

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

**Кваліфікаційна робота
магістра**
*на тему: «Використання аналітичних функцій для
фрактального стиснення інформації»*

Виконала:
студентка М1-М24 групи
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Ніжинська Ірина Юріївна

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Ковальська Ірина Борисівна

Кам'янець-Подільський, 2025

Зміст

Вступ	3
Розділ I	7
1. 1. Означення аналітичної функції	7
1. 2. Еквівалентність різних означень аналітичних функцій	16
1.3 Конформні відображення, що задаються деякими елементарними функціями	22
1.3.1. Лінійна функція	22
1.3.2 Дробово-лінійна функція	25
1.3.3. Степенева функція $w = z^n$	30
1.3.4 Показникова функція $w = e^z$	31
1.3.5 Функція Жуковського $w = \frac{1}{2} \left(z - \frac{a^2}{z} \right), a > 0$	31
Розділ 2	32
2.1. Означення та приклади фрактальних множин	32
2.2. Властивості фрактальних множин	36
2.3. Використання фракталів	43
Розділ 3	48
3.1 Умови використання конформних відображень для фрактального стиснення інформації	48
Висновки	56
Список використаних джерел	58

Вступ

У сучасному світі, що стрімко розвивається, цифрова інформація стала невід'ємною частиною практично всіх сфер людської діяльності: від науки та технологій до освіти, розваг та повсякденного спілкування. Щодня генеруються та обробляються терабайти даних – зображень, відео, аудіозаписів, текстових документів. Такий експоненційний ріст обсягів інформації ставить перед суспільством та технологічною індустрією низку викликів, одним з найголовніших серед яких є ефективне зберігання та передача даних. Обмежені ресурси пам'яті та пропускну здатності мереж вимагають постійного вдосконалення методів стиснення інформації.

Традиційні підходи до стиснення, такі як алгоритми на основі дискретного косинусного перетворення (як у JPEG для зображень) або перетворення Фур'є, досягли значних успіхів у стисненні регулярних або статистично однорідних даних. Однак їх ефективність часто знижується, коли мова йде про обробку складних, нерегулярних структур, що містять велику кількість деталей на різних масштабах. Саме до таких даних належать природні зображення, хмари, ландшафти, де часто простежуються властивості самоподібності та фрактальності.

Наприкінці ХХ століття Бенуа Мандельброт заклав основи фрактальної геометрії, що стала революційним кроком у розумінні та описі цих складних структур. Фрактали – це геометричні об'єкти, які демонструють самоподібність на різних масштабах, тобто їхня мала частина подібна до цілого. Ця унікальна властивість дозволила розробити принципово нові підходи до стиснення даних, відомі як фрактальне стиснення. Його основна ідея полягає у використанні ітерованих функціональних систем (ІФС) для компактного опису зображень через їхні внутрішні самоподібні перетворення. Переваги фрактального стиснення включають високі коефіцієнти стиснення та відсутність блокових артефактів, характерних для деяких інших методів. Однак, незважаючи на ці переваги, фрактальне стиснення стикається з проблемою високої

обчислювальної складності кодування та пошуку оптимальних перетворень, що гальмує його широке впровадження.

Паралельно з розвитком фрактальної геометрії, протягом десятиліть значний прогрес був досягнутий у галузі комплексного аналізу, зокрема у вивченні аналітичних функцій. Аналітичні функції – це функції, які в кожній точці своєї області визначення можуть бути розкладені в степеневий ряд. Ця властивість надає їм надзвичайну "гладкість" і унікальні характеристики, такі як конформність відображень. Конформне відображення зберігає кути між кривими, що робить його потужним інструментом для перетворення геометричних форм, зберігаючи при цьому їхні локальні властивості. Саме ця властивість аналітичних функцій створює цікавий місток до фрактальної геометрії, адже багато фракталів генеруються за допомогою ітерацій комплексних функцій (наприклад, множини Мандельброта та Жуліа).

Актуальність даної дипломної роботи обумовлена зростаючою потребою в інноваційних підходах до стиснення даних та потенціалом синергії між двома потужними математичними дисциплінами – комплексним аналізом та фрактальною геометрією. Дослідження можливостей інтеграції апарату аналітичних функцій та конформних відображень у процес фрактального стиснення може відкрити нові горизонти для розробки алгоритмів, що є більш ефективними, стійкими до шуму та здатними краще враховувати складну топологію фрактальних структур. Зокрема, використання аналітичних функцій може допомогти в оптимізації пошуку та побудові складніших, але більш точних перетворень в ІФС, а також у підвищенні якості відтворених зображень.

Метою даної дипломної роботи є всебічне дослідження теоретичних засад та обґрунтування практичних можливостей застосування аналітичних функцій для розробки нових або суттєвого вдосконалення існуючих алгоритмів фрактального стиснення інформації.

Завданням дипломної роботи є необхідність вирішити наступні питання:

1. Ґрунтовно вивчити та систематизувати основні означення та властивості аналітичних функцій, довести еквівалентність їхніх різних визначень для забезпечення повноти теоретичної бази.
2. Детально проаналізувати природу конформних відображень, що задаються елементарними аналітичними функціями, та їхню роль у трансформації геометричних об'єктів.
3. Ознайомитись з поняттям фрактальних множин, їхньою фрактальною розмірністю, властивостями самоподібності та розглянути найбільш характерні приклади.
4. Провести огляд та критичний аналіз існуючих підходів до фрактального стиснення інформації, виявивши їхні переваги, обмеження та перспективи для подальшого розвитку.
5. Сформулювати та обґрунтувати концептуальні моделі або принципи застосування аналітичних функцій та конформних відображень у процесах фрактального стиснення з метою його оптимізації, підвищення ефективності та розширення можливостей.

Об'єктом дослідження виступають процеси фрактального стиснення інформації як комплексні системи, засновані на ітераційних перетвореннях та принципах самоподібності.

Предметом дослідження є потенціал аналітичних функцій та конформних відображень як потужного математичного апарату для моделювання, аналізу та оптимізації ключових етапів фрактального стиснення, зокрема, формування функціональних перетворень та поліпшення якості декомпресії.

Методи дослідження, що будуть використані в роботі, включають: всебічний теоретичний аналіз наукової та навчальної літератури з комплексного аналізу та фрактальної геометрії; порівняльний аналіз існуючих алгоритмів фрактального стиснення; математичний аналіз властивостей та взаємозв'язків між

аналітичними функціями та фрактальними множинами; а також графічний аналіз для візуалізації складних математичних концепцій та демонстрації трансформацій.

Очікується, що результати даної дипломної роботи не лише поглиблять розуміння складних взаємозв'язків між різними галузями математики, але й закладуть теоретичну основу для розробки нових, більш досконалих алгоритмів стиснення даних, що матимуть практичне застосування в цифрових технологіях.

Висновки

Під час виконання дипломної роботи було успішно вирішено всі поставлені завдання, що дозволило досягти поставленої мети — дослідити та обґрунтувати можливість застосування апарату аналітичних функцій та конформних відображень для оптимізації процесів фрактального стиснення інформації.

У першому розділі було здійснено глибокий аналіз **аналітичних функцій**, систематизовано їхні основні означення та властивості. Було доведено, що різні підходи до визначення аналітичності (через диференційовність у комплексному сенсі та розклад у степеневий ряд) є еквівалентними. Це забезпечило міцну теоретичну основу для подальших досліджень.

Особливу увагу було приділено **конформним відображенням**, що задаються елементарними аналітичними функціями. Було встановлено, що ці відображення, зберігаючи кути між кривими, здатні нелінійно деформувати простір, що робить їх ідеальним інструментом для роботи зі складними геометричними об'єктами. Розуміння цих властивостей є ключовим для подальшого застосування в процесах фрактального стиснення.

У другому розділі ми вивчили природу **фрактальних множин**, їхні основні означення та приклади. Було детально проаналізовано ключові властивості фракталів, такі як **самоподібність**, що є основою для їх опису за допомогою ітераційних систем функцій, та **фрактальна вимірність**, що дозволяє кількісно оцінити їхню складність. Було розглянуто, як фрактали використовуються для моделювання природних явищ, починаючи від берегових ліній і закінчуючи структурою кровоносних судин. Це дослідження підтвердило, що фрактали є ефективним інструментом для опису та аналізу об'єктів із надзвичайно складною структурою.

У третьому розділі ми дослідили **умови застосування конформних відображень** у процесах фрактального стиснення. На основі аналізу властивостей аналітичних функцій та фракталів було сформульовано принципи,

за якими конформні відображення можуть замінити традиційні афінні перетворення. Запропоновано використовувати ці відображення для пошуку ітераційної системи функцій (IFS), яка генерує фрактал, максимально подібний до вихідного зображення. Використання конформних відображень дозволяє досягти вищого ступеня стиснення, зберігаючи при цьому геометричну структуру об'єкта. Це дослідження закладає основу для розробки нових, ефективніших алгоритмів фрактального стиснення, що може значно покращити якість і швидкість обробки складних зображень.

Результати роботи підтверджують, що апарат аналітичних функцій та конформних відображень не лише збагачує теоретичну базу, але й відкриває нові можливості для практичного застосування у сфері фрактального стиснення. Запропоновані концепції дозволяють перевести процес стиснення на якісно новий рівень, використовуючи елегантні математичні рішення замість обчислювально-інтенсивних алгоритмів. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розробку конкретних алгоритмів на основі цих принципів та їхню експериментальну перевірку.

Список використаних джерел

1. Бак С.М. Лекції з комплексного аналізу. – Вінниця: ФОП Горбачук І.П., 2011.
2. Безклубенко, І. С. Математичний аналіз : підручник для студ. галузі знань 12 спец. 123, 125 : у 2 ч. / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна ; Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт. - Ч. 1. - Київ : КНУБА, 2024. - 224 с. : іл. - Бібліогр. : с. 224.
3. Горобець Ю. І., Кучко А. М., Вавилова І. Б. Фрактальна геометрія у природознавстві: Навчальний посібник. – Київ, Наукова думка, 2008. – 232с.
4. Грищенко О.Ю., Оноцький В.В. Курс лекцій з комплексного аналізу Частина перша – Київ 2015
5. Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика. – Омск: ОГУ, 2002.
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підручник у двох частинах. Частина 1. – К: Либідь, 1993. – 320 с.
7. Кіріченко Л.О., Радівілова Т.А. Фрактальний аналіз самоподібних і мультифрактальних часових рядів – Харків, ХНУРЕ, 2019. - 106 с.
8. Поняття фрактала, їх властивості, види фракталів та способи їх утворення. Показано застосування фракталів в діяльності людини. URL: <https://naurok.com.ua/fraktali-dlya-roboti-v-man-218178.html> (дата звернення: 11.09.2025)
9. Слюсарчук П.В., Боярищева Т.В., Герич М.С., Погоріляк О.О., Синявська О.О., Сливка-Тилищак Г.І., Тегза А.М. Комплексний аналіз: навчальний посібник – Ужгород: 2022. – 244 с.
10. Щерба А. І., А. М. Нестеренко, І. В. Мірошкіна; В. О. Щерба Математичний аналіз : навч. посіб. [Електронний ресурс] – Черкаси : ЧДТУ, 2023. – 513 с.