Для перетворення вихідних рівнянь з частинними похідними застосовано метод прямих, який дозволив подати потяг у вигляді дискретної системи зв'язаних мас. Додатково розглянуто нелінійні ефекти у вигляді люфтів та зон нечутливості, які були враховані шляхом включення спеціальних блоків Dead Zone у Simulink-модель.

Під час початкової спроби чисельного моделювання в середовищі Xcos було виявлено, що при зміні солвера та кроку інтегрування результати моделювання змінювались, що свідчило про некоректну обробку зворотних зв'язків. Саме тому подальшу реалізацію моделі було перенесено до середовища MATLAB/Simulink. Це дозволило досягти стабільних і достовірних результатів моделювання.

Побудована Simulink-модель дозволяє ефективно досліджувати різноманітні режими руху залізничного складу, оцінювати вплив фізичних параметрів вагонів, сил тяги та опору, а також аналізувати складні динамічні взаємодії у потязі. Розроблена модель має значний потенціал для практичного застосування у задачах оптимізації режимів руху та оцінки навантажень у реальних залізничних системах.

РОЗДІЛ 3. РЕАЛІЗАЦІЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ

3.1 Загальна структура моделі

Розроблена комп'ютерна модель залізничного потяга реалізована у середовищі **MATLAB/Simulink** у вигляді блочної схеми, що імітує динамічну взаємодію між елементами складу. Кожен вагон представлено у вигляді групи з чотирьох підсистем, у яких реалізовано рівняння руху з урахуванням маси, пружних зв'язків, демпфування, а також, за потреби, нелінійностей — таких як люфти у зчепленнях (модель *Dead Zone*).

Загальна структура моделі побудована на принципі послідовного зв'язку між підсистемами, які передають сигнали переміщення та сили від однієї до іншої. Кожна з них отримує на вході інформацію про положення суміжних елементів, розраховує результативну силу впливу та визначає переміщення свого центра мас. У результаті формується імітація динаміки довгого складу як системи зв'язаних мас на пружних та демпфувальних зв'язках.

Особливістю побудови є *масштабованість* — можливість збільшення або зменшення кількості вагонів без зміни загальної структури. У межах цього дослідження модель включає **20 вагонів (80 підсистем)** та **один локомотив**, до якого прикладено зовнішню силу тяги.

На рисунку 3.1 зображено загальний вигляд моделі потяга у Simulink. Всі підсистеми вагонів та локомотива з'єднані послідовно. Для кожної підсистеми передбачено окремі входні та вихідні параметри, що дозволяє змінювати фізичні характеристики окремих частин складу — масу, жорсткість, демпфування або наявність люфту.

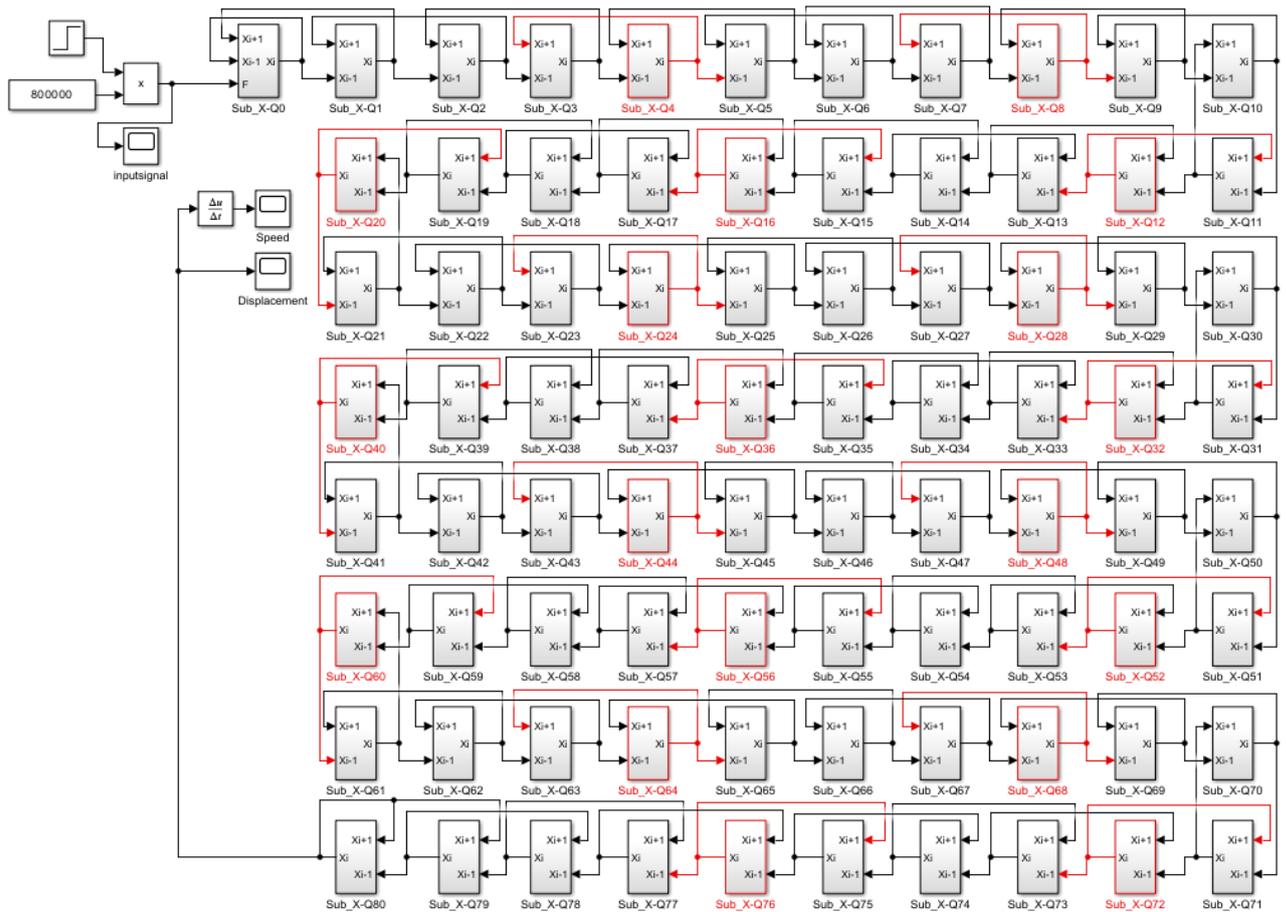


Рис. 3.1. Загальний вигляд Simulink-моделі

Побудована структура дозволяє проводити обчислювальні експерименти для аналізу поведінки потяга під час різних режимів руху, таких як розгін, гальмування або вплив зовнішніх збурень. Такий підхід забезпечує гнучкість моделі та високу точність у відображенні фізичних процесів, що відбуваються в реальному залізничному складі. Крім того, структура моделі дозволяє легко вносити зміни в конфігурацію потяга, змінюючи кількість вагонів або їх параметри, що робить її зручною для подальших досліджень та розширення функціоналу. Це особливо важливо у випадках, коли необхідно адаптувати модель під різні типи рухомого складу або сценарії експлуатації.

3.2 Проведення обчислювальних експериментів

3.2.1 Лінійна модель (без Dead Zone)

У першому обчислювальному експерименті було досліджено поведінку залізничного складу на основі лінійної моделі, у якій не враховуються нелінійні ефекти, зокрема люфти у зчепленнях між вагонами. Такий підхід дозволяє оцінити базову реакцію системи на зовнішній вплив, а також перевірити коректність реалізації побудованої моделі в умовах ідеалізованого зв'язку між вагонами.

Модель включає 20 вагонів з однаковими параметрами: маса $m=82500$ кг, довжина вагона $l=14.5$ м, густина матеріалу $\rho=7990$ кг/м³, модуль Юнга $E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па. Коефіцієнт жорсткості зчеплення між вагонами визначається формулою: $k = \frac{E * m}{\rho * l}$ [18].

Зовнішній вплив у вигляді сили тяги подавався лише на перший вагон (локомотив) у вигляді прямокутного імпульсу амплітудою 800000 Н та тривалістю 4 с. Вхідний сигнал було задано за допомогою блоку *Signal Editor*, що дало змогу точно визначити момент прикладення та припинення сили (рис. 3.2).

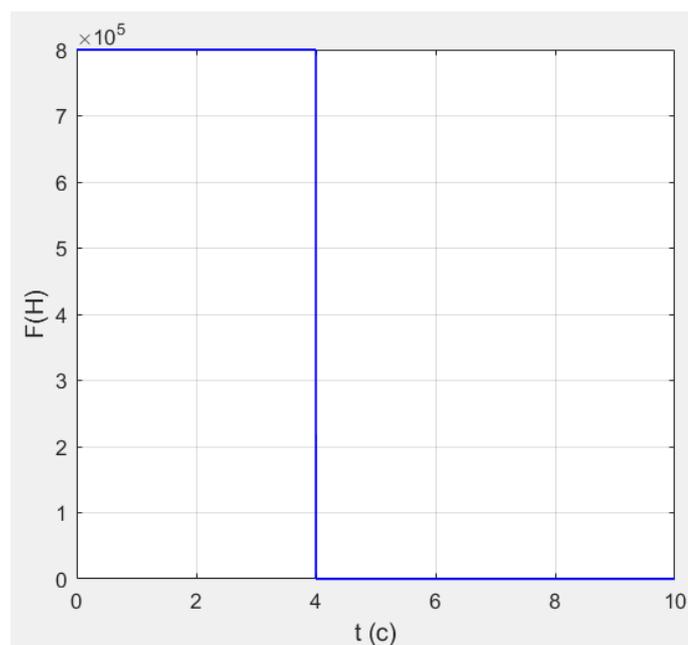


Рис. 3.2. Вхідний сигнал сили тяги (імпульс 800000 Н, тривалість 4 с)

У цьому експерименті розглянуто два випадки:

- *без урахування опору руху* ($\mu=0$);
- *з урахуванням опору* ($\mu=1230$).

На рис. 3.3–3.6 зображено зміщення та швидкість останнього вагона у часі для обох випадків.

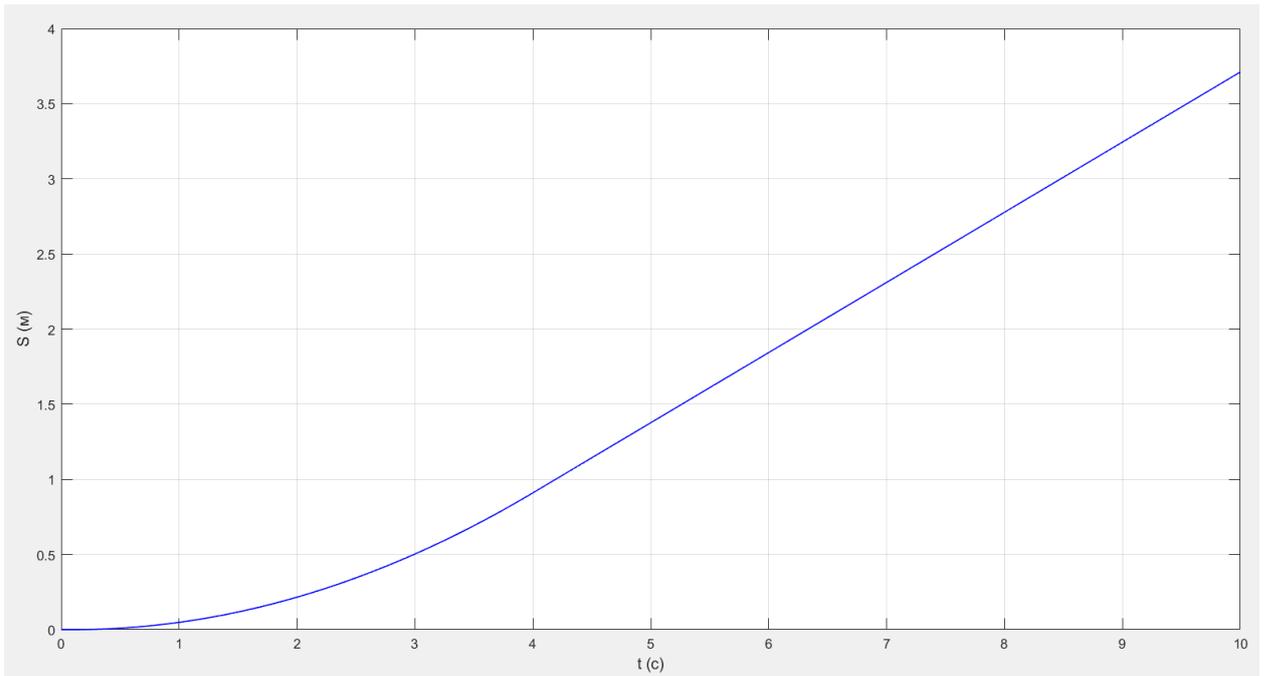


Рис. 3.3. Зміщення останнього вагона без урахування опору руху

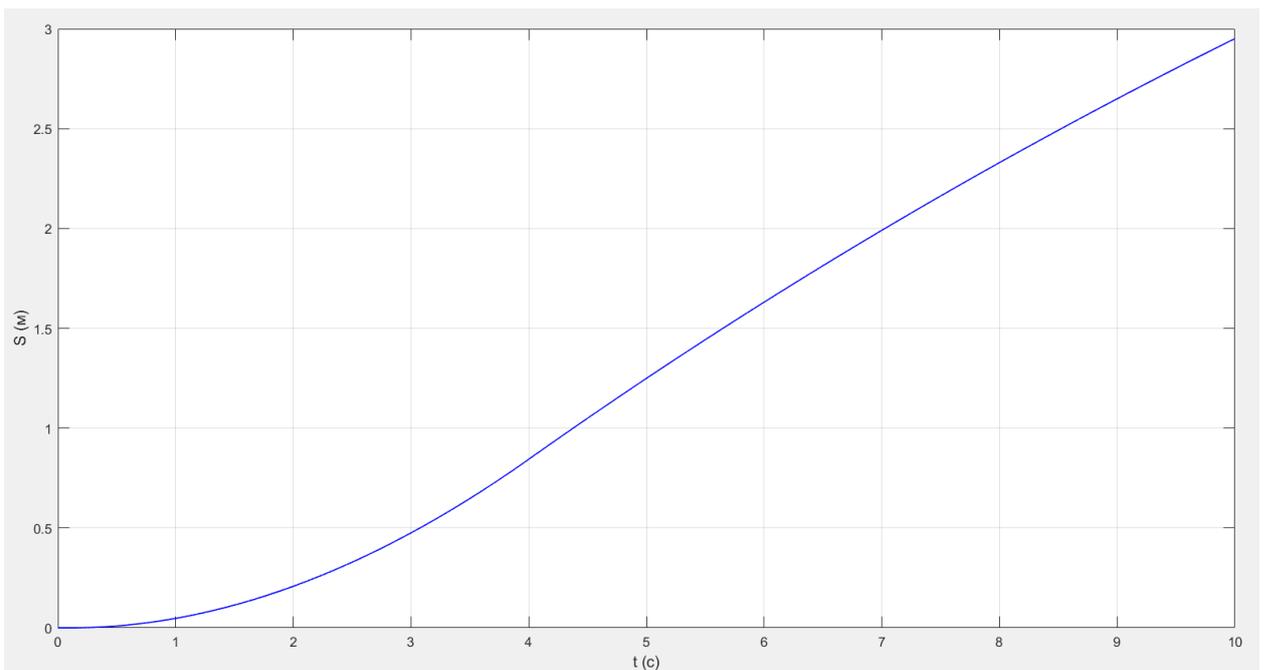


Рис. 3.4. Зміщення останнього вагона з урахуванням опору руху

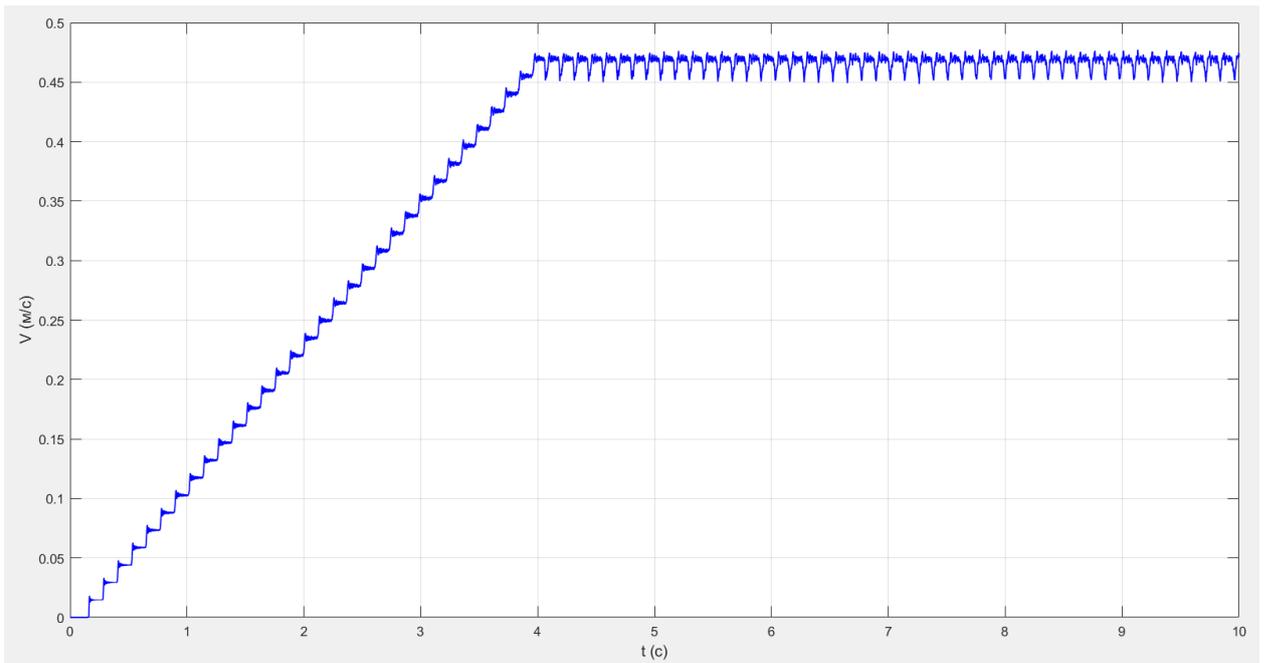


Рис. 3.5. Швидкість останнього вагона без урахування опору руху

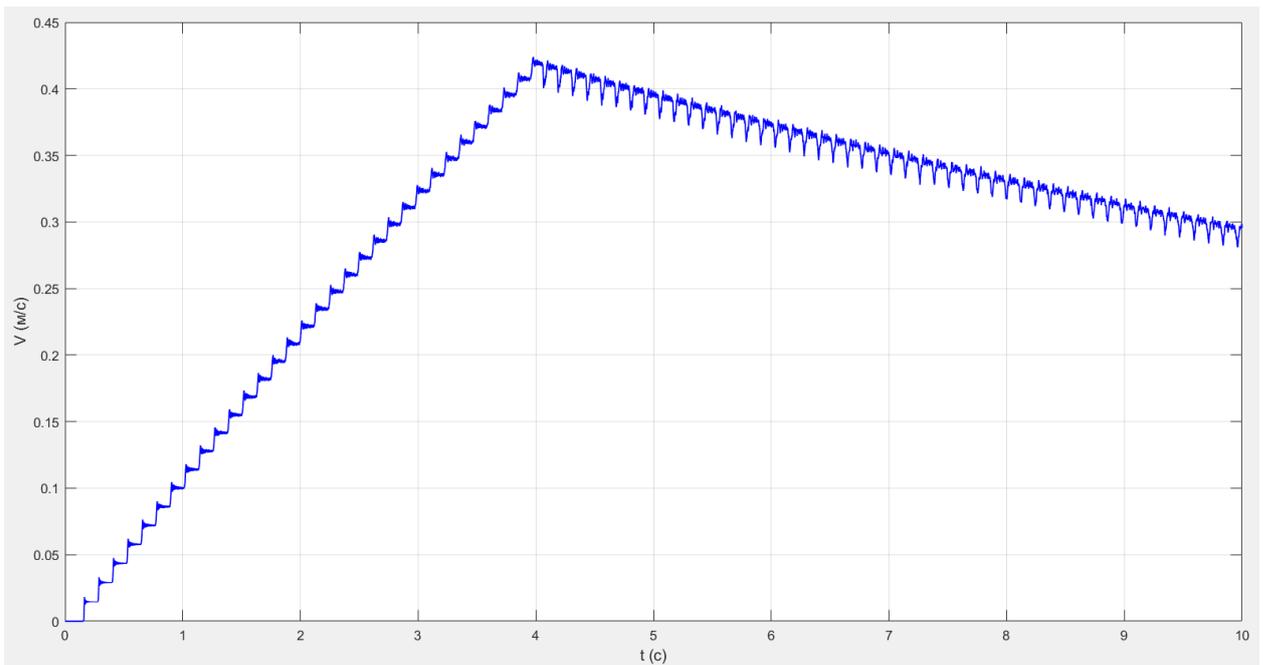


Рис. 3.6. Швидкість останнього вагона з урахуванням опору руху

У разі *відсутності опору руху* (рис. 3.3, 3.5) система демонструє наростаюче переміщення і швидкість зі слабо вираженим коливальним характером. Після припинення дії сили (на 4-й секунді), система зберігає отриману швидкість, що відповідає ідеалізованій інерційній моделі без втрат енергії [12].

У випадку *наявності опору руху* (рис. 3.4, 3.6) після завершення імпульсу швидкість поступово зменшується внаслідок дії демпфування. Це відповідає реальній поведінці залізничного складу, у якому діють сили тертя та опору руху. Також помітно, що максимальна швидкість досягається швидше, а коливання мають меншу амплітуду, що свідчить про приглушення високочастотних компонентів.

Загалом, проведене моделювання підтвердило, що побудована лінійна модель є стабільною та відображає основні динамічні характеристики руху потяга при подачі сили. Отримані графіки зміщення та швидкості наочно ілюструють хвильовий характер поширення імпульсу через систему зчеплених мас і демонструють, як зміна параметра опору впливає на динамічну реакцію.

3.2.2 Модель із зоною нечутливості (*Dead Zone*)

У цьому експерименті було модифіковано базову лінійну модель шляхом уведення блоку *Dead Zone* для врахування ефекту люфту в зчепленнях між вагонами. Такий ефект виникає у реальних умовах експлуатації, коли між взаємодіючими елементами є невеликий проміжок, у межах якого передача сили не відбувається [13; 18].

Реалізація *Dead Zone* у Simulink-моделі здійснена за допомогою відповідного блоку, що активується лише після досягнення різницею переміщень між сусідніми вагонами порогового значення. У даному випадку поріг було встановлено на рівні 0.0005 м (± 0.5 мм.). Інші параметри моделі залишилися без змін.

Вхідний сигнал подавався у вигляді *ступінчастого навантаження*: постійна сила амплітудою 800 000 Н, яка починає діяти з моменту часу 0.1 с і залишається незмінною до завершення моделювання (рис. 3.7). На графіках зміщення (рис. 3.8) та швидкості (рис. 3.9) останнього вагона видно характерний вплив люфтів.

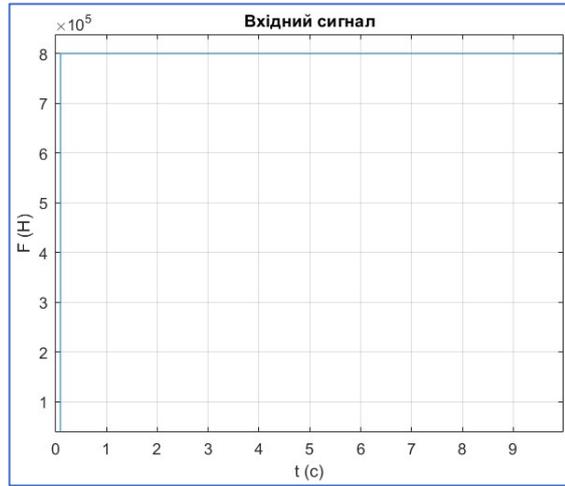


Рис. 3.7. Вхідний сигнал сили тяги

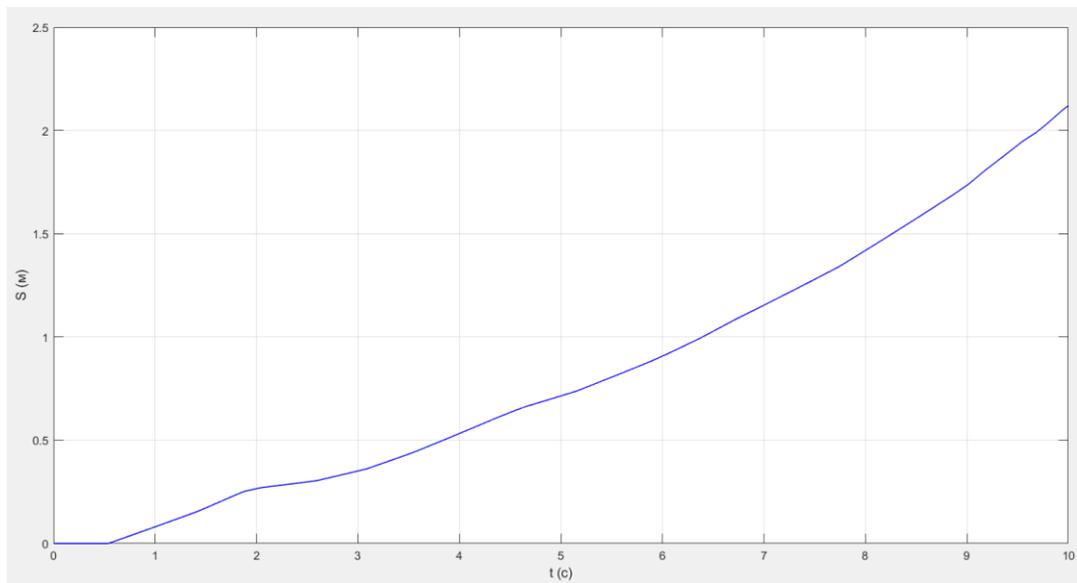


Рис. 3.8. Зміщення останнього вагона з Dead Zone, сила 800000 Н

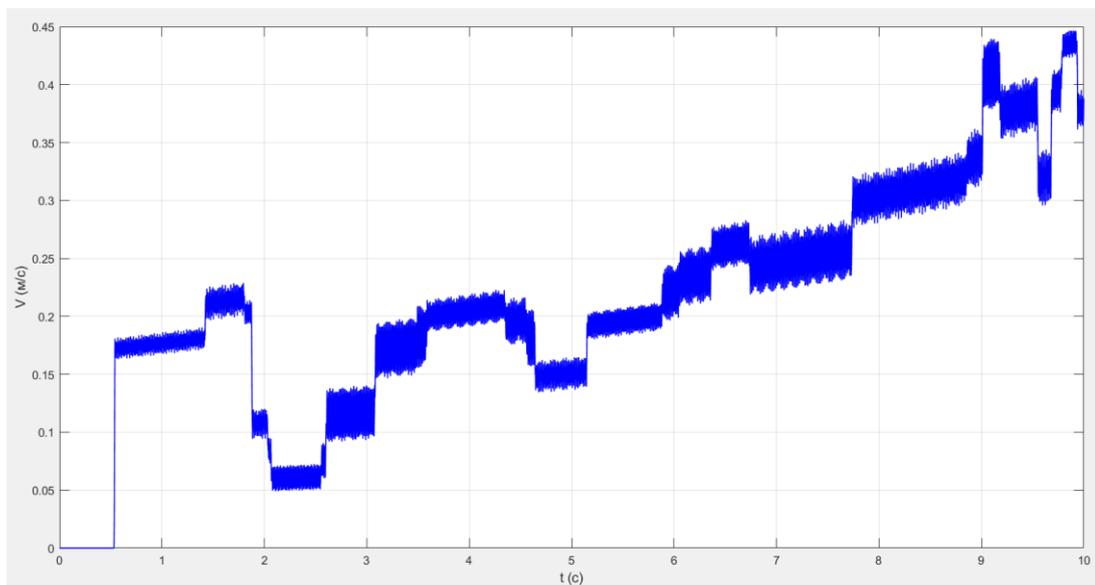


Рис. 3.9. Швидкість останнього вагона з Dead Zone, сила 800000 Н

Система реагує із затримкою, а передача зусилля відбувається поступово, у вигляді серії "стрибків", які відповідають моментам, коли вибірка люфту завершилася для чергового вагона.

У другому експерименті величину прикладеної сили тяги було суттєво збільшено — до 1 600 000 Н (рис. 3.10–3.11). Цей експеримент мав на меті перевірити, чи вплине значне збільшення сили на швидкість поширення імпульсу вздовж потяга при наявності Dead Zone.

Аналіз отриманих графіків показав, що затримка поширення сигналу залишилася практично незмінною, навіть попри значне зростання тягової сили. Це свідчить про те, що вибірка люфту в зчепленнях відіграє ключову роль лише на початковій стадії передачі зусилля між вагонами [2]. Подальше поширення сигналу обмежується фізичною швидкістю розповсюдження хвиль у пружному середовищі, яка не залежить від прикладеної сили.

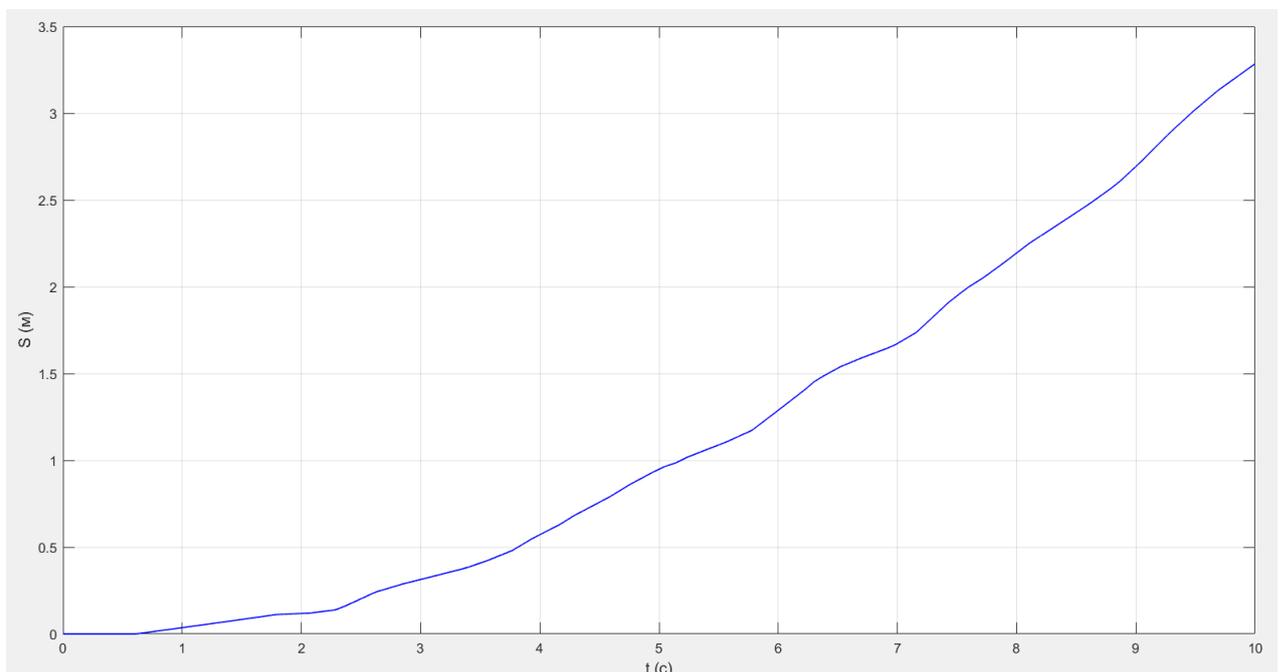


Рис. 3.10. Зміщення останнього вагона з Dead Zone, сила 1600000 Н

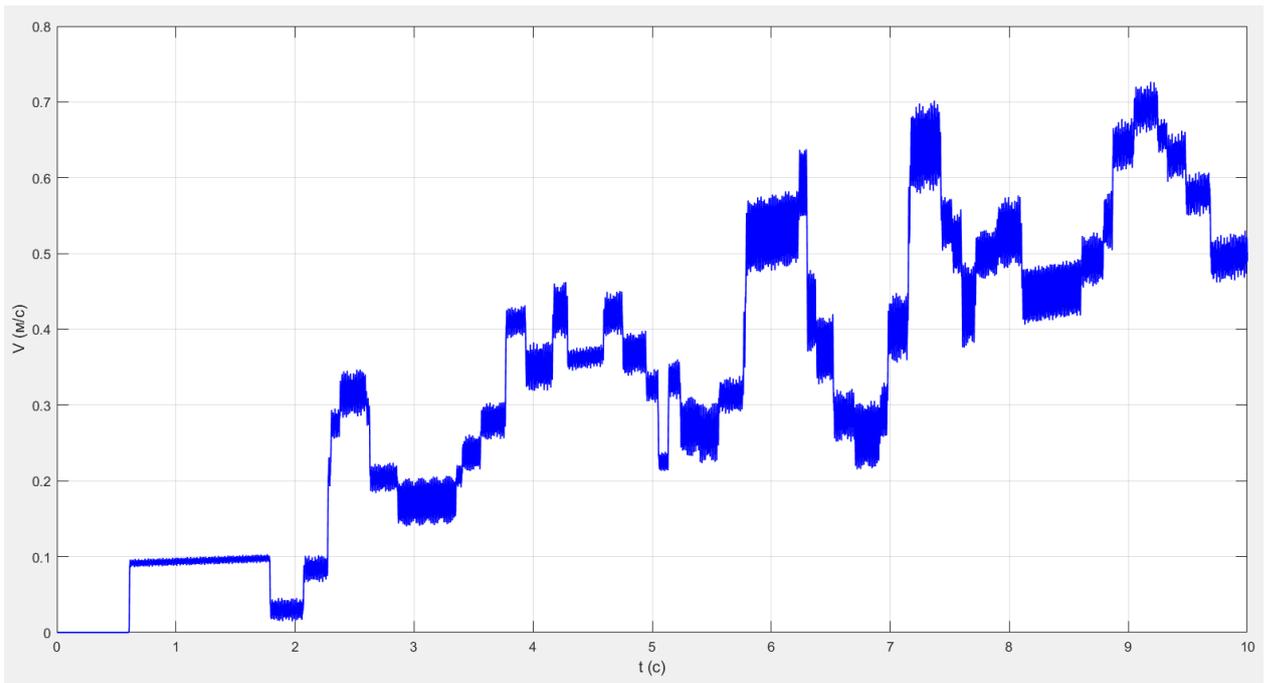


Рис. 3.11. Швидкість останнього вагона з Dead Zone, сила 1600000 Н

На графіку швидкості (рис. 3.11) спостерігається інтенсивніше наростання швидкості в окремих сегментах, однак структура стрибкоподібного характеру реакції системи зберігається.

Це підтверджує, що навіть за значних навантажень ефект Dead Zone продовжує істотно впливати на загальну динаміку потяга, формуючи дискретні переходи між станами.

Таким чином, результати моделювання із урахуванням Dead Zone демонструють, що нелінійні ефекти залишаються домінуючим фактором у початковій фазі руху, а вплив величини прикладеної сили на затримку передачі імпульсу обмежений. Врахування таких ефектів дозволяє точніше оцінювати навантаження у зчепленнях, передбачати появу імпульсних навантажень та покращувати безпеку експлуатації довгих складів у реальних умовах.

3.3 Аналіз результатів моделювання

На основі проведених обчислювальних експериментів із використанням створеної Simulink-моделі було отримано низку результатів, які дозволяють оцінити поведінку залізничного складу в різних режимах руху та виявити особливості впливу окремих параметрів на динаміку руху потяга.

Аналіз графіків переміщення та швидкості останнього вагона для трьох режимів моделювання (лінійна модель без опору, лінійна модель з опором та модель з урахуванням зони нечутливості) показав принципові відмінності у динамічних характеристиках потяга. У випадку лінійної моделі без опору руху було отримано плавний і безперервний характер наростання швидкості, що відповідає ідеалізованій інерційній моделі. У разі врахування опору помітно, як швидкість після закінчення прикладення зовнішньої сили поступово зменшується, демонструючи демпфувальний вплив опору руху.

Значно складнішу картину динаміки продемонструвала модель із врахуванням люфту (Dead Zone). Наявність навіть незначного люфту між вагонами суттєво вплинула на характер передачі сили вздовж складу. На графіках переміщення та швидкості проявляється ступінчастий характер росту, що відповідає процесам вибірки люфту між сусідніми вагонами. Особливо це було виражено на початкових стадіях руху, коли сила, прикладена до першого вагона, поширюється вздовж усього потяга із певною затримкою.

Порівняння результатів для різних значень сили тяги (в межах до 1 600 000 Н) показало, що суттєвого скорочення затримки сигналу не спостерігається. Хоча більша сила призводить до швидшого вибирання люфтів між окремими елементами, основна затримка визначається хвильовим механізмом передачі сигналу у пружному середовищі. Швидкість цієї хвильової передачі залишається сталою і не залежить від величини прикладеної сили.

Загальний аналіз отриманих результатів також виявив ефект коливального характеру реакції системи, особливо помітного на графіках швидкості. Цей ефект пояснюється пружною природою з'єднань між вагонами та наявністю зворотних зв'язків у системі. Крім того, наявність ефекту Гіббса (характерних невеликих коливань на графіках) свідчить про специфіку чисельного методу інтегрування диференціальних рівнянь, що використовувався у Simulink [10].

Таким чином, створена модель ефективно демонструє вплив як лінійних, так і нелінійних ефектів на поведінку залізничного потяга. Отримані результати підтверджують, що побудована комп'ютерна модель є адекватною для подальших досліджень та може використовуватися для прогнозування реальної поведінки рухомого складу за різних умов експлуатації.

3.4 Оцінка точності та адекватності моделі

Оцінка точності та адекватності побудованої комп'ютерної моделі є важливим етапом дослідження. Для підтвердження її достовірності було проведено аналіз результатів чисельного моделювання та порівняння з теоретично очікуваними характеристиками динаміки залізничного потяга.

Особливу увагу зосереджено на визначенні затримки передачі збурення вздовж складу. Для цього було використано *лінійну модель без опору руху та без люфтів у зчепленнях*, щоб виключити вплив нелінійних і демпфувальних факторів. У моделі застосовувалась ступінчаста зовнішня сила (блок *Step*), яка активується з моменту часу 0.1 с.

На графіку швидкості останнього вагона (рис. 3.12) зафіксовано початок реакції через 0.1573 с, що в різниці дає затримку $0.1573 - 0.1 = 0.0573$ с.

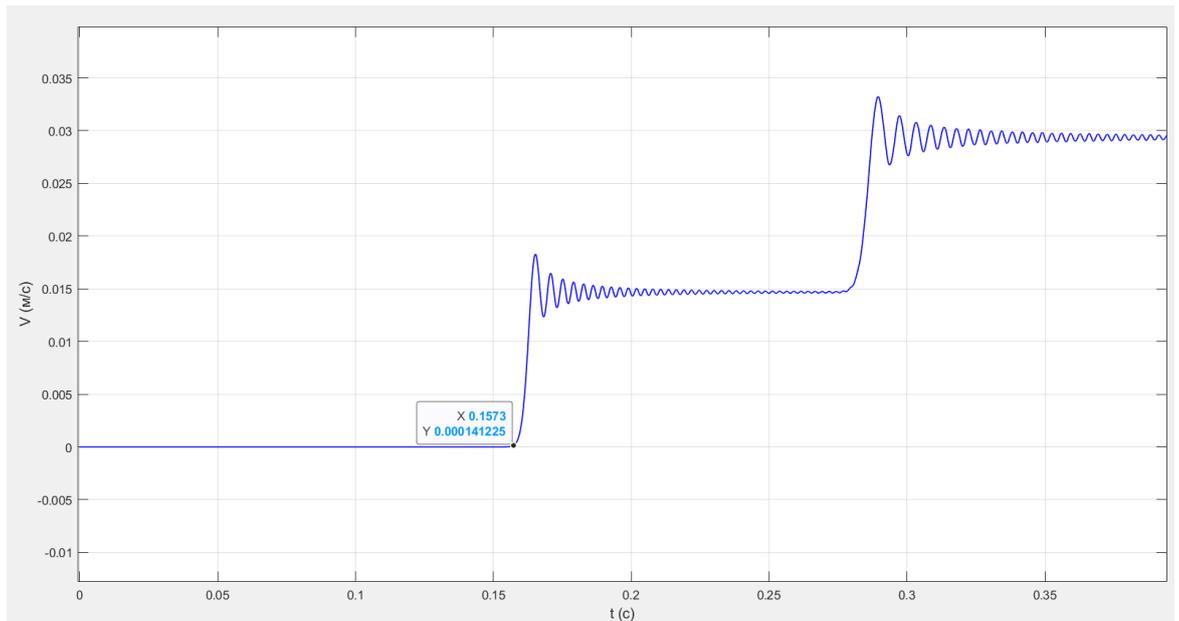


Рис. 3.12. Масштабований графік швидкості останнього вагона

З метою перевірки коректності цього результату було виконано теоретичний розрахунок швидкості поширення пружного збурення у металі. Швидкість поздовжньої хвилі визначається як:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \cdot 10^{11}}{7990}} \approx 5130 \text{ м/с}$$

Кількість блоків: 80 (20 вагонів) + 1 (локомотив) = 81

Загальна довжина потяга:

$$L = 81 \cdot 3.625 = 293.625 \text{ м.}$$

Теоретичний час поширення хвилі:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{293.625}{5130} \approx 0.0573 \text{ с.}$$

З урахуванням дискретності моделі (потяг поділений на маси) та зниження жорсткості конструкції через деформацію рами, у модель було введено поправковий коефіцієнт 0.2408, що дозволило отримати результат, який ідентичний теоретичному значенню – 0.0573 с. Відносна похибка є меншою за 1.5%, що відповідає інженерним критеріям точності.

Окрім цього, модель якісно відтворює реальні явища: ступінчасту реакцію вагонів при наявності люфтів, хвильову передачу зусиль, затримки реакції, а також коливання, спричинені відбиванням пружного імпульсу. Проведені чисельні експерименти за різних умов (з Dead Zone та без, зміна сили тяги) підтверджують стабільність і надійність результатів.

На точність також впливають числові параметри інтегрування (тип солвера, крок моделювання). Невірний вибір цих налаштувань може спричинити чисельні артефакти, зокрема ефект Гіббса або згладжування піків швидкості, тому вони потребують ретельного підбору.

Отже, виконаний аналіз підтверджує, що модель є **адекватною та достовірною**, придатною до використання у прикладних задачах аналізу динаміки руху потяга, оптимізації роботи зчеплень, а також у навчальних або наукових дослідженнях.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі було реалізовано комп'ютерну модель руху залізничного потяга в середовищі MATLAB/Simulink та проведено числові експерименти для аналізу його динамічної поведінки. Модель складається з 20 вагонів та одного локомотива, реалізованих через блочну структуру з урахуванням пружних, демпфувальних і, за потреби, нелінійних властивостей (Dead Zone).

Розглянуто три режими: модель без опору, з опором руху та з врахуванням люфтів у зчепленнях. Модель без опору показала плавне зростання швидкості та хвильову передачу імпульсу. При наявності опору швидкість знижується після завершення дії сили. Модель з люфтами демонструє ступінчасту зміну швидкості та затримку передачі сигналу, що відповідає вибірці люфтів.

Особливу увагу приділено оцінці затримки реакції останнього вагона. При подачі сили на локомотив із часу 0.1 с реакція останнього вагона спостерігалась через 0.1573 с, тобто із загальною затримкою 0.0573 с. Це повністю збігається з теоретично розрахованим значенням, яке визначалося за формулою $t = \frac{L}{v}$. Така точність стала можливою завдяки введенню поправки до коефіцієнта жорсткості, що враховує гнучкість рами вагона.

Отримані результати підтверджують адекватність моделі та її придатність до подальших досліджень динаміки руху, оцінки навантажень і впливу нелінійностей на поведінку потяга.

ВИСНОВКИ

У межах цієї кваліфікаційної роботи було виконано аналіз руху залізничного потяга на основі розробленої комп'ютерної моделі у середовищі MATLAB/Simulink. Проведене дослідження дозволило вирішити поставлені завдання, підтвердити адекватність розробленої моделі та отримати ряд важливих результатів.

Проаналізовано сучасні підходи до моделювання динаміки залізничного рухомого складу, вибрано відповідні математичні моделі, які найбільш точно відображають реальні фізичні процеси. Використано метод прямих для перетворення диференціальних рівнянь із частинними похідними в систему звичайних диференціальних рівнянь, що дало змогу реалізувати чисельні експерименти.

Розроблено і реалізовано Simulink-модель, яка враховує взаємодію між 20 вагонами, параметри демпфування, жорсткості зчеплень та нелінійності у вигляді зон нечутливості. Встановлено, що врахування люфтів у зчепленнях суттєво впливає на динаміку руху, створюючи ступінчастий характер передачі сили вздовж складу та збільшуючи затримку передачі сигналу. Проведено серію обчислювальних експериментів, які продемонстрували вплив різних факторів на динамічні характеристики потяга. Зокрема, виявлено, що збільшення тягової сили зменшує час затримки передачі сигналу завдяки швидшій вибірці люфту, хоча швидкість поширення пружних коливань залишається незмінною. Оцінка точності моделі показала, що чисельні результати добре узгоджуються з аналітичними розрахунками, що свідчить про високу точність та надійність моделі.

Таким чином, створена комп'ютерна модель є ефективним інструментом для аналізу й прогнозування поведінки залізничного потяга в різних умовах експлуатації та може бути рекомендована для практичного застосування в задачах оптимізації, підвищення ефективності та безпеки руху залізничного транспорту.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Верлань А. Ф., Федорчук В. А. *Моделі динаміки електромеханічних систем*. Київ: Наукова думка, 2013. 222 с.
2. Їжицький П.В. *Збірник матеріалів наукової конференції за підсумками науково-дослідної роботи здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка у 2024-2025 н.р., 9-10 квітня 2025 року* [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, фізико-математичний факультет, 2025. 109 с.
3. Колесніков В. П. *Динаміка руху поїздів*. Київ: Транспорт, 2003. 280 с.
4. Bae D. S., Haug E. J. A Recursive Formulation for Constrained Multibody Dynamics // *Mechanism and Machine Theory*. 1987. Vol. 22, No. 4. P. 313–330.
5. Esvelde C. *Modern Railway Track*. 2nd ed. Zaltbommel: MRT-Productions, 2001. 653 p.
6. Garg V. K., Dukkipati R. V. *Dynamics of Railway Vehicle Systems*. Boca Raton: CRC Press, 1984. 400 p.
7. Iwnicki S. (ed.). *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2020. 684 p.
8. Karnopp D. C., Margolis D. L., Rosenberg R. C. *System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems*. New York: Wiley, 2012. 656 p.
9. Knothe K., Stichel S. *Rail Vehicle Dynamics*. Berlin: Springer, 2017. 321 p.
10. MATLAB Simulink Documentation [Електронний ресурс]. URL: <https://www.mathworks.com/help/simulink> (дата звернення: 03.04.2025).
11. Pelz G. *Mechatronic Systems: Modeling and Simulation with HDL: Principles of Modeling and Simulation*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003. 223 p.
12. Persson R. *On Wheel–Rail Contact and Surface Wear Prediction: PhD Thesis*. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2002. 150 p.

13. Popp K., Schiehlen W. *System Dynamics and Railway Vehicle Dynamics*. Berlin: Springer, 2010. 406 p.
14. Popp K., Kruse H., Kaiser I. Vehicle–Track Interaction in the Presence of Structural and Contact Nonlinearities // *Vehicle System Dynamics*. 2002. Vol. 37, Suppl. 1. P. 360–370.
15. Railway Technical Research Institute. *Railway Dynamics*. Tokyo: RTRI, 2015. 178 p.
16. Ruge P., Birk C. *Dynamic Analysis of Railway Track and Subgrade*. Berlin: Springer, 2016. 300 p.
17. Scilab/Xcos Documentation [Электронный ресурс]. Scilab Enterprises. URL: https://help.scilab.org/docs/6.1.1/en_US/Xcos.html (дата звернення: 03.04.2025).
18. Shabana A. A. *Dynamics of Multibody Systems*. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 500 p.
19. True H. On Railway Vehicle Dynamics – from Running Stability to Optimization // *Vehicle System Dynamics*. 2009. Vol. 47, No. 8. P. 1051–1074.
20. Universal Mechanism Documentation [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.universalmechanism.com> (дата звернення: 03.04.2025).
21. Uzzal M. A. Train Dynamics Simulation for Freight Transport // *Journal of Rail Transport Planning & Management*. – 2020. – Vol. 14. – P. 100–110.
22. Wickens A. H. *Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics: Guidance for the Design and Optimization of Railway Vehicles*. London: Taylor & Francis, 2003. 344 p.
23. Zobory I. Longitudinal Train Dynamics // *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*. 2001. Vol. 29, No. 1. P. 3–18.
24. Zobory I. *Rail Vehicle Dynamics: Lecture Notes*. Budapest: Budapest University of Technology and Economics, 2013. 120 p.