МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАМ’ЯНЕЦЬ-ПОДІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ОГІЄНКА
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Дипломна робота магістра

з теми

“Задача мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків”

Виконала: студентка II курсу,
Mb1-M17z групи
Спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Кухар Юлія Іванівна

Керівник: **Гудима У.В.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики,
доцент

Рецензент: **Щирба В.С.,**
кандидат фізико-математичних наук,
професор кафедри інформатики,
доцент

м. Кам’янець-Подільський – 2018 року

Зміст

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню задачі мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Актуальність теми. В житті часто зустрічаються ситуації, які потребують зробити найкращий вибір з урахуванням доступних ресурсів. Моделі, що описують такі ситуації розглядаються в теорії оптимізації. Важливим класом задач оптимізації є математичне програмування.

Серед напрямків математичного програмування найбільш важливими є задачі на безумовний мінімум і задачі лінійного програмування.

Задачі та методи безумовної мінімізації розглядалися у працях Б.Т. Поляка [1], В.К. Саульєва, І.І. Самойлової [2], А. А. Первозванського [3], Д. Дж. Уайльда [4] та ін.

Зупинимося детальніше на другому класі задач математичного програмування – лінійне програмування. Початок лінійному програмуванню заклав в 30-х роках минулого століття математик та економіст Л. В. Канторович. Розглядаючи задачу про оптимальний розподіл ресурсів він відкрив новий розділ математики, присвячений вивченню екстремальних задач з обмеженнями і розробив ефективний метод їх розв'язування, встановив двоїсті оцінки [5].

Інтенсивний розвиток теорії лінійного програмування розпочався у 50-х роках минулого століття, після робіт Данціга [6], Куна [7], Таккера [8] та ін.

Дж. Данціг запропонував основний метод розв'язання задач лінійного програмування – сиплекс-метод [6]. Основною ідеєю симплекс методу є покроковий перехід від вершини до вершини опуклого многогранника обмежень, при якому значення цільової функції покращується на кожному кроці.

У 1941 р. у США Ф. Хічкок здійснив постановку і побудував модель однієї з центральних задач лінійного програмування – транспортної задачі [9]. У 1949 р. Л.В. Канторович і М.К. Гавурін запропонували перший точний метод для вирішення транспортної задачі – метод потенціалів.

У наступні роки внесок у розвиток теорії лінійного програмування зробили вчені багатьох країн світу [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] та ін.

Поряд із класичною задачею лінійного програмування, розглядалась задача мінімізації лінійного функціоналу на многограннику.

У монографії [17] П.-Ж. Лоран за допомогою конусів допустимих напрямків отримав критерій мінімізації лінійного неперервного функціонала на опуклому многограннику лінійного нормованого простору, що задається перетином скінченного числа півпросторів цього простору.

У праці [18] розглянуто задачу мінімізації лінійного інтегрального функціонала заданого на опуклій слабо компактній множині банахового простору. Також розглянуто ряд часткових випадків цієї задачі.

Одночасно з пошуками і розробкою алгоритмів для вирішення задач мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень, виникає питання про сумісність системи обмежень даної задачі. Дослідженню алгебраїчного аспекту цієї проблеми присвячено чимало праць (див. Кун [7], Бургер [19], Чарнес і Купер [20], Черніков [21,22], Фань Цзі [23] та ін.). Зокрема, у своїх працях Черніков [24], розглядає принцип граничних розв’язків, який використовується для вирішення таких питань як сумісність скінченної системи лінійних нерівностей, існування невід’ємних розв’язків системи, умови необмеженості множини розв’язків.

У дипломній роботі розглядається задача мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків, яка полягає в наступному: нехай X - лінійний над полем дійсних чисел простір, X' - простір лінійних функціоналів, заданих на X, $f_i,\ i=\overline{0,n};$ $\varphi_j,\ j=\overline{1,m};$ $\psi_l,\ l=\overline{1,k},$ – елементи простору X', $a_i,\ b_i,\ i=\overline{1,n};$ $c_j,\ j=\overline{1,m};$ $d_l,\ l=\overline{1,k},$ – дійсні числа, причому $a_i \le b_i,\ i=\overline{1,n}.$

Назвемо задачею мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків $[a_i;b_i]$, $i=\overline{1,n}$; $(-\infty;c_j]$, $j=\overline{1,m}$; $[d_l;+\infty)$, $l=\overline{1,k}$, задачу відшукання

$$\min f_0(x), \tag{0.1}$$

при обмеженнях

$$f_i(x)\in[a_i;b_i],\ i=\overline{1,n}; \tag{0.2}$$

$$\varphi_j(x)\in(-\infty;c_j],\ j=\overline{1,m}; \tag{0.3}$$

$$\psi_l(x)\in[d_l;+\infty),\ l=\overline{1,k}; \tag{0.4}$$

$$x\in X. \tag{0.5}$$

Метою роботи є встановлення умов сумісності системи обмежень (0.2)-(0.5) задачі (0.1)-(0.5), критерію оптимальності допустимого розв'язку для задачі (0.1)-(0.5), дослідження задачі максимуму лінійних функціоналів на множині лінійного над полем дійсних чисел простору, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Об'єктом дослідження є задача мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Предметом дослідження є питання, що стосуються задачі мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Задачами дослідження є:

- встановлення умов сумісності системи обмежень (0.2)-(0.5) для задачі мінімізації (0.1)-(0.5).
- встановлення критерію оптимальності допустимого розв'язку для задачі мінімізації (0.1)-(0.5).
- дослідження задачі максимуму лінійних функціоналів на множині лінійного над полем дійсних чисел простору, що задається системою лінійних

обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

- встановлено умови сумісності системи обмежень (0.2)-(0.5) для задачі мінімізації (0.1)-(0.5).
- встановлено критерій оптимальності допустимого розв’язку для задачі мінімізації (0.1)-(0.5).
- досліджено задачу максимуму лінійних функціоналів на множині лінійного над полем дійсних чисел простору, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати дослідження можуть бути використані при побудові чисельного методу розв’язування задачі мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на звітній конференції студентів і магістрантів за підсумками НДР у 2017-2018 навчальному році, 10-11 квітня 2018 р., м. Кам’янець-Подільський та частково висвітлені у Віснику Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки, випуск 11.

Структура роботи. Дипломна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

ВИСНОВКИ

Встановлено умови сумісності довільної системи лінійних нерівностей, що задається у вигляді (1.15).

Встановлено умови сумісності системи обмежень для задачі мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Розглянуто частковий випадок задачі (1.1)-(1.5), коли $a_i = b_i, i = \overline{1, n}.$

Для системи лінійних нерівностей розглянуто принцип граничних розв'язків.

Представлено умови існування нерівностей, які є наслідками системи нерівностей.

Встановлено критерій оптимальності допустимого розв'язку для задачі мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Досліджено сумісність системи обмежень та оптимальність допустимого розв'язку для деякої задачі мінімізації лінійного функціонала на множині, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

Доведено, що $X \times R$ - лінійний над полем дійсних чисел простір.

Розглянуто задачу (3.6) – (3.12), яка є еквівалентною деякій приєднаній задачі мінімізації лінійного функціонала (1.6) – (1.11), яка розглядається в просторі $X \times R.$

Встановлено критерій оптимальності допустимого розв'язку для задачі максимуму лінійних функціоналів на множині лінійного над полем дійсних чисел простору, що задається системою лінійних обмежень з неточно заданими правими частинами із фіксованих числових проміжків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Поляк Б. Т. Методы минимизации функций многих переменных/ Б. Т. Поляк. – М.: Экономика и мат. методы, 1967.- 3, № 6, 881—901 с.

2. Саульев В. К. Приближенные методы безусловной оптимизации функций .многих переменных/ В. К. Саульев, И. И. Самойлова. – М.: В сб. Мат. .анализ, 1973. 91—1128 с.

3. Первозванский А. А. Поиск/ А. А. Первозванский. – М.: Наука, 1970. – 264 с.

4. Уайльд Д. Дж. Методы поиска экстремума/ Д. Дж. Уайльд. – М.: Наука, 1967. – 268 с.

5. Канторович Л. В. Математические методы в организации и планировании производства/ Л. В. Канторович. – Л.: Изд. ЛГУ, 1939. – 67 с.

6. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения/ Дж. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

7. Kuhn H. W. Solvability and consistency for linear equations and inequalities/ H. W. Kuhn// Amer. Math. Monthly. –1956.–Vol.63, № 4.–P.217—232

8. Tucker A. W. Dual systems of homogeneous linear relations/ A. W. Tucker// Ann. Math. Studies.– 1956.–№ 38.–P. 3—18

9. Hitchcock F. L. Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities/ F. L. Hitchcock// J. of Math. Phys. –1941.–Vol.20. – P.224-230

10. Гасс С. Линейное программирование. (Методы и приложения)/ С. Гасс. – М.: Фиаматгиз, 1961. – 303 с.

11. Гольштейн Е.Г. Новые направления в линейном программировании/ Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М.: Сов. радио, 1906. – 624 с.

12. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений/ Г. Зойтендейк – М.: Ин. ЛИТ, 1963. – 176 с.

13. Зуховицкий С. И. Линейное и выпуклое программирование/ С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

14. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике/ С. Карлин. – М.:Мир, 1964. – 838 с.

15. Юдин Д. Б. Линейное программирование. Теория и конечные методы/ Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М.: Физматгиз, 1963. – 775 с.

16. Юдин Д. Б. Задачи и методы линейного программирования/ Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. –М.: Сов. радио, 1964. – 736 с.

17. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.

18. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач/ В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1968. — 181 с.

19. Burger E. Uber homogene lineare Ungleichungsysteme/ E. Burger. – Z.: angew Math. und Mech., 1956. 36, № 3-4, 135—139 с.

20. Charnes A. The strong Minkowski—Farkas—-Weyl theorem for vector spaces over ordered field/ A. Charnes, W. W. Cooper// Proc. Nat. Acad. Sci. USA.–1958.–Vol.44, № 9.–P.914—916

21. Черников С. Н. Об основных теоремах теории линейных неравенств/ С. Н. Черников. – М.: Сибирский матем. ж., 1964. 5, № 5, 1181—1190 с.

22. Черников С. Н. Алгебраическая теория линейных неравенств/ С. Н. Черников. – М.:Докл. АН СССР, 1966. 169, № 4, 785—788 с.

23. Фань Цзи. О системах линейных неравенств/ Фань Цзи.– М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 214–262 с.

24. Черников С. Н. Линейные неравенства/ С. Н. Черников. – М.: Наука, 1968. – 488 с.

25. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения/ Н. П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

26. Канторович Л. В. Функциональный анализ/ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

27. Давидов М. О. Курс математичного аналізу/ М. О. Давидов. — К.: Вища школа, 1978.—Ч.II. — 392с.

28. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М. : Мир, 1973. – 472 с.

29. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.