Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
фізико-математичний факультет
кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми

«Застосування інтегральних перетворень в теорії дзета-функції Рімана»

Виконала: студентка ІІ курсу, групи Mb1-M17
спеціальності 014. Середня освіта (Математика)
Фордзюн Діана Віталіївна
Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Кріль С. О.
Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Сорич Н. М.

Кам’янець-Подільський – 2018р.

ЗМІСТ

ВСТУП 3
РОЗДІЛ 1. Дзета-функція Рімана. Основні поняття та властивості 10
1.1. Означення та найпростіші властивості дзета-функції. Функціональне рівняння 10
1.2. Логарифмічна похідна функції. Нулі дзета-функції 16
РОЗДІЛ 2. Інтегральні перетворення в теорії дзета-функції 23
2.1. Рад Діріхле, його часткова сума 23
2.2. Зв'язок між сумою коефіцієнтів ряду Діріхле і функцією, яка задається цим рядом 29
2.3. Інтегральна формула Рімана-Зігеля.. 32
РОЗДІЛ 3. Розподіл простих чисел в натуральному ряді 38
3.1. Закон розподілу простих чисел 38
3.2. Псі-функція Чебишева 41
3.3. Перетворення Мелліна та асимптотика функції $\pi(x)$ 43
ВИСНОВКИ 49
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.. 51

ВСТУП

Дзета-функція визначається як сума узагальненого гармонійного ряду, тобто:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ s>1.$$

Ейлер показав, що має місце тотожність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}$$

(добуток розглядається по всіх простих числах).

У своєму мемуарі «Про число простих чисел, що не перевищують заданої величини» Ріман розглянув дзета-функцію для комплексних значень $s=\sigma+it$ і показав, що саме в цьому лежить ключ до глибокого дослідження розподілу простих чисел. Два основні результати обгрунтовані Ріманом є такими:

1) Функцію $\zeta(s)$ можна аналітично продовжити на всю комплексну площину, вона є там мероморфною і має єдиний простий полюс з лишком, рівним 1 в точці $s=1$ (іншими словами, функція $\zeta(s)-(s-1)^{-1}$ є цілою функцією);
2) Дзета-функція задовольняє функціональне рівняння

$$\zeta(s)=(2\pi)^s\pi^{-1}\sin\frac{\pi s}{2}\ \Gamma(1-s)\zeta(1-s),$$

яке (як пізніше було показано) може бути доведене та записане різними способами. Це функціональне рівняння дає змогу отримати властивості $\zeta(s)$ при $\sigma<0$ із її властивостей при $\sigma>1$. Зокрема, єдиними нулями цієї функції при $\sigma<0$ є полюси функції $\Gamma(\frac{s}{2})$ тобто точки $s=-2,-4,-6,\dots$. Вони називаються тривіальними нулями. Частина площини, де $0\le\sigma\le 1$ називається *критичною смугою*, а пряма $\sigma=\frac{1}{2}$ — *критичною прямою*.

Крім того, Ріман сформулював ряд інших важливих фактів, а саме, він стверджував, що:

3) Дзета-функція має нескінченно багато нулів у критичній смузі. Вони розташовані симетрично відносно прямих $\sigma = \frac{1}{2}$ та $t = 0$.

4) Число $N(T)$ нулів $\zeta(s)$ в прямокутнику критичної смуги, де $0 \le \sigma \le 1$, а $0 < t \le T$ задовольняє асимптотичну рівність

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

(Цей факт був доведений Мангольдтом в 1895 р.)

5) Ціла функція $\xi(s)$, яка задається рівністю

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\frac{\Gamma\left({s}/{2}\right)}{\pi^{s/2}}\zeta(s)$$

допускає представлення у вигляді нескінченного добутку

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_{\rho}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

(тут A, B — деякі сталі, ρ пробігає нулі дзета-функції в критичній смузі, які називаються нетривіальними). Цю рівність і припущення 3) довів в 1893 р. Адамар. Воно відіграло важливу роль при доведенні асимптотичного закону розподілу простих чисел Адамаром і Валле-Пуссеном.

6) Існує точна формула для $\pi(x) - li\ x$, яка є вірною при $x > 1$, найбільш важливу складову цієї формули складає сума, що береться по нетривіальних нулях дзета-функції.

7) Знаменита, до цих пір не доведена гіпотеза Рімана: всі нетривіальні нулі дзета-функції лежать на критичній прямій. (В 1914 році Харді довів, що на цій прямій лежить нескінченно багато нулів, а Сельберг в 1942 році — що вони мають додатню щільність в множині всіх нулів).

Вся складність дослідження нетривіальних нулів полягає в наступному. В багатьох випадках аналітична функція задається деяким своїм елементом — яким-небудь рядом, наприклад, рядом Тейлора, чи рядом Діріхле. Такий ряд сходиться, взагалі кажучи, лише в деякій частині області аналітичності функції. Зокрема ряд Тейлора сходиться в скінченному крузі, а ряд Діріхле в деякій півплощині. За межами області збіжності з'являються «критичні області», в яких подання функції у вигляді ряду втрачає сенс.

Ряд властивостей аналітичних функцій і, зокрема, питання про розподіл їх коренів в таких «критичних областях» вкрай важко з'ясувати, оскільки, є відсутнім ефективний спосіб аналітичного продовження в ці області. Все це в повній мірі стосується й дзета-функції Рімана.

Перша істотна числова інформація про нетривіальні нулі дзета-функції була отримана датським математиком Й.П. Грамом. Він в 1903 році опублікував список з перших 15 нулів на прямій $Re\ s = \frac{1}{2}$. Грам обрахував перші 10 цих коренів приблизно до 6 знаків після коми, а решту 5 — з точністю до одного знаку.

Наступні обрахунки підтвердили, що ці значення вірні, за винятком, як констатував Грам, незначних помилок, що фігурують в шостій, останній цифрі після коми. Грам також довів, що цей список включає всі корені ρ у діапазоні $0 \leq Im\ s \leq 50$ і тим самим показав, що гіпотеза Рімана вірна в цьому діапазоні.

Основою розрахунків Грама був простий та ефективний метод підсумовування Ейлера-Маклорена і з точки зору математичного відкриття цікаво відмітити, що Грам спочатку пробував застосувати більш оригінальні і громіздкі методи, але при цьому зіткнувся зі складними технічними труднощами. Минуло кілька років, перш ніж він наважився використати класичний метод підсумовування Ейлера- Маклорена і коли він це зробив, то був здивований, з якою легкістю йому вдалося наближено обчислити перші 15 нетривіальних нулів дзета-функції. Робота Грама була продовжена Беклундом приблизно в 1912 – 1915 роках. Основним внеском в проблему обчислення нетривіальних нулів був метод знаходження нулів при певних значеннях T в проміжку $0 \leq Im\ s \leq$ T. Цей метод дозволив йому довести, що оцінка Рімана числа коренів у заданому діапазоні при великих значеннях T була вірною і вірним був відповідний факт, який довів Мангольдт в 1905 році при допомозі більш складного методу. Близько десяти років пізніше гіпотеза Рімана була перевірена для значень T ≤ 300 Хатчінсоном, який вніс деякі вдосконалення у методи Грама та Беклунда. Так розрахунки Грама, Беклунда та Хатчінсона зробили суттєвий внесок в підтвердження правдивості гіпотези Рімана, але вони не дали ніякого розуміння щодо питання про те, чому це може бути істинним або питання про те, що саме привело Рімана до висловлення такої гіпотези.

Обчислення значень дзета-функції при великих значеннях t згідно формули Ейлера-Маклорена наштовхується на великі технічні труднощі, оскільки швидко зростає кількість доданків, кожен із яких обчислюється з певною похибкою. Тому оцінка загальної похибки наближення стає досить проблематичною. У 1932 році німецький математик Зігель опублікував роботу зі звітом, пов’язаним із дзета-функцією щодо неопублікованих досліджень Рімана, які знайшов в приватних роботах Рімана, що знаходяться в архівах бібліотеки університету в Геттінгені.

Зігель вивів цю формулу з інтегральної формули Рімана, виразу для дзета-функції з використанням контурних інтеграмів, які часто використовуються для обчислення значень дзета-функції, іноді в поєднанні з алгоритмом Одлижко-Шенхаге, що значно його прискорює. При використанні інтегралів вздовж критичної лінії, часто буває корисно використовувати цю формулу у формі, в якій вона стала більш зручною для функції Харді $Z(t)$.

Формула Рімана-Зігеля при великих значеннях t є набагато ефективнішою, ніж формула Ейлера-Маклорена, адже кількість доданків при таких обчисленнях пропорційна $\sqrt{t}$, тоді як у формулі Ейлера-Маклорена $n{\sim}t$.

Історію відшукання нетривіальних нулів дзета-функції та сучасний стан цієї проблеми можна коротко охарактеризувати таким чином.

ZetaGrid — це розподілений обчислювальний проект, який намагається розрахувати якомога більше нулів. За станом на 18 лютого 2005 р. він досяг

1029,9 млрд. нулів. Гордон (2004) використовував алгоритм Одлижка-Шенгаге для розрахунку перших 10×10^{12} нулів. У наступній таблиці наведені історичні орієнтири в кількості обчислених нулів.

Рік	Кількість нулів	Автор
1903	15	Ж. П. Грамм
1914	79	Р. Я. Баклунд
1925	138	И. И. Хатчінсон
1935	1041	С. Е. Тітчмарш
1953	1104	М. А. Тюрінг
1956	15 000	Д. Г. Лехмером
1956	25 000	Д. Г. Лехмером
1958	35 337	А. Н. Меллер
1966	250 000	Р. С. Леман
1968	3 500 000	Б. Россер, М. Я. Йохе, Л. Шенфельд
1977	40 000 000	Р. П. Брент
1979	81 000 001	Р. П. Брент
1982	200 000 001	Р. П. Брент, Дж. Ван де Люн, Х. Дж. т е Riele, Т. Д. Вінтер
1983	300 000 001	Дж. Ван де Люн, Х. Дж. т е Riele
1986	1 500 000 001	Дж. Ван де Люн, Х. Дж. т е Riele, Т. Д. Вінтер
2001	10 000 000 000	Дж. Ван де Люн (неопублікований)
2004	900 000 000 000	С. Wedeniwski
2004	10 000 000 000 000	Х. Гурдон и П. Demichel

Одна з основних ідей, яка дає змогу виразити функцію розподілу простих чисел через дзета-функцію в згаданій роботі Рімана полягає в використанні методу комплексного інтегрування. Загальний метод, за допомогою якого можна обгрунтувати формули для функції Чебишева $\psi(x)$ та функції $\pi(x)$, що характеризує розподіл простих чисел, був відкритий

Ріманом і коротко описаний у згаданому вище мемуарі (правда міркування Рімана потребують деяких несуттєвих уточнень). Так, основна ідея доведення полягає в тому, щоб, використовуючи розривний інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0, \text{якщо } 0<y<1 \\ \frac{1}{2}, \text{якщо } y=1 \\ 1, \text{якщо } y>1 \end{cases},$$

де $c>0$, відкинути члени ряду Діріхле при $n \geq x$, взявши $y=\frac{x}{n}$. Оскільки при $\sigma>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

то результат набуде вигляду

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds$$

при $c>1$. Якщо перенести вертикальний шлях інтегрування вліво на нескінченність, то отримаємо для $\psi_0(x)$ представлення у вигляді суми у полюсах функції $\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}$. Полюс $\zeta(s)$ у точці $s=1$ дає x; полюс $\frac{1}{s}$ в точці $s=1$ дає $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, а кожний нуль ρ функції $\zeta(s)$, незалежно від того, тривіальний він чи ні, дає $-\frac{x^\rho}{\rho}$.

Дипломна робота складається зі вступу, трьох розділів (8 параграфів), висновків та списку використаної літератури. У першому розділі (перших 2-х параграфах) розглядається дзета-функція Рімана, найпростіші її властивості, функціональне рівняння, а також логарифмічна похідна функції та нулі дзета-функції. У другому розділі роботи (3-х параграфах) представлено ряд Діріхле, його часткові суми. описується зв’язок між сумою коефіцієнтів ряду Діріхле і функцією, яка задається цим рядом та асимптотичний закон розподілу простих чисел, а також інтегральна формула Рімана-Зігеля. В останньому, 3 розділі (3-х параграфах) сформульовано закон розподілу простих чисел, розглянута псі-функція Чебешова, а також перетворення Мелліна та асимптотика функції $\pi(x)$.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі, що складається зі вступу, 3 розділів, висновків та списку використаної літератури, було наведено у першому розділі роботи означення, найпростіші властивості та функціональне рівняння дзета-функції Рімана, розглянуто аналітичне продовження функції на всю комплексну площину. Особливу увагу приділено розкладу логарифмічної похідної дзета-функції в ряд за нулями, — як тривіальними так і нетривіальними. Застосуванню методу комплексного інтегрування при встановленні асимптотичного закону розподілу простих чисел присвячений другий розділ. В останньому, третьому розділі роботи розглядається перетворення Мелліна, інтегральна формула Рімана-Зігеля та асимптотика функцій $\pi(x)$ та $\psi(x)$.

Одна з основних ідей в дипломній роботі полягає у використанні методу комплексного інтегрування. Загальний метод, за допомогою якого можна обгрунтувати формули для функції Чебишева $\psi(x)$ та функції $\pi(x)$, що характеризує розподіл простих чисел, був розглянутий у роботі. Основна ідея доведення полягала в тому, щоб, використовуючи розривний інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s\,\frac{ds}{s} = \begin{cases} 0, \text{якщо } 0<y<1 \\ \frac{1}{2}, \text{якщо } y=1 \\ 1, \text{якщо } y>1 \end{cases},$$

де $c>0$, відкинули члени ряду Діріхле при $n\geq x$, взявши $y=\frac{x}{n}$. Оскільки при $\sigma>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

то результат набув вигляду

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds$$

при $c>1$. Коли перенесли вертикальний шлях інтегрування вліво на нескінченність, то отримали для $\psi_0(x)$ представлення у вигляді суми у полюсах функції $\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}$. Полюс $\zeta(s)$ у точці $s=1$ дав x; полюс $\frac{1}{s}$ в точці $s=1$ дав $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, а кожний нуль ρ функції $\zeta(s)$, незалежно від того, тривіальний він чи ні, дав $-\frac{x^{\rho}}{\rho}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ахиезер П.Ч. Лекции по теории апроксимации / П.Ч. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 408 с.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. — М. : Просвещение, 1966. — 384 с.
3. Виноградов И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. — Изд-во: «Лань», 2009. — 176 с.
4. Воронин С.М. Дзета-функция Римана / С.М. Воронин, А. А. Карацуба. — М. : Физматлит, 1994. — 376 с.
5. Грэхем Р. Конкретная математика / Р. Грэхем, Д.Кнут, О. Паташник. — М.: МИР, 1998. — 703 с.
6. Дербишир Д. Простая Одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике / Д. Дербишир. — М.:АСТРЕЛЬ, 2010. — 464 с.
7. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теорія чисел / Г. Дэвенпорт. — М. : Наука, 1971. — 200 с.
8. Зудилин В.В. Об иррациональности значений дзета-функции / В.В. Зудилин. — Изд-во: мех.-мат. фак-та МГУ, 2001. — часть 2, с. 127-135.
9. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / А.А. Карацуба. — М. : Наука, 1975. — 183 с.
10. Прахар К. Распределение простых чисел / К.Прахар. — М. : МИР, 1967. — 500 с.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. — 13-е изд. — М. : Наука, 1984. — 432 с.
12. Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величины : сочинения / Б.Риман. — М. : ОГИЗ, 1948. — 543 с.
13. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана / Титчмарш Е.К. — М. : ИЛ, 1953. — 409 с.

14. Чебишов П.Л. Об определении числа простих чисел, не превосходящих данной величины : избранные труды / П.Л. Чебишов. — М. : Академия наук СРСР, 1988. — 926 с.
15. Edward H.M. Riemann’ s Zeta Function / H.M. Edward. — Acad. Press, 1974. — 317 p.