Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
фізико-математичний факультет
кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми «Проблема моментів в лінійному нормованому просторі зі зліченною кількістю моментних нерівностей»

Виконала: студентка II курсу, групи Mb1-M17
спеціальності 014. Середня освіта (Математика)
Дух Євгенія Миколаївна
Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Гнатюк В.О.
Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Щирба В.С.

Кам'янець-Подільський – 2018р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню проблеми моментів у лінійному нормованому просторі зі зліченною кількістю моментних нерівностей.

Актуальність теми. Проблема моментів є потужним апаратом розв'язування задач оптимального керування (див., наприклад, [1-7]). Основні результати дослідження абстрактної проблеми моментів були опубліковані у роботах М. Г. Крейна [8,9].

Поняття моменту виникло в механіці, де вперше були введені поняття статичного моменту твердого тіла та його моменту інерції.

Зокрема, якщо на відрізку $[a,b]$ осі Ox неперервно розподілена маса з густиною $\rho(x), x \in [a,b]$, то $\int_a^b x\rho(x)dx$ – статичний момент такого неоднорідного тіла (відрізка $[a,b]$) відносно початку координат, $\int_a^b x^2\rho(x)dx$ – момент інерції відрізка $[a,b]$ (неоднорідного тіла) відносно початку координат. Моментом цього неоднорідного тіла $i-$го порядку відносно початку координат буде $\int_a^b x^i\rho(x)dx\,, i = 1,2,\cdots$.

Оскільки під інтегралом $\int_a^b x^i\rho(x)dx\,, i = 1,2,\cdots$, фігурують степеневі функції $x^i, i = 1,2,\cdots$, то моменти $\int_a^b x^i\rho(x)dx\,, i = 1,2,\cdots$, називаються степеневими моментами.

З урахуванням зазначеного вище $\int_a^b f_i(x)p(x)dx\,, i = 1,2,\cdots$, де $f_i(x), i = 1,2,\cdots, p(x)$ – неперервні на $[a,b]$ функції, природно називати $i-$м моментом функції $p(x)$ відносно послідовності функції $f_1(x), f_2(x), \cdots, x \in [a,b]$.

В цьому випадку проблема моментів зі зліченною кількістю моментних нерівностей полягає в наступному. Потрібно зайти функцію $p(x)$, неперервну на сегменті $[a,b]$, таку, що

$$\int_a^b f_i(x)p(x)dx \geq c_i\,, i = 1,2,\cdots, \qquad (0.1)$$

де $c_i, i = 1,2,\cdots$, - задані дійсні числа (задані моменти).

Зрозуміло, що ліва частина рівності (0.1) є лінійним функціоналом, що визначається функцієї $p(x), x \in [a,b]$. В такій інтерпретації проблема (0.1) набере вигляду: потрібно знайти лінійний неперервний функціонал φ, заданий на просторі $C[a,b]$ неперервних на $[a,b]$ функцій, для якого

$$\varphi(f_i) \geq c_i, i = 1,2,\cdots, \tag{0.2}$$

де $c_i \in R, i = 1,2,\cdots$.

Зазвичай існує багато функціоналів $\varphi \in (C[a,b])^*$, для якого має місце рівність (0.2). Тоді має сенс накласти на φ додаткові обмеження, які природним чином можуть бути проінтерпретовані у прикладному аспекті, наприклад, $\|\varphi\| \leq L$, де $L > 0$. Зрозуміло, що чим більше L, тим більше існує функціоналів φ, які задовольняють нерівності (0.2).

Природно поставити задачу відшукання найменшого $L > 0$, при якому існує φ, що задовольняє (0.2) та для якого $\|\varphi\| \leq L$.

Такі міркування приводять до, так званої, L – проблеми моментів у лінійному нормованому просторі.

Нехай X – лінійний нормований простір, X^* - простір, спряжений з X, $x_i, i \in N$, - зліченна кількість елементів простору X, $c_i,\ i \in N$, - зліченна кількість дійсних чисел. Ставиться задача відшукання такої пари (L^*, f^*), яка є оптимальним розв'язком задачі відшукання

$$L^* = \inf L \tag{0.3}$$

за умов

$$f(x_i) \geq c_i, i \in N \tag{0.4}$$

$$\|f\| \leq L \tag{0.5}$$

$$L \geq 0, \tag{0.6}$$

$$f \in X^*. \tag{0.7}$$

Оскільки

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{f(x)}{\|x\|},$$

то обмеження (0.5) задачі (0.3)-(0.7) можна подати в такому вигляді:

$$\sup_{x\neq 0}\frac{f(x)}{\|x\|}\leq L;\ \frac{f(x)}{\|x\|}\leq L, x\neq 0; f(x)\leq L\|x\|, x\in X.$$

З урахуванням цього обмеження (0.5) задачі (0.3)-(0.7) можна подати у такому вигляді

$$f(x)\leq L\|x\|, x\in X. \qquad (0.5)$$

Зрозуміло, що відношення $x\in X\to\|x\|$ є сублінійним функціоналом, заданим на X. Природно узагальнити задачу (0.3)-(0.7) поклавши в обмеженні (0.5) замість $\|x\|$ $p(x), x\in X$, де p – сублінійний функціонал, заданий на X. Внаслідок цього отримаємо проблему моментів зі зліченною кількістю моментних нерівностей, яка розглядається в даній роботі і полягає в наступному.

Нехай X – лінійний нормований простір, X^* - простір, спряжений з X, p – сублінійний функціонал, заданий на X, $x_i, i\in N,$ - зліченна кількість елементів простору X, $c_i,\ i\in N,$ - зліченна кількість дійсних чисел.

Ставиться задача відшукання

$$\inf L \qquad (0.8)$$

за умов

$$f(x_i)\geq c_i, i\in N, \qquad (0.9)$$

$$f(x)\leq Lp(x), x\in X, \qquad (0.10)$$

$$L\geq 0, \qquad (0.11)$$

$$f\in X^*. \qquad (0.12)$$

Зрозуміло, що дослідження задачі (0.8)-(0.12) слугуватимуть відправним пунктом для розв’язування ширшого кругу задач оптимального керування та інших задач, які вкладаються у схему постановки задачі (0.8)-(0.12).

Мета, об’єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є: довести необхідну умову існування допустимого розв’язку задачі (0.8)-(0.12); побудувати задачу, еквівалентну до задачі (0.8)-(0.12); встановити критерії існування допустимого розв’язку підзадачі задачі (0.8)-(0.12); побудувати задачу, двоїсту до підзадачі проблеми моментів (0.8)-(0.12); довести співвідношення двоїстості для підзадачі задачі (0.8)-(0.12) та двоїстої до неї задачі; встановити критерій існування допустимого розв’язку задачі (0.8)-

(0.12), побудувати задачу двоїсту до задачі (0.8)-(0.12), довести співвідношення двоїстості для задачі (0.8)-(0.12) та двоїстої до неї задачі; розглянути задачу (0.8)-(0.12) за умови , коли $p(x) = \|x\|, x \in X,$ та побудувати еквівалентну їй задачу:

$$inf\{\|f\|: f(x_i) \geq c_i, i \in N, f \in X^*\}, \quad (0.13)$$

встановити критерій існування допустимого розв'язку та співвідношення двоїстості для проблеми моментів (0.13); побудувати чисельний метод розв'язування підзадачі задачі (0.13) та двоїстої до неї задачі й довести його збіжність; побуд

увати чисельний метод розв'язування проблеми моментів (0.13) зі зліченною кількістю обмежень та довести його збіжність.

Об'єктом дослідження є проблема моментів у лінійному нормованому просторі зі зліченною кількістю моментних нерівностей.

Задачами дослідження є:

1. Доведення необхідної умови існування допустимого розв'язку задачі (0.8)-(0.12).
2. Побудова задачі, еквівалентної до задачі (0.8)-(0.12).
3. Встановлення критерію існування допустимого розв'язку підзадачі задачі (0.8)-(0.12).
4. Побудова задачі, двоїстої до підзадачі проблеми моментів (0.8)-(0.12). Доведення співвідношення двоїстості для підзадачі задачі (0.8)-(0.12) та двоїстої до неї задачі.
5. Встановлення критерію існування допустимого розв'язку задачі (0.8)-(0.12).
6. Побудова задачі, двоїстої до задачі (0.8)-(0.12), доведення співвідношення двоїстості для цих задач.
7. Дослідження задачі (0.13), еквівалентній проблемі моментів (0.8)-(0.12) при $p(x) = \|x\|, x \in X.$
8. Побудова чисельного методу розв'язування підзадачі задачі (0.13) та двоїстої до неї задачі й доведення його збіжності.

9. Побудова чисельного методу розв'язування проблеми моментів (0.13) та доведення його збіжності.

При розв'язанні поставлених у роботі задач використовувалися загальні методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу у поєднанні з методами оптимізації, теорії апроксимації та теорії екстремальних задач.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Доведено необхідну умову існування допустимого розв'язку задачі (0.8)-(0.12).
2. Побудовано задачу, еквівалентну до задачі (0.8)-(0.12).
3. Встановлено критерій існування допустимого розв'язку підзадачі задачі (0.8)-(0.12).
4. Побудовано задачу, двоїстоу до підзадачі проблеми моментів (0.8)-(0.12). Доведено співвідношення двоїстості для підзадачі задачі (0.8)-(0.12) та двоїстої до неї задачі.
5. Встановлено критерій існування допустимого розв'язку задачі (0.8)-(0.12).
6. Побудовано задачу, двоїсту до задачі (0.8)-(0.12), доведено співвідношення двоїстості для цих задач.
7. Досліджено задачу (0.13), еквівалентну проблемі моментів (0.8)-(0.12) при $p(x) = \|x\|, x \in X$.
8. Побудовано чисельний метод розв'язування підзадачі задачі (0.13) та двоїстої до неї задачі й доведено його збіжність.
9. Побудовано чисельний метод розв'язування проблеми моментів (0.13) та доведено його збіжність.
10. Доведено низку допоміжних тверджень, які становлять самостійний інтерес.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати, а також запропоновані в ній методи та прийоми можуть бути використані для подальшого розвитку питань дослідження проблеми моментів в абстрактному лінійному нормованому просторі, для ефективного розв'язування задач оптимального керування.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики, а також на звітній конференції студентів і магістрантів університету за підсумками НДР у 2017-2018 навчальному році.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Перший розділ роботи носить реферативний характер. У ньому розглянуто деякі властивості сублінійних функціоналів, заданих на лінійному нормованому просторі.

У другому розділі доведено необхідну умову існування допустимого розв'язку задачі (0.8)-(0.12), побудовано задачу, еквівалентну до задачі (0.8)-(0.12), встановлено критерій існування допустимого розв'язку підзадачі задачі (0.8)-(0.12), побудовано задачу, двоїсту до підзадачі проблеми моментів (0.8)-(0.12). Доведено співвідношення двоїстості для підзадачі задачі (0.8)-(0.12) та двоїстої до неї задачі, встановлено критерій існування допустимого розв'язку задачі (0.8)-(0.12), побудовано задачу, двоїсту до задачі (0.8)-(0.12), доведено співвідношення двоїстості для цих задач.

У третьому розділі досліджено задачу (0.13), еквівалентну проблемі моментів (0.8)-(0.12) при $p(x) = \|x\|, x \in X$, побудовано чисельний метод розв'язування підзадачі задачі (0.13) та двоїстої до неї задачі й доведено його збіжність, побудовано чисельний метод розв'язування проблеми моментів (0.13) та доведено його збіжність.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі:

1. Доведено необхідну умову існування допустимого розв'язку задачі (2.1)-(2.6).

2. Побудовано задачу, еквівалентну до задачі (2.1)-(2.6).

3. Встановлено критерій існування допустимого розв'язку підзадачі задачі (2.1)-(2.6).

4. Побудовано задачу, двоїстоу до підзадачі проблеми моментів (2.1)-(2.6). Доведено співвідношення двоїстості для підзадачі задачі (2.1)-(2.6) та двоїстої до неї задачі.

5. Встановлено критерій існування допустимого розв'язку задачі (2.1)-(2.6).

6. Побудовано задачу, двоїсту до задачі (2.1)-(2.6), доведено співвідношення двоїстості для цих задач.

7. Досліджено задачу (3.1)-(3.6), еквівалентну проблемі моментів (2.1)-(2.6) при $p(x) = \|x\|, x \in X$, (задачу (3.7)-(3.10))

8. Побудовано чисельний метод розв'язування підзадачі задачі (3.7)-(3.10) та двоїстої до неї задачі й доведено його збіжність.

9. Побудовано чисельний метод розв'язування проблеми моментів (3.7)-(3.10) та доведено його збіжність.

10. Доведено низку допоміжних тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бублик Б. Н. Основы теории управления / Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко. – Киев: Высшая школа, 1975. – 327с.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: «Наука», 1968. – 476 с.
3. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
4. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
5. Васильев Ф. П. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления / Ф. П. Васильев, А. З. Ишмухаметов, М. М. Потапов. – М.: Изд.–во Моск. ин-та, 1989. – 142 с.
6. Давидов Э.Г. Исследование операций / Э.Г. Давидов. – М.: Высшая школа, 1990. – 383 с.
7. Капустян О.А. Розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для однієї параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами / О.А. Капустян, О.К. Мазур // Журн. обчисл. та прикл.матем. – 2015. – №3(120). – С. 6-10.
8. Ахиезер Н. И. О некоторих вопросах теории моментов / Н. И. Ахиезер, М. И. Крейн. – Харьков: ГОНТИ, 1938. – 257 с.
9. Крейн М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г.Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
10. Демьянов В. Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1968. – 181 с.
11. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом програмировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1974. – 481 с.
12. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 481 с.
13. Рокафеллар Р. Выпукый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 472 с.

14. Люстерник Л. А. Элеметы функционального анали за / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

15. Фань Цзи, Теоремы о минимаксеи / Цзи Фань // Бесконечные антагонистические игры. – М.: Физматгаз, 1963. – С. 31-39.

16. Юдин Д. Б. Линейное програмирование (теория, методы и приложения) / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

17. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функціонального анали за / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

18. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.