

Міністерство освіти і науки України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра математики

Дипломна робота магістра  
з теми «Гібридні інтегральні перетворення Фур'є-Лежандра в  
задачах математичної фізики»

Виконала: студентка II курсу,  
групи Mb1-M17z  
спеціальності 014 Середня освіта  
(Математика)  
Пешкань Маріна Артурівна

Науковий керівник:  
доктор фізико-математичних наук,  
професор Конет І. М.  
Рецензент:  
кандидат фізико-математичних  
наук Пилипюк Т. М.

Кам'янець-Подільський-2018 рік

## **Зміст**

Вступ .....	3
§1. Гібридне перетворення типу Фур'є – Лежандра на декартовій осі та його застосування .....	7
§2. Гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є-Лежандра на обмеженій справа декартовій півосі та його застосування.....	25
§3. Гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є-Лежандра на полярній осі та його застосування.....	34
§4. Гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра 1-го роду – Фур'є на полярній осі та його застосування.....	45
§5. Гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра 2-го роду – Фур'є на полярній осі та його застосування.....	55
Висновки .....	64
Література .....	65

## Вступ

До найбільш визначених наукових і технічних досягнень ХХ століття можна віднести розвиток ядерної енергетики та освоєння на основі ракетної техніки високих швидкостей польоту. В обох випадках доводиться мати справу з надзвичайно високими температурами, пов'язаними з процесом одержання енергії, а у випадку високошвидкісних польотів – також з явищем аеродинамічного нагрівання. Крім високих рівнів температури, в робочих умовах часто виникають і значні градієнти температур. Внаслідок великих різниць температури виникають температурні напруження, які є важливим фактором, що визначає довговічність і надійність матеріалів. Тому проблема визначення температурних полів і температурних напружень становить значний теоретичний, практичний та економічний інтерес. Крім атомної енергетики і космічної техніки, ця проблема має важливе значення в радіотехніці і електроніці, зварювальному виробництві, при розрахунку конструктивних елементів машин та нагрівальних пристроїв, інженерних споруд тощо [14, 19, 24, 27, 33, 34, 35, 36, 44].

Зазначимо також, що дослідження кінетики ряду фізичних та хіміко-технологічних процесів з математичної точки зору аналогічні задачам стаціонарної та нестаціонарної теорії теплопровідності [7].

Саме цими обставинами пояснюється виняткова увага до задач теплопровідності на сучасному етапі науково-технічного прогресу. При цьому значно підвищуються вимоги до точності визначення температур і теплових потоків. У зв'язку з цим зростає роль і значення точних аналітичних методів розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності (систем рівнянь), які у багатьох випадках дозволяють подати загальний розв'язок задачі у вигляді, зручному для оцінки теплового режиму тіла та домінуючих факторів теплообміну.

За останні десятиріччя в практику аналітичної теорії теплопровідності, термомеханіки та теорії пружності глибоко проникають методи розрахунку температурних полів та полів напружень, що

ґрунтуються на застосуванні інтегральних перетворень [4, 9, 15, 17, 23, 31, 32, 42, 43, 45].

З точки зору математики метод інтегральних перетворень еквівалентний методу власних функцій [2], але він має і суттєві переваги. До цих переваг слід віднести, у першу чергу, стандартну техніку обчислень, а також можливість подання розв'язку задачі у різних формах. Це особливо важливо у застосуваннях, коли необхідно отримувати розв'язки в зручному для розрахунків вигляді як для малих, так і для великих значень аргументів. Нарешті, при наявності значної кількості таблиць прямих та обернених перетворень [1, 10, 18, 39] техніка розв'язання задачі значно спрощується і прискорюється. Але потрібно зауважити, що для методу інтегральних перетворень характерні ті ж обмеження, що і для методу відокремлення змінних [8, 25, 41]. Він застосовний тільки до лінійних диференціальних рівнянь з лінійними крайовими умовами, хоча є спроби його застосування до розв'язання деяких нелінійних крайових задач.

Інтегральні перетворення, які використовуються в аналітичній теорії теплопровідності, можна умовно поділити на три класи:

- 1) перетворення щодо часової змінної на проміжку  $(0; \infty)$ ;
- 2) перетворення щодо геометричних змінних в нескінченних межах;
- 3) перетворення щодо геометричних змінних в скінченних межах.

До першого класу відносяться добре відомі перетворення Лапласа та Лапласа-Карсона, які є основою операційного числення [13]. До другого і третього класів належать перетворення Фур'є, Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля, Мелліна, Мелера-Фока, Конторовича-Лебєдєва та ін. [6, 18, 22, 28], вибір яких визначається геометрією області геометричних змінних та структурою диференціального оператора і крайових умов.

Всі вказані вище інтегральні перетворення застосовуються для розв'язання лінійних крайових задач математичної фізики з неперервними коефіцієнтами. Однак, в останній час, з широким застосуванням

композитних матеріалів (в будівництві, техніці, технології), виникла необхідність з розрахунку температур і температурних напружень в тілах, що складаються з матеріалів, які мають різні фізико-механічні характеристики [20, 21, 23, 26, 37]. Останнє вимагає відповідного математичного апарату. Зокрема, виникає необхідність в побудові таких інтегральних перетворень, які б дали можливість алгебраїзації диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами. Такі перетворення одержали назву гібридних інтегральних перетворень. В кінці 60-х років минулого століття з'явилися роботи Я. С. Іфлянда та його учнів [45], в яких класичні інтегральні перетворення Фур'є, Фур'є-Бесселя, Лежандра поширюються на випадок складених областей. Своє продовження ці дослідження знайшли в працях В. С. Проценка та його учнів. Характерною особливістю цих робіт є те, що розглядається тільки одна точка спряження ( $x = a$  або  $r = R_0$ ) в припущенні наявності в ній умов контакту виду:

$$\begin{cases} u_1|_{x=a} = \mu_0 u_2|_{x=a}; \\ \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=a} = \mu_1 \left. \frac{du_2}{dx} \right|_{x=a} \end{cases}.$$

Однак, при наявності неідеального контакту, що природно, перша з умов спряження має вигляд:

$$\left[ \left( r_0 \frac{d}{dx} + 1 \right) u_1 - u_2 \right] \Big|_{x=a} = 0,$$

а в задачах термопружності (наприклад, для симетричних тіл) при наявності ідеального механічного контакту замість другої умови спряження маємо умову

$$\left[ \left( \frac{d}{dx} + \beta_1 \right) u_1 - \mu_1 \left( \frac{d}{dx} + \beta_2 \right) u_2 \right] \Big|_{x=a} = 0.$$

Таким чином, практично важливі задачі приводять до умов спряження

$$\left[ \left( \alpha_{i1} \frac{d}{dx} + \beta_{i1} \right) u_1 - \mu_i \left( \alpha_{i2} \frac{d}{dx} + \beta_{i2} \right) u_2 \right] \Big|_{x=a} = 0; i = 1, 2.$$

Якщо прийняти до уваги, що найпростіший композит має дві точки спряження, то потрібні гібридні інтегральні перетворення принаймні на тришаровому інтервалі. В той же час приклади розрахунків термопружних полів та електричних контурів в ортотропних та анізотропних середовищах вказують на необхідність у гібридних інтегральних перетвореннях на інтервалі  $(a; b)$  з довільним, але скінченним числом точок спряження [12, 38].

Подальший розвиток теорія гібридних інтегральних перетворень знайшла у працях М. П. Ленюка та його учнів [3, 22, 29, 30, 31]. Зокрема, при найбільш загальних припущеннях на структури диференціальних операторів, крайових умов та умови спряження побудовані гібридні інтегральні перетворення типу Фур'є, Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го й 2-го роду з  $n$  точками спряження. Наявність основної тотожності інтегрального перетворення відповідного гібридного диференціального оператора дає можливість застосувати ці перетворення до розв'язання крайових задач математичної фізики неоднорідних середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат.

В дипломній роботі методом дельта-подібних послідовностей побудовано гібридні інтегральні перетворення, породжені можливими комбінаціями диференціальних операторів 2-го порядку Фур'є та Лежандра. Одержано теореми про інтегральне зображення абсолютно сумовних функцій з обмеженою варіацією й основні тотожності інтегрального перетворення відповідного гібридного диференціального оператора.

Одержані класи гібридних інтегральних перетворень застосовано до розв'язання деяких типових крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

## **Висновки**

У дипломній роботі методом дельта-подібних послідовностей побудовано нові класи гібридних інтегральних перетворень типу Фур'є-Лежандра, одержано теореми про інтегральні зображення широкого класу функцій з обмеженою варіацією, встановлено теореми про основну тотожність інтегрального перетворення відповідних гібридних диференціальних операторів. Запроваджені гібридні інтегральні перетворення застосовано до розв'язання сингулярних крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ (статики, квазістатики, динаміки).

## Література

1. Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: ВШ, 1984. – 120с.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самоспряженных операторов. – К.: Наук, думка, 1965. – 798с.
3. Быблив О. Я., Ленюк М. П. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси// Изв. вузов. Математика. – 1987. – С. 3-11.
4. Блажевський С. Г., Ленюк М. П. Термопружний стан багатозарових симетричних тіл. – К.: Ін-т математики НАН України, 2000. – 130с.
5. Боли Б., Узйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517с.
6. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования. – М.: Наука, 1997. – 286с.
7. Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – К.: Наук, думка, 1987. – 230с.
8. Вірченко Н. О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. – К.: КПІ. 1997. – 370с.
9. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – К.: Наук, думка, 1976. – 284с.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108с.
11. Грей З., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения в физике и технике. – М.: Изд-во иностр. Лит., 1949. – 386с.
12. Денейка В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук, думка, 1998. – 614с.



13. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 542с.
14. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. – Л.: Энергия, 1974. – 264с.
15. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат., 1983. – 327с.
16. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел.. – М.: Наука, 1964. – 488с.
17. Карташов З. М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел.. – М.: ВШ, 1979. – 415с.
18. Князев П. П. Интегральные преобразования. – Минск: ВШ, 1968. – 415с.
19. Ковалевский В. Й., Бойков Г. П. Методы теплового расчета экранной изоляции. – М.: Энергия, 1974. – 199с.
20. Коляно Ю. М. Температурные поля и напряжения в телах с разрывными параметрами// Инж. физ. журн. – 1987. – 53. – С.860-867.
21. Комаров Г. Н. О термонапряженном состоянии многослойного цилиндра// Тепловые напряжения в элементах конструкций. – К.: Вып.9, 1970. – С.37-43.
22. Конет І. М., Ленюк М. П., Нікітіна О. М. Деякі узагальнення інтегральних перетворень типу Мелека-Фока. – К., 1998. – 56с. – (Препринт/ НАН України. Ін-т математики: 98.6).
23. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209с.
24. Коваленко А. Д. Термоупругость. – К.: ВШ, 1975. – 216с.
25. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: ВШ, 1970. – 712с.
26. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280с.

27. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 304с.
28. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К.: 1983. – 60с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
29. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье). – К.: 1983 – 56с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 83.18).
30. Ленюк М. П., Романович Т. Н., Шинкарик Н. И. Гибридные интегральные преобразования. Т.1. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – 264с.
31. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188с.
32. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: ВШ, 1967. – 600с.
33. Марченко В. М. Температурные поля и напряжения в конструкции летальных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1965. – 299с.
34. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз., 1968. – 167с.
35. Могилевский Б. М., Чудновский А. Ф. Теплопроводность полупроводников. – М.: Наука, 1972. – 536с.
36. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз., 1963. – 215с.
37. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры – М.: Наука, 1984. – 368с.
38. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432с.
39. Снеддон Н. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1995. – 668с.

40. Титчмарш Е. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье. – М. – Л.: Гостехиздат., 1948. – 480с.
41. Титчмарш Е. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. – М.: Изд-во иностр. лит., 1966. – Т1. – 278с.
42. Тихонов А. Н., Саморский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 725с.
43. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеориздат., 1956. – 204с.
44. Харламов А. Г. Теплопроводность высокотемпературных изоляторов. – М.: Атомиздат., 1979. – 100с.
45. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402с.
46. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983. – 115с.
47. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328с.
48. Яремко О. Э. Матричные гибридные интегральные преобразования. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 117с.