Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: **«Задача відшукання чебишовської у розумінні метрики Хаусдорфа точки системи многогранних множин, які неперервно змінюються»**

Виконала:

студентка II курсу Mb1-M17 групи

спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)

Баран Аліна Василівна

Керівник:

Гнатюк В.О., кандидат

фізико-математичних наук, професор кафедри математики

Рецензент:

Щирба В.С., кандидат

фізико-математичних наук, професор кафедри інформатики

Кам’янець-Подільський – 2018 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена задачі відшукання чебишовської у розумінні метрики Хаусдорфа точки системи многогранних множин, які неперервно змінюються.

Актуальність теми. Відомо, що при вирішенні різного роду задач доводиться наближати деяким найкращим чином складніші об'єкти більш простими та зручними у користуванні.

Подібними проблемами наближення займається одна із галузей математики – теорія наближення, яка, як самостійний розділ математики, бере свій початок у роботах П. Л. Чебишова, який ще у 50-х роках XIX століття поставив задачу про рівномірне наближення неперервної на відрізку дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує заданого натурального числа.

Далі досліджувались задачі наближення дійснозначних функцій за допомогою фіксованих апроксимуючих множин, зазвичай, за допомогою алгебраїчних, тригонометричних поліномів, раціональних функцій тощо в метриках різних просторів.

З розвитком теорії лінійних нормованих просторів стало зрозумілим, що широкий клас задач найкращого наближення допускає загальну постановку в термінах нормованих просторів, якщо за міру відхилення розглядати норму простору.

Внаслідок цього була поставлена задача найкращого наближення в лінійному нормованому просторі X.

Ця задача формулюється таким чином.

Нехай V дана множина простору X і $a \in X$. Потрібно знайти

$$E(V,a) = \inf_{x \in V} \|x - a\|. \tag{0.1}$$

Основи теорії найкращого наближення в лінійних нормованих просторах були закладені в 20-х роках XIX століття одним із засновників функціонального аналізу С. Банахом [1].

Основні результати досліджень вищеназваних задач підсумовано у працях Н. І. Ахієзера [2], В. К. Дзядика [3], М. П. Корнєйчука [4], М. Г. Крейна [5], П.-Ж. Лорана [6], С. М. Нікольського [7], О. І. Степанця [8, 9], В. М. Тихомирова [10] та ін.

Важливий клас задач теорії наближення в лінійних нормованих просторах утворюють задачі найкращого одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів, частковим випадком яких є задача (0.1).

До таких задач, зокрема, відносяться:

– задача про відшукання чебишовського центра кількох точок a_i, $i=\overline{1,n},$ лінійного нормованого простору X відносно множини V цього простору, тобто задача відшукання

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le n}\left\|x-a_i\right\|; \tag{0.2}$$

– задача про чебишовський центр компакта K лінійного нормованого простору X відносно множини V цього простору, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{x\in V}\max_{y\in K}\left\|x-y\right\|. \tag{0.3}$$

Згодом виникла проблема найкращого у деякому розумінні відновлення функціональних залежностей, в тому числі й абстрактних, які характеризують досліджувані об’єкти і процеси, що неозначені точно, а лише відомо, що їх значення належать деяким множинам лінійного нормованого простору, однозначними функціональними залежностями (однозначними апроксимантами) певного класу (див., наприклад, [11 – 13]).

Якщо в задачі найкращого рівномірного відновлення функціональної залежності, розглядуваної на компакті S, про яку відомо, що її значення належать компактам $a(s)$, $s\in S,$ лінійного нормованого простору X, які неперервно змінюються по s на S у розумінні метрики Хаусдорфа деякою множиною сталих відображень $g_x(s)=x\in V\subset X$, $s\in S,$ і для $s\in S$ за міру відхилення між $g_x(s)=x$ та $a(s)$ взяти величину $\min\limits_{y\in a(s)}\|x-y\|$, то ця задача приводить до задачі відшукання у множині V чебишовської точки системи компактів $\{a(s), s\in S\}$ простору X, яка полягає у відшуканні

$$\inf_{x\in V}\max_{s\in S}\min_{y\in a(s)}\|x-y\|. \tag{0.4}$$

Дослідженню задачі відшукання величини (0.4) присвячена, зокрема, праця [14].

Якщо ж в задачі найкращого рівномірного відновлення функціональної залежності, розглядуваної на компакті S, про яку відомо, що її значення належить компактам $a(s)$, $s\in S$, лінійного нормованого простору, які неперервно змінюються по s на S, у розумінні метрики Хаусдорфа, деякою множиною сталих відображень $g_x(s)=x\in V\subset X$, $s\in S$, і для $s\in S$ за міру відхилення між $g_x(s)=x$ та $a(s)$ взяти величину $H(g_x(s),a(s))=H(\{x\},a(s))$, де H – метрика Хаусдорфа, задана на множині всіх компактів простору X, то отримаємо задачу відшукання у множині V чебишовської точки системи компактів $\{a(s), s\in S\}$, яка полягає у відшуканні

$$\inf_{x\in V}\max_{s\in S} H(\{x\},a(s)). \tag{0.5}$$

Легко переконатися, що задачі відшукання величини (0.1) – (0.3) є частковими випадками задачі відшукання (0.5).

Результати загального характеру, отримані при дослідженні задач типу задачі (0.5), становлять самостійний інтерес; з їх допомогою можна також отримати результати тих часткових задач, які вкладаються у схему її постановки. Ці результати можна покласти в основу побудови чисельних методів розв’язування цих задач та доведення їх збіжності.

Актуальність дослідження задачі відшукання чебишовської точки системи множин підсилюється змістом поняття «чебишовська точка», адже це точка множини V, найбільша відстань від якої до множин цієї системи не перевищує найбільшої відстані до цих множин від інших точок множини V.

Відомо, що з метою надання деяким відстаням, які фігурують у тій чи іншій задачі більшої ваги у результуючому значенні у порівнянні з іншими відстанями використовується вагова функція (див., наприклад, [15 – 17]).

Тому актуальною є задача відшукання у множині V лінійного нормованого простору X чебишовської у розумінні зваженої метрики Хаусдорфа точки системи множин $\{a(s), s \in S\}$ цього простору.

Одна з таких задач розглядається у магістерській роботі. Вона полягає в наступному.

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, S – компакт, $C(S, X)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s \in S}\|g(s)\|$, $g_i \in C(S, X)$, $i = \overline{1, m}$, $a(s) = \bigcup\limits_{g \in co\{g_1, \ldots, g_m\}} g(s) = co\{g_1(s), \ldots, g_m(s)\}$, $s \in S$, – система многогранних множин простору X, $\omega(s)$, $s \in S$, – додатна неперервна на S функція (вагова функція), $\omega(s) H(\{x\}, a(s))$ – зважена хаусдорфова відстань від елемента $x \in X$ до множини $a(s)$, $s \in S$, $V \subset X$.

Ставиться задача відшукання величини

$$\begin{aligned} \alpha_\omega^*(a, V) &= \inf_{x \in V} \sup_{s \in S}\Big(\omega(s) H\big(\{x\}, a(s)\big)\Big) = \\ &= \inf_{x \in V} \sup_{s \in S}\Big(\omega(s) H\big(\{x\}, co\{g_1(s), \ldots, g_m(s)\}\big)\Big), \end{aligned} \tag{0.6}$$

яка еквівалентна такій задачі

$$\alpha_\omega^*(a, V) = \inf_{x \in V} \max_{s \in S}\Big(\omega(s) \max_{1 \le i \le m}\|x - g_i(s)\|\Big). \tag{0.7}$$

Задача відшукання величини (0.6) ((0.7)) називається задачею відшукання чебишовської у розумінні зваженої метрики Хаусдорфа H точки відносно множини V системи многогранних множин $co\{g_1(s), \ldots, g_m(s)\}$,

$s \in S$, які неперервно змінюються на S по s у розумінні метрики H на $K(X)$.

Якщо існує елемент $x^* \in V$ такий, який є оптимальним розв'язком задачі відшукання величини (0.6) ((0.7)), то його будемо називати чебишовською у розумінні зваженої метрики Хаусдорфа точкою відносно множини V системи многогранних множин $co\{g_1(s),...,g_m(s)\}$, $s \in S$, або екстремальним елементом для величини (0.6) ((0.7)).

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є встановлення властивостей цільової функції задачі відшукання величини (0.7), описання похідної за напрямом та конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цієї функції, доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.7), з'ясування властивостей екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (0.7), встановлення необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремальності елемента для величини (0.7), доведення низки допоміжних тверджень, які представляють і самостійний інтерес.

Об'єктом дослідження є задача відшукання відносної чебишовської у розумінні зваженої метрики Хаусдорфа точки відносно множини многогранних множин, які неперервно змінюються.

Предметом дослідження є проблеми теорії найкращого наближення, що стосуються задачі відшукання відносної чебишовської у розумінні зваженої метрики Хаусдорфа точки системи многогранних множин, які неперервно змінюються.

Задачами дослідження є:

1. Встановлення властивостей цільової функції задачі відшукання величини (0.7).

2. Описання похідної за напрямом та конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цієї функції.

3. Доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.7).

4. З'ясування властивостей екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (0.7).

5. Встановлення необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремальності елемента для величини (0.7).

При розв'язуванні поставлених задач у дипломній роботі використовувалися загальні методи математичного аналізу, функціонального аналізу у поєднанні з методами теорії апроксимації, опуклого аналізу, теорії екстремальних задач, основаними на теорії конусів допустимих напрямків тощо.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.7).

2. Описано похідну за напрямом та конус внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції.

3. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.7).

4. З'ясовано властивості екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (0.7).

5. Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для величини (0.7).

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати, а також запропоновані методи та прийоми досліджень, що стосуються відшукання чебишовської точки, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії наближень, оптимізації, теорії ігор, математичної економіки, теорії оптимального управління та в інших галузях науки.

Окремі з одержаних в роботі результатів можуть знайти практичне застосування в обчислювальній математиці при відшуканні оптимальних значень цільових функцій екстремальних задач та їх оптимальних розв’язків.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на звітній конференції студентів і магістрантів за підсумками НДР у 2017-2018 навчальному році, 10-11 квітня 2018 р., м. Кам’янець-Подільський та на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує на кафедрі математики.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі встановлено властивості функціонала найкращого наближення елементів лінійного нормованого простору компактом цього простору, розглянуто постановку задачі відшукання чебишовської у розумінні зваженої метрики Хаусдорфа точки відносно множини системи многогранних множин, які неперервно змінюються, встановлено властивості цільової функції $\varphi(x)=\max\limits_{s\in S}\left(\omega(s)\max\limits_{1\le i\le m}\left\|x-g_i(s)\right\|\right),\ \ x\in X,$ задачі відшукання величини (0.7), досліджено умови існування відносної чебишовської у розумінні зваженої метрики Хаусдорфа точки системи многогранних множин, які неперервно змінюються, існування та єдності екстремального елемента для величини (0.7) в банаховому просторі, в якому має місце «нерівність паралелограма».

У другому розділі розглянуто поняття лінійного нормованого простору над полем дійсних чисел, властивості екстремального елемента та екстремального оператора для задачі відшукання відносної чебишовської у розумінні зваженої метрики Хаусдорфа точки системи многогранних множин, які неперервно змінюються.

У третьому розділі розглянуто деякі допоміжні твердження, що стосуються похідної за напрямом функції, яка є максимумом сім’ї опуклих функції, подання похідної цільової функції $\varphi(x)=\max\limits_{s\in S}\left(\omega(s)\max\limits_{1\le i\le m}\left\|x-g_i(s)\right\|\right)$ задачі відшукання величини (0.7) в точці $x^*\in X$ за напрямком $y\in X$, конус внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукання величини (0.7), встановлено необхідні, достатні умови та критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.7).

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі:

1. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (1.20).

2. Описано похідну за напрямом та конус внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції.

3. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (1.20).

4. З’ясовано властивості екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (1.20).

5. Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для величини (1.20).

6. Доведено низку допоміжних тверджень, які представляють і самостійний інтерес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Банах С. Курс функціонального аналізу / С. Банах. — Київ: Радянська школа. — 1948. — 216 с.

2. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.

3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 510 с.

4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.

5. Крейн М.Г. L-проблема моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве / М.Г. Крейн // В книге И. Ахиезера и М. Крейна. О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков: ГОНТИ. — 1938. — 254 с.

6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.

7. Никольский С.М. Приближения функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1946. — 10, №3. — С. 207-256.

8. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.

9. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. — Киев. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.II. — 468 с.

10. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.

11. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У.В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, № 12. — С. 1601-1619.

12. Гнатюк Ю.В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного

компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю.В. Гнатюк, У.В. Гудима // Доп. НАНУ, 2005 — №6 — С.19-23.

13. Гудима У.В. Задача найкращого у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою опуклозначного багатозначного відображення / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — 2016. — Випуск 13. — С. 56-67.

14. Гнатюк Ю. В. Відносна чебишовська точка системи обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. — 2010. — Т.63, № 7. — С. 889-903.

15. Вакал Л.П. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації / Л.П. Вакал, А.О. Каленчук-Порханова // Математичні машини і системи. — 2006. — № 2. — С. 15-24.

16. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації / Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. — 2013. — № 12. — С. 20-26.

17. Гудима У.В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — 2015. — Випуск 12. — С. 37-55.

18. Борисович Ю.Г. Многозначные отображения / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. Мат. анализ. — 1982. — 19. — С. 127-231.

19. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — М. : Изд-во «Высшая школа», 1982. — 271 с.

20. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. — М.: ВШ, 1981. — Том 1. — 687 с.

21. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Анилов. — М. : Наука, 1984. — 752 с.

22. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — М. : Наука, 1965. — 520 с.

23. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е.Г. Гольштейн. — М. : Наука, 1971. — 351 с.

24. Иосида К. Функционльный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1987. — 624 с.

25. Bynum W.L. Weak parallelogram lows for Banach spaces / W.L. Bynum // Can. Math. Bull. — 1976. — 19, №3. — P.269-275.

26. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. — М. : Наука, 1985. — 335с.