Міністерство освіти та науки України
Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

з теми:

НАЙКРАЩЕ НАБЛИЖЕННЯ КОМПОЗИЦІЇ ФУНКЦІЙ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Виконав: здобувач вищої освіти освітньої програми Середня освіта (Математика, інформатика) спеціальності 014 Середня освіта (за предметними спеціальностями) предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Романюк Андрій Васильович

Керівник: **Сорич В.А.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики

Рецензент: **Гудима У.В.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математика

м. Кам’янець-Подільський – 2025 р.

Вступ

Теорія наближення функцій – центр математичного аналізу. Теорія наближення яка виникла в результаті внутрішнього розвитку математичної науки та потреб практики продовжує інтенсивно розвиватися і на теперішній час. В ній відображена одна із фундаментальних ідей математики – наближення (заміна) складних об'єктів більш простими та зручними. Ця ідея є визначальною у питанні зв′язку математики з практикою, що стимулювало розвиток теорії наближення починаючи з її заснування і забезпечує зацікавленість до неї в майбутньому.

Широкому проникненню ідей та методів теорії апроксимації в найрізноманітніші області науки в значній мірі сприяло виявлення тісних зв'язків між досить далекими, на перший погляд, екстремальними задачами функціонального аналізу, теорії функцій, варіаційного числення, чисельного аналізу. Найбільш яскраво та ефективно такі зв'язки відслідковуються при дослідженні найкращого наближення функцій або, ширше, елементів деякого лінійного нормованого простору. Зокрема, застосування загальних теорем двоїстості дозволило знайти кінцеві результати в розв'язанні ряду складних задач з найкращого наближення класів функцій.

У рівномірній метриці задача отримання точних значень найкращих наближень на класах 2π – періодичних функцій, r-ті ($r\epsilon N$) похідні яких знаходяться в одиничній сфері простору суттєво обмежених функцій, була розв'язана в 1936р. Ж. Фаваром . Такі класи можна розглядати також як класи згорток, що породжені відомими в науковій літературі з теорії наближення ядрами Бернуллі. В основі ідеї розв'язку задачі лежить теорема Ролля про співвідношення між числом нулів функції та числом нулів її похідної. Остаточні результати по розв'язанню задачі знаходження точних значень величин найкращих наближень на класах W_β^r,що породжуються ядрами Вейля-Надя та які узагальнюють ядра Бернуллі, у метриках просторів неперервних і відповідно сумовних функцій, належать В.К.Дзядику . При цьому В.К. Дзядик встановив виконання умови Надя N_n^* для широкого класу ядер , які записуються у вигляді лінійної комбінації періодичних інтегралів від абсолютно монотонних функцій та які, як частковий випадок, містять ядра Вейля-Надя при довільних значеннях параметрів $\mathrm{r} > 0$ і довільних дійсних β. Такі ж дослідження на різних функціональних компактах успішно здійснили видатні математики Н.І. Ахієзер та М.Г. Крейн , Б. Надь, С. М. Нікольський , С.Б. Стєчкін та Сунь Юн-шен . Ідея дослідження складених ядер, що записуються у вигляді лінійної комбінації складових доданків належить О.І. Степанцю і отримала відповідне втілення в задачах сумісного наближення функцій та їх похідних.

0.1. ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\forall$ – квантор загальності: «для кожного», «для будь-якого»;

$\exists$ – квантор існування: «існує»;

$x \in A$ – елемент *x* належить множині *A*;

$x \notin A$ – елемент *x* не належить множині *A*;

$A \cup B$ – об'єднання множин *A* і *B*;

$A \cap B$ – перетин множин *A* і *B*;

N – множина всіх натуральних чисел;

Z – множина всіх цілих чисел;

R – множина всіх дійсних чисел;

C – множина всіх комплексних чисел;

$\sup\limits_{x \in A} F(x)$ – точна верхня межа значень функціонала *F* на множині *A*;

$ess\sup$ – суттєва точна верхня межа;

$sign\ \alpha$ – величина, що дорівнює 1, якщо $\alpha > 0$, дорівнює -1, якщо $\alpha < 0$ і дорівнює 0, якщо $\alpha = 0$;

$\|\square\|_X$ – норма в лінійному нормованому просторі;

U_p – одинична куля в просторі L_p, $p = 1$, $p = \infty$;

U_p^o – множина вигляду: $U_p^o = \left\{ \varphi \in U_p : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0 \right\}$;

$\mathrm{Re}\, Z$ – дійсна частина комплексного числаz;

$\mathrm{Im}\, Z$ – уявна частина комплексного числаz;

C – простір неперервних 2π-періодичних функцій f з нормою

$$\| f\|_C = \max_{0\le x\le 2\pi} \left| f(t)\right|;$$

L_p – простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених (при $p=\infty$) або сумовних у *p*-ому степені функцій $(1\le p\le\infty)$ з нормою

$$\| f\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} \left| f(t)\right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1\le p<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0;2\pi]} \left| f(t)\right|, \ p=\infty; \end{cases}$$

$S[f]$ – ряд Фур'є функції *f*;

$S_n(f)$ – сума Фур'є функції *f*;

t_n – тригонометричний поліном порядку *n*;

t_n^* – многочлен найкращого наближення функції f в лінійному нормованому просторі *X*;

$p_n(f;x)$ – відхилення від функції її часткових сум Фур'є S_{n-1};

$E_n(f)_X$ – найкраще наближення функції тригонометричними поліномами порядку *n-1* у метриці простору *X*;

$E_n(\mathfrak{R})_X$ – найкраще наближення множини $\mathfrak{R}\subset X$ тригонометричними поліномами порядку *n-1* у метриці простору *X*;

$E_{n,m}(\mathfrak{R})_X$ – найкраще сумісне наближення функцій f множини $\mathfrak{R}\subset X$ та їх похідних $f_{\beta_i}^{\psi_i}(\cdot)$ тригонометричними многочленами степеня *n-1* у метриці простору *X*;

$B_{r,r}(t)$ – ядра Бернуллі $r\in N$;

$B_{r,\beta}(t)$ – узагальнені ядра Бернуллі:

$$B_{r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\left(\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right),\ r>0,\ \beta\in R;$$

$P^q(t)$ – ядра Пуассона $(0<q<1)$; P^q(t) = $\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$;

$P_\beta^q(t)$ – узагальнені ядра Пуассона:

P_β^q(t) =$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)$, 0$< q < 1, \beta\epsilon R$;

$(f*g)(x)$ – згортка функцій f і $(f*g)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$;

$$f^r(\cdot)=f_r^{(r)}(\cdot)-r \text{ – та похідна функції } f;$$

$f_\beta^q-(q,\beta)$ – похідна функції $f(\cdot)$ в сенсі О.І. Степанця

f_β^q(x)= $\sum_{k=1}^{\infty} q^{-k}(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)$ + b_k(f)$\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)$);

$f_\beta^\psi(\cdot)-(\psi,\beta)$ – похідна функції $f(\cdot)$ в сенсі О.І. Степанця:

$W_{\beta,p}^r$–класи Вейля-Надя:$W_{\beta p}^r=\left\{f\in L_p:\left\|f_\beta^{(r)}\right\|_p\le 1\right\},\ r>0,\ \beta\in R,\ p=1,\ p=\infty;$

$P_{\beta,p}^q$– класи 2π-періодичних функцій вигляду, які записують у вигляді згортки:

$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+t)\cdot P_p^q(t)dt$; p=1,p = ∞;

$L_\beta^\psi\mathfrak{R}$ – класи 2π-періодичних функцій вигляду:

$$L_\beta^\psi\mathfrak{R}=\left\{f\in L: f_\beta^\psi(\cdot)\in\mathfrak{R},\ \mathfrak{R}\in L\right\};$$

$C_\beta^\psi\mathfrak{R}$ – класи неперервних 2π-періодичних функцій вигляду: $C_\beta^\psi\mathfrak{R}=L_\beta^\psi\mathfrak{R}\cap C$.

02.Короткий огляд результатів та історичні відомості

Математики всього світу з початку XX сторіччя активно здійснюють дослідження пов’язані зі швидкістю спадання до нуля послідовності, яка виражає відстань від заданої функції до наближаючого її агрегата при n → ∞. У роботах Ш.Ж. Валле-Пуссена, А. Лебега встановлено, що швидкість спадання величини $E_n(f)$ –найкращого наближення функції f(x) пов’язана зі степенем гладкості функції. У 30-х роках попереднього сторіччя з’явилися перші розв’язки задач нового типу, яких з роками назвали екстремальними задачами. Засновником цього напряму, по справедливості, вважають академіка А.М. Колмогорова, який в 1935 році розглянув величину

$$\mathcal{E}_n(W^r) = \sup_{f(x)\epsilon W^r} \|f(x) - S_n(f,x)\|_C, \qquad (0.1)$$

та довів, що при n → ∞

$$\mathcal{E}_n(W^r) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right), \text{ r } \epsilon \text{ N}. \qquad (0.2)$$

В 1936 році Ж. Фаваром була вперше розв’язана і задача про знаходження точного значення величини найкращого наближення класу функцій

$$E_n(W^r) = \sup_{f(x)\epsilon W^r} \inf_{t_{n-1}} \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_C = \frac{M_r}{n^r}, \text{ r = 1,2,...} \qquad (0.3)$$

де нижня межа береться по всіх тригонометричних поліномах, степеня не вищого за n-1, а

$$M_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}} \qquad (0.4)$$

сталі, які назвали константи Фавара.

Ряд робіт, далі, було отримано з відшукання значень найкращих наближень на класах функцій тригонометричними поліномами, які записуються у вигляді згорток з ядром більш загального характеру ніж

$B_r\ (t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}, r = 1,2, ...,$ –ядра Бернуллі, а саме,на класах W_β^r- $r > 0$, β ϵ R, - класи Вейля-Надя.

Б. Надь розглянув у 1938 році широкий клас ядер (які є парними або ж непарними функціями), та для згорток з цими ядрами знайшов значення величини найкращого їх наближення .

Задачу найкращого наближення класу функцій $M_{L,}$твірного ядра згортки в метриці простору L_1= L , тригонометричними поліномами, тобто знаходження величини

$$E_n\,(M_L) = \sup_{f(x)\epsilon M_L} \inf_{t_{n-1}} \|f(x) - t_{n-1}(x)\|_L = \sup_{f(x)\epsilon W^r} \inf_{t_{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - t_{n-1}(t)|\text{dt}, \qquad (0.5)$$

дослідив академік С.М. Нікольський .Застосувавши двоїсті співвідношення для задач в просторах неперервних та відповідно інтегровних функцій, він показав, що знайшовши результат по найкращому наближенню у рівномірній метриці ми одночасно отримуємо розв'язок задачі найкращого наближення в середньому.

Великих зусиль було затрачено на поширення результатів, отриманих для класів W^r, r ϵ N, в метриках просторів неперервних та інтегровних функцій, на випадок дробових r >0. Перший важливий крок в цьому напрямку зробив В.К. Дзядик, знайшовши в 1951р. величину $E_n(W^r)$ при $0<r<1$. С.Б. Стєчкін в 1956 р. аналогічну величину відшукав для класу згорток із ядрами $B_\beta^r\ (t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}$ при $0<r<1$, $r<\beta<2-r$.

В.К. Дзядик у 1959 році повертається знову до дослідження задачі Фавара і пропонує новий шлях міркувань по її розв'язанню, завдяки чому було знайдено, що

$$E_n(W^r)_C = E_n(W^r)_L = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\ B_r\ (t) -\ t_{n-1}^*(t)|\mathrm{d}t = \frac{M_r}{n^r}, \qquad (0.5)$$

де $$M_r = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\theta\pi-\frac{r\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|, \qquad (0.6)$$

$t_{n-1}^*(t)$ – тригонометричний поліном степеня n-1, що співпадає з функцією

$B_r\ (t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}$ в точках $\frac{(\theta\pi+k\pi)}{n}$, k = $\overline{0{,}2n-1}$,

а θ – число що дорівнює нулю, якщо $0<r<1$ і є коренем рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\theta\pi-\frac{r\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} = 0 \qquad (0.7)$$

в інтервалі $[0{,}1[$, якщо r >1.

Таким чином задача Фавара на класах W^r була розв$'$язана повністю.

У дипломній роботі досліджуються апроксимативні властивості класів функцій $C_{\beta,\infty}^{\psi}\left(L_{\beta,1}^{\psi}\right)$, які можна записати у вигляді згортки

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\ D_\beta^\psi(t)\mathrm{d}t,$$

де ядро $D_\beta^\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\ \frac{\beta\pi}{2}\right)$ –деяка сумовна функція, а $\psi=\psi(k)$ і β – довільні послідовності дійсних чисел. Дипломна робота присвячена знаходженню точного значення величини найкращого сумісного наближення класів функцій $C_{\beta,\infty}^{\psi}\left(L_{\beta,1}^{\psi}\right)$.

Висновки

В дипломній роботі досліджено апроксимаційні властивості класів функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)$, які можна записати за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0\,(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\, D^{\psi}_{\beta}(t)\mathrm{dt},$$

де ядро $D^{\psi}_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi\,(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$ – деяка сумовна функція, а $\psi = \psi(k)$ і β – довільні послідовності дійсних чисел. Числовий результат дипломної – обчислено точне значення величини найкращого сумісного наближення класів функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)$. Стисло основні результати дипломної роботи можна сформулювати у вигляді таких тверджень:

Якщо неперервну функція $\mathrm{f}(\cdot) \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{R}$ і її $(\psi_{\,i}, \beta_i)$ – похідні $f^{\psi_i}_{\beta_i}(\cdot)$ вдається записати у вигляді згортки вигляду

$$f^{\psi_i}_{\beta_i}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\, D^{\psi/\psi_i}_{\beta-\beta_i}(t)\mathrm{dt},\ \mathrm{i} = \overline{1,m},$$

де ядра $D^{\psi/\psi_i}_{\beta-\beta_i}(t)$ – абсолютно монотонні функції, то тоді справедлива

Теорема 1. Якщо пари $\left(\psi_{i,}\beta_i\right)$, i = $\overline{1,m}$, i = 1, 2, … , m впорядковані за відношенням С- передування, а числовий вектор α = (1,1, … ,1), то для кожного натурального n виконується рівність

$$E^{(\alpha)}_{n,m}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C = \sup_{f\,\in\,W^{r}_{\beta,\infty}}\ \inf_{\{t_{n-1,i}\}}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\, n^{-\,r_i}\left(f^{(r_i)}_{\beta-\beta_i}(x)\right) - \ t_{n-1,i}(x)\right\|_C =$$

$$=\left|\frac{4}{\pi}\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi\big((2k+1)n\big)}{2k+1}\ \sin\frac{\beta-\,\beta_i}{2}\pi\right|.$$

Теорема 2.Нехай $\left((\psi_i, \beta_i)\right)$ похідні i = 1,2,…,m,впорядковані за відношенням С-передування, задовольняють умови $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_i(k)$ = 0, $\psi_i(k) \geq \psi_i(k+1)$; $\Delta_2\psi_i(k) = \ \psi_i(k)$ - 2 $\psi_i(k+1)$ + $\ \psi_i(k+2) \geq 0$ та$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} < \infty$. Тоді при виконанні умов β - β_i = 1, α = (1,1, … ,1), i = $\overline{1,m}$, для кожного натурального значення n справедлива рівність

$$E^{(\alpha)}_{n,m}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi\big((2k+1)n\big)}{2k+1}. \tag{7.15}$$

Нехай похідні $f^{\psi_i}_{\beta_i}(x)$, i = 1,2,…,m, впорядковані за відношенням С-передування, задовольняють умови $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_i(k)$ = 0, $\psi_i(k) \geq \ \psi_i(k+1)$; $\Delta_2\psi_i(k) = \ \psi_i(k)$ - 2 $\psi_i(k+1)$ + $\ \psi_i(k+2) \geq 0$ і $\Delta_3(k) = \ \psi_i(k)$ – 3

$\psi_i(k+1)$ + 3 $\psi_i(k+2)$ - $\psi_i(k+3) \geq 0$, k = 1,2,..., . Тоді при виконанні умов

β -$\beta_i = 0$, α = (1,1, … ,1), i = $\overline{1,m}$, для кожного натурального n справедлива рівність

$E_{n,m}^{(\alpha)}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\psi((2k+1)n)}{2k+1}$.

Лема. Якщо ядро згортки $D_\beta^\psi(t)$ можна записати у вигляді суми

$D_\beta^\psi(t)$ = $D_{\beta_1}^\psi(t)$ + $D_{\beta_2}^\psi(t)$,

де функція $D_{\beta_1}^\psi(t)$ та її похідна $\left(D_{\beta_1}^\psi(t)\right)'$ задовольняють умову теореми Дзядика D1, тобто функція $D_\beta^\psi(t)$ має в $(-\infty, a)$ абсолютно монотонну похідну, і в той же час функція $\left(D_{\beta_2}^\psi(t)\right)'$ задовольняє умову теореми Дзядика D2,задана в інтервалі $(b, +\infty)$ функція $D_\beta^\psi(t)$ є такою, що породжена нею функція - $D_\beta^\psi(-t)$ абсолютно монотонна в інтервалі $(-\infty, -b)$, то тоді трансцендентне рівняння

$D_\beta^\psi(t)$ - $t_{n-1}(t)$ = 0

на відрізку довжиною 2π має із врахуванням кратності коренів не більше за 2n.

Теорема 3. Якщо функція f(x) та її (ψ_i, β_i) – похідні $f_{\beta_i}^{\psi_i}(x)$ можуть бути записані у вигляді $f_{\beta_i}^{\psi_i}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)D_{\beta-\beta_i}^{\psi/\psi_i}(t)$dt, при цьому відповідні пари (ψ_i, β_i) впорядковані за відношенням С- передування, для всіх i= $\overline{1,m}$, а ядро згортки сумісного наближення $H_{\beta-\beta_i}^{\psi/\psi_i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\,\psi_i(n)D_{\beta-\beta_i}^{\psi/\psi_i}(t)$ задовольняє умови леми, тоді при кожному n натуральному справедлива рівність

$$E_{n,m}^{(\alpha)}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}\right)_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\,\psi_i(n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi((2k+1)n)}{\psi_i((2k+1)n)(2k+1)}\sin\left((2k+1)\theta_n\pi - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right)\right|,$$

де

θ_n – єдиний на сегменті $[0,\pi[$ корінь рівняння

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\,\psi_{\mathrm{i}}(n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi((2k+1)n)}{\psi_i((2k+1)n)}\cos\left((2k+1)\theta_n\pi - \frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right) = 0.$$

Аналогічні теореми отримані і в спряженому просторі L_1= L.

Так, зокрема, для класичних класів Вейля-Надя W_β^r результат має вигляд:

Теорема 4. Якщо $0 < r_i < 1, \beta_i \in [r_i, 2 - r_i], \alpha_i -$ числа однакового знаку, $i = \overline{1, m}$, то при будь-якому натуральному n

$$E_n\left(F(t,\alpha)\right)_1 = \left|\int_0^{2\pi} F(t,\alpha) sign \sin ntdt\right| = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \sin\frac{\beta_i \pi}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^{r_i+1}}\right|.$$

Якщо $0 < r_i < 1, \beta_i \in [0, r_i] \cup [2 - r_i, 2], \alpha_i^* = \begin{cases} > 0, \text{якщо } \beta_i \in [0, r_i] \\ < 0, \text{якщо } \beta_i \in [2 - r_i, 2] \end{cases}, i = \overline{1, m}$, то при будь-якому натуральному n

$$E_n\left(F(t,\alpha^*)\right)_1 = \left|\int_0^{2\pi} F(t,\alpha^*) sign \sin n(t-\theta_n) dt\right| = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* n^{-r_i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2j+1)\theta_n - \beta_i \pi / 2\right]}{(2j+1)^{r_i+1}}\right|$$

де θ_n – корінь рівняння $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* n^{-r_i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2j+1)\theta_n - \beta_i \pi / 2\right]}{(2j+1)^{r_i}} = 0$.

Список використаних джерел

1. Валле – Пуссен (Vallee – Poussin Ch.-J. de la) Sur les polynomes d'approximation et representation approchee d'un angle. Bull. Acad. Sci. Belg.- 1910. -№12.- P. 804-844.
2. Сорич В.А. Найкраще однчасне наближення періодичних функцій і їх похідних тригонометричними поліномами. Укр. мат. журн. – 1984. –Т.36. №6. –с.791-797.
3. Сорич В.А. Найкраще сумісне наближення функцій та їх похідних тригонометричними поліномами. Зб. наук. пр. Кам'янець- Подільського держ. пед. ін-ту. Серія фізико-математична.- Кам'янець- Подільський: Кам'янець-Подільський держ. пед. ін-т, 1993.- Вип.1.- с.63-75.
4. Сорич В.А. Про найкраще сумісне наближення функцій та їх похідних на класах W_{β}^{r}. Зб. наук. пр. Кам'янець- Подільського держ. пед. ін-ту. Серія фізико-математична.- Кам'янець- Подільський: Кам'янець-Подільський держ. пед. ін-т, 1993.- Вип.1.- с.75-82.
5. Nagy B. $\ddot{U}$ber gewisse Exstremal fragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklugen. I. Periodischer Fall. Berichte Acad.d.wiss.-1938.-40.- p. 103-134.
6. Nagy B. Fuggvinych megkozelit$e\acute{s}e$ Fourier- sorok szamtani h$\ddot{o}$zepeivel. Mat. es. Fis. lapok. – 1942.- 49, p. 123.
7. Nagy B. Approximation des Functionen durch arichmetischen mittel ihrer Fouriechen Reihen. Mat.es Fis. lapok.- 1946.-11, p. 71-84.
8. Nagy B. Sur une chasse generale de procedes de summation pour les series de Fourier. Hung. Acta.Muth.-1948.-1.№3. – p. 14-62.