Міністерство освіти і науки України

Кам'янець-Подільський національний університет

Присвячується 90-річчю Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

ВІСНИК

КАМ'ЯНЕЦЬ-ПОДІЛЬСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Фізико-математичні науки

Випуск 1

Кам'янець-Подільський, 2008

Вісник Кам'янець-Подільського національного університету. Фізико-математичні науки. - Випуск 1. - Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. - 144 с.

Рецензенти:
Касперський А.В. – доктор педагогічних наук, професор,
Свердан М.Л. - доктор фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до друку вченою радою Кам'янець-Подільського національного університету (протокол №2 від 2 жовтня 2008 р.).

ЗМІСТ

УДК 378.14

П.С.Атаманчук, доктор педагогічних наук, професор, академік АН ВО України

МЕТОДОЛОГІЧНИЙ КОМПОНЕНТ ФІЗИЧНОЇ ОСВІТИ: УЯВНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянуто проблему методологічного підходу в навчальному пізнанні через призму уявного фізичного експерименту.

Ключові слова: *фізика, метод навчання, уявний експеримент, пізнання, методологія.*

Досвід переконує [2,4,9,12]: важливим компонентом методологічної діяльності в навчанні фізиці є уявний експеримент:

- форма теоретичного мислення, що припускає аналітико-синтетичну діяльність, що включає найрізноманітніші операції;
- абстрагування, моделювання, узагальнення, рефлексія і різні часткові їх прояви.

Цей метод фізичного пізнання має давню історію: ще Галілео Галілей за допомогою уявного експерименту доводив, що час вільного падіння з даної висоти тіл з різною масою однакий, тобто що всі тіла здійснюють вільне падіння з однаковим прискоренням. В міркуваннях Галілея йшлося про подібність (для всіх тіл, що одночасно почали падати) швидкостей у будь-який момент часу. Ось міркування Галілея, як вони описані в книзі Еріка Роджерса «Фізика для допитливих»: «візьмемо три однакові цеглини: *A, B, C.* випустимо їх одночасно з рук, надавши їм можливість вільно падати. Тепер з'єднаємо *A* і *B* ланцюгом (невидимим ланцюгом, якого насправді не існує) так, щоб вони утворили одне тіло *A+B*, удвічі важче, ніж *C* і випустимо їх знову з рук. Послідовник Арістотеля тепер припустив би, що тіло *A+B* падатиме удвічі швидше, ніж тіло *C, а*ле насправді це тіло є двома окремими цеглинами, тому воно падатиме точно так, як і раніше, тобто з такою ж швидкістю, що і тіло *C*. «Дозвольте, – заперечить послідовник Арістотеля, – же тіла *A* і *B* сполучені ланцюгом. Одна з цеглин якимось чином злегка випередить іншу і потягне її вниз, примусивши всю комбінацію з двох цегли падати швидше». «Так, але у такому разі, – говорить прихильник Галілея, – друга цеглина, дещо відстаючи, потягне першу назад, примусивши всю комбінацію рухатися повільніше!».

Як видно, в цьому випадку, поставлена проблема досліджується не експериментально, а на основі логічних міркувань, у формі деякого уявного експерименту. Слід зазначити, що за допомогою уявних експериментів Галілей не тільки досліджував вільне падіння тіл, але і встановив принцип відносності в механіці і перший закон динаміки.

Як легко побачити, в наведених прикладах уявних експериментів об'єкти дослідження замінені певними ідеалізованими уявленнями про них і самі ці уявні експерименти виступають як ідеальні форми реальних експериментів. Уявні експерименти «проводяться» з моделями, що ідеалізуються, і таким чином є невід'ємним елементом будь-якого наукового дослідження: як на етапі постановки задачі, попередньої оцінки очікуваного результату, впливу на нього різних умов і чинників, так і на етапі осмислення одержаних даних, співвідношення їх з тим, що вже відомо і загальноприйнято.

Як відзначає в книзі «Уявний експеримент у викладанні фізики» Д.Ш.Шодієв, «в теоретичних дослідженнях сучасної фізики спостерігається постійне зростання ролі уявного експерименту. Це багато в чому пов'язано з ускладненням досліджуваних об'єктів. Інформацію про поведінку таких об'єктів у ряді випадків в принципі неможливо одержати із звичайних лабораторних експериментів. Так, для обґрунтування застосовності законів термодинаміки до опису поведінки таких космологічних об'єктів, як чорні діри, був використаний уявний експеримент, який полягає в проведенні циклу Карно над ідеальною тепловою машиною, в якій чорна діра грає роль «холодильника», поглинача енергії».

Важлива роль належала уявному експерименту в процесі формування у фізиці поняття електромагнітного поля – основні рівняння були написані Максвелом шляхом «перенесення» математичних моделей гідродинаміки на електромагнітні процеси.

Це перенесення дало можливість скористатися готовими математичними рівняннями, які, проте, було необхідно фізично тлумачити, зіставивши з результатами реальних експериментів. На цьому етапі дослідник здійснював найрізноманітніші інтерпретаційні процедури, переходячи від наочно-матеріальних до ідеальних конструктів, а потім знов втілюючи їх в конкретних матеріальних об'єктах, причому, останнє далеко не завжди реально здійснимо повною мірою. Але в тому і значення уявного експерименту, що він у ряді випадків дозволяє шляхом уявних змін об'єктів дослідження, а також ходу процесів, що відбуваються з ними, прийти до важливих висновків і заключень, які в лабораторному експерименті підтвердити важко або взагалі неможливо. Ось що пише із цього приводу Г.Б.Жданов в роботі «Теорія і експеримент» (Вести АЇ СРСР, 1977 №2, с. 13): «знаходячись в єдиній системі людського пізнання, експеримент і теорія мають загальну мету: відправна точка – це система знань про навколишній світ, а мета – знаходження нових істин».

Але між стартом і фінішем багато шляхів і засобів пересування. Тут і починаються головні відмінності між добуванням знань з експерименту і їх отриманням з теорії. Експериментатор ставить нові питання природі. Щоб питання були дійсно новими, а відповіді – доступними, він повинен «застати зненацька» природу, побачити її нову сторону новими «очима» – приладами. Фізик-теоретик не може спілкуватися з природою «напряму». Він створює свій внутрішній образ світу з вражень – деталей чужого експерименту, – «пожвавивши» ці деталі, збираючи їх в єдину складно діючу систему, «правила поведінки» якої записані на мові математики. Таким чином, лише експериментатору доступна нова інформація про природу. Але тільки теоретик може скласти строго обґрунтовані програми переробки цієї інформації». І в цьому конструюванні теоретиків «внутрішнього образу світу з вражень – деталей чужого експерименту» полягає сутність процесу уявного експериментування. Результатом цього процесу є відповідна уявна модель того фрагмента об'єктивної фізичної реальності, який досліджується експериментатором».

Д.Ш.Шодієв вказує, що при всьому цьому необхідно мати на увазі відмінності між реальним і уявним експериментом. Головне полягає в тому, що перший перевіряє теорію з урахуванням дійсних емпіричних фактів, тоді як уявний експеримент перевіряє теорію з погляду можливих практичних (емпіричних) наслідків. Уявний експеримент є сполучною ланкою, за допомогою якої наука переходить від системи, яка менш абсолютно виражає реальність, до системи, яка її відображає більш абсолютно. *Уявний експеримент, таким чином, має значущу і специфічну евристичну функцію.*

Уявне експериментування тим самим виявляється пов'язаним не тільки з обдумуванням задуму майбутнього реального експерименту, але і із спробами зрозуміти результати реального експерименту. Так, результатам дослідів Ш.Кулона обов'язково повинен передувати уявний експеримент з точковими зарядами, який припускає, що зміниться, якщо так або інакше змінити величини цих зарядів, їх знаки, відстані між ними, поміщати їх в різні середовища.

Разом з тим уявний експеримент необхідний і для аналізу одержаних результатів, наприклад, виявлення того, що зміниться, якщо взаємодіючі заряди будуть неточковими. При цьому уявний експеримент є відносно самостійна, незалежна від реального експерименту форма сутніснопошукової діяльності дослідника, обов'язковий і невід'ємний компонент будь-якого фізичного дослідження.

В роботі «Уявний експеримент у викладанні фізики» Д.Ш.Шодієв також указує, що як засіб синтезу понятійно-знакової і предметно-почуттєвої форм відображення реальності уявний експеримент набував найістотніших значень у критичних «точках» розвитку фізики, в періоди переходу до дослідження нових областей об'єктивної дійсності. Можна виділити такі вузлові «точки»: поява «фізики Ньютона» в XVIII ст. та створення теорії відносності і квантової механіки в XX ст. В переломні моменти розвитку науки системи понять знаходять свою недостатність для відображення нових явищ, і тоді виникає криза наочно-образних уявлень, що відповідають старим поняттям. Звичні зорові образи вже не в змозі відобразити нові явища.

Розглянемо один приклад з теорії відносності, який наочно і яскраво ілюструє роль уявного експерименту в процесі інтерпретації різних фактів і результатів (він приводиться в статті А.И. Черноуцана «Про машину часу і теорію відносності»).

Одне з положень спеціальної теорії відносності (СТВ) стверджує, що одночасність просторово розділених подій відносна, тобто залежить від того, в якій системі відліку ведеться спостереження. Це твердження, як і багато інших, що відносяться до теорії відносності, здається дивним, і таким, що суперечить здоровому глузду.

Пояснимо це на конкретному прикладі. Розглянемо дуже довгу платформу *A*, що нерухомо стоїть на рейках і на кінцях якій знаходяться два приймачі світла, і два потяги *B* і *C*, що їдуть вправо і вліво відповідно. В якийсь момент часу в точці, розташованій точно посередині між приймачами, проводиться миттєвий спалах світла. Назвемо це подією №1. Тоді подія №2 – промінь світла фіксується лівим приймачем, і подія №3 – промінь світла фіксується правим приймачем. Ясно, що в системі відліку, пов'язаній з платформою *A*, події №2 і №3 відбуваються одночасно. Проте в системі відліку, пов'язаній з поїздом *B*, який їде управо, подія №3 відбудеться раніше, ніж подія №2, оскільки правий приймач в цій системі рухається назустріч променю світла, а лівий приймач від променя світла тікає. В системі ж, пов'язаній з поїздом *C*, який їде вліво, подія №3 відбудеться пізніше, ніж подія №2. Справа тут, звичайно, в тому, що для всіх трьох спостерігачів світло розповсюджується з однією і тією ж швидкістю (відповідно до II постулата СТВ).

Виходить, що з появою СТВ саме поняття «раніше-пізніше» стало відносним. Те, що в одній системі відліку було «раніше», в іншій системі може виявитися «пізніше».

Реалізовуючи сутніснопошуковий компонент фізичного знання, слід зазначити, що позбавляючи абсолютного значення поняття «раніше-пізніше» і «одночасно», СТВ ніколи не приводить до порушення причинно-наслідкових зв'язків між подіями. Якщо одна подія є слідством іншої, то в будь-якій системі відліку вона відбуватиметься пізніше. Звернемо увагу – у всіх трьох системах відліку (*A, B і C)* подія №1 (випуск світла) відбувається раніше, ніж події №2 і №3 (прибуття цього світла на приймачі). Воно відбувається раніше з погляду будь-якого спостерігача – ні в одній системі відліку світло не може спочатку прийти на приймач, а потім випромінюватися джерелом. Висновок зрозумілий: було б неправильно стверджувати, що будь-які дві події можна поміняти місцями в часі, якщо змінити систему відліку.

Коли ж це можливо, а коли ні? Відповідаючи на це питання, постараємося встановити, коли між двома подіями може існувати причинно-наслідковий зв'язок. В класичній (доейнштейнівській) фізиці на це питання існувала проста відповідь: якщо одна подія відбувається пізніше за іншу, то вона може бути її наслідком, незалежно від того, де ці події відбуваються. Річ у тому, що не було ніяких підстав вважати, що швидкість передачі інформації (сигналів) чимось обмежена. Тоді, якщо навіть подія *A* відбулося дуже далеко від події *B* і зовсім ненабагато пізніше, можна, використовуючи сигнал достатньо великої швидкості, передати в точку *B* інформацію про подію *A* ще до настання події *B*. Виходить, що будь-яке порушення тимчасової послідовності подій «раніше-пізніше» могло привести до порушення причинно-наслідкових зв'язків. Тому природно, що поняття «раніше-пізніше» і «одночасно» в класичній фізиці були абсолютними, тобто не могли залежати від системи відліку.

Відповідно до теорії відносності, ніякий сигнал не може розповсюджуватися з швидкістю, більшою швидкості світла у вакуумі *c*. Виходячи з цього, міняється і умова можливого причинного зв'язку між подіями. Якщо промінь світла з точки *A* приходить в точку *B* до того, як там відбулася подія, то подія *A* може вплинути на подію *B*. Саме у такому разі подія *B* вважається причинно пов'язаною з подією *A*. Запишемо цю умову так:

$t_B - t_A \geq \frac{r_{AB}}{c}$, де r_{AB} – відстань між точками, де відбуваються події *A* і *B*.

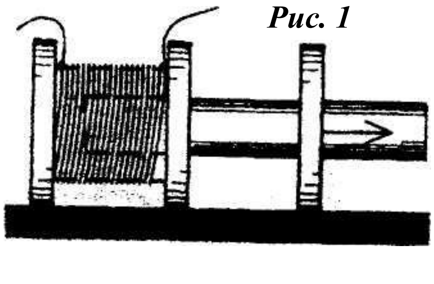
Умова: $t_A - t_D \geq \frac{r_{AB}}{c}$ означає, що подія *A* може бути наслідком події *D*, тобто подія *D* є причинно пов'язаною з подією *A*, хоча і в зворотному порядку. Якщо ж: $|t_A - t_K| < \frac{r_{AK}}{c}$, то події *A* і *D*, навіть не будучи одночасними, повністю незалежні одна від іншої, ніяка інформація про одну подію не може прийти до моменту настання іншої.

Таким чином, «суперечність» висновків СТВ про відносність одночасності здоровому глузду при уважному розгляді успішно розв’язується.

Зі всього того, про що йшла мова вище, зрозуміло, що уявний експеримент практично ніколи – за винятком найтривіальніших випадків – не зводиться до виконання «жорсткої» послідовності логічних операцій. Це узгоджується з тезою про логічну незаданість процесу інтерпретації: які уявні зміни об'єкту дослідження передбачить дослідник, яких конкретних аспектів зв'язків досліджуваного об'єкту з іншими він торкнеться, – наперед не відомо і не запрограмовано.

У зв'язку з цим актуальне співвідношення результатів уявного і реального експерименту, а також проблема неоднозначності в теоретичній інтерпретації спостережуваних явищ. Для того, щоб ще раз проілюструвати цю неоднозначність, *звернемося до одного широко відомого учбового експерименту*, традиційно невірно інтерпретовано (він описаний в статті Б. Рибіна «Чому висить кільце?» // «Квант» №2, 1993).

Рис. 1



Візьмемо довгий залізний стержень круглого перерізу і вставимо його в котушку, довжина якої у декілька разів менше довжини стрижня. Розташуємо сердечник з котушкою горизонтально (рис.1). На виступаючий кінець сердечника надінемо легке алюмінієве кільце, діаметр якого трохи більший за діаметр сердечника. До котушки через ключ під’єднаємо джерело постійного струму, напругу на виході якого можна, при бажанні, змінювати.

Присунемо алюмінієве кільце впритул до котушки і замкнемо ключ – кільце відштовхнеться від котушки. Величину постійного струму можна підібрати так, щоб кільце віддалилося майже на всю довжину сердечника. Тепер розімкнемо коло – кільце повернеться майже в початкове положення.

Пояснення цього досвіду здається на першим погляд не дуже складним. Площу, обмежену алюмінієвим кільцем, пронизує магнітний потік, створюваний струмом в котушці. При замиканні ключа цей магнітний потік зросте і за правилом Ленца в кільці виникає індукційний струм, направлений протилежно струму в котушці. Антипаралельні струми відштовхуються, отже, кільце дійсно повинне відштовхуватися від котушки. При розмиканні кола магнітний потік зменшується, і в кільці виникає струм, співнаправлений струмові в котушці. Такі струми притягуються один до одного, – от чому кільце наближається до котушки.

Розглянемо тепер інший експеримент. Розташуємо сердечник вертикально, так, щоб котушка знаходилася в нижній його частині, і надінемо на нього алюмінієве кільце. Підключимо до котушки джерело змінного синусоїдального струму і замкнемо ланцюг. Кільце, що лежить на котушці, підводиться і висить в повітрі весь час, поки по котушці йде струм. Якщо амплітуда струму достатньо велика, то у момент включення кільце може навіть злетіти з сердечника.

Як можна пояснити цей результат? Спробуємо спочатку провести такі ж міркування, як і в першому випадку. Протягом тієї четверті періоду, коли величина струму в котушці росте, в кільці виникає індукційний струм, направлений протилежно струму в котушці, і між кільцем і котушкою виникають сили відштовхування. Протягом наступної четверті періоду, коли величина струму в котушці зменшується, між кільцем і котушкою діють сили притягання. Таким чином, на кільце повинна діяти швидкозмінна по напряму сила. Середнє значення цієї сили рівне нулю, тому кільце, здавалося б, не повинно припідніматися і тим більше висіти в повітрі.

Неправильність приведеної інтерпретації очевидна.

Причина виниклої суперечності між приведеним поясненням і реальною поведінкою кільця полягає в наступному. Магнітний потік, що пронизує площадку, обмежену кільцем, створюється не тільки струмом, що йде по котушці, але і індукційним струмом, що виникає в самому кільці (явище самоіндукції). І якщо при поясненні першого досліду нехтування цим чинником не привело до помилкових висновків, то в другому випадку ми прийшли до суперечності. Спробуємо розібратися, але раніше сформулюємо три твердження, які знадобляться надалі.

1) Магнітний потік, що пронизує площадку, обмежену кільцем, можна представити як суму двох потоків: $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$, де Φ_1, – магнітний потік, створюваний струмом I_1, що тече по котушці, і Φ_2 – потік, створюваний індукційним струмом I_2, що виникає в кільці.

2) Якщо Φ_1 і Φ_2 мають однакові знаки, то це означає, що відповідні їм магнітні поля, а значить, і створюючі ці поля струми повинні бути паралельними. Абсолютно аналогічно, якщо Φ_1 і Φ_2 мають протилежні знаки, то це означає, що струми антипаралельні.

3) Спостережувані в обох дослідах ефекти мають місце тільки в тому випадку, якщо опір алюмінієвого кільця достатньо малий (з цієї причини не

слід використовувати кільце тонкого дроту). Згідно закону електромагнітної індукції, ЕРС індукції, що виникає в кільці, визначається швидкістю зміни магнітного потоку з часом: $\xi_i = -\Phi'$. З другого боку, відповідно до закону Ома $\xi_i = -I_2R$, де R – опір кільця. Якщо R достатньо мале, то $\xi \approx 0$, і отже, $\Phi = const$, тобто при швидких змінах струму в котушці магнітний потік залишається практично постійним. (Час загасання струму в кільці $\tau \approx L/R$ повинен бути набагато більший за період зміни зовнішнього магнітного поля, тому $R << \varpi L$).

Можемо дати пояснення іншому експерименту. Перед включенням змінного струму магнітний потік Φ був рівний нулю. Згідно третьому твердженню, він буде рівний нулю і після включення струму. Звідси витікає, що весь час, поки по котушці йде змінний струм, Φ_1 і Φ_2 рівні за величиною, але протилежні за знаком. Тоді з другого твердження одержуємо, що струми в цьому випадку антипаралельні, а значить, на кільце протягом всього досліду діє сила відштовхування. Якщо амплітуда струму достатньо велика, виникаюча сила відштовхування буде більше сили тяжіння кільця. Проте при віддаленні від котушки сила відштовхування стає меншою, і на деякій висоті вона виявляється рівній силі тяжіння: це і є положення рівноваги кільця. Якщо кільце встигло розвинути достатньо велику швидкість, воно може «проскочити» положення рівноваги і злетіти з сердечника.

Повернемося до першого експерименту і пояснимо його з тих же позиції, що і другий. Поведінка кільця при включенні постійного струму нічим не відрізняється від його поведінки при протіканні змінного струму. Тому розглянемо детально тільки процес виключення струму. За час між включенням струму і його виключенням індукційний струм, що тече в кільці, встигає перетворитись в нуль (за рахунок джоулевих втрат). Тому перед виключенням струму $\Phi = \Phi_1$. При виключенні струму в котушці разом із струмом I_1 починає швидко зменшуватися і потік Φ_2. Одночасно в кільці виникає індукційний струм I_2, а з ним і магнітний потік Φ_2. Оскільки сумарний потік залишається постійним, знаки у Φ_1 і Φ_2 однакові. Це значить, що струми I_1 і I_2 – паралельні, отже, кільце притягується до котушки. Таким чином, процес інтерпретації є особливий вид сутнісношукового мистецтва, постійного «ходіння дослідника по лезу ножа», в якому ризик зробити помилку і не знайти протягом довгого часу її наслідків досить великий.

Наведемо приклад з історії фізики: *як глибинне проникнення в свідомість ученого філософської ідеї загального зв'язку явищ спричинило до встановлення зв'язку між такими явищами, які вважалися не пов'язаними одне з одним* (він описаний в статті В.Карцева «Таємниці не розгадують, їх дарують ...» // «Природа». – №6, 1996).

Автор вказує, що ідея зв'язку електрики і магнетизму висхідна до найпростішої схожості тяжіння пушинок янтарем, залізних ошурок магнітом, носилася в повітрі, і багато кращих умів Європи були нею захоплені. Ще в 1747 році її помітив петербурзький академік Епінус, а француз Араго витратив немало років для збору таємних, на перших погляд, історій про кораблі, скарби і незвичайні небесні явища, в яких він теж бачив цей вислизаючий зв'язок.

Одного разу на рейді Пальми, головного порту Майорки з'явилися французьке військове судно «Ля-Ралейн». Стан його був настільки жалюгідним, що корабель ледве дійшов своїм ходом до причалу. Коли команда зійшла на берег і поступилася палубою декільком іменитим французьким ученим, у тому числі і Араго, з'ясувалося, що корабель був зруйнований блискавкою. Поки комісія оглядала судно, Араго поспішив до компасів і там побачив приблизно те, що чекав: стрілки компасів, перемагнічених блискавкою, вказували в різні боки.

Через рік, копаючись в тому, що ще кілька днів тому було генуезьким судном (воно розбилося, наскочивши на скелі поблизу алжирських берегів), Араго знову знайшов, що стрілки компасів були перемагнічені. В непроглядній тьмі південної туманної ночі капітан, направивши за компасом судно на північ, подалі від небезпечних місць, насправді нестримно рухався до того, чого так наполегливо прагнув уникнути. Корабель йшов на південь, прямо до скель, уражених блискавкою магнітним компасом.

Незабаром були знайдені скарби. Вони лежали в скрині у уекфільдского купця і складалися з вельми цінних на ті часи столових обладнань, а призначені для відправки в нову англійську колонію – Америку. Після удару блискавки частина предметів розплавилася, а частина – дуже сильно намагнітилася.

Всі ці, на перший погляд, малозначні і не зв'язані між собою факти Араго збирав не дарма. Тільки що «відгриміли» експерименти з блискавкою, Франкліном, що проводяться, в Америці і Ломоносовим і Ріхманом в Росії, які підтвердили, що, блискавка – це гігантська електрична іскра. Зараз нам важко відчути сенсаційність такого твердження, але у той час багато простих людей, не те що учені, захоплено вітали це відкриття. Араго, той, що зібрав, безліч фактів, що свідчать про зв'язок блискавки з магнетизмом, відчував, що він на порозі нового відкриття. Радість і досада – ось, можливо, ті відчуття, які він випробовував, побачивши рішення задачі, що довго не давалася йому. Рішення, знайдене Ерстедом.

Ідея загального зв'язку явищ не давала спокою і Ерстеду. Надзвичайна енергія, властива йому з дитинства, вела його до нових і нових пошуків. В 1813 році у Франції виходить його праця «Дослідження ідентичності хімічних і електричних сил». В ньому він вперше виказує ідею про зв'язок електрики і магнетизму. Він пише: «слід випробувати, чи не проводять електрика якихось дій на магніт...». Його міркування були простими: електрика народжує світло – іскру, звук трісок, нарешті, воно може проводити тепло – дріт замикаючий затискачі джерела струму, нагрівається. Чи не може електрика проводити магнітні дії? Говорять, Ерстед не розлучався з магнітом. Цей шматочок заліза повинен був примушувати його думати в цьому напрямі. Магніт пройшов, мабуть, немало миль в ерстедовому сюртуку, проте Ерстеду він так і не став в нагоді.

15 лютого 1820 року Ерстед, вже заслужений професор хімії Копенгагенського університету, читав своїм студентам лекцію. Лекція супроводжувалася демонстраціями. На лабораторному столі знаходилися джерело струму, дріт, що замикає його затискачі, і компас. У той час коли Ерстед замикав коло, стрілка компаса здригалася і поверталася. При розмиканні коло стрілка поверталася назад. Це було перше експериментальне підтвердження зв'язку електрики і магнетизму, того, що так довго шукали багато вчених.

Здавалося б, все ясно. Ерстед продемонстрував студентам ще одне підтвердження давнішньої ідеї про загальний зв'язок явищ. Але чому ж виникають сумніви? Чому навкруги обставин цієї події згодом розгорілося так багато суперечок? Річ у тому, що студенти, присутні на лекції, розказували потім зовсім інше. За їх словами, Ерстед хотів продемонструвати на лекції всього лише цікаву властивість електрики нагрівати дріт, а компас виявився на столі абсолютно випадково. І саме випадковістю пояснювали вони те, що компас лежав поряд з цим дротом, і зовсім випадково, на їх думку, один з гострозорих студентів звернув увагу на стрілку, що повертається, а здивування і захоплення професора, за їх словами, були непідробленими. Сам же Ерстед, в своїх пізніших роботах, писав: «всі присутні в аудиторії, – свідки того, що я наперед оголосив про результат експерименту. Відкриття, таким чином, не було випадковістю, як би хотів заключити професор Гільберт з тих виразів, які я використовував при першому сповіщенні про відкриття». Чи так це важливо насправді – випадковим чи ні було відкриття Ерстеда? І взагалі, що це означає – «випадкове відкриття»? Чи випадково, наприклад, що хімік Ерстед читав лекції про електрику? Зрозуміло, ні. Електрика була відкрита порівняно недавно (мається на увазі, перш за все, винахід в 1800 році італійським фізиком Алессандро Вольта першого безперервно діючого джерела електричного струму – так званого вольтового стовпа), багаж знань по електриці в той час був невеликий, заняття їм не вимагали якої-небудь особливої підготовки. Отже ним могли займатися і фізики, і хіміки, і механіки. Устаткування теж було нескладним, його могли зробити в будь-якій майстерні. Тому в лекції Ерстеда, та і в її оснащень нічого випадкового загалом не було. Набір для електричних і магнітних досліджень був у той час вельми невибагливий – вольтів стовп, провіднички, жаб'ячі лапки, магніт і компас. Як писав Брегг (що розробив рентгеноструктурний аналіз кристалів): доводиться дивуватися не з того, що Ерстед випадково відкрив дію електричного струму на магнітну стрілку, а тому, що відкриття потрібно було чекати цілі двадцять років з моменту винаходу вольтового стовпа. В десятках лабораторій були і вольтові стовпи, і провіднички, і компаси, і протягом двадцяти років ці предмети тисячі раз виявлялись поруч.

Неминуче повинне було одного разу створитися таке положення, коли магнітна стрілка виявиться, нарешті, по сусідству з дротинкою, що замикає кінці вольтового стовпа, повернеться, і дослідник це помітить. І такої події довелося чекати цілі двадцять років! Невідомий студент на лекції Ерстеда виконав, у відомому значенні, свою історичну роль, поглянувши на компас у відповідний момент. Його роль можна порівняти в чомусь з роллю матроса, що крикнув Христофору Колумбу про нову землю – Америку. І ще. Чи випадкове те, що саме Ерстед зробив відкриття? Адже щасливе поєднання потрібних приладів, їх взаємного розташування і «режимів роботи» могло вийти в будь-якій лабораторії? Так, це так. Але в даному випадку випадковість закономірна – Ерстед був в числі тоді ще небагатьох дослідників, що вивчають зв'язки між явищами.

Повернемося, проте, до суті відкриття Ерстеда. Потрібно сказати, що відхилення стрілки компаса в лекційному досвіді було вельми невеликим. В липні 1820 року Ерстед знову повторив експеримент, використовуючи більш могутні батареї джерел струму. Тепер ефект став значно сильнішим, причому – тим сильніший, чим товстіший був дріт, який замикав контакти батареї (зараз нам це здається саме собою розуміючим: чим більше діаметр дроту, тим менше її опір і, отже, більше струм). Крім того, він з'ясував одну дивну річ, що не вкладається в ньютонівські уявлення про дію і протидію. Сила, діюча між магнітом і дротом, була направлена не по з’єднуючій їх прямій, а перпендикулярно до неї. Висловлюючись словами Ерстеда, «магнітний ефект електричного струму має круговий рух навкруги нього». Магнітна стрілка ніколи не показувала на дріт, але завжди була направлена по дотичній до кіл, цей дріт був оперізувальним, нібито навкруги нього «вихрилися» невидимі згустки магнітних сил, що рухають легку стрілку. Ось чим був вражений учений! От чому в своєму чотирьохсторінковому «памфлеті» він, побоюючись недовір'я і насмішок, ретельно перераховує свідків, не забуваючи згадати ні про одну з їх наукових заслуг.

Ерстед, даючи загалом неправильне теоретичне тлумачення експерименту, заронив глибоку думку про вихровий характер електромагнітних явищ.

«Вихреподібність» процесу довго не знаходила прихильників, більшість вчених була переконана в тому, що сили, діючі між провідником із струмом і магнітною стрілкою, – це звичайні сили тяжіння і відштовхування, подібні ньютонівським силам всесвітнього тяжіння або кулонівським силам взаємодії між електричними зарядами. Досвід Ерстеда доводив не тільки зв'язок між електрикою і магнетизмом. Те, що відкрилося Ерстеду, було новою таємницею, що не укладається в рамки відомих законів.

Мемуар Ерстеда вийшов в світ 21 липня 1820 року. Ми не випадково датуємо так точно. Подальші події розвивалися у вельми незвичному для неквапливої тоді науки темпі. Вже через декілька днів мемуар з'явився в Женеві, де у той час був з візитом Араго. Перше ж знайомство з досвідом Ерстеда довело йому, що знайдена розгадка задачі, над якою бився і він, і багато інших. Враження від дослідів було таке велике, що один з присутніх при демонстрації піднявся і з хвилюванням вимовив ту, що стала згодом знаменитою фразу: «панове, відбувається переворот!».

Араго повертається до Парижа приголомшений. На першому ж засіданні Академії, на якому він був присутній відразу після повернення, 4 вересня 1820 року він робить усне повідомлення про досліди Ерстеда. Записи, зроблені в академічному журналі рукою протоколіста, свідчать, що академіки просили Араго вже на наступному засіданні 22 вересня, показати всім присутнім досвід Ерстеда що називається, «у натуральну величину».

Повідомлення Араго з особливою увагою слухав академік Ампер. Він, можливо, відчув в той момент, що прийшла його пора перед лицем всього світу прийняти з рук Ерстеда естафету відкриття. Він довго чекав цієї години – близько двадцяти років. І ось година пробила – 4 вересня 1820 року Ампер зрозумів, що повинен діяти. Всього за два тижні він повідомив світові свою геніальну ідею і зумів підтвердити її експериментально – всі магнітні явища можна звести до електричних, чим започаткував нову науку – електродинаміку, що теоретично пов'язує електричні і магнітні явища. А ще через сорок років електродинаміка влилася складовою частиною в теорію електромагнітного поля Максвелла, що дотепер є специфічним «компасом» у світі всіх електромагнітних явищ.

Отже, уявний експеримент справді виступає специфічним носієм потужнього методу наукового пізнання: його включення в зміст фізичної освіти сприяє глибокому методологічному насиченню теоретичних та прикладних основ фізики.

Список використаних джерел

1. Друянов Л.Л. Законы природы и их познание. – М.: Наука, 1982. – 111с.
2. Демин В.Н., Селезнев В.П. Мироздание постигая. – М.: Молодая гвардия, 1989. – 267с.
3. Кедров К.М. О классификации наук. – М.: Наука, 1981. – 201с.
4. Кузнецов И.В. Взаимосвязь физических теорий // Избр. труды по метод. физики. – М.:Наука, 1975.
5. Кузнецов Б.Г. Принцип дополнительности. – М.: Наука, 1968.
6. Korzhuev A.V. Does mass depend on velocity // Phystechjornal, 1996, Vol/1, No.2, p. 36-39.
7. Огородников В.П. Познание необходимости. – М.: Мысль, 1985. – 206с.
8. Окунь Л.Б. Понятие массы // Успехи физических наук. Том 158, вып. 3, 1989. – С .511-530.
9. Пахомов Б.Л. Становление современной физической картины мира. – М: Мысль, 1985. – 268с.
10. Мякишев Г.Я. Динамические и статистические закономерности в физике. – М.:Наука, 1983. – 272 с.
11. Челноков М.Б. Научное творчество и некоторые проблемы физики. – Ростов-на-Дону, 1992. – 150с.
12. Фейман Р., Лейтон Р., Сэндз Р. Фейнмановские лекции по физике. Вып.1.Т.4. – М.: Мир, 1965.
13. Философский словарь.. – М.: Политиздат, 1975. – 488с.

The problem of methodological approach is considered in educational cognition through the prism of imaginary physical experiment.

***Key words:** physics, method of studies, imaginary experiment, cognition, methodology.*

УДК 539.213.2

О.І.Власенко, Ц.А.Криськов, І.В.Лисий, К.В.Май, В.В.Міца, І.В.Фекешгазі

ЗАЛЕЖНІСТЬ ОПТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СКЛОВИДНИХ ХАЛЬКОГЕНІДІВ As_2S_3 ВІД ТЕХНОЛОГІЧНИХ УМОВ ЇХ СИНТЕЗУ

Наведені результати дослідження впливу температури синтезу та швидкості охолодження скловидних халькогенідів As_2S_3 на ті оптичні параметри, які визначають придатність цих матеріалів для виготовлення пристроїв оптоелектроніки, а саме: ширину забороненої щілини, показник заломлення, коефіцієнт лінійних втрат, коефіцієнт двофотонного поглинання та променеву стійкість.

Ключові слова: *халькогеніди As_2S_3, технологія синтезу, оптичні параметри.*

Складнощі у практичному застосуванні скловидних халькогенідних напівпровідників As_2S_3 полягають у тому, що це невпорядковані системи. Тому фізичні параметри синтезованих речовин суттєво залежать від технологічних умов (температури, швидкості охолодження тощо). Теоретичні прогнозування мають низьку ефективність, оскільки впорядкування хімічних елементів може мати багато варіантів. Основним методом залишається дослідження впливу умов синтезу на властивості цих сполук. Це і є метою даної роботи.

Для приготування зразків As_2S_3 використано метод безпосереднього сплавлення у вакуумованих кварцових ампулах. Для досліджень брали речовини чистотою ОСЧ-5. Речовини завантажували в очищені ампули, виготовлені з кварцового скла С5-1, вакуумували до залишкового тиску $3 \cdot 10^{-4}$ Па і герметизували. Підготовлені ампули розміщували у двозонних електропечах опору. Електропіч мала змогу здійснювати коливання відносно горизонтального положення на кути до ±30° з періодом 300 с. Її нагрівали до визначеної температури, проводили 3 цикли коливань по 10 разів для кращої гомогенізації, а потім охолоджували з різними швидкостями. Оскільки сполука скловидна, то впорядкування її структурних елементів залежатиме як від температури синтезу, так і від швидкості охолодження. Вибрані такі параметри технології синтезу: температура нагрівання сполуки: T_1=870, T_2=1120, T_3=1370 К; швидкості охолодження: $V_1=10^{-2}$, V_2=1,5 та V_3=150 К/с.

Синтезовану речовину виймали з ампул. За допомогою механічного різання металевою струною вирізали зразки товщиною до 1,25 мм, які потім шліфували й полірували до дзеркальної чистоти з допомогою алмазних паст різної зернистості. Використовуючи мікроскоп МИМ-7, оцінювали візуально однорідність зразків.

Оскільки скловидні халькогеніди досить перспективні для пристроїв оптоелектроніки, зокрема – волоконної оптики, то в число досліджуваних параметрів включені такі [9]:

- ✓ температура склоутворення $T_{ск}$, яка визначає умови, необхідні для витягування оптичних волокон;
- ✓ густина ρ – дає інформацію про щільність упакування структурних одиниць;
- ✓ ширина забороненої щілини E_g, що визначає область довжин хвиль оптичного діапазону, які можна поширювати по оптичних волокнах;
- ✓ показник заломлення n – дає змогу оцінити придатність пари матеріалів для забезпечення умов повного внутрішнього відбиття променів у світловодах;
- ✓ коефіцієнт лінійних втрат α визначає втрату інтенсивності сигналу при проходженні ним одиниці товщини матеріалу;
- ✓ коефіцієнт двофотонного поглинання в показує втрату енергії світлового потоку в одиниці довжини матеріалу;
- ✓ променева стійкість г визначає гранично допустиму потужність світлового потоку на одиницю площі, яка приводить до оптичного руйнування матеріалу.

Результати досліджень наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Числові значення оптичних параметрів As_2S_3 в залежності від умов синтезу

T синтезу, К	v охолод-ження, К/с	ρ,x10³ кг/м³	$T_{ск}$, К	E_g, еВ	n л=633 нм	α, см⁻¹	в, см/мВт	г, МВт/см²
870	10^{-2}	3,201	463	2,12	2,712	2,16	0,37	30
	1,5	3,195		2,15	2,690	1,17	0,16	45
	150	3,192	448	2.21	2,664	2,22	0,15	55
1120	10^{-2}	3,193	448	2,18	2,705	1,96	0,4	30
	1,5	3,190		2,22	2,650	2,53	0,25	36-40
	150	3,186	441	2,26	2,602	1,355	0,18	36-40
1370	10^{-2}	3,192	443	2,22	2,602	1,90	0,24	30
	1,5	3,184		2,30	2,590	1,855	0,17	36-40
	150	3,176	435	2,38	2,580	1,73	0,15	50-60

Значення коефіцієнтів лінійних втрат і двофотонного поглинання визначались за експериментально виміряними залежностями інтенсивності I світла, що пройшло крізь зразок, від інтенсивності I_o падаючого. Вони мали сублінійний характер, у той час, як залежності оберненого пропускання I_o/I були прямопропорційними I_o, що вказує на домінуючий внесок двофотонних переходів у процес нелінійного поглинання світла. Поріг оптичного пробою $I_{пр}$ визначався, як мінімальна густина лазерного випромінювання, що приводить до появи яскравого спалаху на поверхні зразка і, як наслідок, до різкого зменшення інтенсивності пронизуючого зразки імпульсного потоку випромінювання рубінового лазера.

З аналізу залежностей параметрів сполуки від швидкості охолодження для різних температур синтезу робимо такі узагальнення:

1. Найбільша зміна ширини забороненої щілини спостерігається для зразків, синтезованих при температурі 1370 К, тоді як для інших зразків така зміна складає лише 4,2%. Найменше значення ця величина має зразків, синтезованих при температурі 870 К. Для всіх зразків при збільшенні швидкості охолодження ширина забороненої щілини зростає.

2. Показник заломлення зменшується при зростанні швидкості охолодження синтезованої сполуки. Для зразків, синтезованих при температурах 870 та 1370 К така зміна майже однакова і складає біля 1,77%, тоді як для зразків, синтезованих при 1120 К, зміна значно більша і складає 3,8%. Оптичну пару для волоконної оптики складають сполуки As_2S_3, а саме – внутрішнє волокно має бути синтезоване при температурі біля 1120 К і охолоджуватись повільно, тоді як зовнішнє волокно потрібно синтезувати при 1370 К і охолоджувати швидко. При цьому різниця ширин забороненої щілини внутрішнього і зовнішнього волокна складатиме 0,2 еВ. Зазначимо, що отримана зміна показника заломлення 3,8% цілком достатня для цього, оскільки при виготовленні скляних світловодів ця різниця складає лише (1,4 – 1,7)% [6].

3. Коефіцієнт лінійних втрат у зразках змінюється по різному. Зокрема, для зразків, синтезованих при найвищій температурі така зміна незначна і складає лише 8,9%. Для зразків, синтезованих при найнижчій температурі із зростанням швидкості охолодження цей параметр зменшується, досягаючи найменшого значення при швидкості охолодження 1,5 К/с, а потім зростає, досягаючи при швидкості

охолодження 150 к/с майже такого ж значення, як і для швидкості охолодження 0,01 К/с. У зразках, синтезованих при температурі 1120 К тенденція зміни зворотня – зростання до найбільшого значення при швидкості охолодження 1,5 К/с і наступне зменшення при зростанні швидкості охолодження. Найменше значення ця величина має для зразків, синтезованих при 870 К.

4. Коефіцієнт двофотонного поглинання для всіх зразків має тенденцію до зменшення при зростанні швидкості охолодження. Найменшу зміну цей параметр має для зразків, синтезованих при температурі 1370 К. Для інших зразків зміна майже ідентична.

5. Променева стійкість сполуки виявилась однаковою для її синтезу при різних температурах, але найменшій швидкості охолодження. Із зростанням швидкості охолодження цей параметр також збільшується, хоча характер зміни різний.

Дослідження показали, що найбільш однорідні зразки отримуються при технологічних режимах (T_1V_2), (T_2V_1), (T_2V_2). Тут T – температура синтезу, V – швидкість охолодження. Єдиної моделі, яка б могла пояснити зміну параметрів сполуки в залежності від технологічних умов, на цей час немає. Проте, синтезовані матеріали можна розбити на дві групи. В групі А окрім базових структурних одиниць As_2S_3 утворюються гомогенні біпірамідальні структурні одиниці $AsS_{3/2}$. В групі Б окрім базових можуть формуватись гетерогенні псевдомолекулярні одиниці As_2S_2, As_3S_3, As_2S_5 і гомогенні агрегації S. Оскільки на їх формування впливає як температура синтезу, так і швидкість охолодження, то на підставі отриманих результатів ми не пропонуємо будь-якої моделі. Проведені дослідження є початковою базою для накопичення даних, щоб надалі така модель мала достатнє обгрунтування.

Список використаних джерел

1. Костышин М.Т., Михайловская Е.В., Романенко П.Ф. Об эффекте фотографической чувствительности тонких полупроводниковых слоев, нанесенных на металлические подложки //ФТТ. —1966. –Т.8. № 2. –С.571-572.
2. Kolobov A.V., Elloitt S.R. Photodoping of amorphous chalcogenides by metals //Adv. Phys. —1991. –V40. № 5. – P.625-684.
3. Семак Д.Г., Микла В.И. Физические основы оптической записи на слоях ХСП //Квантовая электроника. –Киев: Наукова думка. —1986. –Т.30. –С. 58-68.
4. Hisakuni H., Tanaka K. Optical Microfabrication og Chalcogenide glasses //Science. —1995. –V. 270. -P. 974-975.
5. Индутный И.З., Костышин М.Т., Романенко П.Ф., Стронский А.В. Об эффективности голографических дифракционных решеток, полученных на основе системы As_2S_3-Ag //Успехи научной фотографии. —1990. –Т. 26. –С. 5-8.
6. Роуэлл Дж.М. Материалы для фотоники //В мире науки. – 1986. № 12. –С. 87-97.
7. Дрексгейдж М.Г., Мойнихэн К.Т. Инфракрасные волоконные световоды //В мире науки. – 1989. № 1. –С. 56-62.
8. Стронский А.В. Применение халькогенидных стеклообразных полупроводников в голографии, оптоэлектронике и информационных технологиях //Оптоэлектр. и полупров. техника. —2004. – Т.30. – С. 73-96.
9. Фекешгазі І.В., Власенко О.І., Май К.В., Лисий І.В., Криськов Ц.А., Міца В.В. Оптичні властивості стекол As_2S_3 при екстремальних інтенсивностях світла //Всеукраїнський з'їзд «Фізика в Україні» (тези доповідей), м. Одеса. – 2005. – С. 188.

The results of research of influencing of temperature of synthesis and speed of cooling glassy halcogenides As_2S_3 on those optical parameters ermine the fitness of these materials for making of devices of optoelectronics are resulted, namely: width of the forbidden crack, index of refraction, coefficient of linear losses, coefficient of two-fotons absorption and radial firmness.

Key words: *halcogenides As_2S_3, technology of synthesis, optical parameters.*

УДК 681.3:004.42

В.А.Власов, кандидат технічних наук, доцент

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ МНОЖИН

У статті описано особливості вивчення теми "Множини" в університетському курсі "Інформатика".
***Ключові слова:** поняття множини, опис множин, операції з множинами, алгоритм Ератосфена.*

Вивченню деяких структурованих типів даних, таких як множини, записи, послідовності, черги, стеки, у вузівському курсі інформатики потрібно приділити особливу увагу, оскільки мало в яких середніх навчальних закладах вони вивчаються. Але така структура даних, як, наприклад, множина, є вельми корисною в практиці програмування. Цей тип даних ілюструє можливість існування невпорядкованих структур, які, щоправда, дуже рідко зустрічаються в практиці програмування, але ознайомлення студентів з ними все ж доцільно в пізнавальному плані.

На початку вивчення теми "Структуровані типи даних" учні повинні усвідомити факт, що при обробці великих об'ємів даних без їх організації (структурування) не обійтись. На прикладах використання таблиць можна показати наскільки зручно мати величину з одним іменем і багатьма значеннями (основна ознака структурування). Далі слід показати, що таблицями з однорідними даними часто обійтись не можливо, оскільки доводиться працювати із таблицями, в колонках яких містяться різнорідні дані (на зразок кадрових анкет). Нарешті, не завжди кількість елементів в структурі можна заздалегідь передбачити, інколи ця кількість може змінюватися "на ходу" (як, наприклад, будь-яка черга в крамниці або чисельність студентської групи в процесі навчання). Доцільно, щоб вивченню окремих структур даних передував їх сукупний опис [4].

На початку розмови зі студентами про застосування множин, зокрема в мові Pascal, рекомендується порівняти множину як чисто математичне поняття з тим, що розуміється у мові програмування. Слід наголосити на особливостях поняття "множина", прийнятих в програмуванні, спочатку на тому, що всі елементи (або члени) множини мають один і той же базовий тип, тобто є однотипними і утворюють певну підмножину деякої базової сукупності елементів − універсальної множини. Далі потрібно розповісти, які типи даних можуть виступати в якості базового типу, що визначає перелік усіх елементів даної множини, а також які елементи не можуть бути елементами множин.

Необхідно зауважити, що розмір множин мови Pascal завжди обмежений деякою кількістю елементів − в багатьох реалізаціях мови вона дорівнює 256 (це максимально можлива кількість значень в універсальній множині). І обмеження в мові Pascal цим не вичерпуються. У множинах допускаються лише такі елементи, порядкові значення яких не виходять за межі відрізка 0..255. Саме тому, наприклад, елементами множин не можуть бути від'ємні числа, а ось тип CHAR може бути базовим, адже в ньому рівно 256 літерних значень, і їхні порядкові номери як раз входять до діапазону від 0 до 255.

В процесі пояснення особливостей задання множин у мові Pascal слід звернути увагу студентів на те, що одну і ту ж множину можна записати по-різному, оскільки порядок елементів в множині не має значення ([1, 2, 3] і [3, 2, 1] − одна і та ж множина). Більше того, багаторазове повторення якогось елементу ніяк не впливає на "склад" множини, тобто всі елементи множини повинні бути попарно різними. Однак для того, щоб було легко читати/виправляти програми, розробники все ж намагаються дотримуватись природного порядку в процесі запису елементів множини.

Далі викладач розповідає про особливості опису множин в Pascal-програмі, наголошуючи на тому, що об'ява змінної типу "множина" за формою запису схожа на об'яву ряду (лінійного масиву) з тією лише відмінністю, що замість службового слова ARRAY тут застосовується службове слово SET (множина), тобто в загальному випадку це виглядатиме так:

VAR <ім'я змінної> : SET OF <множинний тип>;

Якщо ж описувати спочатку тип множини, а потім використовувати його для об'яви змінної, то в розділі опису типів має з'явитись такий запис:

TYPE <ім'я типу> = SET OF <базовий тип>;

Описуючи якусь множину, іноді буває зручно відразу показати, які елементи вона може містити. Зробити це можна як у визначенні типу, так і при об'яві змінної. В обох випадках перелік елементів множини може задаватись двома методами: наведенням переліку усіх можливих значень змінної (як при визначенні перелічуваного типу) або вказуванням діапазону (точніше, відрізку) значень якогось порядкового типу.

Тут потрібно запропонувати студентам пригадати, як в Pascal-програмі оголошуються змінні порядкових (дискретних) скалярних типів: перелічуваного та інтервального (обмеженого), а також коротко зупинитись на особливостях роботи з такими змінними. Тепер, відтворивши в пам'яті раніше пройдений матеріал, студенти зможуть самостійно навести приклади опису різноманітних множин. Спочатку, в разі утруднень, викладач може навести 2-3 цікавих завдання, для розв'язання яких слід скористатись множинним типом даних, і запропонувати студентам на дошці правильно їх описати. Після цього студенти повинні самостійно навести декілька прикладів завдань та описати на дошці потрібні для їх розв'язання множинні типи.

Описи типів і змінних множинних типів можуть бути, наприклад, такими:

```
TYPE
NUMBER = SET OF 0 .. 9;
          COUNT = SET OF (PLUS, MINUS, MULT, DIVID);
          SIMV = SET OF 'A' .. 'Z';
VAR
          DIGIT : SET OF NUMBER;
          COLORS : SET OF (BLACK, WHITE, DRAY);
          CHARACTERS : SET OF CHAR;
```

Описуючи множини, студенти мають добре засвоїти, що в множинах немає можливості вказувати порядок слідування елементів, навіть у тих випадках, коли множини побудовані на основі порядкових типів. Це, щоправда, студентами усвідомлюється не відразу.

Для відпрацювання навичок опису множинних типів і змінних цих типів студентам слід запропонувати (наприклад, проектуючи на дошку) завдання із різними (в тому числі і хибними) прикладами опису, які доцільно колективно обговорити, знаходячи (в разі наявності) і коментуючи помилки.

Далі послідовно слід переходити до з'ясування того, як множинами користуються при розв'язуванні задач. Щоб в множині з'явилися якійсь елементи, необхідно виконати команду призначення, у лівій частині якої вказується ім'я set-змінної, а у правій − деякий множинний вираз (конструктор множини). Результатом обчислення цього виразу повинна бути множина з точно таким же базовим типом, що й у змінної, розміщеної зліва.

Спочатку викладач демонструє декілька записів із правильним заданням конструкторів множин, наприклад, такі:

```
CHARACTERS := ['A'..'H'];
COLORS := [WHITE, BLACK];
DIGIT := [8, 2 .. 5]; {у разі, якщо базовий тип обумовлено, як вище}
```

Кожний приклад потрібно прокоментувати окремо, обговоривши зі студентами результат формування конкретних множин. Також потрібно запропонувати опис еквівалентних множин, змінюючи в конструкторах порядок слідування елементів. Корисно представити і конструктори, що продукують породні множини. Наприклад, якщо у базовому типі FRIDAY (п'ятниця) йде після TUESDAY (вівторка), то множина, задана конструктором DAYS := [FRIDAY .. TUESDAY] − порожня (це нуль-множина, символічним зображенням якої є пара дужок [ ], між якими нічого немає, або просто []).

Далі варто запропонувати приклади некоректно записаних конструкторів множин, коли, наприклад, зліва і справа від знаку ":=" знаходяться абсолютно різні базові типи [2].

Після закріплення навичок опису і побудови множин потрібно приступити до вивчення допустимих над множинами операцій. При цьому спочатку слід зазначити, що кожна множина містить в собі порожню множину, яка не має жодного елементу [3], а також що допустиме порівняння множин, перевірка на входження однієї множини в іншу, на входження окремих елементів в множину. На основі демонстрації операцій з математичними множинами поступово з'ясовуються особливості операцій, реалізованих у мові Pascal, запам'ятовуються правила пріоритету для множинних операторів. Обов'язково наводиться достатня кількість прикладів, а після − декілька задач.

Корисним буде для студентів знати, як значення множинного типу зберігаються у пам'яті комп'ютера. Так, значення подаються послідовностями бітів однакової довжини. За кожне значення базового типу "відповідає" біт. Якщо множина містить деякий елемент, то у "відповідному" біті зберігається 1, якщо не вміщує − зберігається 0.

Наприклад,

```
VAR X : SET OF 1..15
Тоді внутрішнє подання X буде таким:
X := []             {000000000000000}
X := [2,3,5]        {011010000000000}
X := [1..15]        {111111111111111}
```

Операції над множинами зводяться до порозрядних логічних операцій з послідовностями бітів, наприклад, об'єднання множин виконується шляхом порозрядного складання бітів:

```
X := [2,3,5]                {011010000000000}
Y := [3,5,7,8]              {001010110000000}
Z := X+Y        {011010110000000}
```

Цікавих задач на використання неупорядкованих однорідних динамічних структур прямого доступу − множин − можна придумати багато, але у зв'язку з тим, що навчальний матеріал є непростим для розуміння студентів, спочатку буде достатньо запропонувати пару тривіальних. Наприклад, завдання на підрахування у символьному рядку пунктуаційних знаків. Утворивши з потрібних знаків множину та у циклі перевіряючи кожний символ рядка на належність множини, в кілька кроків студенти легко сконструюють та відлагодять програму. Традиційною для теми "Множини" є також наведена в багатьох посібниках задача, за якою програмно реалізується "Решето Ератосфена".

Здійснивши коротеньку віртуальну мандрівку (можна з допомогою наперед підготовлених викладачем демонстраційних слайдів) у часи Ератосфена − III ст. до н.е., студенти повинні на словах пригадати метод відшукання простих чисел, придуманий александрійським вченим, і спробувати самостійно програмно реалізовувати алгоритм на мові Pascal з використанням множин.

Програма виведення на екран усіх простих чисел в діапазоні від 2 до N може виглядати так:

```
PROGRAM RESHETO;
   CONST
         N = 15;
   VAR
         S : SET OF 2 .. N;
         I, K : INTEGER;
BEGIN
         S := [2 .. N]; {Конструктор вихідної множини}
         FOR I := 2 TO N DO
                 IF I IN S THEN
   BEGIN
                         WRITELN (I); {Виведення найменшого елементу}
                         FOR K := 1 TO N DIV I DO
                                 S := S-[K*I]; {Видалення з S чисел, кратних I}
   END;
END.
```

На закріплення (в тому числі і вдома) студентам можна запропонувати продумати алгоритми розв'язання двох-трьох цікавих задач, програмну реалізацію яких вони зможуть здійснити під час лабораторної роботи, присвяченої цій темі.

Список використаних джерел

1. Бондарев В.М., Рублинецкий В.М., Качко Е.Г. Основы программирования. − Харьков: Фолио; Ростов-на-Дону: Феникс, 1998. − 368 с.
2. Джонс Ж., Харроу К. Решение задач в системе Турбо Паскаль / Пер. с англ. − М.: Финансы и статистика, 1991. − 720 с.
3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ / Пер. с англ.; Под ред. А. Шеня. − М.: МЦНМО, 2004. − 960 с.
4. Лапчик М.П. и др. Методика преподавания информатики: Учебн. пособие для студ.

The article describes the methodical features of study the theme: «Plural».

***Key words:** plural, algorithm of Eratosfena, elements of plural*

УДК 519.711

І.І.Водяник, доктор технічних наук, професор

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МОБІЛЬНОГО ЕНЕРГЕТИЧНОГО ЗАСОБУ (МЕЗ)

Аналіз є продовженням роботи, результати якої опубліковані в аналогічному збірнику 2003 р., виконується з метою визначення закономірності зміни частоти обертання колінчастого вала при дії змінного навантаження на двигун.

Ключові слова: *частота обертання, колінчастий вал, диференціальне рівняння, чисельний метод, гармонійні коливання.*

Найбільш достовірні дані про закономірність зміни частоти обертання колінчастого вала n(t) при дії змінного навантаження $M_c(t)$ у момент часу t можуть бути отримані в результаті розв'язання диференційного рівняння:

$$I_0 \frac{dn}{dt} = M_\partial - M_c, \qquad \text{де } I_0 = I_n \frac{\pi}{30}$$

Множник при I_n з'явився при переході від $\frac{d\omega}{dt}$ до $\frac{dn}{dt}$.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dn} \cdot \frac{dn}{dt};\ \omega = \frac{\pi n}{30};\ \frac{d\omega}{dn} = \frac{\pi}{30};\ \text{а } \frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi}{30}\frac{dn}{dt}.$$

Таким чином, для пошуку вказаної закономірності необхідно розв'язати рівняння: $$n' = \left[M_m \left(1 - e^{-\left(n_x - n\right)/\Delta n} - M_{cp} - \Delta M \sin\left(\omega \cdot t\right) \right) \right] / I_0 = f\left(t, n\right).$$

У зв'язку з тим, що точний його розв'язок не знайдений, залежність *n(t)* визначається наближено чисельним методом.

Для цього інтервал часу, відповідний періоду гармонійних коливань навантаження, розбивається на декілька рівних проміжків Δt. Використовуючи задані початкові умови $n(t_0) = n_0$, визначаються наступні значення n за

формулою: $$n\left(t_{i+1}\right) = n\left(t_i\right) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\left(t, n(t)\right) dt.$$

В залежності від колової частоти ω коливань навантаження $(\omega = k\omega)$ і

вибраного числа *p* рівних проміжків кута в межах π, $\Delta t = \frac{1}{kp}$.

При розв'язанні рівняння прийняті такі вихідні дані: M_m = 0,267 кНм;

M_{cp} = 0,233 кНм; ΔM = 0,12 кНм; n_x = 2365 хв$^{-1}$; Δn = 80; $\omega = \pi$ *рад/с; p=4*; I_0= 0,002485 кгм^2; Δt = 1/4с; початкові умови n(to) = 2200 хв$^{-1}$.

Середнє значення частоти обертання $n_{cp} = \frac{1}{8}\sum_0^7 n_i = 2107$, тобто менше тієї

частоти обертання (2200), яка відповідна M_{cp}.

Таким чином, середнє відхилення частоти обертання $n_0 = -93 хв^{-1}$.

Таблиця 1

i	t	ωt	$\Delta M \sin \omega t$	n	f(n,t)	$\Delta n = \Delta t f(t,n)$
0	0	0	0	2200	0,2157	0,0539
1	1/4	$\pi/4$	0,08485	2200	-314,1	-85327
2	2/4	$\pi/2$	0,12	2115	-393,0	-98,28
3	3/4	$3\pi/4$	0,08485	2017	-218,4	-54,6
4	4/4	π	0	1962	129,8	32,4
5	5/4	$5\pi/4$	-0,08485	1994	467,6	116,9
6	6/4	$3\pi/2$	-0,12	2111	574,6	143,6
7	7/4	$7\pi/4$	-0,08485	2255	206,5	51,63
8	8/4	7π	0	2307		

Для отримання більш точних результатів розв'язання диференціального рівняння і визначення n_0 необхідно збільшити число проміжків Δt або використати інші методи (наприклад, удосконалений метод Ейлера-Коші або метод Рунге-Кутта).

У результаті багаторазових розв'язувань диференціального рівняння може бути визначений вплив різних конструкційних і експлуатаційних факторів, від яких залежить значення величин, що входять в рівняння, на відхилення частоти обертання колінчастого вала n_0 і відповідні зміни середньої швидкості руху МЕЗ, тобто його продуктивності.

На першому етапі досліджень цього впливу доцільно при кожному розв'язуванні змінювати лише одну величину із M_m, Δn, $M_{ср}$, ΔM, ω, I_0, придаючи їй декілька значень, а решту залишати незмінними, такими, як вказано в вихідних даних. При зміні $M_{ср}$, Δn, або M_m необхідно уточнювати початкові умови, тобто відповідні значення n(to) за формулою

$$\mathrm{n}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{n}_\mathrm{x} + \Delta n \ln\left(1 - \frac{M_{ср}}{M_m}\right).$$

При виборі значення I_0 доцільно мати на увазі, що: $I_0 = \dfrac{\delta_{вр} G r_k^2}{g i_{тр}^2} \dfrac{\pi}{30}$, де $\delta_{вр}$ – емпіричний коефіцієнт, який враховує сили інерції обертальних мас агрегату;

G – вага агрегату; g – прискорення вільного падіння; r_k – теоретичний радіус кочення ведучих коліс; $i_{тр}$ – передаточне число трансмісії.

Становить практичний інтерес визначення закономірності зміни частоти обертання n колінчастого вала при статичному прикладенні навантаження, яке змінюється по гармонійному закону: $M_{ср} + \Delta M \sin\varphi$, де φ – кут, який змінюється ступінчасто в межах $0 \ldots 2\pi$.

Ця закономірність, очевидно, може бути визначена в результаті розв'язання і рівняння: $M_m\left(1 - e^{-(n_x - n)/\Delta n}\right) - \left(M_{ср} + \Delta M \sin\varphi\right) = 0$, яке після перетворень

$$1 - e^{-(n_x - n)/\Delta n} = \frac{\left(M_{ср} + \Delta M \sin\varphi\right)}{M_m},$$

$$e^{-(n_x-n)/\Delta n} = 1 - \frac{\left(M_{cp} + \Delta M \sin\varphi\right)}{M_m},$$

$$\frac{-n_x + n}{\Delta n} = \ln\left(1 - \frac{\left(M_{cp} + \Delta M \sin\varphi\right)}{M_m}\right),$$

отримує вигляд: $$n = n_x + \Delta n \ln\left(1 - \frac{\left(M_{cp} + \Delta M \sin\varphi\right)}{M_m}\right).$$

Для вихідних даних: n_x=*2365* хв$^{-1}$; Δn = 80; $M_{ср}$=0,233 кНм; ΔM = 0,027 кНм і M_m = 0,267 кНм отримані результати, які наведені в табл.2, де *Δn'* – відхилення *n* від того значення (2200), яке відповідне середньому моменту.

Таблиця 2

φ	0	*π/4*	*π/2*	3π/4	*π*	5π/4	3π/2	7π/4	*2π*
n	2200	2133	2074	2133	2200	2236	2247	2236	2200
Δn'	0	-67	-126	-67	0	36	47	36	0

Очевидно, залежність *Δn'(φ)* може бути представлена в вигляді двох різних гілок синусоїди: в межах 0...*π* від'ємною з амплітудою $-a_1$ і додатною в межах *π..2π* з амплітудою a_2.

Таке представлення спрощує визначення середнього відхилення n_0.

$$n_0 = \left(\int_0^{\pi} -a\sin\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} a_2 \sin\varphi\right) / 2\pi .$$

У свою чергу, визначені інтеграли можуть бути представлені на основі формули Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де F*(x)* - первісна підінтегральної функції.

Тому, $n_0 = \left(\left|a_1 \cos\varphi\right|_0^{\pi} - \left|a_2 \cos\varphi\right|_{\pi}^{2\pi}\right) / 2\pi = \frac{-a_1 + a_2}{\pi} = \frac{-126 + 42}{3{,}1416} = -25$.

Таким чином, середня частота обертання колінчастого вала складає 2200 – 25 = 2175 хв$^{-1}$, тобто не відповідає тій, яка має місце при середньому моменту.

Таку невідповідність спеціалісти по автотракторним дизелям називають розшаруванням регуляторної характеристики двигуна.

Цей аналіз показує, що невідповідність обумовлена нелінійністю механічної характеристики двигуна, який працює в межах регуляторної і коректорної гілок характеристики, і дозволяє кількісно оцінити її.

Список використаних джерел

1. Водяник І.І. Експлуатаційні властивості тракторів і автомобілів. — К.: Урожай, 1994. — 224 с.

An analysis appears continuation of work the results of which are published in analogical collection in 2003, executed with the purpose of determination of conformity to law of change of frequency of rotation of crankshaft at operating of the variable loading on an engine.

Key words: *frequency of rotation, crankshaft, differential equalization, numeral method, harmonious vibrations.*

УДК 517.5

Ю.В.Гнатюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
В.О.Гнатюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
У.В.Гудима, кандидат фізико-математичних наук

ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ ОДНОЧАСНОЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КІЛЬКОХ НЕПЕРЕРВНИХ КОМПАКТНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МНОЖИНОЮ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Для задачі найкращої одночасної рівномірної апроксимації кількох неперервних компактнозначних відображень множиною однозначних неперервних відображень встановлено властивості функціоналу та оператора найкращого одночасного рівномірного наближення, доведено деякі загальні теореми існування екстремального елемента для цієї задачі.

Ключові слова: *найкраща рівномірна апроксимація, компактнозначне відображення, екстремальний елемент, теореми існування.*

Теорія наближення функцій бере свій початок у роботах П.Л.Чебишова, який ще у 50-х роках XIX століття поставив задачу про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на відрізку $[c,d]$ дійснозначної функції a множиною V алгебраїчних поліномів g степеня, що не перевищує n, тобто задачу відшукання величини:
$$\inf_{g\in V}\max_{s\in[c,d]}\left|g(s)-a(s)\right|. \tag{1}$$

Згодом було досліджено велику кількість подібних задач, у яких окремі функції наближались за допомогою алгебраїчних, тригонометричних поліномів, раціональних функцій тощо в метриках різних просторів.

Однією з таких задач є задача про рівномірне наближення неперервної на компакті S дійснозначної (комплекснозначної) функції a множиною V інших неперервних на цьому компакті функцій, тобто задача відшукання величини:
$$\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\left|g(s)-a(s)\right|. \tag{2}$$

З розвитком теорії лінійних нормованих просторів стало зрозумілим, що широке коло задач найкращого наближення допускає загальну постановку, якщо норму простору розглядати як міру відхилення, що дало можливість використовувати для розв’язування цих задач ідеї та методи функціонального аналізу. Внаслідок цього було сформульовано задачу найкращого наближення елемента a лінійного нормованого простору X множиною $V\subset X$, тобто задачу відшукання величини:
$$\inf_{g\in V}\left\|g-a\right\|. \tag{3}$$

Основні результати досліджень задач (1)-(3) підсумовано у працях Н.І.Ахієзера, В.К. Дзядика, М.П. Корнєйчука, П.-Ж. Лорана, О.І. Степанця, В.М.Тихомирова та ін.

Задачі відшукання величин (1)-(3) є частковими випадками задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного відображення a компакту S в лінійний нормований простір X (абстрактної функції) множиною V інших відображень компакту S в X, неперервних на S, тобто задачі відшукання величини:
$$\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\left\|g(s)-a(s)\right\|. \tag{4}$$

Різним аспектам дослідження цієї задачі присвячено велику кількість робіт, серед яких роботи С.І.Зуховицького і С.Б. Стєчкіна, І.Зінгера, Г.Я. Ярахмедова, Г.С.Смірнова, Г. Опфера, Р.Смарзевського, В.Ворза, Л.П.Власова, Я.Ші, Ф. Дейча, А.Л.Гаркаві, Р.Г.Смірнова та ін.

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі найкращого одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів. До таких задач, зокрема, належить задача про чебишовський центр компакту K лінійного нормованого простору X відносно множини V цього простору, тобто задача відшукання величини: $$\inf_{g\in V}\max_{y\in K}\|g-y\|. \quad (5)$$

Питання дослідження цієї задачі знаходились у полі зору таких математиків, як В.Л. Клі, А.Л. Гаркаві, П.К. Бєлобров, Є.Г.Гольштейн, Ворд, Мач та ін.

До задач найкращого одночасного наближення належить також задача найкращої одночасної рівномірної апроксимації сім'ї φ_j, $j\in I$, неперервних на компакті S дійснозначних функцій, для яких $\Phi_1(s)=\min_{j\in I}\varphi_j(s)$, $\Phi_2(s)=\max_{j\in I}\varphi_j(s)$, $s\in S$, також є неперервними на S функціями, множиною $V\subset C(S)$, яка полягає у відшуканні величини: $$\inf_{g\in V}\max_{j\in I}\max_{s\in S}\left|g(s)-\varphi_j(s)\right|. \quad (6)$$

Задача відшукання величини (6) розглядалась, зокрема, у працях А.Л.Гаркаві, В.Н.Зам'ятіна і А.Б.Шишкіна, С.А Танімото, Ю.В. Гнатюка.

Однією з задач, яка охоплює задачі відшукання величин (1)-(6) є задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень, яка розглядалася у працях [1-3].

У даній роботі розглядаються властивості функціоналу та оператора найкращого наближення та деякі теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої одночасної апроксимації кількох неперервних компактнозначних відображень множинами неперервних однозначних відображень, яка полягає в наступному.

Нехай S – компакт, s – його елементи, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S,X)$ —лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\|=\max_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ – сукупність непорожніх компактів простору $X: K(X)=\{K: K\subset X, K-\text{компакт}, K\neq\varnothing\}$, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a(s)=K_s\in K(X)$ і які неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K(X)$ (див., наприклад, [4,с.133]), $V\subset C(S,X)$.

Задачею найкращої одночасної рівномірної апроксимації кількох неперервних компактнозначних відображень $a_i\in C(S,K(X))$, $i=\overline{1,n}$, множиною $V\subset C(S,X)$ однозначних неперервних відображень з компакту S в X будемо називати задачу відшукання величини:
$$\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)=\inf_{g\in V}\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\|g(s)-y\|. \quad (7)$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) = \max\limits_{1\le i\le n} \max\limits_{s\in S} \max\limits_{y\in a_i(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|$, то його будемо називати елементом найкращого одночасного рівномірного наближення відображень a_i, $i = \overline{1,n}$, у множині V або екстремальним елементом для величини (7).

Зрозуміло, що зазначені вище задачі є частковими випадками задачі відшукання величини (7).

Слід зазначити, що питання апроксимації багатозначних відображень у різних аспектах розглядались у багатьох працях. Більшість з цих праць присвячена питанням існування так званих неперервних селекцій (перетинів, вибірок), однозначних та простіших багатозначних ε- апроксимацій багатозначних відображень і лише в небагатьох з них розглядаються окремі питання найкращої апроксимації багатозначних відображень. Зокрема, у працях Б. Сєндова досліджувалась задача найкращого відносно хаусдорфової метрики наближення графіка сегментної функції, заданої на відрізку, графіком полінома заданого степеня.

У працях М.С. Нікольського розглянуто питання про існування у множині багатозначних поліномів фіксованого порядку екстремального елемента для задачі найкращого рівномірного наближення неперервного багатозначного відображення сегмента $[0,1]$ у множину $K_o(R^l)$ неперервних опуклих компактів простору R^l та встановлено теореми існування та характеризації екстремального елемента для задачі найкращого рівномірного наближення неперервного багатозначного відображення компакту S простору R^m у $K_o(R^l)$ сталими відображеннями S в $K_o(R^l)$.

У працях І.Ю. Вигодчикової встановлено теореми існування, єдиності та характеризації екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного на сегменті $[0,1]$ сегментнозначного відображення множиною алгебраїчних поліномів n-го степеня та розглянуто цю задачу у випадку, коли S є скінченною числовою множиною.

Основна складність дослідження задач найкращої рівномірної апроксимації багатозначних відображень полягає в тому, що множина цих відображень у лінійний нормований простір X не є лінійним, а тому не є і лінійним нормованим простором. Ця обставина унеможливлює безпосереднє поширення на випадок задач найкращої рівномірної апроксимації багатозначних відображень багатьох результатів дослідження задачі найкращого наближення в лінійних нормованих просторах.

2. Метричний простір неперервних компактнозначних відображень

Нехай $K_1, K_2 \in K(X)$. За відстань $H(K_1,K_2)$ між $K_1, K_2 \in K(X)$ приймається більше з двох чисел $\sup\limits_{x\in K_1} \inf\limits_{y\in K_2} \|x-y\|$, $\sup\limits_{y\in K_2} \inf\limits_{x\in K_1} \|x-y\|$, тобто

$$H(K_1,K_2) = \max\left\{ \sup_{x\in K_1} \inf_{y\in K_2} \|x-y\|, \sup_{y\in K_2} \inf_{x\in K_1} \|x-y\| \right\}.$$

Оскільки для кожного $x \in X$ функція $F_x(y) = \|x-y\|$ є неперервною по y на X, а для кожного $K \in K(X)$ функція $E(x,K) = \inf\limits_{y\in K} \|x-y\|$ є неперервною по x на X (див. [5,с.17]), то на основі властивостей неперервної на компакті дійснозначної функції (див., наприклад, [6,с.28]) величину $H(K_1,K_2)$ можна подати у такому вигляді: $H(K_1,K_2) = \max\left\{ \max\limits_{x\in K_1} \min\limits_{y\in K_2} \|x-y\|, \max\limits_{y\in K_2} \min\limits_{x\in K_1} \|x-y\| \right\}$.

Величина H задовольняє всім аксіомам метрики на множині $K(X)$ і перетворює цю множину у метричний простір (див., наприклад, [4,с.130]). Метрика H називається метрикою Хаусдорфа або іноді Помпейю-Хаусдорфа на честь Помпейю і Хаусдорфа, які ввели і досліджували її у своїх працях.

Нагадаємо, що відображення $a : S \to K(X)$ називається *неперервним відносно метрики* H (за Хаусдорфом) у точці $s_0 \in S$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $V_\varepsilon(s_0)$ точки s_0 компакту S, що $H(a(s), a(s_0)) < \varepsilon$ для всіх $s \in V_\varepsilon(s_0)$ (див., наприклад, [4,с.133]).

Твердження 1*. Для будь-яких* a_1, $a_2 \in C(S, K(X))$ *функція*

$H(a_1(s), a_2(s)) = \max\left\{ \max\limits_{x \in a_1(s)} \min\limits_{y \in a_2(s)} \|x - y\|, \max\limits_{y \in a_2(s)} \min\limits_{x \in a_1(s)} \|x - y\| \right\}$ *є неперервною по* s *на* S.

Доведення. Нехай $s_0 \in S$ **і** $\varepsilon > 0$**.** З аксіом метрики випливає, що (див., наприклад, [7,с.68]): $\left| H(a_1(s), a_2(s)) - H(a_1(s_0), a_2(s_0)) \right| < H(a_1(s), a_1(s_0)) + H(a_2(s), a_2(s_0))$ (8), для всіх $s \in S$.

Оскільки відображення $a_1, a_2 \in C(S, K(X))$, то вони неперервні на S за Хаусдорфом. Тому існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 компакту S такий, що

$$H(a_1(s), a_1(s_0)) < \frac{\varepsilon}{2},\ H(a_2(s), a_2(s_0)) < \frac{\varepsilon}{2}, s \in V(s_0).$$

Звідси та з (8) випливає, що: $\left| H(a_1(s), a_2(s)) - H(a_1(s_0), a_2(s_0)) \right| < \varepsilon$ для всіх $s \in V(s_0)$.

Це означає, що функція $H(a_1(s), a_2(s))$ є неперервною на S.

Твердження доведено.

Нехай $g \in C(S, X)$, $a \in C(S, K(X))$. Тоді для $s \in S$

$$H_1(g(s), a(s)) = \max_{x \in g(s)} \min_{y \in a(s)} \|x - y\| = \min_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|,$$

$$H_2(g(s), a(s)) = \max_{y \in a(s)} \min_{x \in g(s)} \|x - y\| = \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|,$$

оскільки $g(s)$ є одноелементною множиною.

Тому в цьому випадку для всіх $s \in S$

$$H(g(s), a(s)) = \max\{H_1(g(s), a(s)), H_2(g(s), a(s))\} = \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|.$$

Твердження 2. Нехай $a \in C(S, K(X))$. *Для будь-якого* $g \in C(S, X)$ *функція* $\Phi_a^g(s) = \max\limits_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|$ *є неперервною по* s *на* S.

Покладемо далі для будь-яких $a_1, a_2 \in C(S, K(X))$

$$\rho(a_1, a_2) = \max_{s \in S} H(a_1(s), a_2(s)).$$

Теорема 1. *Величина* $\rho(a_1, a_2)$ *задає метрику на множині* $C(S, K(X))$.

Доведення. Оскільки $H(a_1(s), a_2(s)) \ge 0$ для всіх $s \in S$, то для будь-яких $a_1, a_2 \in C(S, K(X))$ $\rho(a_1, a_2) \ge 0$. Якщо $a_1 = a_2$, то $a_1(s) = a_2(s)$ для всіх $s \in S$. Взявши до уваги те, що H задає метрику на $K(X)$, звідси отримуємо, що $H(a_1(s), a_2(s)) = 0$ для всіх $s \in S$. Тому $\rho(a_1, a_2) = \max\limits_{s \in S} H(a_1(s), a_2(s)) = 0$.

Навпаки, якщо $\rho(a_1,a_2)=\max\limits_{s\in S} H\left(a_1(s),a_2(s)\right)=0$, то $H\left(a_1(s),a_2(s)\right)=0$, $s\in S$. Оскільки H є метрикою на $K(X)$, то звідси одержуємо, що $a_1(s)=a_2(s)$ для всіх $s\in S$. Тому $a_1=a_2$.

Зрозуміло, що $\rho(a_1,a_2)=\rho(a_2,a_1)$ для будь-яких $a_1,a_2\in C\left(S,K(X)\right)$.

Переконаємося, що для будь-яких $a_1,a_2,a_3\in C\left(S,K(X)\right)$

$$\rho(a_1,a_2)\le\rho(a_1,a_3)+\rho(a_3,a_2).$$

Дійсно, для будь-яких $s\in S$

$$H\left(a_1(s),a_2(s)\right)\le H\left(a_1(s),a_3(s)\right)+H\left(a_3(s),a_2(s)\right).$$

Тому $\rho(a_1,a_2)=\max\limits_{s\in S} H\left(a_1(s),a_2(s)\right)\le\max\limits_{s\in S}\Big(H\left(a_1(s),a_3(s)\right)+$
$+H\left(a_3(s),a_2(s)\right)\Big)\le\max\limits_{s\in S} H\left(a_1(s),a_3(s)\right)+\max\limits_{s\in S} H\left(a_3(s),a_2(s)\right)==\rho(a_1,a_3)+\rho(a_3,a_2)$.

Твердження доведено.

Надалі через $\left(C\left(S,K(X)\right),\rho\right)$ будемо позначати такий метричний простір у якому $\rho(a_1,a_2)=\max\limits_{s\in S} H\left(a_1(s),a_2(s)\right)$ для всіх $a_1,a_2\in C\left(S,K(X)\right)$.

3. Властивості функціоналу найкращого одночасного рівномірного наближення

Нехай $a_i\in C\left(S,K(X)\right)$, $i=\overline{1,n}$. Згідно з твердженням 2 для кожного $i\in\{1,...,n\}$ та $g\in C(S,X)$ функція $\Phi_{a_i}^{g}(s)=\max\limits_{y\in a_i(s)}\left\|g(s)-y\right\|$ є неперервною по s на S. На підставі властивостей неперервної на компакті дійснозначної функції (див., наприклад, [6, с.28]) існує: $\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\left\|g(s)-y\right\|$, $i=\overline{1,n}$.

Далі будемо розглядати функцію $\Phi_{\{a_i:\}_{i=1}^n}(g)=\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\left\|g(s)-y\right\|$, $g\in C(S,X)$.

З урахуванням цих позначень задача відшукання величини (7) набере вигляду:

$$\alpha^*_{\{a_i:\}_{i=1}^n}(V)=\inf_{g\in V}\Phi_{\{a_i:\}_{i=1}^n}(g). \qquad (9)$$

Розглянемо простір $\left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n$, елементами якого є упорядковані сукупності $(a_1,...,a_n)$, $(b_1,...,b_n)$, … із n відображень простору $C\left(S,K(X)\right)$. Для $(a_1,...,a_n)$, $(b_1,...,b_n)$ із $\left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n$ покладемо $d\left((a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)\right)=d\left(\{a_i\}_{i=1}^n;\{b_i\}_{i=1}^n\right)=\max\limits_{1\le i\le n}\rho(a_i,b_i)$.

Легко переконатися, що d задає метрику на $\left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n$.

При фіксованій апроксимуючій множині V величина (7) задає на $\left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n$ деякий функціонал $\alpha^*_{\{a_i:\}_{i=1}^n}(V)$, який $(a_1,...,a_n)\in\left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n$ ставить у відповідність число $\alpha^*_{\{a_i:\}_{i=1}^n}(V)$. Назвемо функціонал $\alpha^*_{\{a_i:\}_{i=1}^n}(V)$ функціоналом найкращого одночасного рівномірного наближення та встановимо деякі його загальні властивості.

Теорема 2. Функціонал $\alpha^*_{\{a_i:\}_{i=1}^n}(V)$ є неперервним по $(a_1,...,a_n)$ на метричному просторі $\left(\left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n,d\right)$ якою б не була множина V. Якщо V –

підпростір, то функціонал $\alpha^*_{\{a_i;\}_{i=1}^n}(V)$ є напівадитивним по $(a_1,...,a_n)$:

$\alpha^*_{\{a_i+b_i\}_{i=1}^n}(V) \le \alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) + \alpha^*_{\{b_i\}_{i=1}^n}(V)$, *де* $(a_1,...,a_n)$, $(b_1,...,b_n) \in \left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n$,

і додатно однорідним, тобто $\alpha^*_{\{\lambda a_i\}_{i=1}^n}(V) = |\lambda|\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)$, *де* $\lambda \in R$, $(a_1,...,a_n) \in \left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n$.

Доведення. Нехай $(a_1,...,a_n)$, $(b_1,...,b_n) \in \left(C\left(S,K(X)\right)\right)^n$. Згідно з теоремою 1 для будь-якого $g \in V$ та $i \in \{1,...,n\}$ маємо: $\rho(g,a_i) \le \rho(a_i,b_i) + \rho(g,b_i)$,

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\|g(s)-y\| \le \rho(a_i,b_i) + \max_{s\in S}\max_{y\in b_i(s)}\|g(s)-y\|.$$

Звідки $\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\|g(s)-y\| \le \max\limits_{1\le i\le n}\rho(a_i,b_i) + \max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in b_i(s)}\|g(s)-y\|$.

Перейшовши в цій нерівності до інфімуму по $g \in V$, одержимо

$$\alpha^*_{(a_1,...,a_n)}(V) \le d\left(\{a_i\}_{i=1}^n;\{b_i\}_{i=1}^n\right) + \alpha^*_{(a_1,...,a_n)}(V).$$

Звідки $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) - \alpha^*_{\{b_i\}_{i=1}^n}(V) \le d\left(\{a_i\}_{i=1}^n;\{b_i\}_{i=1}^n\right)$.

Аналогічно доводиться, що $\alpha^*_{\{b_i\}_{i=1}^n}(V) - \alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) \le d\left(\{a_i\}_{i=1}^n;\{b_i\}_{i=1}^n\right)$.

З отриманих нерівностей маємо

$$\left|\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) - \alpha^*_{\{b_i\}_{i=1}^n}(V)\right| \le d\left(\{a_i\}_{i=1}^n;\{b_i\}_{i=1}^n\right).$$

З цієї нерівності випливає, що

$$\left|\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) - \alpha^*_{\{b_i\}_{i=1}^n}(V)\right| \le \varepsilon \quad \text{при } d\left(\{a_i\}_{i=1}^n;\{b_i\}_{i=1}^n\right) < \delta = \varepsilon.$$

Тому $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)$ є неперервним по $(a_1,...,a_n)$ функціоналом.

Нехай тепер V – підпростір простору $C\left(S,K(X)\right)$. Для будь-яких $g_1, g_2 \in V$ маємо: $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n+\{b_i\}_{i=1i}^n}(V) = \alpha^*_{\{a_i+b_i\}_{i=1}^n}(V) = \inf\limits_{g\in V}\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in(a_i(s)+b_i(s))}\|g(s)-y\| \le$

$$\le \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in(a_i(s)+b_i(s))}\|g_1(s)+g_2(s)-y\| = \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{\substack{y\in a_i(s),\\ y\in b_i(s)}}\|g_1(s)-y_1+g_2(s)-y_2\| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y_1\in a_i(s)}\|g_1(s)-y_1\| + \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y_2\in b_i(s)}\|g_2(s)-y_2\|.$$

Перейшовши у правій частині цієї нерівності до інфімуму по $g_1, g_2 \in V$ отримаємо $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n+\{b_i\}_{i=1i}^n}(V) \le \alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) + \alpha^*_{\{b_i\}_{i=1}^n}(V)$.

Напівадитивність функціоналу $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)$ найкращого одночасного рівномірного наближення доведено.

Нехай X – підпростір і λ – дійсне число, $\lambda \ne 0$. Маємо

$$\alpha^*_{\lambda\{a_i\}_{i=1}^n}(V) = \alpha^*_{\{\lambda a_i\}_{i=1}^n}(V) = \inf_{g\in V}\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in\lambda a_i(s)}\|g(s)-y\| =$$

$$= \inf_{g\in V}\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{\frac{y}{\lambda}\in a_i(s)}\left\|\lambda\left(\frac{g}{\lambda}(s)-\frac{y}{\lambda}\right)\right\| = |\lambda|\inf_{g\in V}\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\|(g(s)-y)\| = |\lambda|\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)$$

.

Отже, $\alpha^*_{\lambda\{a_i\}_{i=1}^n}(V)=|\lambda|\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)$ для всіх $\lambda\neq 0$. Якщо ж $\lambda=0$, то $\alpha^*_{0\cdot\{a_i\}_{i=1}^n}(V)=0=0\cdot\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)$ і, отже, рівність $\alpha^*_{\{\lambda a_i\}_{i=1}^n}(V)=|\lambda|\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)$ має місце і в цьому випадку. Теорему доведено.

3. Властивості оператора найкращого одночасного рівномірного наближення

Нехай V є множиною існування та єдиності екстремального елемента для величини (7), тобто при всіх $a_i\in C\left(S,K\left(X\right)\right)$, $i=\overline{1,n}$, існує єдиний екстремальний елемент для величини (7). Розглянемо деякі властивості оператора P найкращого одночасного рівномірного наближення, який кожним $a_i\in C\left(S,K\left(X\right)\right)$, $i=\overline{1,n}$, ставить у відповідність екстремальний елемент $P_{\{a_i\}_{i=1}^n}$ для величини (7), тобто: $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)=\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\left\|P_{\{a_i\}_{i=1}^n}(s)-y\right\|$.

Теорема 3. *Якщо V –підпростір простору $C(S,X)$, який є множиною існування і єдиності екстремального елемента для величини (7), то оператор $P_{\{a_i\}_{i=1}^n}$ найкращого наближення відображень $a_i\in C\left(S,K\left(X\right)\right)$, $i=\overline{1,n}$, множиною $V\subset C(S,X)$ є однорідним.*

Якщо, крім того, підпростір V є скінченновимірним, то оператор $P_{\{a_i\}_{i=1}^n}$ розглядуваний на метричному просторі $\left(\left(C\left(S,K\left(X\right)\right)\right)^n,d\right)$ є неперервним на цьому просторі.

Доведення. Використовуючи теорему 2, одержимо рівності

$$\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in\lambda a_i(s)}\left\|\lambda P_{\{a_i\}_{i=1}^n}(s)-y\right\|=\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y_1\in a_i(s)}\left\|\lambda P_{\{a_i\}_{i=1}^n}(s)-\lambda y_1\right\|=$$

$$=|\lambda|\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y_1\in a_i(s)}\left\|P_{\{a_i\}_{i=1}^n}(s)-y_1\right\|=|\lambda|\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)=$$

$$=\alpha^*_{\lambda\{a_i\}_{i=1}^n}(V)=\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in\lambda a_i(s)}\left\|P_{\lambda\{a_i\}_{i=1}^n}(s)-y\right\|,\ \text{де}\ a_i\in C\left(S,K\left(X\right)\right),\ i=\overline{1,n},\lambda\in R.$$

На підставі єдиності екстремального елемента для величини (7) звідси робимо висновок, що $P_{\lambda\{a_i\}_{i=1}^n}=\lambda P_{\{a_i\}_{i=1}^n}$. Однорідність оператора $P_{\{a_i\}_{i=1}^n}$ доведено.

Доведемо його неперервність у припущенні, що V є скінченновимірним підпростором. Нехай

$\lim\limits_{m\to\infty}\left(a_1^m,...,a_n^m\right)=\left(a_1^0,...,a_n^0\right)$, де $a_i^m,a_i^0\in C\left(S,K\left(X\right)\right)$, $i=\overline{1,n}$, $g_m^*=P_{\{a_i^m\}_{i=1}^n}$, $g_0^*=P_{\{a_i^0\}_{i=1}^n}$.

Маємо для $i\in\{1,...,n\}$, $m\in N$

$$\rho\left(g_m^*,g_0^*\right)=\rho\left(P_{\{a_i^m\}_{i=1}^n},P_{\{a_i^0\}_{i=1}^n}\right)\le\rho\left(g_m^*,a_i^m\right)+\rho\left(a_i^0,g_0^*\right)\le$$

$$\le\rho\left(g_m^*,a_i^m\right)+\rho\left(a_i^m,a_i^0\right)+\rho\left(a_i^0,g_0^*\right).$$

Звідки $\rho\left(g_m^*,g_0^*\right)\le\max\limits_{1\le i\le n}\rho\left(g_m^*,a_i^m\right)+d\left(\left\{a_i^m\right\}_{i=1}^n,\left\{a_i^0\right\}_{i=1}^n\right)+\max\limits_{1\le i\le n}\rho\left(a_i^0,g_0^*\right)$

Оскільки $\max\limits_{1\le i\le n}\rho\left(g_m^*,a_i^m\right)=\alpha^*_{\{a_i^m\}_{i=1}^n}(V)$, $\lim\limits_{m\to\infty}d\left(\left\{a_i^m\right\}_{i=1}^n,\left\{a_i^0\right\}_{i=1}^n\right)=0$,

$\max\limits_{1\le i\le n}\rho\left(a_i^0,g_0^*\right)=\alpha^*_{\left\{a_i^0\right\}_{i=1}^n}(V)$ і згідно з теоремою 2 $\lim\limits_{m\to\infty}\alpha^*_{\left\{a_i^m\right\}_{i=1}^n}(V)=\alpha^*_{\left\{a_i^0\right\}_{i=1}^n}(V)$ то послідовність, що фігурує у правій частині нерівності є обмеженою. Тоді з цієї нерівності випливає обмеженість послідовності $\left\{\rho\left(g_m^*,g_0^*\right)\right\}_{m=1}^\infty$. Оскільки $g_m^*,g_0^*\in C(S,X)$, $m=1,2,...$, то $\rho\left(g_m^*,g_0^*\right)=\left\|g_m^*-g_0^*\right\|$, $m=1,2,...$. Отже, обмеженою є послідовність $\left\{\left\|g_m^*-g_0^*\right\|\right\}_{m=1}^\infty$. Звідси випливає, що обмеженою буде послідовність $\left\{g_m^*\right\}_{m=1}^\infty$, причому $g_m^*\in V$, де V – скінченновимірний підпростір простору $C(S,X)$. Тоді існують збіжні підпослідовності послідовності $\left\{g_m^*\right\}_{m=1}^\infty$. Нехай $\left\{g_{m_k}^*\right\}_{k=1}^\infty$ будь-яка збіжна у просторі $C(S,X)$ підпослідовність послідовності $\left\{g_m^*\right\}_{m=1}^\infty$ і $\lim\limits_{k\to\infty}g_{m_k}^*=g'$. Оскільки V –замкнена множина, то $g'\in V$.Але ж $g_{m_k}^*=P_{\left\{a_i^{m_k}\right\}_{i=1}^n}$. Тому

$$\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i^{m_k}(s)}\left\|g_{m_k}^*(s)-y\right\|\le\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i^{m_k}(s)}\left\|g_0^*(s)-y\right\|,$$

$$\max_{1\le i\le n}\rho\left(g_{m_k}^*,a_i^{m_k}\right)\le\max_{1\le i\le n}\rho\left(g_0^*,a_i^{m_k}\right),\quad d\left(\left\{g_{m_k}^*\right\}_{i=1}^n;\left\{a_i^{m_k}\right\}_{i=1}^n\right)\le d\left(\left\{g_0^*\right\}_{i=1}^n;\left\{a_i^{m_k}\right\}_{i=1}^n\right).$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $k\to\infty$ та врахувавши властивість неперервності метрики в метричному просторі (див., наприклад, [7,с. 66]), отримаємо $d\left(\left\{g'\right\}_{i=1}^n;\left\{a_i^0\right\}_{i=1}^n\right)\le d\left(\left\{g_0^*\right\}_{i=1}^n;\left\{a_i^0\right\}_{i=1}^n\right)$.

Це означає, що $\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i^0(s)}\left\|g'(s)-y\right\|\le\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i^0(s)}\left\|g_0^*(s)-y\right\|$.

Оскільки g_0^* є екстремальним елементом для величини (7) при $a_i=a_i^0$, $i=\overline{1,n}$, то звідси випливає, що g' також є екстремальним елементом для цієї величини при $a_i=a_i^0$, $i=\overline{1,n}$. На підставі єдиності екстремального елемента для величини (7) робимо висновок, що $g'=g_0^*$.

Звідси випливає, що $\lim\limits_{m\to\infty}g_m^*=g_0^*$. Отже, $\lim\limits_{m\to\infty}P_{\left\{a_i^m\right\}_{i=1}^n}=P_{\left\{a_i^0\right\}_{i=1}^n}$, якщо $\lim\limits_{m\to\infty}\left(a_1^m,...,a_n^m\right)=\left(a_1^0,...,a_n^0\right)$. Теорему доведено.

5. Деякі загальні теореми існування екстремального елемента

В цьому пункті доведено деякі загальні твердження щодо існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (7).

Твердження 3. *Функція* $\Phi_{\left\{a_i\right\}_{i=1}^n}(g)=\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\left\|g(s)-y\right\|$, $g\in C(S,X)$, *є неперервною по* g *на* $C(S,X)$ *при всіх* $a_i\in C(S,K(X))$, $i=\overline{1,n}$.

Доведення. Нехай $g,g_0\in C(S,X)$. Тоді

$$\left|\Phi_{\left\{a_i\right\}_{i=1}^n}(g)-\Phi_{\left\{a_i\right\}_{i=1}^n}(g_0)\right|=\left|\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\left\|g(s)-y\right\|-\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\left\|g_0(s)-y\right\|\right|\le$$

$$\le\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\Big|\left\|g(s)-y\right\|-\left\|g_0(s)-y\right\|\Big|\le\max_{s\in S}\left\|g(s)-g_0(s)\right\|=$$

$$=\left\|g-g_0\right\|=\rho\left(g,g_0\right).$$

З цієї нерівності й випливає неперервність функції $\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^n}(g)$ в кожній точці $g_0 \in C(S,X)$. Твердження доведено.

Означення 1. (див., наприклад, [5,с.21]). *Множина нормованого простору називається локально компактною, якщо будь-яка обмежена послідовність елементів цієї множини містить збіжну підпослідовність.*

Теорема 4. *Якщо* V *- замкнена локально компактна множина простору* $C(S,X)$, *то екстремальний елемент для величини (7) існує.*

Доведення. Нехай $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ - екстремальна послідовність для величини (7), тобто $g_m \in V$, $m=1,2,...$, і $\lim\limits_{m\to\infty}\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^n}(g_m) = \lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\|g_m(s)-y\| = \alpha^*_{\{a_i^m\}_{i=1}^n}(V)$. (10)

Для всіх $m=1,2,...,$ $s\in S$ маємо

$$\|g_m(s)\| \le \max_{y\in a_i(s)}\|g_m(s)-y\| + \max_{y\in a_i(s)}\|y\| \le \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\|g_m(s)-y\| +$$

$$+\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\|y\| = \Phi_{\{a_i\}_{i=1}^n}(g_m) + \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\|y\|.$$

Тому для всіх $m=1,2,...$ $\|g_m\| = \max\limits_{s\in S}\|g_m(s)\| \le \Phi_{\{a_i\}_{i=1}^n}(g_m) + \max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\|y\|$.

Звідси на підставі (10) робимо висновок, що $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю елементів множини V. Внаслідок локальної компактності та замкненості множини V з $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну до $g^* \in V$ підпослідовність $\{g_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Беручи до уваги неперервність функції $\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^n}(g)$ (див. твердження 3) та рівність (10), отримуємо

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_{\{a_i\}_{i=1}^n}(g_{m_k}) = \Phi_{\{a_i\}_{i=1}^n}(g^*) = \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\|g^*(s)-y\| = \alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V).$$

Це означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (7).

Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором// Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – №3. – С.262-267.
2. Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень// Доп. НАНУ, 2005 – №6 – С.19-23.
3. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень// Укр. мат. журн. – 2005.- 57, №12. – С.1601-1619.
4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Многозначные отображения// Итоги науки и техн./ ВИНИТИ. Мат. анализ. – 1982. – 19. – С.127 – 231.
5. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320с.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. –742с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623с.

Some properties of problem of the best simultaneous uniform approximation of a few continuous compact-value maps are examined. We prove theorems of the existence of the element of the best simultaneous uniform approximation of a few continuous compact-valued maps.

Key words: *best simultaneous uniform approximation, compact-valued maps , extremal element, existence of the extremal element*

УДК 372.853.53

О.В.Жмудовський, магістр фізики,
А.М.Кух, кандидат педагогічних наук, доцент

РОЗРОБКА ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРИЛАДІВ НА ОСНОВІ ЦИФРОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ДЛЯ НАВЧАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ФІЗИКИ

У статті розглянуто аспекти технологічні розробки вимірювальних комплексів на основі ПЕОМ.

Ключові слова: *датчики, електронний термометр, електронний вольтметр, навчальний фізичний експеримент*

Лабораторний практикум з методики викладання фізики це один з найважливіших компонентів підготовки вчителів фізики до подальшої професійної діяльності. Він покликаний трансформувати теоретичні знання, отримані в процесі інших видів занять, у практичну площину. Навички і вміння, які отримані в лабораторії, є невід'ємною частиною того, що прийнято називати „майстерністю вчителя”[1, 3]. Разом з тим, лабораторний практикум має бути дуже динамічною структурою, що перебудовується залежно від того, які вимоги пред'являються до вчителя в даний конкретний момент, яким устаткуванням оснащуються школи.

При більш глибокому вивченні навколишнього світу недостатньо тільки якісних спостережень, а потрібні точні відомості про фізичні величини, що характеризують досліджуваний об'єкт. Ці фізичні величини можуть бути різної природи: механічної, електричної й т.п.

Позначимо фізичну величину буквою *Т*. Сукупність операцій, спрямованих на встановлення чисельного значення цієї фізичної величини, становить *процес вимірювання*. Якщо при вимірюванні використовуються електронні засоби (наприклад ПК), необхідно спочатку перетворити вимірюваний параметр в еквівалентну електричну величину. Електрична величина має містити всю інформацію про вимірюваний параметр. *Датчик* — це пристрій, що, піддаючись впливу фізичної величини, перетворює його в сигнал, зазвичай електричної природи, що є функцією вимірюваної величини.

Датчики по виду вихідної величини можуть бути активними (генераторними) або пасивними (параметричними). Вони також можуть підрозділятися за принципом дії на дискретні й аналогові. Перші безупинно перетворять вхідний сигнал у вихідний, а другі - реагують на певний граничний вхідний сигнал, тобто діють за принципом реле [3].

Різниця між активними й пасивними датчиками обумовлена тими фізичними ефектами, які покладені в основу їхньої конструкції.

При впливі на активний датчик він сам стає джерелом вихідного електричного сигналу. Параметричний датчик є частиною електричного кола, що містить джерело живлення. Вплив на параметричний датчик призводить лише до зміни його характеристик і цим визначається перетворення вхідного сигналу. Принцип дії активного датчика базується на перетворенні зовнішнього впливу будь-якої фізичної природи в електричний сигнал. Деякі з них наведені в таблиці 1 [1, с.14].

Основною характеристикою пасивних датчиків є їхній імпеданс, що міняється під впливом вимірюваної величини. Зміна імпедансу може бути викликана впливом вимірюваної величини на розміри й форму елементів датчика, або на електричні й магнітні властивості матеріалу, з якого він виготовлений.

Таблиця 1.

Принцип дії деяких датчиків

Вимірювана величина	Використовуваний ефект	Вихідна величина
Температура	Термоелектричний ефект	Напруга
Потік оптичного випромінювання	Піроелектричний ефект	Заряд
	Зовнішній фотоефект	Струм
	Внутрішній фотоефект у напівпровіднику з p-n переходом	Напруга
	Фотоелектромагнітний ефект	Напруга
Сила, тиск, прискорення	П'єзоелектричний ефект	Заряд
Швидкість	Електромагнітна індукція	Напруга
Переміщення	Ефект Холла	Напруга

Більшість пасивних датчиків містить рухливий елемент або елемент, що деформується. Використання цього елемента дозволяє змінювати розміри або параметри його імпедансу. Прикладом такого датчика може служити потенціометр.

У таблиці наведені електричні характеристики, що змінюються під дією вимірюваної величини [3, с.8].

Таблиця 2.

Вимірювані величини

Вимірювана величина	Електрична характеристика, що змінюється під дією вимірюваної величини	Тип використовуваних матеріалів
Температура	Опір	Метали (платина, нікель,
Наднизькі температури	Діелектрична проникність	Скло, кераміка
Потік оптичного випромінювання	Опір	Напівпровідники
Деформація	Опір	Сплави нікелю, легований кремній
	Магнітна проникність	Феромагнітні сплави
Переміщення	Опір	Магниторезистивні матеріали: вісмут, антимонія індію
Вологість	Опір	Хлористий літій, окис алюмінію, полімери
	Діелектрична проникність	
Рівень		Рідкі ізоляційні матеріали

Існує ще один тип датчиків — комбінований. Їх використовують у тому випадку, коли неможливо відразу перетворити величину, що впливає, в електричний сигнал. Датчик включається у вимірювальний ланцюг (який повинен складатися як мінімум з датчика й пристрою обробки сигналу, пов'язаного з яким-небудь індикатором) наприклад, термопара з вольтметром.

Калібрування вимірювальної схеми дозволяє кожному значенню вимірюваної величини однозначно приписати відповідне показання індикатора результату.

Однак на практиці до вимірювань, що залежать від зовнішніх умов, пред'являються додаткові вимоги. Наприклад, збереження форми вхідного сигналу або вимоги по обмеженню величини вихідного сигналу й узгодженню його із входом відображаючого пристрою. У зв'язку із цим доводиться у вимірювальний ланцюг включати пристрої, які оптимізують прийом і обробку сигналів, наприклад, пристрої ліанерізації характеристик перетворення датчиків, аналого-цифрові перетворювачі (АЦП), якщо інформація повинна оброблятися в

ПК, перетворювачі напруга-струм або напруга-частота (рис. 1) [4].

В процесі роботи було побудовано два пристрої, які можна використовувати в межах фізичної лабораторії (кабінету): електронний термометр та електронний міліамперметр.

Перший прилад є двома термометрами (рис. 2.) В приладі використано електронні термометри TCN75. Основними їхніми перевагами є малий розмір, висока чутливість (0,5 градуса), самокалібровка. Для зв'язку з ЕОМ використовується вбудована шина I2C.

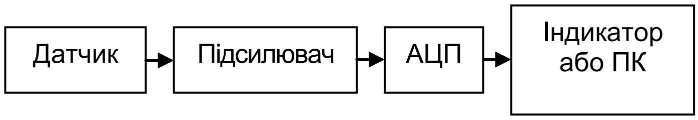


Рис 1. Схема підключення датчиків

Основними перевагами використання шини I2C при підключенні до ЕОМ є можливість підключення на ту саму шину до 255 різних приладів, невелика кількість провідників, необхідних для роботи шини, невисока швидкість передачі інформації, що дозволяє використовувати довільні провідники на відстань до декількох метрів.

Шина I2C для передачі інформації використовує два провідники: по першому передаються тактуючі імпульси, другий використовується для передачі інформації в двох напрямках. Така шина передбачає наявність головного пристрою, який опитує всі інші йому підпорядковані. В нашому випадку роль хоста виконує ЕОМ.

Через те, що всі виходи пристроїв на шині I2C є виходами з відкритим колектором, то підключення додаткових пристроїв на шину є проблематичним. Для коректної роботи шини в такому випадку потрібно узгоджувати рівні сигналів встановлюючи додаткові ємності між синальними провідниками та землею.

Через такі обмеження шина I2C використовується для обміну інформацією в межах завершених блоків, де швидкість передачі інформації є некритичною. Наприклад ця шина використовується в телевізорах для передачі інформації від контролера, який обслуговує кнопки та пульт дистанційного керування до інших блоків: регулювання гучності звуку, зміна каналів, збереження всіх настройок вмікросхемі пам'яті.

ЕОМ має вбудовану шину I2C. Через неї BIOS визначає тип та об'єм встановленої на комп'ютері оперативної пам'яті, обслуговуються датчики температури та напруг, зберігаються настройки BIOS в мікросхемі пам'яті. Але ми не можемо використати уже наявну шину у своїх потребах, оскільки на материнських платах не передбачають підключення додаткових пристроїв по цій шині.

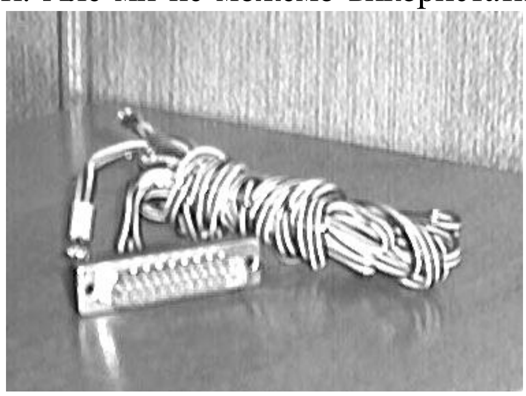


Рис. 2. Електронний термометр

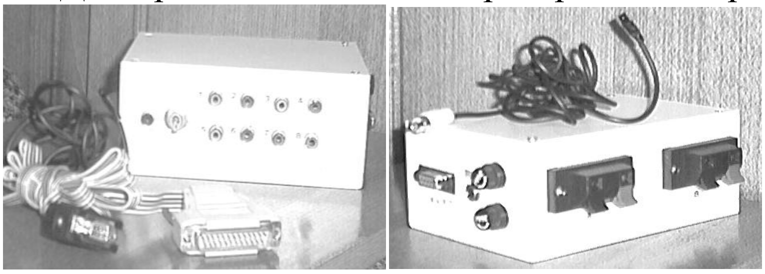
Для підключення власних пристроїв по шині I2C можна земулювати цю шину на якомусь з комунікаційних або паралельних портів, які є в ЕОМ. В даному випадку для емуляції шини було використано паралельний порт.

Для роботи паралельний порт використовує восьми розрядну шину для передачі інформації до периферійних пристроїв (в сучасних ЕОМ в розширених режимах паралельного порта ця шина може бути двонаправленою) та ряд службових провідників по яким передається інформація від периферійних пристроїв до ЕОМ.

Паралельний порт має декілька режимів роботи. Оскільки швидкість передачі даних в нашому випадку невелика, то доцільно використати стандартний режим. В цьому випадку для емуляції шини буде використано три біти з восьми розрядної шини для передачі інформації від порта до периферії та один службовий сигнал для зворотної передачі. Через те, що мікросхеми електронних термометрів виконані по технології КМОП, вони мають діапазон робочих напруг від 2,7 В до 5 В і споживають дуже малу кількість енергії (1 мікроампер в статичниму режимі та до 250 мікроампер під час операцій). Для їхнього живлення використано сигнал на одному з провідників шини паралельного порта, який має вихідні рівні ТТЛ (5 вольт, 20 міліампер на один вихід).

Другий пристрій — електронний вольтметр, порівняно з електронним термометром є більш складним приладом (рис.3). Прилад має 2 керованих виходи, де програмно можна змінювати напругу в діапазоні від 1,5 В до 5 В з максимальним струмом на кожному з виходів 0,16 А та 8 входів. На кожному з входів вимірюється значення напруги.

Для реалізації цього пристрою використано мікросхеми MCP42010, MCP3208. Для зв'язу з ЕОМ використовуються шина SPI, яка має більшу швидкість у порівнянні з шиною I2C.



А) Б)

Рис. 2. Електронний вольметр

Аналогічно до попереднього випадку мікросхеми виконані по технології КМОП і мають понижене енергоспоживання: в режимі очікування 500 наноампер, в режимі операцій до 500 мікроампер. Загальна швидкість роботи шини з двома пристроями складає до 5000 циклів на секунду.

Особливістю роботи аналого-цифрового перетворювача є наявність опорної напруги, відносно якої проводиться вимірювання. В загальному випадку результат вимірювання отримується по формулі: $D_{out} = \frac{4096 \times V_{in}}{V_{ref}}$, де D_{out} – цифровий код, який отримуємо в результаті вимірювання, V_{in} – напруга, яка вимірюється, V_{ref} – опорна напруга, відносно якої проводяться вимірювання. Максимальне значення опорної напруги не повинно перевищувати 5 В. Мінімальне значення опорної напруги 0,25 В. До електронного вольтметра в якості датчиків можна підключати фоторезистори та терморезистори, фотодіоди, термопари. Розроблені прилади створюють передумови для постановки інноваційного навчального експерименту і удосконалюють систему методичної підготовки вчителя фізики в галузі фізичного експерименту.

Список використаних джерел

1. Анофрикова С.В., Прояненкова Л.А., Руководство по разработке урока с использованием ученого физического эксперимента: Учебное порсобие. — Астрахань, Изд. дом «Астраханский университет», — 2005.— 80 с.
2. Комп'ютер на уроках фізики: Посібник для вчителів / М.І.Жалдак, Ю.К.Набочук, І.Л.Семещук — Костопіль, РВП «Роса», —2005.—228 с.
3. Петрова Е.Б. Лабораторный практикум по теории и методике обучения физике (на современном оборудовании). —М:Прометей,— 2004.—144 с.
4. Сумський В.І. ЕОМ при вивченні фізики: Навч. посібник. —К.:ІЗМН,— 1997.—184 с.

In the article aspects are considered technological developments of measuring complexes on the basis of computers.

Key words: *sensors, electronic thermometer, electronic voltmeter educational physical experiment*

УДК 517.5

У.В.Гудима, кандидат фізико-математичних наук,
В.О.Гнатюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Ю.В.Гнатюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент

ДЕЯКІ НЕОБХІДНІ, ДОСТАТНІ УМОВИ ТА КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ ОДНОЧАСНОЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КІЛЬКОХ НЕПЕРЕРВНИХ КОМПАКТНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МНОЖИНОЮ ОДНОЗНАЧНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Для задачі найкращої одночасної апроксимації кількох неперервних компактнозначних відображень множиною однозначних неперервних відображень встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента.

Ключові слова: *найкраща одночасна рівномірна апроксимація; компактнозначне відображення; екстремальний елемент; критерій екстремального елемента.*

Нехай S – компакт, s – його елементи, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S,X)$ —лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ – сукупність непорожніх компактів простору $X: K(X) = \{K : K \subset X, K - компакт, K \neq \varnothing\}$, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$ і які неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K(X)$(див., наприклад, [1,с.133]), $V \subset C(S,X)$.

Задачею найкращої одночасної рівномірної апроксимації кількох неперервних компактнозначних відображень $a_i \in C(S,K(X))$, $i=\overline{1,n}$, множиною $V \subset C(S,X)$ однозначних неперервних відображень з компакту S в X будемо називати задачу відшукання величини:
$$\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) = \inf_{g\in V}\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\|g(s)-y\|. \quad (1)$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V) = \max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\|g^*(s)-y\|$,

то його будемо називати елементом найкращого одночасного рівномірного наближення відображень a_i, $i=\overline{1,n}$, у множині V або екстремальним елементом для величини (1).

Зрозуміло, що частковим випадком задачі відшукання величини (1) є задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень, яка розглядалася, зокрема, у працях [2-4].

Позначимо через X^* простір, спряжений з X, через B^*–замкнену одиничну кулю простору X^*: $B^* = \{f : f \in X^*, \|f\| \le 1\}$, а через $E(B^*)$–множину крайніх точок B^*.

У подальшому будемо припускати, що обмеження $g\in V$ в задачі відшукання величини (1) є суттєвим, тобто: $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n} < \alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n}(V)$, (2), де $\alpha^*_{\{a_i\}_{i=1}^n} = \inf\limits_{g\in C(S,X)}\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\|g(s)-y\|$.

Для $a\in C(S,K(X))$, $i=\overline{1,n}$ та $g^*\in V$ покладемо $\alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} = \max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a_i(s)}\|g^*(s)-y\|$,

$$C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} = \left\{ g : g \in C(S, X), \max_{1\le i\le n} \max_{s\in S} \max_{y\in a_i(s)} \|g(s) - y\| < \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \right\},$$

$$I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} = \left\{ i : i \in \{1,...,n\}, \max_{s\in S} \max_{y\in a_i(s)} \|g(s) - y\| = \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \right\} S^{g^*}_{a_i} = \left\{ s : s \in S, \max_{y\in a_i(s)} \|g^*(s) - y\| = \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \right\}, \quad i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n},$$

$$a_i^{g^*}(s) = \left\{ y : y \in a_i(s), \|g^*(s) - y\| = \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \right\}, \; i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, \; s \in S^{g^*}_{a_i},$$

$$B^*_{a_i}(g^*, s, y) = \left\{ f : f \in B^*, f(g^*(s) - y) = \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \right\}, \; i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, \; s \in S^{g^*}_{a_i}, \; y \in a_i^{g^*}(s),$$

$$E(B^*_{a_i}(g^*, s, y)) = \left\{ f : f \in E(B^*), f(g^*(s) - y) = \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \right\}, \; i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, s \in S^{g^*}_{a_i}, \; y \in a_i^{g^*}(s).$$

Оскільки $g^* \in V$, то з умови (2) випливає, що $C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \neq \varnothing$. Співвідношення $I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \neq \varnothing$; $S^{g^*}_{a_i} \neq \varnothing$, $i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$; $a_i^{g^*}(s) \neq \varnothing$, $i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$, $s \in S^{g^*}_{a_i}$; $B^*_{a_i}(g^*, s, y) \neq \varnothing$, $i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, s \in S^{g^*}_{a_i}$, $y \in a_i^{g^*}(s)$; $E(B^*_{a_i}(g^*, s, y)) \neq \varnothing$, $i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, s \in S^{g^*}_{a_i}$, $y \in a_i^{g^*}(s)$, мають місце на підставі скінченності множини $\{1,...,n\}$, неперервності по s на S функції $\max_{y\in a_i(s)} \|g^*(s) - y\|$, $i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$ (див. твердження 1.1 [4]), неперервності функції $\|z - y\|$ по y на X при фіксованому z і твердження 3.1 [4].

Означення 1 [5,с.12, 13]. Нехай M множина лінійного нормованого простору Y, $y^* \in Y$. Конусом $\Gamma(M, y^*)$ внутрішніх напрямків для M із y^* будемо називати множину всіх точок $y \in Y$, для яких існує окіл $O(y)$ точки y та число $\varepsilon > 0$ такі, що $y^* + th \in M$ для всіх $h \in O(y)$ і всіх $t \in (0, \varepsilon)$.

Конусом $\Gamma^*(M, y^*)$ граничних напрямків для M із y^* будемо називати множину таких точок $y \in Y$, що для довільного околу $O(y)$ точки y та довільного числа $\varepsilon > 0$ існують такі $h \in O(y)$ та $t \in (0, \varepsilon)$, що $y^* + th \in M$.

Твердження 1. Нехай φ – опукла неперервна функція, задана на лінійному нормованому просторі Y, $\beta \in R$, $y^* \in Y$ і $\varphi(y^*) < \beta$. Тоді $\Gamma\left(\left\{ y : y \in Y, \varphi(y) < \beta \right\}, y^*\right) = Y$.

Доведення. Візьмемо довільне $y \in Y$. Внаслідок неперервності функції φ та нерівності $\varphi(y^*) < \beta$ випливає, що $\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} \varphi(y^* + ty) = \varphi(y^*) < \beta$.

Тому існує $t_0 > 0$, що $\varphi(y^* + t_0 y) < \beta$. Розглянемо далі функціонали $\psi(y') = \varphi(y^* + t_0 y')$. Внаслідок неперервності функції φ одержимо $\lim_{y'\to y} \psi(y') = \lim_{y'\to y} \varphi(y^* + t_0 y') = \varphi(y^* + t_0 y) < \beta$.

Тому існує окіл $O(y)$ точки y такий, що $\varphi(y^* + t_0 y') < \beta$ для всіх $y' \in O(y)$.

Внаслідок опуклості функції φ і нерівностей $\varphi(y^*) < \beta$, $\varphi(y^* + t_0 y') < \beta$, $y' \in O(y)$, для всіх $\alpha \in [0,1]$ будемо мати, що $\varphi((1-\alpha) y^* + \alpha(y^* + t_0 y')) = \varphi(y^* + \alpha t_0 y') \le$

$$\le (1-\alpha)\varphi(y^*) + \alpha\varphi(y^* + t_0 y') < (1-\alpha)\beta + \alpha\beta = \beta.$$

Звідси випливає, що $\varphi(y^* + \lambda y') < \beta$ для всіх $\lambda \in [0, t_0]$, $y' \in O(y)$. Це означає, що $y \in \Gamma\left(\left\{y : y \in Y, \varphi(y) < \beta\right\}, y^*\right)$. Оскільки y вибрано з Y довільно, то $\Gamma\left(\left\{y : y \in Y, \varphi(y) < \beta\right\}, y^*\right) = Y$. Твердження доведено.

Теорема 1. *Нехай $g^* \in V$. Має місце рівність*

$$\Gamma\left(C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, g^*\right) = \bigcap_{i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}} \bigcap_{s \in S^{g^*}_{a_i}} \bigcap_{y \in a_i^{g^*}(s)} \bigcap_{f \in B^*_{a_i}(g^*, s, y)} \left\{g : g \in C(S, X), \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\right\}. \quad (3)$$

Доведення. Для $g^* \in V$, $i \in \{1, ..., n\}$, позначимо через $C^{g^*}_{a_i}(s) = \left\{g : g \in C(S, X), \max_{s \in S} \max_{y \in a_i(s)} \left\|g(s) - y\right\| < \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}\right\}$.

Маємо
$$C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} = \bigcap_{i=1}^n C^{g^*}_{a_i}. \quad (4)$$

Дійсно, нехай $g \in C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$. Тоді $\max_{1 \le i \le n} \max_{s \in S} \max_{y \in a_i(s)} \left\|g(s) - y\right\| < \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$.

Звідси випливає, що $g \in C^{g^*}_{a_i}$, $i = \overline{1, n}$. Це означає, що $g \in \bigcap_{i=1}^n C^{g^*}_{a_i}$. Тому $C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n} \subset \bigcap_{i=1}^n C^{g^*}_{a_i}$. Навпаки, якщо $g \in \bigcap_{i=1}^n C^{g^*}_{a_i}$, то $g \in C^{g^*}_{a_i}$, $i = \overline{1, n}$. Тому $\max_{s \in S} \max_{y \in a_i(s)} \left\|g(s) - y\right\| < \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$, $i = \overline{1, n}$, і, отже, $\max_{1 \le i \le n} \max_{s \in S} \max_{y \in a_i(s)} \left\|g(s) - y\right\| < \alpha^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$.

Це дозволяє зробити висновок, що $\bigcap_{i=1}^n C^{g^*}_{a_i} \subset C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$. Вище було встановлено протилежне включення. Звідси випливає, що має місце рівність (4).

В силу твердження 1.2.2 [5, 14] $\Gamma\left(C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, g^*\right) = \bigcap_{i=1}^n \Gamma\left(C^{g^*}_{a_i}, g^*\right)$.

Звідси з урахуванням твердження 1 заключаємо, що

$$\Gamma\left(C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, g^*\right) = \bigcap_{i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}} \Gamma\left(C^{g^*}_{a_i}, g^*\right). \quad (5)$$

Згідно з теоремою 3.1 [4] для всіх $i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}$

$$\Gamma\left(C^{g^*}_{a_i}, g^*\right) = \bigcap_{s \in S^{g^*}_{a_i}} \bigcap_{y \in a_i^{g^*}(s)} \bigcap_{f \in B^*_{a_i}(g^*, s, y)} \left\{g : g \in C(S, X), \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\right\}. \quad (6)$$

З (5), (6) отримуємо рівність (3). Теорема доведено.

Теорема 2. *Нехай $g^* \in V$. Має місце рівність*

$$\Gamma\left(C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, g^*\right) = \bigcap_{i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}} \bigcap_{s \in S^{g^*}_{a_i}} \bigcap_{y \in a_i^{g^*}(s)} \bigcap_{f \in E\left(B^*_{a_i}(g^*, s, y)\right)} \left\{g : g \in C(S, X), \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\right\}. \quad (7)$$

Справедливість цієї рівності випливає з того, що (див. доведення теореми 1) $\Gamma\left(C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, g^*\right) = \bigcap_{i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}} \Gamma\left(C^{g^*}_{a_i}, g^*\right)$, а згідно з теоремою 3.2 [4]

$$\Gamma\left(C^{g^*}_{a_i}, g^*\right) = \bigcap_{s \in S^{g^*}_{a_{ii}}} \bigcap_{y \in a_i^{g^*}(s)} \bigcap_{f \in E\left(B^*_{a_i}(g^*, s, y)\right)} \left\{g : g \in C(S, X), \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\right\}.$$

Теорема 3. *Нехай* V *–довільна множина простору* $C(S,X)$. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним для величини (1), необхідно, щоб не існувало такого елемента* $z \in \Gamma^*(V,g^*)$, *що для всіх* $i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, s \in S^{g^*}_{a_i}$, $y \in a_i^{g^*}(s)$, $f \in E\left(B^*_{a_i}(g^*,s,y)\right)$ *справджується нерівність* $\operatorname{Re} f\left(z(s)\right) < 0$.

Доведення. Нехай g^* – екстремальний елемент для величини (1). Згідно з теоремою 1.4.1 [5,с.22] має місце співвідношення $\Gamma\left(C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, g^*\right) \cap \Gamma^*\left(V,g^*\right) = Ш$. Звідси, враховуючи (7), робимо висновок, що не існує $z \in \Gamma^*(V,g^*)$, для якого $\operatorname{Re} f\left(z(s)\right) < 0$ для всіх $i \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, s \in S^{g^*}_{a_i}$, $y \in a_i^{g^*}(s)$, $f \in E\left(B^*_{a_i}(g^*,s,y)\right)$. У протилежному випадку отримали б, що $\Gamma\left(C^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, g^*\right) \cap \Gamma^*\left(V,g^*\right) \neq Ш$.

Теорему доведено.

Зрозуміло, що теорему 3 можна сформулювати у такій еквівалентній формі.

Теорема 4. *Нехай* V *–довільна множина простору* $C(S,X)$. *Якщо* $g^* \in V$ *є екстремальним елементом для величини (1), то для будь-якого* $z \in \Gamma^*(V,g^*)$ *існують такі елементи* $i_z \in I^{g^*}_{\{a_i\}_{i=1}^n}, s_z \in S^{g^*}_{a_i}$, $y_z \in a_{i_z}^{g^*}(s)$, $f_z \in E\left(B^*_{a_z}(g^*,s,y)\right)$, *що*

$$f_z\left(g^*(s_z) - y_z\right) = \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\left\|g^*(s) - y\right\|,\ \operatorname{Re} f_z\left(z(s_z)\right) \ge 0\ .$$

Встановимо далі достатню умову того, що $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорема 5. *Нехай* V *- довільна множина простору* $C(S,X)$, $g^* \in V$. *Якщо для кожного елемента* $g \in V$ *існують елементи* $i_g \in \{1,...,n\}$, $s_g \in S$, $y_g \in a_{i_g}(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$ *такі, що*

$$f_g\left(g^*(s_g) - y_g\right) = \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\left\|g^*(s) - y\right\|, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g(s_g) - g^*(s_g)\right) \ge 0. \tag{9}$$

то g^* *є екстремальним елементом для величини (1).*

Доведення. Нехай g – довільний елемент множини V. Згідно з умовою теореми існують елементи $i_g \in \{1,...,n\}$, $s_g \in S$, $y_g \in a_{i_g}(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, для яких мають місце співвідношення (8), (9).

З урахуванням цих співвідношень одержуємо

$$0 \le \operatorname{Re} f_g\left(g(s_g) - g^*(s_g)\right) = \operatorname{Re} f_g\left(g(s_g) - y_g + y_g - g^*(s_g)\right) =$$
$$= \operatorname{Re} f_g\left(g(s_g) - y_g\right) - \operatorname{Re} f_g\left(g^*(s_g) - y_g\right) \le \left\|g(s_g) - y_g\right\| -$$
$$-\max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\left\|g^*(s) - y\right\| \le \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\left\|g(s) - y\right\| - \max_{1\le i\le n}\max_{s\in S}\max_{y\in a_i(s)}\left\|g^*(s) - y\right\|.$$

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Зауважимо, що встановлена у теоремі 5 достатня умова екстремального елемента для величини (1) має місце у випадку найкращого рівномірного наближення кількох багатозначних відображень $a_i \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$ будь –якою множиною $V \subset C\left(S, X\right)$.

Становлять інтерес множини, для яких ця умова є не лише достатньою, а й необхідною умовою екстремального елемента для величини (1).

Означення 2. *Множину M нормованого лінійного простору Y будемо називати Γ^*-множиною відносно точки $y_0 \in M$, якщо $y - y_0 \in \Gamma^*\left(M, y_0\right)$ для всіх $y \in M$.*

Прикладами множин M, які є Γ^*- множинами відносно точки $y_0 \in M$ є, зокрема, зіркові відносно y_0 (див., [6,с.16]), в тому числі опуклі множини.

Теорема 6. *Нехай $V \subset C\left(S, X\right)$, $g^* \in V$ і V є Γ^*- множиною відносно точки g^* (зірковою відносно g^* або опуклою множиною). Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $i_g \in \{1,...,n\}$, $s_g \in S$, $y_g \in a_{i_g}\left(s_g\right)$, $f_g \in E\left(B^*\right)$, для яких виконуються умови (8), (9).*

Доведення. Необхідність. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки V є Γ^*–множиною відносно g^*(зірковою відносно g^* або опуклою множиною), то $z = g - g^* \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$для всіх $g \in V$. Тоді згідно з теоремою 4 для будь-якого $g \in V$ існують елементи $i_g \in \{1,...,n\}$, $s_g \in S$, $y_g \in a_{i_g}\left(s_g\right)$, $f_g \in E\left(B^*\right)$, для яких виконуються співвідношення (8), (9).

Достатність умов теореми для екстремальності g^* встановлено у теоремі 5.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай V - підпростір простору $C\left(S, X\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $g \in V$ існували елементи $i_g \in \{1,...,n\}$, $s_g \in S$, $y_g \in a_{i_g}\left(s_g\right)$, $f_g \in E\left(B^*\right)$ такі, що* $f_g\left(g^*\left(s_g\right) - y_g\right) = \max\limits_{1 \le i \le n} \max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a_i(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|$, $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \ge 0$.

Справедливість наслідку випливає з теореми 6, якщо врахувати, що підпростір V є опуклою множиною і з включення $g^* \in V$ випливає, що $\left(g^* + g\right) \in V$ для всіх $g \in V$.

Список використаних джерел

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Многозначные отображения// Итоги науки и техн./ ВИНИТИ. Мат. анализ. – 1982. – 19. – С.127 – 231.

2. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором// Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – №3. – С.262-267.

3. Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень// Доп. НАНУ, 2005 – №6 – С.19-23.

4. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень// Укр. мат. журн. – 2005.- 57, №12. – С.1601-1619.

5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496с.

6. Лейтхвейс К. Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985. – 335с.

The necessary, sufficient conditions and criteria of extreme element for the problem of the best uniform simultaneous approximation of a few continuous compact-value maps by sets of continuous single-valued maps are established.

Key words: *best simultaneous uniform approximation, compact-valued maps , extremal element, , the criteria of the extremal element*

УДК 539.2

М.П.Киселюк, викладач

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИЧНОГО ПОГЛИНАННЯ ТОНКИХ ПЛІВОК СУЛЬФІДУ ТА СЕЛЕНІДУ ГАЛІЮ

Досліджено спектри поглинання скловидних сполук GaS та Ga_2Se_3 для видимого діапазону довжин хвиль. Спостерігаються досить різкі смуги поглинання. Проведено порівняння із результатами експерименту по відбиванню у цій ж області.

Ключові слова: *халькогеніди галію, спектри поглинання, спектри відбивання, старіння зразків.*

Найбільш інформативним параметром, що характеризує скловидні сполуки, є їх пропускна здатність. Зразки для дослідження виготовлені методом вакуумного термічного напилення на скляні підігріті підкладки. Матеріал синтезований у вакуумованих кварцових ампулах з примусовим перемішуванням компонентів при температурах, підібраних згідно діаграм станів [2, с. 223-225].

Дослідження спектрів пропускання плівок GaS та Ga_2Se_3 у діапазоні довжин хвиль від 310 до 850 нм при кімнатній температурі проводились за допомогою приладу ЕК 1. Основною частиною приладу є дифракційна ґратка із великою областю дисперсії, яка закріплена на шарнірному, поворотному механізмі *М*. Для зменшення ширини пучка використовуються діафрагми *К*, що мають вигляд вузьких щілин. Лінзи *Н* виконують багато функцій, основні з них є роль конденсора, зменшення впливу паразитного світла та одержання паралельних пучків, із рівномірно розподіленою інтенсивністю. *Р* — поворотна скляна призма.

Як джерело світла *L* використовувалась кварцова лампа. Дослід проводився таким чином, щоб можна було вважати пропускну здатність матеріалу підкладки, для даного діапазону хвиль, 100%. До попереднього додамо припущення, що графік спектральної чутливості приймача *О* описується горизонтальною, прямою лінією. Постановка експерименту саме таким чином дає змогу побудувати криву, яка характеризує випромінювальну здатність лампи *L*.

Через незначну інтенсивність світла на краях вказаного діапазону $\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = 15$ було побудовано також криву відносних похибок, які виявились незначними. Матеріали мають майже однакові характеристики, пропускна здатність обох сполук для довжин хвиль від 500 до 800 нм прямує до 100%. Максимум поглинання для Ga_2Se_3 склав 380–390 нм, для GaS — 380 нм. Старіння зразків, яке досліджено для періоду часу 240 годин, показує звуження зон поглинання, незначні зміни пропускання у області довгих хвиль. Зразки перебували при нормальних умовах на світлі помірної інтенсивності.

Дослідження спектрів відбивання не дало змогу пов’язати зменшення інтенсивності пропускання із різким ростом коефіцієнта відбивання. Результати дослідів по визначенню відбивання для вказаних сполук, що були одержані за допомогою термічного напилення на кремній, наведені в таблиці:

Сполука	**275 нм**	**300 нм**	**325 нм**	**350 нм**	**375 нм**	**400 нм**	**425 нм**	**450 нм**
GaS	76.8%	44%	33.6%	32%	30.4%	25.6%	24%	23.2%
Ga_2Se_3	70.4%	40.8%	29.6%	24%	24%	22.4%	22.4%	22.4%

Список використаних джерел

1. http://www.makucha.ru/proekty/nonlinear/nonlinear.http/
2. Большаков К.А., Химия и технология редких и рассеянных элементов. Ч.1, Высшая школа, (1976).

Tthe spectrums of absorption of glassy connections GaS and Ga_2Se_3 are explored for the visible range of lengths of waves. There are the enough sharp bars of absorption. Comparison is conducted with the results of experiment on the reflection in the same region.

Key words: *halcogenidi gallium, spectrums of absorption, spectrums of reflection, senescence of structure*

УДК 517.5

І.Б.Ковальська, кандидат фізико-математичних наук, доцент

НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ $C^{\psi}_{\beta,p}$ СУМАМИ ЗІГМУНДА

У статті встановлюються асимптотичні рівності для точних верхніх меж норм різниці аналітичних функцій з класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ та сум Зігмунда для цих функцій.

Ключові слова: *асимптотичне наближення, аналітичні функції, суми Зігмунда.*

Нехай $f(x)$ – сумовна 2π-періодична функція,

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx) \qquad (1)$$

– її ряд Фур'є.

Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}[a_k(f)\cos(kx+\frac{\beta\pi}{2})+b_k(f)\sin(kx+\frac{\beta\pi}{2})],$$

де $\psi(k)$ – довільна функція натурального аргументу і β – фіксоване дійсне число, $\beta\in(-\infty,\infty)$, є рядом Фур'є для деякої функції $f\in L(0,2\pi)$. Цю функцію позначимо через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ і назвемо (ψ,β) – похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, що задовольняють такій умові, позначимо через L^{ψ}_{β}.

Множини L^{ψ}_{β} визначаються двома функціями натурального аргументу: функцією $\psi(k)$ і функцією $\overline{\beta}=\overline{\beta}(k)\overset{df}{=}\beta_k$, $k\in N$.

Якщо $f\in L^{\psi}_{\beta}$, то

$$S[f]=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos(kt-\frac{\beta\pi}{2})dt \quad (2),$$

де $\varphi\in L^0$. (див. напр. [2]).

Функція φ в рівності (2) є $(\psi,\overline{\beta})$-похідною функції f. Функція f називається $(\psi,\overline{\beta})$-інтегралом для φ, а множина $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ є множиною $(\psi,\overline{\beta})$-інтегралів всіх функцій $\varphi\in L^0$.

Якщо $f\in L^{\psi}_{\overline{\beta}}$, а $f^{\psi}_{\overline{\beta}}\in\mathcal{N}$, то говорять, що $f(x)$ належить класу $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathcal{N}$. Підмножина неперервних функцій з $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathcal{N}$ позначається через $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathcal{N}$. Якщо $\mathcal{N}$ співпадає із множиною M 2π-періодичних істотно обмежених функцій $\varphi(x)$, для яких $ess\sup|\varphi(x)|\le 1$, то клас $C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathcal{N}$ позначають через $C^{\psi}_{\overline{\beta},\infty}$.

Нехай L – простір інтегровних 2π-періодичних функцій, $f\in L$ і (1) – її ряд Фур'є . Нехай, далі, $\overline{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ – пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k=1,2,\ldots$, які задовольняють умову

$$\overline{\psi}^2(k)=\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)\neq 0,\ k\in N.$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f,x)+\frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\tilde{A}_k(f,x)\right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi\in L$, то φ називається $\overline{\psi}$-похідною функції f і записується $\psi(\cdot)=D^{\overline{\psi}}(f;\cdot)=f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Підмножину функцій $f\in L$, для яких існують $\overline{\psi}$-похідні, позначимо через $L^{\overline{\psi}}$. Якщо $f\in L^{\overline{\psi}}$ і при цьому $f^{\overline{\psi}}\in\mathcal{N}$, де $\mathcal{N}\subset L$, то $f\in L^{\overline{\psi}}\mathcal{N}$.

Використаємо теорему ([3, с.156]).

Теорема 1. *Кожна функція $f\in C$ (або $f\in L$) має хоча б одну $\overline{\psi}$-похідну $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$, яка знаходиться в С (або ж у L). При цьому пару $\overline{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ можна вибрати так, щоб ψ_1,ψ_2 були опуклі вниз і спадали до нуля при $n\to\infty$.*

Також використаємо теорему ([3, с.156]).

Теорема 2. *Кожна функція $f\in C$ (або $f\in L$) представляється згорткою*

$$f(x)=A_0+\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\overline{\psi}(t)dt,$$

в якій $\varphi\in C$ (або $\varphi\in L$), а $\overline{\psi}(t)$ – функція, рядом Фур'є якої є ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos kt$, причому $\psi(k)$ – опукла спадна до нуля при $k\to\infty$ функція.

При кожному фіксованому $q\in[0,1)$ через $\mathcal{D}_q$ позначимо множину послідовностей $\psi(k)$, $k\in N$, для яких

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)(k+1)^l}{\psi(k)k^l}=q, \text{ де } l>0.$$

Основні результати отримані на класах $C^{\overline{\psi}}\mathcal{N}$, їх визначають параметри $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ такі, що послідовності $\psi(k)=(\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k))^{1/2}$ належать множині $\mathcal{D}_q$ при деякому $q\in[0,1)$.

Прикладом ядер, коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовільняють цю умову, є ядра

$$P_{\overline{\beta}}^q(t)=\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos(kt-\beta_k\frac{\pi}{2}),\ q\in[0,1),\ \beta_k\in R, \tag{3}$$

які при $\beta_k\equiv\beta$ є відомими ядрами Пуассона і позначаються через $P_\beta^q(\cdot)$.

Класи $L^{\psi}_{\beta}\mathcal{N}$, що породжуються ядрами (3), позначаються $L^{q}_{\beta}\mathcal{N}$, а відповідні $(\psi,\overline{\beta})$ – інтеграли – через $I^{\,q}_{\beta}\mathcal{N}$.

Через $\mathcal{L}_p$, $1\le p<\infty$, позначимо простір функцій $f\in L$ зі скінченною нормою $\|f\|_p$, де при $p\in[1,\infty)$

$$\|f\|_p=\|f\|_{L_p}=\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \text{ а } \mathcal{L}_1=L.$$

Одиничну кулю в $\mathcal{L}_p$ позначимо через $\mathcal{U}_p$; крім того, вважатимемо

$$L^{\overline{\psi}}U^0_p=L^{\overline{\psi}}_p,\ L^{\psi}_{\beta}U^0_p=L^{\psi}_{\overline{\beta},p},\ U^0_p=\left\{\varphi:\varphi\in U_p,\varphi\perp 1\right\}.$$

Нехай $f\in C$, $Z_n(f;x)=Z_n(f)$ – суми Зігмунда функції f порядку *n*, які визначаються матрицею $\Lambda=\left\{\lambda^{(n)}_k\right\}$, де

$$\lambda^{(n)}_k=\begin{cases}1, k=0,\\ 1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^l, 1\le k\le n-1,\\ 0, k\ge n,\end{cases}$$

$$\rho_n(f;x)=f(x)-Z_{n-1}(f;x).$$

Тут досліджуються величини $\|\rho_n(f;x)\|_C$ $f\in C^{\psi}_{\overline{\beta},p}$, а також величини

$$e_n(C^{\psi}_{\overline{\beta},p})_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\overline{\beta},p}}\|f-Z_{n-1}(f)\|_C$$

з метою отримання для них асимптотичних рівностей, коли $\psi\in\mathcal{D}_q$, $0\le q<1$.

Використаємо лему [3, с.353], суть якої полягає у тому, що залишки $\rho_n(\Psi_{\overline{\beta}})$ ядер $\Psi_{\overline{\beta}}(t)$, що породжують класи $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$, при $\psi\in\mathcal{D}_q$, $0<q<1$, при $n\to\infty$ поводять себе приблизно так само як і залишки $\rho_n(P^q_{\overline{\beta}})$ ядер $P^q_{\overline{\beta}}(t)$.

Лема 1. *Нехай* $\varphi(k)$, $k\in N$, *– довільна числова послідовність із* $\mathcal{D}_q$, $0<q<1$. *Тоді для будь-якої послідовності дійсних чисел* λ_k, $k=1,2,\ldots$, *при будь-якому* $n\in N$ *справедлива рівність*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt-\gamma_k)=\psi(k)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt-\gamma_k)+r_n(t)\right), \qquad (4)$$

при цьому для величини $r_n(t)=r_n(\psi,\overline{\gamma},t)$, *починаючи з деякого номера* n_0, *справедлива оцінка*

$$|r_n(t)|\le\frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)},$$

$$\varepsilon_n=\sup_{k\ge n}|\delta_k|,\ \delta_k=\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q. \qquad (5)$$

Теорема 3. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0<q<1$, $\psi(k)>0$. *Тоді для довільної функції* $f \in C^{\psi}_{\overline{\beta},p}$, $1 \le p \le \infty$ *при* $n \to \infty$ *справедлива рівність*

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C = \frac{1}{n^l} K^{\psi} + \psi(n)\left(q^{-n}\left\|\rho_n(I^{\,q}_{\beta}(f^{\psi}_{\overline{\beta}}))\right\|_C + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\overline{\beta}})}{(1-q)^2})\right), \quad (6)$$

де $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}\left|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $O(1)$ *і* K^{ψ} *– величини рівномірно обмежені відносно параметрів n, p, q, і* β_k.

Доведення

Нехай $f \in C^{\psi}_{\overline{\beta},p}$, $1 \le p \le \infty$. Тоді

$$\rho_n(f;x) = f(x) - Z_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\overline{\beta},n}(t)\, f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t)dt,$$

де

$$\Psi_{\overline{\beta},n}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{\psi(k)k^l}{n^l}\cos(kt - \dfrac{\beta_k \pi}{2}) \\ \sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \dfrac{\beta_k \pi}{2}) \end{cases}.$$

Покладемо

$$P^{q}_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}),$$

$0<q<1$, $\beta_k \in R$, $k \in N$.

З (4) і (5) робимо висновок, що

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\psi(k)k^l}{n^l}\cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2})\, f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2})\, f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t)\right)dt = \frac{1}{\pi} n^{-l}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^l \cdot \cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2})\cdot$$

$$\cdot f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(n)(q^{-n}P^{q}_{\overline{\beta},n}(t) + r_n(t))\, f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi n^l}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)k^l\cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}) f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t)dt + \psi(n)(\frac{q^{-n}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P^{q}_{\overline{\beta},n}(t)\, f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t)dt +$$

$$+ R_n(f;x)\big) = \frac{\varphi(n)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2})\right) f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t)dt +$$

$$+ \psi(n)(q^{-n}\rho_n\left(I^{\,q}_{\overline{\beta}}(f^{\psi}_{\overline{\beta}};x) + R_n(f;x)\right), \qquad (7)$$

де

$$R_n(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} r_n(t)\, f_{\bar{\beta}}^{\psi}(x-t)dt,$$

а функція $r_n(t) = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\left(\prod_{m=0}^{i-1}\frac{\psi(n+m+1)}{\psi(n+m)} - q^i\right)\cos(n+i)t - \gamma_{n+i}\right)$ при $\gamma_k = \beta_k$, $k \in N$.

В [3, с.356] показано, що

$$\|R_n(f)\|_s = 4\pi \left\| f_{\bar{\beta}}^{\psi} - t_{n-1}\right\|_p \|r_n\|_{\infty},\ 1 \le p,\ s \le \infty.$$

Якщо в ролі $t_{n-1}(\cdot)$ вибрати поліном $t_{n-1}^{*}(t)$ найкращого наближення у просторі L_p функції $f_{\bar{\beta}}^{\psi}(\cdot)$, а також використати нерівність (5), отримаємо таку оцінку:

$$\|R_n(f;x)\|_s = O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_p}{(1-q)^2},\ 1 \le p,\ s \le \infty. \qquad (8)$$

Якщо $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, то за ознакою Даламбера збіжності числових додатних рядів, ряди $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2})$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)k^l\cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2})$ збігаються абсолютно і рівномірно і частинні суми ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)k^l\cos(kt - \frac{\beta_k\pi}{2})$ будуть обмежені деяким числом K^{ψ}, не залежним від *n*.

В [3, с.358] показано, що величина $q^{-n}e_n(C_{\beta,p}^{q})_C$ при $n \to \infty$ є обмеженою зверху і знизу деякими додатними числами, що залежать від *p* і *q*.

Розглядаючи верхні грані обох частин співвідношення (6) по класах $C_{\beta,p}^{\psi}$, отримаємо наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$, $l > 0$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$e_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C = \frac{1}{n^l}K^{\psi} + \psi(n)(q^{-n}e_n(C_{\beta,p}^{q})_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}),$$

де $\varepsilon_n = \sup_{k \ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $O(1)$ *і* K^{ψ} *– величини рівномірно обмежені відносно параметрів n, p, q і* β_k.

Список використаних джерел

1. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.

The article determines asymptometic equalizations of precise upper boundary rates between functions of differences from the class of $C_{\beta,p}^{\psi}$ *and of Zigmund's sums for these functions.*

Key words: *asymptometic approximation, analytic functions, Zigmund's sums.*

УДК 539.374

І.М.Конет, кандидат фізико-математичних наук, професор

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом фундаментальних функцій та функцій Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру нестаціонарних задач феноменологічної теорії теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є для однорідних середовищ та перетворення Фур'є на декартовій півосі з n точками спряження.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Нестаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для кусково-однорідних середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний та практичний інтерес [1-4]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач присвячені монографії [5-8]. Зокрема, в [8] розглянуто випадок напівобмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ. Необмежені двоскладові та тришарові просторові середовища розглянуто у працях [9-12]. У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки нестаціонарних задач теплопровідності для напівобмежених кусково-однорідних середовищ у просторовій декартовій системі координат.

Постановка задачі. Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропному напівобмеженому ($n+1$)-шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \{(t,x,y,z)\big|\, t>0; (x,y)\in\Omega_2 = \langle a;b\rangle \times \langle c;d\rangle;$$
$$z\in I_n^+ \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}\left(l_{j-1};l_j\right);\, l_0\ge 0;\, l_k<l_{k+1};\, l_{n+1}=\infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності [13, 14]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - \left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_j + \chi_j^2 T_j = f_j(t,x,y,z);\; j=\overline{1,n+1} \tag{1}$$

з початковими умовами: $T_j(t,x,y,z)\big|_{t=0} = g_j(x,y,z); z\in I_j;\, j=\overline{1,n+1},$ (2)

крайовими умовами: $\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)T_1\Big|_{z=l_0} = g_0(t,x,y)$; $\frac{\partial^p T_{n+1}}{\partial z^p}\Big|_{z=+\infty}=0,\; p=0,1;$ (3)

умовами неідеального теплового контакту [15]

$$\begin{cases}\left[\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)T_k - T_{k+1}\right]\right]_{z=l_k} = 0,\\ \left(\nu_k\frac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_{k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k} = 0;\; k=\overline{1,n}\end{cases} \tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі Ω_2, де $a_{xj},a_{yj},a_{zj}\ge 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей x, y, z ($j=\overline{1,n+1}$);

$\chi_j^2\ge 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії;

$f(t,x,y,z)=\{f_1(t,x,y,z), f_2(t,x,y,z),\ldots, f_{n+1}(t,x,y,z)\}$ – інтенсивність теплових джерел;

$g(x,y,z)=\{g_1(x,y,z),g_2(x,y,z),\ldots,g_{n+1}(x,y,z)\}$ – температура середовища в початковий момент часу;

$\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0$ – деякі дійсні сталі;

$g_0(t,x,y)$ – задана обмежена неперервна функція в області $(0;+\infty)\times\Omega_2$;

$R_k\ge 0$ – коефіцієнти термоопору;

$\nu_k,\nu_{k+1}\ge 0$ – коефіцієнти теплопровідності;

$T(t,x,y,z)=\{T_1(t,x,y,z),T_2(t,x,y,z),\ldots,T_{n+1}(t,x,y,z)\}$ – шукана температура.

1. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(-\infty;+\infty)\times(-\infty;+\infty)\times\{z\in I_n^+\}$.

Розглянемо область $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(-\infty;+\infty)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови: $\left.\dfrac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\right|_{|x|=\infty}=0; k=0,1;\ j=\overline{1,n+1}$ (5)

щодо змінної *x* та крайові умови: $\left.\dfrac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\right|_{|y|=\infty}=0; k=0,1;\ j=\overline{1,n+1}$ (6)

щодо змінної *y*.

Вважаємо, що для задачі (1)-(6) виконуються умови узгодженості [13]:

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)g_1\right|_{z=l_0}=g_0(0,x,y);\ \left.\frac{\partial^p g_{n+1}}{\partial z^p}\right|_{z=+\infty}=0,\ p=0,1;$$

$$\begin{cases}\left.\left[\left(R_k\dfrac{\partial}{\partial z}+1\right)g_k-g_{k+1}\right]\right|_{z=l_k}=0,\\ \left.\left(\nu_k\dfrac{\partial g_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\dfrac{\partial g_{k+1}}{\partial z}\right)\right|_{z=l_k}=0;\ k=\overline{1,n};\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial^k g_j}{\partial x^k}\right|_{|x|=\infty}=0;\ \left.\frac{\partial^k g_j}{\partial y^k}\right|_{|y|=\infty}=0;\qquad k=0,1;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 5].

До задачі (1)-(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної *x* [16]: $F_x[g(x)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-i\sigma x}dx\equiv\tilde g(\sigma)$, (7)

$F_x^{-1}[\tilde g(\sigma)]=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde g(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma\equiv g(x)$, (8) $\qquad F_x\left[\dfrac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2F_x[g(x)]\equiv-\sigma^2\tilde g(\sigma)$. (9)

Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\{(t,y,z)\mid t>0;\ y\in(-\infty;+\infty);\ z\in I_n^+\}$ розв’язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\tilde T_j}{\partial t}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde T_j+\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde T_j=\tilde f_j(t,\sigma,y,z);z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}\quad(10)$$

з початковими умовами $\left.\tilde T_j(t,\sigma,y,z)\right|_{t=0}=\tilde g_j(\sigma,y,z);z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}$, (11) крайовими умовами $\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{T}_1\Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t,\sigma,y); \frac{\partial^p \tilde{T}_{n+1}}{\partial z^p}\Big|_{z=+\infty} = 0;\ p = 0,1$; (12)

$$\frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k}\Big|_{|y|=\infty} = 0;\ k = 0,1;\ j = \overline{1, n+1} \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1\right)\tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k} = 0;\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{14}$$

До задачі (10)-(14) застосуємо перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної y [16]:

$$F_y\left[g(y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-isy} dy \equiv \tilde{g}(s), \tag{15}$$

$$F_y^{-1}\left[\tilde{g}(s)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(s)\, e^{isy} ds \equiv g(y), \tag{16}$$

$$F_y\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right] = -s^2 F_y\left[g(y)\right] \equiv -s^2 \tilde{g}(s). \tag{17}$$

Інтегральний оператор F_y за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \left\{(t,z)\,\middle|\, t>0; z \in I_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_j}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{T}}_j}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2\right)\tilde{\tilde{T}}_j = \tilde{\tilde{f}}_j(t,\sigma,s,z); z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1} \tag{18}$$

з початковими умовами $\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s,z); z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}$, (19)

крайовими умовами $\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{\tilde{T}}_1\Big|_{z=l_0} = \tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s)$; $\frac{\partial^p \tilde{\tilde{T}}_{n+1}}{\partial z^p}\Big|_{z=+\infty} = 0;\ p = 0,1$ (20)

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1\right)\tilde{\tilde{T}}_k - \tilde{\tilde{T}}_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k} = 0;\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{21}$$

До задачі (18)-(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $z \ge l_0 \ge 0$ з n точками спряження щодо змінної z [5]:

$$F_{n,+}\left[g(z)\right] = \int_{l_0}^{+\infty} g(z)\, V(z,\beta)\, \sigma(z)\, dz \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{22}$$

$$F_{n,+}^{-1}\left[\tilde{g}(\beta)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \tilde{g}(\beta)\, V(z,\beta)\, \Omega_n(\beta)\, d\beta \equiv g(z), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} F_{n,+}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \theta\left(z - l_{j-1}\right)\theta\left(l_j - z\right)\frac{d^2 g}{dz^2} + a_{n+1}^2 \theta\left(z - l_n\right)\frac{d^2 g}{dz^2}\right] \equiv \\ \equiv \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} \frac{d^2 g}{dz^2} V_j(z,\beta)\,\sigma_j dz = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \\ -\sigma_1 a_1^2 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(l_0,\beta)\left(\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g\right)\Big|_{z=l_0} - \sum_{j=1}^{n+1} k_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} g(z) V_j(z,\beta)\,\sigma_j dz. \end{gathered} \tag{24}$$

У рівностях (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\beta)=\sum_{k=1}^{n}V_k(z,\beta)\,\theta(z-l_{k-1})\,\theta(l_k-z)+V_{n+1}(z,\beta)\,\theta(z-l_n);$$

$$\sigma(z)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\theta(z-l_{k-1})\theta(l_k-z)+\sigma_{n+1}\theta(z-l_n);$$

$$V_m(z,\beta)=\prod_{j=m}^{n}c_{2j}q_{n+1}(\beta^2)\,G_m(z,\beta);\ m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\beta)=\omega_{n2}(\beta)\cos\Big(q_{n+1}(\beta^2)z\Big)-\omega_{n1}(\beta)\sin\Big(q_{n+1}(\beta^2)z\Big);$$

$$\sigma_k=\prod_{j=k}^{n}\frac{c_{1j}a_{n+1}}{c_{2j}a_k^2};\ \sigma_n=\frac{c_{1n}a_{n+1}}{c_{2n}a_n^2};\ \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}};$$

$$G_k(z,\beta)=\omega_{k-1,2}(\beta)\cos\Big(q_k(\beta^2)z\Big)-\omega_{k-1,1}(\beta)\sin\Big(q_k(\beta^2)z\Big);\ k=\overline{1,n};$$

$$q_j(\beta^2)=a_j^{-1}\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2};\ j=\overline{1,n+1};\ b_j(\beta^2)=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2};\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\omega_{01}(q_1l_0)=-\nu_{11}^{01}(q_1l_0);\ \omega_{02}(q_1l_0)=-\nu_{11}^{02}(q_1l_0);$$

$$\omega_{jm}(\beta)=\omega_{j-1,2}(\beta)\psi_{1m}^{j}(q_jl_j;q_{j+1}l_j)-\omega_{j-1,1}(\beta)\psi_{2m}^{j}(q_jl_j;q_{j+1}l_j);$$

$$\psi_{jm}^{k}(q_kl_k;q_{k+1}l_k)=\nu_{11}^{kj}(q_kl_k)\nu_{22}^{km}(q_{k+1}l_k)-\nu_{21}^{kj}(q_kl_k)\nu_{12}^{km}(q_{k+1}l_k);$$

$$\nu_{ij}^{k1}(q_sl_m)=-\alpha_{ij}^{k}q_s\sin(q_sl_m)+\beta_{ij}^{k}\cos(q_sl_m);\ i,\ j=1,2;\ k=\overline{1,n};$$

$$\nu_{ij}^{k2}(q_sl_m)=\alpha_{ij}^{k}q_s\cos(q_sl_m)+\beta_{ij}^{k}\sin(q_sl_m);\ s=\overline{1,n+1};\ m=\overline{1,n+1};$$

$$\alpha_{11}^{k}=R_k;\ \beta_{11}^{k}=1;\ \alpha_{12}^{k}=0;\ \beta_{12}^{k}=1;$$

$$\alpha_{21}^{k}=\nu_k;\ \beta_{21}^{k}=0;\ \alpha_{22}^{k}=\nu_{k+1};\ \beta_{22}^{k}=0;$$

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k}-\alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}\neq 0;\ i,\ j=1,2;\ k=\overline{1,n};$$

$$\omega_n(\beta)=\left[\omega_{n1}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{n2}(\beta)\right]^2;\ \Omega_n(\beta)=\frac{\beta}{b_{n+1}(\beta^2)\,\omega_n(\beta)},$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [18].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-a_1^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+q_1^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_1(t,\sigma,s,z)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-a_2^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+q_2^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_2(t,\sigma,s,z)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-a_{n+1}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+q_{n+1}^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_{n+1}(t,\sigma,s,z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{f}}_1(t,\sigma,s,z)\\ \tilde{\tilde{f}}_2(t,\sigma,s,z)\\ \dots\dots\\ \tilde{\tilde{f}}_{n+1}(t,\sigma,s,z)\end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\left.\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{T}}_1(t,\sigma,s,z)\\ \tilde{\tilde{T}}_2(t,\sigma,s,z)\\ \dots\dots\\ \tilde{\tilde{T}}_{n+1}(t,\sigma,s,z)\end{bmatrix}\right\|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{g}}_1(\sigma,s,z)\\ \tilde{\tilde{g}}_2(\sigma,s,z)\\ \dots\dots\\ \tilde{\tilde{g}}_{n+1}(\sigma,s,z)\end{bmatrix}, \tag{26}$$

де

$$q_j^2(\sigma,s)=a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2;\ a_j^2\equiv a_{zj}^2;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Інтегральний оператор $F_{n,+}$, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{n,+}[...]=\left[\int_{l_0}^{l_1}...V_1(z,\beta)\sigma_1 dz\int_{l_1}^{l_2}...V_2(z,\beta)\sigma_2 dz...\int_{l_n}^{+\infty}...V_{n+1}(z,\beta)\sigma_{n+1}dz\right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26).

Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt}+\beta^2+q_j^2(\sigma,s)+k_i^2\right)\tilde{\tilde{\tilde{T}}}=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_j-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s), \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{g}}}_j, \quad (29)$$

де

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j\equiv\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(t,\sigma,s,\beta)=\int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_j\equiv\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_j(t,\sigma,s,\beta)=\int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{\tilde{f}}_j(t,\sigma,s,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{g}}}_j\equiv\tilde{\tilde{\tilde{g}}}_j(\sigma,s,\beta)=\int_{l_{j-1}}^{lj}\tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2,...,q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$ і покладемо всюди $k_j^2=q_1^2-q_j^2\,(j=\overline{1,n+1})$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{\tilde{\tilde{T}}}}{dt}+\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)\tilde{\tilde{\tilde{T}}}=\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(t,\sigma,s,\beta)- \quad (30)$$

$$-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s),$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{\tilde{g}}}(\sigma,s,\beta), \quad (31)$$

де

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(t,\sigma,s,\beta),\ \tilde{\tilde{\tilde{f}}}(t,\sigma,s,\beta)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_j(t,\sigma,s,\beta),\ \tilde{\tilde{\tilde{g}}}(\sigma,s,\beta)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{g}}}_j(\sigma,s,\beta).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв’язком (30), (31) є функція

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta)=\int_0^t\exp\left[-\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\left[\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(\tau,\sigma,s,\beta)-\sigma_1 a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s)+\delta_+(\tau)\tilde{\tilde{\tilde{g}}}(\sigma,s,\beta)\right]d\tau. \quad (32)$$

де $\delta_+(\tau)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $\tau=+0$ [18].

Оскільки суперпозиція операторів $F_{n,+}$ та $F_{n,+}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $F_{n,+}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{n,+}^{-1}[...]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}...V_1(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}...V_2(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}...V_{n+1}(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta\end{bmatrix}. \quad (33)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець

(33) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (18)-(21):

$$\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)=\int_0^t\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times$$
$$\times\left[\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(t,\sigma,s,\beta)-\sigma_1a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s)+\delta_+(\tau)\tilde{\tilde{\tilde{g}}}(\sigma,s,\beta)\right]\times \tag{34}$$
$$\times V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta d\tau.$$

До функцій $\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)$ послідовно застосуємо обернені оператори F_y^{-1}за правилом (16) та F_x^{-1} за правилом (8). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$T_j(t,x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\times$$
$$\times[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)+\delta_+(\tau)g_k(\xi,\eta,\zeta)]\sigma_kd\xi d\eta d\zeta d\tau+ \tag{35}$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_j(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в середовищі.

У формулах (35) беруть участь компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{2}{\pi^3}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)t\right]\times$$
$$\times V_j(z,\beta)V_k(\zeta,\beta)\Omega_n(\beta)\cos(|x-\xi|\sigma)\cos(|y-\eta|s)d\sigma ds d\beta;\ j,k=\overline{1,n+1} \tag{36}$$

та компоненти аплікатної матриці Гріна

$$W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_1a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{j1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0) \tag{37}$$

параболічної початково-крайової задачі (1) - (6).

Відомо [17], що $\int_0^{+\infty}\exp\left(-\alpha^2x^2\right)\cos(\beta x)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$.

Отже, формула (36) набуває вигляду

$$E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{\exp(-\chi_1^2t)}{2\pi^2a_{x1}a_{y1}t}\exp\left[-\frac{a_{y1}^2(x-\xi)^2+a_{x1}^2(y-\eta)^2}{4a_{x1}^2a_{y1}^2t}\right]\times$$
$$\times\int_0^{+\infty}\exp(-\beta^2t)V_j(z,\beta)V_k(\zeta,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta;\ j,k=\overline{1,n+1}.$$

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2=a_{yi}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2\geq 0$ формули (35) визначають структуру нестаціонарного температурного в ізотропному напівобмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k = 0\left(k=\overline{1,n}\right)$ безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадках здійснення на всіх площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхні $z = l_0$ крайової умови 1-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1, \quad g_0(t,x,y) = \alpha_{11}^0 T_0(t,x,y)\right)$, 2-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0\right)$ та 3-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv h > 0\right)$.

Зауваження 5. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,x,y,z), g_j(x,y,z)\left(j=\overline{1,n+1}\right)$ та $g_0(t,x,y)$ проводиться безпосередньо.

2. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(-\infty;+\infty)\times(0;+\infty)\times\left\{z \in I_n^+\right\}$.

Розглянемо область $\Omega_2 = (-\infty;+\infty)\times(0;+\infty)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови (5) щодо змінної *x* та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right)T_j\bigg|_{y=0} = P_j(t,x,z);\ \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\bigg|_{y=+\infty} = 0; k = 0,1;\ j=\overline{1,n+1} \tag{38}$$

щодо змінної *y*, де $h \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$;

$P_j(t,x,z) = hT_j^c(t,x,z)$, $T_j^c(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y = 0$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(5), (38) виконуються умови узгодженості:

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)g_1\bigg|_{z=l0} = g_0(0,x,y);\ \frac{\partial^p T_{n+1}}{\partial z^p}\bigg|_{z=+\infty} = 0,\ p = 0,1;$$

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \dfrac{\partial}{\partial z} + 1\right)g_k - g_{k+1}\right]\bigg|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \dfrac{\partial g_k}{\partial z} - \nu_{k+1}\dfrac{\partial g_{k+1}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=l_k} = 0; k=\overline{1,n}; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^k g_j}{\partial x^k}\bigg|_{|x|=\infty} = 0;\ \left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right)g_j\bigg|_{y=0} = P_j(0,x,z);\ \frac{\partial^k g_j}{\partial y^k}\bigg|_{y=+\infty} = 0;\ k = 0,1;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(5), (38) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених інтегральних перетворень [16, 19, 5].

До задачі (1)-(5), (38) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної *x*. Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(5), (38) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \left\{(t,y,z)\middle| t>0; y\in(0;+\infty); z \in I_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (10) з умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами $\left(-\dfrac{\partial}{\partial y} + h\right)\tilde{T}_j\bigg|_{y=0} = \tilde{P}_j(t,\sigma,z);\ \dfrac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k}\bigg|_{y=+\infty} = 0;\ k = 0,1;\ j=\overline{1,n+1}$ (39)

та умовами спряження (14).

До задачі (10)-(12), (39), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної *y* [19]:

$$F_{+y}\left[g(y)\right] = \int_0^{+\infty} g(y)K_y(y,s)dy \equiv \tilde{g}(s), \tag{40}$$

$$F_{+y}^{-1}\left[\tilde{g}(s)\right] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(s)K_y(y,s)ds \equiv g(y), \tag{41}$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2\tilde{g}(s)+K_y(0,s)\left(-\frac{dg}{dy}+hg\right)\Bigg|_{y=0}, \tag{42}$$

де ядро перетворення: $K_y(y,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s\cos(sy)+h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}$.

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (40) внаслідок тотожності (42) початково-крайовій задачі (10)-(12), (39), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\{(t,z)|t>0;z\in I_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи рівнянь: $\frac{\partial\tilde{\tilde{T}}_j}{\partial t}-a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde{\tilde{T}}_j}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2\right)\tilde{\tilde{T}}_j=\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}$ (43)
з початковими умовами (19), крайовими умовами (20) та умовами спряження (21), де: $\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z)=\tilde{\tilde{f}}_j(t,\sigma,s,z)+a_{yj}^2K_y(0,s)\tilde{P}_j(t,\sigma,z);\ j=\overline{1,n+1}$.

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (43), (19)-(21) співпадає із задачею (18)-(21). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі $z\ge l_0\ge 0$ з n точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (43), (19)-(21) відповідно до формул (34) визначають функції

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)=\int_0^t\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times\\ \times\left[\tilde{\tilde{F}}(t,\sigma,s,\beta)-\sigma_1a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s)+\delta_+(\tau)\tilde{\tilde{\tilde{g}}}(\sigma,s,\beta)\right]\times\\ \times V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta d\tau.\end{aligned} \tag{44}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)$, визначених формулами (44), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_x^{-1}, одержуємо функції

$$\begin{aligned}T_j(t,x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\times\\ \times\left[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)+\delta_+(\tau)g_k(\xi,\eta,\zeta)\right]\sigma_kd\xi d\eta d\zeta d\tau+\\ +\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}W_j(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau+\\ +a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yjk}(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)P_k(\tau,\xi,\zeta)\sigma_kd\xi d\zeta d\tau;\ j=\overline{1,n+1},\end{aligned} \tag{45}$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (45) беруть участь компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned}E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)t\right]\times\\ \times V_j(z,\beta)V_k(\zeta,\beta)\Omega_n(\beta)\cos(|x-\xi|\sigma)K_y(y,s)K(\eta,s)d\sigma dsd\beta,\end{aligned} \tag{46}$$

компоненти аплікатної матриці Гріна

$$W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_1a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{j1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0) \tag{47}$$

та компоненти ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}(t,x,\xi,y,z,\zeta)=E_{jk}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta) \tag{48}$$

параболічної початково-крайової задачі (1)-(5), (38).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{yjk}(t,x,\xi,y,z,\zeta)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (45), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (38) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (45) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхні $y=0$ крайових умов 1-го роду $(h\to\infty)$ та 2-го роду $(h\to 0)$; 3) аналіз розв'язку (45) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,x,y,z)$, $g_j(x,y,z)$, $P_j(t,x,z)$ ($j=\overline{1,n+1}$) та $g_0(t,x,y)$ проводиться безпосередньо.

Список використаних джерел

1. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
5. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
6. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
7. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
8. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.
9. Громик А.П., Конет І.М. Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2007. – Вип.15. – С. 67-82.
10. Громик А.П., Конет І.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2008. – Вип.16. – С.100-118.
11. Конет І.М., Ленюк М.П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2008. – Вип.16. – С. 118-134.
12. Громик А.П., Конет І.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2008. – Вип.17. – С. 118-134.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
14. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
15. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 5І7 с.
16. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 668 с.
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
18. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
19. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).

The method of fundamental functions and functions of Grina (main decisions) is build the integral images of exact analytical decisions of algorithmic character of variables tasks of theory of heat conductivity in spatial environments. For the construction of main decisions the proper integral transformations of Fur'e are attracted for homogeneous environments and transformation of Fur'e on cartesian half of wasp with the n points of interface.

Key words: *equalization of heat conductivity, initial and regional conditions, terms of interface, integral transformations, main upshots.*

УДК 372.853.53; 618

О.М.Кух, викладач

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ІНТЕРАКТИВНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ ДИДАКТИКИ ФІЗИКИ

У статті подається обґрунтування інтерактивної технології навчання дидактики фізики у вищому навчальному закладі через найбільш поширені групові форми організації навчального процесу.

Ключові слова: *інтерактивна технологія, співробітництво, кооперація, структура.*

Розвиток науки і техніки дав викладачам та студентам нові форми комунікації, нові типи вирішення абстрактних і конкретних завдань, перетворюючи викладача з авторитарного транслятора готових ідей у натхненника інтелектуального та творчого потенціалу студента. Майбутнє за системою навчання, що вкладалася б у схему *студент — технологія — викладач,* за якої викладач перетворюється на педагога — методолога, технолога, а студент стає активним учасником процесу навчання. Педагогічна майстерність сучасного викладача фізики має розвиватись «*не через забезпечення його великою кількістю рецептурних посібників і широке використання ним готових поурочних розробок. Йому потрібні передусім фундаментальні знання з базового предмета, висока загальна культура і ґрунтовна дидактична компетентність*» [3, с.23].

Ще на початку 20-х рр. минулого століття у працях відомих педагогів (Павлов І. П., Ухтомський А. А., Шацький С. Т., Бехтерєв В. М.) з'являються терміни «*педагогічна технологія*» та «*педагогічна техніка*». Педагогічна техніка визначалась у педагогічній енциклопедії 30-х рр. як сукупність прийомів і засобів, спрямованих на чітку й ефективну організацію навчальних занять. Минуло майже сто років відтоді, а в сучасній педагогічній літературі й досі не існує єдиних, вичерпних, уніфікованих визначень понять освітні, педагогічні, навчальні технології. Деякі дослідники[4, 5] нараховують близько 300 трактувань цих термінів, що різняться не лише за формою, а й за змістом, який у них вкладається. Одні науковці розуміють під терміном «технологія»[4, с.34] управління педагогічними процесами, інші [6] — способи організації діяльності учнів, різноманітні методи та прийоми досягнення педагогом навчальної мети тощо.

Звернення до історії розвитку виробництва дає підстави припустити, що розвиток будь-якої галузі *діяльності* людини відбувається за такою схемою:

Випадковий досвід – Ремесло – Технологія

Ми бачимо, що виготовлення будь-якого продукту проходить кілька етапів, починаючи від перших, невмілих спроб і закінчуючи певним, добре продуманим способом виробництва з використанням технічних чи якихось інших засобів виробництва під керівництвом людини.

Можна припустити, що відмінність між технологією і методикою в сфері дидактики фізики полягає в тому ж, в чому відмінність між технологією й ремісництвом у виробничій сфері. Тобто це відмінність між високопродуктивним машинним виробництвом і порівняно низькоефективною ручною працею.

Технологія походить від грецьких слів *techne* — мистецтво, майстерність та *logos* — навчати. В буквальному перекладі «*педагогічна технологія*» означає вчення про педагогічну майстерність. У процесуальному розумінні технологія дає відповідь на запитання *«Як зробити (з чого та якими засобами)?»*

Процес навчання, побудований на основі методики, можна подати у вигляді такої схеми:

Організація діяльності студентів – Контроль

Процес навчання, побудований за технологічними принципами.

Блок мотивації і організації студентів – Дія засобів навчання – Блок контролю якості засвоєння

Оскільки згідно з цією схемою в технології навчання важливу й провідну роль відіграють засоби навчання, розглянемо зміст цього поняття. В сучасній педагогічній науці все частіше зустрічаються визначення засобів навчання не в вузькому їх розумінні (матеріальні засоби-інструменти), а більш широко. Так П.І. Підкатистий розуміє під засобом навчання матеріальний чи ідеальний об'єкт, який використовується учителем чи учнем для засвоєння знань[5, с. 42]. С. А. Смирнов[7, с.253] поділяє засоби навчання на:

матеріальні (підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали, книги-першоджерела, тестовий матеріал, засоби наочності, технічні засоби навчання, лабораторне обладнання);

ідеальні (усне й письмове мовлення, нотна грамота, математичний апарат, музика, живопис, навчальні комп'ютерні програми, організуюча й координуюча діяльність учителя, загальна культура вчителя, методи навчання й форми організації навчальної діяльності учнів тощо).

На думку деяких дослідників, технологію від методики відрізняють «*два принципових моменти: гарантія кінцевого результату й проектування майбутнього навчального процесу. Педагогічна технологія — набір процедур, які поновлюють професійну діяльність учителя і гарантують кінцевий запланований результат*»[3, с 56]. Окрім того, за технологічного навчання відсутні безліч «*якщо*»: якщо талановитий викладач, талановиті діти, багатий ВНЗ. «*Методика виникає в результаті узагальнення досвіду або впровадження нових засобів. Технологія ж проектується, виходячи з конкретних умов, та орієнтується на заданий, а не на передбачуваний результат*» [4, с.24] Технологія, на відміну від методик, не допускає варіативності, з неї не можна викинути якісь елементи. Технологічний підхід не допускає пошукової діяльності, проб, тут не може бути помилок. Для технологічного навчання обов'язковим є постійний зворотний зв'язок, внесення виправлення та змін у подальшу діяльність. Таким чином, до наведеної вище схеми можна додати ще один елемент.

Планування результатів – Блок мотивації й організації студентів - *Дія засобів навчання (процес навчання) – Блок контролю якості засвоєння*

Оскільки певне розведення термінів «*педагогічна технологія*» та «*технологія навчання*» важливе для розуміння суті запропонованого нами підходу, спробуємо означити ці поняття.

У глосарії термінів ЮНЕСКО поняття «*педагогічна технологія*» трактується як конструювання та оцінювання освітніх процесів шляхом врахування людських, часових та інших ресурсів для досягнення ефективності освіти. Педагогічна технологія дає відповідь на запитання, як, яким чином (методами, прийомами, засобами) досягти поставленої педагогічної мети, установлюючи порядок використання різноманітних моделей навчання. Таким чином, технологія — це комплекс, що складається з:

- запланованих результатів;

• засобів оцінки для корекції та вибору оптимальних методів, прийомів навчання, оптимальних для даної конкретної ситуації;

• набору моделей навчання, розроблених викладачем на цій основі.

Розглянемо ці компоненти ґрунтовніше.

І. Для *планування результатів* застосовують рівневий підхід. Рівнів планування результатів може бути скільки завгодно. Основних, згідно з теорією розвивального навчання Л. С. Виготського, три: 1) орієнтація на випадкові одиничні ознаки (пізнавання, згадування) — мінімальний рівень (уповільнений); 2) орієнтація на локальні ознаки (зіставлення, порівняння) — загальний (оптимальний); 3) орієнтація на глобальні ознаки та властивості (перенесення знань на нову ситуацію) — прискорений рівень планування результатів.

Технологія має містити критерії для оцінки стану студентів, вибору моделі навчання. Модель — найкоротший шлях від початкових умов до запланованих результатів. В основі моделі — комплекс методів і засобів навчання.

Технологія навчання відображає шлях освоєння конкретного навчального матеріалу в межах педагогічної технології. Деякі дослідники називають її ще й дидактичною технологією[3].

Будь-яка педагогічна технологія повинна відповідати основним критеріям технологічності:

системності (наявність логіки процесу, взаємозв'язку частин, цілісність);

керованості можливість діагностики досягнення цілей, планування процесу навчання);

ефективності (технологія повинна вибиратись відповідно до результатів і оптимальних затрат, гарантувати досягнення певного стандарту навчання);

відтворюваності (можливості застосування в інших однотипних навчальних закладах іншими суб'єктами).

Виходячи з усього сказаного вище, будемо надалі говорити про інтерактивну модель навчально-виховного процесу, яка передбачає використання інтерактивних технологій за різних форм організації навчання.

Якщо спробувати дати визначення поняття інтерактивна технологія навчання, то — це така організація навчального процесу, за якої неможлива неучасть студента у колективному взаємодоповнюючому, заснованому на взаємодії всіх його учасників процесі навчального пізнання: або кожен студент має конкретне завдання, за яке він повинен публічно прозвітуватись, або від його діяльності залежить якість виконання поставленого перед групою завдання. Інтерактивні технології навчання включають в себе чітко спланований очікуваний результат навчання, окремі інтерактивні методи і прийоми, що стимулюють процес пізнання, та розумові і навчальні умови й процедури, за допомогою яких можна досягти запланованих результатів.

На відміну від методик, інтерактивні навчальні технології не вибираються для виконання певних навчальних завдань, а самою своєю структурою визначають кінцевий результат.

Групова (фронтальна) форма організації навчальної діяльності студентів передбачає навчання однією людиною (здебільшого викладачем) групи студентів. За такої організації навчальної діяльності кількість слухачів завжди більша, ніж тих, хто говорить. Усі студенти в кожен момент часу працюють разом чи індивідуально над одним завданням із наступним контролем результатів.

Колективна (кооперативна) форма навчальної діяльності студентів — це форма організації навчання у малих групах, об'єднаних спільною навчальною метою. За такої організації навчання вчитель керує роботою кожного учня опосередковано, через завдання, якими він спрямовує діяльність групи. Кооперативне навчання відкриває для учнів можливості співпраці зі своїми ровесниками, дозволяє реалізувати природне прагнення кожної людини до спілкування, сприяє досягненню учнями високих результатів засвоєння знань та формування вмінь. Така модель легко й ефективно поєднується з традиційними формами і методами навчання і може застосовуватися на різних етапах навчання.

Абрахам Маслоу твердить, що в людини переважають дві потреби — потреба до постійного росту й потреба бути в безпеці. Людина, яка повинна вибрати між цими двома потребами, обирає потребу в безпеці. Потребу бути в безпеці необхідно задовольняти скоріше, ніж потребу в особистісному зростанні, у відкритті нового. Згідно з Маслоу, зростання відбувається невеликими «*кроками*», і «*кожен крок уперед можливий лише тоді, коли забезпечується почуття безпеки, коли рух у невідоме відбувається із безпечного домашнього порту*»[2, с.34].

Один із найважливіших способів досягнення безпеки — це поєднатися з іншими людьми, залучитися до групи. Почуття групової належності дає студентам змогу подолати труднощі, які постають на їхньому шляху. Коли студенти навчаються разом з іншими, вони відчувають істотну емоційну та інтелектуальну підтримку, яка дає їм можливість вийти далеко за рамки їх нинішнього рівня знань і вмінь.

Джером Брюннер визначив соціальний бік навчання: «*Людина повинна відповідати за інших, діяти разом у напрямку досягнення мети*». Це він називає взаємодією. Брюннер вважає взаємодію основою активного навчання: «*Де необхідні спільні дії, де потрібна взаємодія, щоб досягти поставлених групових цілей, відбувається процес залучення індивіда до навчання, вироблення компетентності, яка необхідна для групи*»[1, с.23].

Концепції Маслоу та Брюннера лежать в основі розробки методів спільного кооперативного навчання (ґрунтуються на колективних формах організації навчальної діяльності студентів), таких популярних нині в освітніх колах США.

Загальногрупову роботу, яка поширена в сучасній українській вищій школі, не можна назвати колективною перш за все тому, що при загальногруповій роботі студенти не мають спільної .мети. Адже викладач ставить перед дітьми не спільну, а однакову для всіх мету. Внаслідок цього в студентів виробляється ставлення до навчальної діяльності не як до спільної і творчої праці, а як до чогось індивідуального й обов'язкового. Діяльність, спрямована на досягнення спільної мети, об'єднує, а однакової — викликає конкуренцію, змагання.

Спільну мету легко відрізнити від однакової для всіх. Якщо завдання, поставлене викладачем, може виконати кожен учень самостійно, то така мета однакова для всіх. А якщо за певний, вказаний проміжок часу завдання можуть виконати лише всі учні спільними зусиллями, то така мета є спільною. Одна людина досягти її не в змозі.

Навчальна мета може бути спільною в тому випадку, коли в ході навчання, окрім засвоєння нових знань, умінь і навичок, група студентів навчає кожного свого члена. Це передбачає систематичну участь кожного студента в навчанні всіх.

На традиційному уроці найчастіше використовують групову (фронтальну) форму організації навчальної діяльності учнів. Усі спроби осучаснити лекційно-практичну систему, позбавити її притаманних їй недоліків були пов'язані з використанням у рамках заняття ще й парної та колективної форм.

Співробітництво (кооперація) — це спільна діяльність для досягнення загальних цілей. У межах спільної діяльності індивідууми прагнуть одержати результати, що є вигідними для них самих і для всіх інших членів групи. Кооперативним навчанням називається такий варіант його організації, за якого студенти працюють у невеликих групах, щоб забезпечити найбільш ефективний навчальний процес для себе і своїх товаришів. Ідея проста. Одержавши інструкції від викладача, студенти об'єднуються в невеликі групи. Потім вони виконують отримане завдання — доти, поки всі члени групи не зрозуміють і не виконають його успішно. Спільні зусилля приводять до того, що всі члени групи прагнуть до взаємної вигоди.

У результаті виграють усі («*Твій успіх іде на користь мені, а мій — на користь тобі*»), студенти усвідомлюють, що всі члени групи приречені на загальну долю («*Або ми потонемо, або випливемо, але — разом*»). Успіхи кожного визначаються не тільки ним самим, а й зусиллями його товаришів («*Ми не можемо обійтися без тебе*»). Усі члени групи пишаються успіхами один одного і разом святкують перемогу, коли один із членів групи удостоюється похвали за особливі досягнення («*Ми всі поздоровляємо тебе з успіхом!*»). У ситуаціях кооперативного навчання існує позитивна взаємозалежність цілей, що досягаються учнями: вони розуміють, що можуть досягти свої особистих цілей тільки за умови, що їхні товариші по групі також досягнуть успіху.

Успіх члена команди при презентації результатів дослідження групою якоїсь теми, наприклад «Політехнічність навчання фізики» , залежить як від його особистих зусиль, так і від внеску інших членів групи, що допомагають йому знаннями, уміннями і практичними можливостями. Жоден член групи наодинці не має всієї інформації, уміння чи можливості, необхідних для того, щоб забезпечити успіх групової діяльності.

Навчальні цілі учнів можуть бути структуровані по-різному: одні стимулюють спільні зусилля, другі — конкуренцію, треті — тільки зусилля окремої особистості. На відміну від ситуації кооперативного навчання, ситуація конкуренції виникає, коли учні змагаються один з одним, щоб досягти мети, що насправді досяжна тільки для одного чи кількох студентів. У конкуренції присутня негативна взаємозалежність між цілями, що досягаються. Студенти розуміють, що вони досягають свої цілей тільки за умови, що інші студенти групи зазнають невдачі. Здійснюється нормативна оцінка власних досягнень. У підсумку — студенти або ретельно працюють, щоб перемогти інших одногрупників, або, махнувши рукою, відступають, оскільки не вірять, що в них є шанс на перемогу. В індивідуалістській навчальній ситуації, студенти трудяться поодинці, щоб досягти цілей, що ніяк не співвідносяться з цілями одногрупників. Цілі, до яких прагнуть студенти, незалежні одна від одної. Студенти розуміють, що їхні успіхи ніякою мірою не залежать від діяльності товаришів. Як результат вони зосереджуються винятково на власних інтересах і персональному успіху, а успіхи і невдачі інших ігнорують як те, що не має ніякого значення.

Зарубіжні дослідження кооперативного, конкурентного й індивідуального навчання мають довгу історію і, безсумнівно, вказують на те, що співробітництво, порівняно з конкуренцією й індивідуальними зусиллями, приводить до:

а) більш високих досягнень і більшої продуктивності;

б) більш турботливих, чуйних і відданих взаємин;

в) більшого психологічного здоров'я дітей, соціальної компетентності і самоповаги.

Позитивний ефект, що має співробітництво для досягнення багатьох важливих результатів, робить кооперативне навчання одним з найбільш цінних інструментів в арсеналі педагога.

Педагоги самі себе обманюють, якщо думають, що добрих намірів і відповідних вказівок, типу «*працюйте разом*», «*співробітничайте*» і «*будьте єдиним колективом*», буде досить, щоб члени групи дійсно почали працювати спільно. Об'єднавши студентів у групи і поставивши їм завдання працювати разом, не можна розраховувати, що це само собою приведе до спільної діяльності. Не всі групи є групами співробітництва. Об'єднання в групи цілком може закінчитися конкуренцією, причому в тісному просторі, або приведе до окремої, індивідуальної діяльності, що перемежовується з розмовами. Організувати урок таким чином, щоб учні дійсно працювали в режимі співробітництва, можна лише розуміючи, які компоненти запускають механізм співробітництва.

Оволодіння суттєвими компонентами співробітництва дає можливість:

- застосовувати кооперативне навчання за умов роботи за діючими навчальними програмами в межах звичайних навчальних курсів;
- перебудовувати заняття, вже побудовані на принципах кооперативного навчання, таким чином, щоб вони відповідали даній навчальній ситуації і дозволяли корегувати недоліки навчальних програм та недостатній пізнавальний рівень студентів;
- діагностувати проблеми, що можуть виникнути в студентів при кооперативному навчанні, і втручатися, щоб збільшити ефективність навчання в групі.

Суттєвими компонентами співробітництва є: позитивна взаємозалежність; особистісна взаємодія, що стимулює діяльність; індивідуальна і групова підзвітність; навички міжособистісного спілкування і спілкування в невеликих групах; обробка даних про роботу групи. Структурне систематичне включення цих основних елементів у ситуацію навчання дозволяє сподіватися, що група буде застосовувати саме спільні зусилля і що удасться дисципліновано впровадити кооперативне навчання — успішно і надовго.

<u>Перший</u> і найважливіший елемент при структуруванні кооперативного навчання — *позитивна взаємозалежність,* її можна вважати успішно вибудованою, коли члени групи розуміють, що вони пов'язані один з одним такою мірою, що один не може бути успішним, якщо не будуть успішними усі. Отже, групові цілі і завдання варто розробляти і повідомляти учням так, щоб вони повірили, що вони або «*потонуть*», або «*випливуть*», але тільки разом. Коли позитивна взаємозалежність вибудована міцно, для всіх стає абсолютно зрозумілим, що:

- зусилля кожного члена групи потрібні і незамінні для успіху всієї групи;
- кожен член групи вносить унікальний вклад у спільні зусилля групи завдяки його/її можливостям і/чи ролі й обов'язку при виконанні завдання.

Це породжує відданість і зацікавленість не тільки у власному успіху, а й в успіху інших членів групи, що і є суттю навчання у кооперації. Якщо немає позитивної взаємозалежності, немає і співробітництва.

<u>Другий</u> основний елемент спільного навчання — *особистісна взаємодія, що стимулює діяльність,* причому важливо, щоб учні фізично розташовувалися обличчям один до одного. Існують важливі види пізнавальної діяльності і міжособистісної динаміки, що можуть здійснитися тільки у випадку, коли студенти сприяють навчанню один одного.

Сюди належить і усне пояснення того, як вирішувати проблеми, і передача друзям власних знань, і перевірка розуміння, і обговорення досліджуваних понять, і поєднання досліджуваного матеріалу з вивченим. Кожний із цих видів діяльності може бути структурно включений у загальне русло завдань, одержуваних групою, і в процес їх виконання.

Завдяки цьому групи кооперативного навчання є одночасно системою академічної (кожен студент має когось, кому небайдужі його успіхи в навчанні, бере на себе зобов'язання з надання допомоги) й особистісної підтримки (кожен студент має когось, хто йому по-людськи відданий). Саме завдяки особистісній взаємній підтримці в процесі навчання члени групи беруть на себе зобов'язання один стосовно одного і виявляють відданість загальній справі і цілям.

Третій основний елемент спільного навчання — *індивідуальна і групова підзвітність.* Два рівні підзвітності повинні неодмінно бути структурно включені в заняття, засновані на кооперативному навчанні. Ціль кооперативного навчання в навчальних групах полягає в тому, щоб кожен член групи зміцнився, реалізувався як повноправна особистість. Учні навчаються спільно для того, щоб згодом змогли придбати велику індивідуальну компетентність.

Четвертим основним елементом спільного навчання є *розвиток навичок міжособистісного спілкування і спілкування в невеликих групах.* Спільне навчання є по своїй суті складнішим, ніж конкурентне чи індивідуальне навчання, оскільки учні повинні одночасно виконувати певне завдання (вивчення змісту навчального предмета) і робити групову роботу (ефективно функціонувати як єдина група). Оскільки співробітництво і конфлікт нерозривно пов'язані процедури, то навички конструктивного розв'язання конфліктів особливо важливі для довгострокового успіху при кооперативному навчанні.

П'ятим основним елементом кооперативного навчання є *обробка (аналіз, опрацювання) даних про роботу групи.* Таке опрацювання відбувається, коли члени групи обговорюють, наскільки успішно вони досягають свої цілей і наскільки успішно вони підтримують ефективні робочі стосунки.

Група повинна розібратися, які дії окремих її членів корисні, а які марні, і прийняти рішення про те, як варто поводитися надалі: що залишити і що змінити у своїй поведінці. Підвищення ефективності процесу навчання відбувається завдяки ретельному аналізу того, як співпрацюють члени групи, і визначенню способів поліпшення ефективності цієї роботи.

Кооперативне навчання може здійснюватись не тільки в групах, а й у парах. Взаємодія студентів у парі, порівняно з групою, має свої особливості, які позначаються на організації діяльності, але за механізмами впливу на розвиток дітей є значною мірою подібною до групової діяльності. Робота в парах застосовується і як окрема самостійна технологія навчання, і як підготовчий етап до роботи в групах, який допомагає розвинути в студентів комунікативні та інші вміння і навички.

Кооперативне навчання дає можливість всім студентам активно працювати на уроці, застосовувати на практиці уміння активного слухання, сприяє виробленню спільної думки в ситуації, менш напруженій, ніж робота у великій групі. Невимушена обстановка в малій групі сприяє розвиткові у сором'язливих студентів навичок міжособистісного спілкування. Технології кооперативного навчання вчать студентів уникати конфліктних ситуацій при вирішенні спірних питань.

Дискусії в малих групах стимулюють роботу команди Потік ідей допомагає студентам бути корисними один одному. Висловлення думок дає їм змогу відчути їхні власні ресурси та зміцнити їх.

Сутнісним є встановлення міцного контакту між викладачем і групою, а також між студентами.

Отже, основними ознаками інтерактивної кооперативної групової роботи є:

1. Поділ академгрупи на групи для досягнення конкретного навчального результату.
2. Склад групи не може бути постійним протягом тривалого часу. Він змінюється залежно від змісту і характеру навчальних завдань, що необхідно виконати.
3. Кожна група розв'язує певну проблему, визначену завданням.
4. Завдання в групі виконується таким способом, щоб можна було врахувати й оцінити індивідуальний внесок кожного члена групи й групи в цілому.

Кількість студентів у групі залежить від загальної кількості їх у академгрупі, характеру й обсягу знань, що опрацьовуються, наявності необхідних матеріалів, часу, відведеного на виконання роботи. Вона обумовлюється наданням кожному студентові можливості зробити чітко визначений внесок у виконання завдання. Оптимальною вважають групу з 3-6 осіб, тому що за меншої кількості студентів важко різнобічно розглянути проблему, а за більшої — складно врахувати, яку саме роботу виконав кожний студент.

Зі збільшенням розміру групи збільшується рівень набуття спроможності, досвіду і навичок. Проте підвищується ймовірність порушень правил поведінки, прийнятих усіма.

Об'єднання в групи може здійснюватись викладачем (здебільшого на добровільній основі, за результатами жеребкування) або самими студентами за власним вибором. Існує багато ефективних способів об'єднання студентів у групи.

В окремих випадках викладач може зберегти групу, яка вже почала працювати над проблемою, на кілька уроків у постійному складі або виділити постійно (на певний час) діючу групу експертів, спостерігачів тощо. Треба тільки пам'ятати, що демократичність інтерактивного навчання, його особистісна орієнтованість потребують обов'язкового залучення студентів до організації їхньої діяльності, тобто обговорення з ними можливого складу груп, процедур групової діяльності, її очікуваних результатів і досягнення демократичної згоди між викладачем і студентами на всіх етапах навчально-виховного процесу.

Отже, групи можуть бути гомогенними (однорідними), тобто об'єднувати студентів за певними ознаками, наприклад за рівнем знань та позаурочної інформації з предмета, або гетерогенними (різнорідними). Бажано об'єднувати в одну групу сильних, середніх і слабких студентів. У різнорідних групах стимулюється творче мислення й інтенсивний обмін ідеями.

Таким чином, використання групових форм організації діяльності студентів для вивчення дидактики фізики у рамках лекційно-практичної системи навчання дає змогу позбутися деяких її вад і є однією з умов використання інтерактивних технологій навчання.

Список використаних джерел

1. Brunner J. Toward a Theory of Instruction.— New-York — 1966.
2. Maslow A.H. Towards a psychology of being (2nd ed.)—New-York:, 1968.
3. Назарова Т. С. Педагогические технологии: новый этап эволюции // Педагогика. 1997.— С. 24.
4. Освітні технології / За заг. ред. О. М. Пєхоти.— К.,2001.— С. 21.
5. Педагогика / Под ред. Пидкатистого П. И.— М., 1998.—320 с.
6. Педагогічні технології у безперервній професійній освіті / За ред. Сисоєвої С.О.— К., 2001.— 240 с.
7. Смирнов С. А. Технология обучения — М., 2001.— 450 с.

In the article is given ground interactive technology of studies didactics of physics in higher educational establishment through the widespread groups forms of organization of educational process.

Key words*: interactive technology, collaboration, cooperation, structure.*

УДК 517.52/524:517.58/589

М.П.Ленюк, доктор фізико-математичних наук, професор,
М.І.Шинкарик, кандидат фізико-математичних наук, доцент

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ-ФУР'Є-ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ [0, R_3] ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на сегменті полярної осі з двома точками спряження для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Ейлера методом функцій Коші і методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення підсумовувано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів.

Постановка задачі. Тонкостінні елементи неоднорідної структури, як правило, працюють в короткочасному стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного силового або температурного навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що в найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим даного елемента, виражаються у вигляды поліпараметричних функціональних рядів, які можуть бути умовно збіжними навіть тоді, коли зображають аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Підсумовуванню однієї сім'ї функціональних рядів присвячена дана стаття.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);\ R_3 < \infty)\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Ейлера для модифікованих функцій

$$\begin{gathered}\left(B_{\nu,\alpha_1} - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (0, R_1),\\ \left(d^2/dr^2 - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, R_2),\\ \left(B^*_{\alpha_2} - q_3^2\right)u_3(r) = -g_3(r),\ r \in (R_2, R_3)\end{gathered} \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk},\ j, k = 1, 2 \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma}u_1(r)\right] = 0,\ \left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right)u_3(r)\Bigg|_{r=R_2} = g_R. \tag{3}$$

Будемо вважати, що виконані умови на коефіцієнти:

$$q_j > 0,\ \alpha_{jm}^k \geq 0,\ \beta_{jm}^k \geq 0,\ \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0,\ c_{1k}c_{2k} > 0,\ c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k.$$

У системі (1) беруть участь диференціальний оператор Бесселя [1] $B_{\nu,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_1+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha_1^2}{r^2}$, $\nu \geq \alpha_1 > -1/2$, диференціальний оператор Фур'є d^2/dr^2 та диференціальний оператор Ейлера [2] $B^*_{\alpha_2} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2+1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2$, $2\alpha_2 + 1 > 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1} - q_1^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя 1-го роду $I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)$ та другого роду $K_{\nu,\alpha_1}(q_1r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для модифікованого диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \mathrm{ch}\, q_2r$ та $v_2 = \mathrm{sh}\, q_2r$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} - q_3^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2 - q_3}$ и $v_2 = r^{-\alpha_2 + q_3}$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати загальний розв'язок крайової задачі (1) – (3) методом функцій Коші [2, 3]:

$$u_1(r) = A_1 I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) + \int_0^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho,$$
$$u_2(r) = A_2 \text{ch}\, q_2 r + B_2 \text{sh}\, q_2 r + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) d\rho, \qquad (4)$$
$$u_3(r) = A_3 r^{-\alpha_2-q_3} + B_3 r^{-\alpha_2+q_3} + \int_{R_2}^{R_3} E_3(r,\rho) g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho.$$

У рівностях (4) функції $E_j(r, \rho)$ – функції Коші [2, 3]:

$$E_1(r,\rho) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)}\begin{cases} I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r)\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1, q_1\rho), & 0 < r < \rho < R_1, \\ I_{\nu,\alpha_1}(q_1 \rho)\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1, q_1 r), & 0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \qquad (5)$$

$$E_2(r,\rho) = -\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}\begin{cases} \Phi^1_{12}(q_2R_1, q_2r)\Phi^2_{11}(q_2R_2, q_2\rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Phi^1_{12}(q_2R_1, q_2\rho)\Phi^2_{11}(q_2R_2, q_2r), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \qquad (6)$$

$$E_3(r,\rho) = -\frac{1}{2q_3\Delta_{\alpha_2;12}}\begin{cases} \Psi^{2*}_{\alpha_2;12}(q_3, r)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3, \rho), & R_2 < r < \rho < R_3, \\ \Psi^{2*}_{\alpha_2;12}(q_3, \rho)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3, r), & R_2 < \rho < r < R_3. \end{cases} \qquad (7)$$

У рівностях (5) – (7) беруть участь функції:

$$U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m) = \left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha_1}{R_m} + \beta^m_{jk}\right)I_{\nu,\alpha}(q_sR_m) + \alpha^m_{jk}R_m q_s^2 I_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_m),$$
$$U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m) = \left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha_1}{R_m} + \beta^m_{jk}\right)K_{\nu,\alpha}(q_sR_m) - \alpha^m_{jk}R_m q_s^2 K_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_m),$$
$$\Psi^{m*}_{\nu,\alpha_1;jk}(q_sR_m, q_sr) = U^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m)K_{\nu,\alpha}(q_sr) - U^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(q_sR_m)I_{\nu,\alpha}(q_sr),$$
$$V^{m1}_{jk}(q_2R_m) = \alpha^m_{jk}q_2\text{sh}q_2R_m + \beta^m_{jk}\text{ch}q_2R_m \equiv \left(\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr} + \beta^m_{jk}\right)\text{ch}q_2r\Big|_{r=R_m},$$
$$V^{m2}_{jk}(q_2R_m) = \alpha^m_{jk}q_2\text{ch}q_2R_m + \beta^m_{jk}\text{sh}q_2R_m \equiv \left(\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr} + \beta^m_{jk}\right)\text{sh}q_2r\Big|_{r=R_m}$$
$$\Phi^m_{jk}(q_2R_m, q_2r) = V^{m2}_{jk}(q_2R_m)\text{ch}q_2r - V^{m1}_{jk}(q_2R_m)\text{sh}q_2r,$$
$$\Delta_{jk}(q_2R_1, q_2R_2) = V^{11}_{j2}(q_2R_1)V^{22}_{k1}(q_2R_2) - V^{12}_{j2}(q_2R_1)V^{21}_{k1}(q_2R_2), \; j, k = 1, 2,$$
$$Z^{m1}_{\alpha_2;jk}(q_3, R_m) = [-\alpha^m_{jk}(\alpha_2+q_3)R_m^{-1} + \beta^m_{jk}]R_m^{-\alpha_2-q_3},$$
$$Z^{m2}_{\alpha_2;jk}(q_3, R_m) = [-\alpha^m_{jk}(\alpha_2-q_3)R_m^{-1} + \beta^m_{jk}]R_m^{-\alpha_2+q_3},$$
$$\Psi^{m*}_{\alpha_2;j2}(q_3, r) = Z^{m2}_{\alpha_2;j2}(q_3, R_m)r^{-q_3-\alpha_2} - Z^{m1}_{\alpha_2;j2}(q_3, R_m)r^{q_3-\alpha_2},$$
$$\Delta_{\alpha_2;j2}(q_3, R_2, R_3) = Z^{21}_{\alpha_2;j2}(q_3, R_2)Z^{32}_{\alpha_2;22}(q_3, R_3) - Z^{22}_{\alpha_2;j2}(q_3, R_2)Z^{31}_{\alpha_2;22}(q_3, R_3).$$

Умови спряження (2) й крайова умова в точці $r = R_3$ для визначення величин A_j ($j = \overline{1,3}$) та B_k ($k = 2, 3$) дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)A_1 - V^{11}_{12}(q_2R_1)A_2 - V^{12}_{12}(q_2R_1)B_2 = \omega_{11},$$
$$U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1)A_1 - V^{11}_{22}(q_2R_1)A_2 - V^{12}_{22}(q_2R_1)B_2 = \omega_{21} + G_{12}, \qquad (8)$$
$$V^{21}_{11}(q_2R_2)A_2 + V^{22}_{11}(q_2R_2)B_2 - Z^{21}_{\alpha_2;12}(q_3, R_2)A_3 - Z^{22}_{\alpha_2;12}(q_3, R_2)B_3 = \omega_{12},$$
$$V^{21}_{21}(q_2R_2)A_2 + V^{22}_{21}(q_2R_2)B_2 - Z^{21}_{\alpha_2;22}(q_3, R_2)A_3 - Z^{21}_{\alpha_2;22}(q_3, R_2)B_3 = \omega_{22} + G_{23}.$$

В алгебраїчній системі (8) беруть участь функції:

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_0^{R_1}\frac{I_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho)}{U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho + c_{21}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^2_{11}(q_2R_2, q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho,$$
$$G_{23} = -c_{12}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^1_{12}(q_2R_1, q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho + \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;12}(q_3, R_2, R_3)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho.$$

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_2;j}(q) = \Delta_{\alpha_2;22}(q_3,R_2,R_3)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2) - \Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{\nu,\alpha_1;j}(q) = U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2) - U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$\theta_{\nu,\alpha_1;1}(r,q) = U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)\Phi^1_{22}(q_2R_1,q_2r) - U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1)\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r),$$

$$\theta_{\alpha_2;2}(r,q) = \Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3)\Phi^2_{21}(q_2R_2,q_2r) - \Delta_{\alpha_2;22}(q_3,R_2,R_3)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1) – (3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q} = \{q_1; q_2; q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (8)

$$\Delta_{\nu,(\alpha)}(q) \equiv U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)A_{\alpha_2;2}(q) - U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1)A_{\alpha_2;1}(q) =$$
$$= B_{\nu,\alpha_1;1}(q)\Delta_{\alpha_2;22}(q_3,R_2,R_3) - B_{\nu,\alpha_1;2}(q)\Delta_{\alpha_2;12}(q_3,R_2,R_3) \neq 0. \tag{9}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1) – (3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);31}(r,q) = c_{21}q_2\frac{2q_3c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r),\ (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ q = (q_1, q_2, q_3),$$

$$W_{\nu,(\alpha);32}(r,q) = \frac{2q_3c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,\alpha_1;1}(r,q), \tag{10}$$

$$W_{\nu,(\alpha);33}(r,q) = \frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}[B_{\nu,\alpha_1;2}(q)\Psi^{2*}_{\alpha_2;12}(q_3,r) - B_{\nu,\alpha_1;1}(q)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_3,r)];$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{\nu,(\alpha);11}(r,q) = \frac{A_{\alpha_2,2}(q)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r),\quad \mathcal{R}^1_{\nu,(\alpha);21}(r,q) = -\frac{A_{\alpha_2;1}(q)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r),$$

$$\mathcal{R}^1_{\nu,(\alpha);12}(r,q) = -\frac{c_{21}q_2}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Delta_{\alpha_2;22}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r),\quad \mathcal{R}^1_{\nu,(\alpha);22}(r,q) = \frac{c_{21}q_2}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Delta_{\alpha_2;12}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r), \tag{11}$$

$$\mathcal{R}^2_{\nu,(\alpha);11}(r,q) = -\frac{U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_2;2}(r,q),\ \mathcal{R}^2_{\nu,(\alpha);21}(r,q) = \frac{U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\alpha_2;2}(r,q),$$

$$\mathcal{R}^2_{\nu,(\alpha);12}(r,q) = -\frac{\Delta_{\alpha_2;22}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}}\theta_{\nu,\alpha_1;1}(r,q),\ \mathcal{R}^2_{\nu,(\alpha);22}(r,q) = \frac{\Delta_{\alpha_2;12}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,\alpha_1;1}(r,q);$$

$$\mathcal{R}^3_{\nu,(\alpha);11}(r,q) = -c_{12}q_2\frac{U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),\ \mathcal{R}^3_{\nu,(\alpha);21}(r,q) = c_{12}q_2\frac{U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),$$

$$\mathcal{R}^3_{\nu,(\alpha);12}(r,q) = \frac{B_{\nu,\alpha_1;2}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),\ \mathcal{R}^3_{\nu,(\alpha);22}(r,q) = -\frac{B_{\nu,\alpha_1;1}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r);$$

3) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);11}(r,\rho,q) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases} I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)[A_{\alpha_2;2}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1\rho) - \\ - A_{\alpha_2;1}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1,q_1\rho)], & 0 < r < \rho < R_1, \\ I_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho)[A_{\alpha_2;2}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1r) - \\ - A_{\alpha_2;1}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1,q_1r)], & 0 < \rho < r < R_1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)\theta_{\alpha_2;2}(\rho,q),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);13}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}c_{22}q_2}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho), \tag{12}$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)\theta_{\alpha_2;2}(r,q),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_2\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases}\theta_{\nu,\alpha_1;1}(r,q)\theta_{\alpha_2;2}(\rho,q), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \theta_{\nu,\alpha_1;1}(\rho,q)\theta_{\alpha_2;2}(r,q), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}\qquad(13)$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\theta_{\nu,\alpha_1;1}(r,q)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho),\ \mathcal{H}_{\nu,(\alpha);31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}c_{12}q_2}{R_1^{2\alpha_1+1}\Delta_{\nu,(\alpha)}q)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\theta_{\nu,\alpha_1;1}(\rho,q)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_3}\begin{cases}W_{\nu,(\alpha);33}(r,q)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho), & R_2<r<\rho<R_3,\\ W_{\nu,(\alpha);33}(\rho,q)\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r), & R_2<\rho<r<R_3.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (8), підстановки одержаних значень A_j ($j=\overline{1,3}$) та B_k ($k = 2, 3$) у формули (4) й низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1) – (3):

$$u_j(r)=W_{\nu,(\alpha);3j}(r,q)g_R+\sum_{k,m=1}^{2}\mathcal{R}^{j}_{\nu,(\alpha);km}(r,q)\omega_{km}+\int_0^{R_1}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)d\rho+\int_{R_2}^{R_3}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}.\qquad(13)$$

Побудуємо тепер загальний розв'язок крайової задачі (1) – (3) методом гібридного інтегрального перетворення (ГІП), породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)\,B_{\nu,\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)d^2/dr^2+\theta(r-R_2)\,\theta(R_3-r)B^*_{\alpha_2},\qquad(14)$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

Оскільки ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений й на множині I_2 не має особливих точок, то його спектр дійсний і дискретний, йому відповідає дійсна дискретна спектральна функція.

Власні елементи (власні числа й відповідні їм власні функції ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$ знайдемо як ненульовий розв'язок спектральної задачі Штурма-Ліувілля: побудувати обмежений ненульовий розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Ейлера: $\left(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2\right)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=0$, $r\in(0,R_1)$,

$$\left(d^2/dr^2+b_2^2\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2),\ \left(B^*_{\alpha_2}+b_3^2\right)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,R_3)\qquad(15)$$

за однорідними крайовими умовами

$$\lim_{r\to0}\left[r^{\gamma}V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\right]=0,\ \left.\left(\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\beta^3_{22}\right)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\right|_{r=R_3}=0.\qquad(16)$$

та однорідними умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1}\right)V_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta)-\left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2}\right)V_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)\right]\right|_{r=R_k}=0,\ j,k=1,2.\qquad(17)$$

У рівностях (15) $b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\ \geq 0$, β – спектральний параметр, а функції $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ – компоненти спектральної вектор-функції

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\sum_{j=1}^{3}\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta),\ R_0=0.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2)v=0$ утворюють функції Бесселя $J_{\nu,\alpha_1}(b_1r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_1r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2+b_2^2)v=0$ утворюють функції $v_1=\cos b_2r$ та $v_2=\sin b_2r$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2}+b_3^2)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_2}\cos(b_3\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_2}\sin(b_3\ln r)$ [2].

Якщо покласти

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r),$$
$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2\cos(b_2 r) + B_2\sin(b_2 r), \qquad (18)$$
$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 r^{-\alpha_2}\cos(b_3\ln r) + B_3 r^{-\alpha_2}\sin(b_3\ln r),$$

то умови спряження (17) й крайова умова в точці $r = R_3$ для визначення величин A_j ($j = \overline{1,3}$) та B_k ($k = 2, 3$) дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)A_1 - v^{11}_{j2}(b_2R_1)A_2 - v^{12}_{j2}(b_2R_1)B_2 = 0,\ j = 1, 2,$$
$$v^{21}_{j1}(b_2R_1)A_2 + v^{22}_{j1}(b_2R_1)B_2 - Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)A_3 - Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)B_3 = 0, \qquad (19)$$
$$Y^{31}_{\alpha_2;22}(b_3,R_3)A_3 + Y^{32}_{\alpha_2;22}(b_3,R_3)B_3 = 0.$$

В алгебраїчній системі (19) беруть участь функції:

$$u^{11}_{\nu,\alpha;j1}(b_1R_1) = \left(\alpha^1_{j1}\frac{\nu-\alpha}{R_1} + \beta^1_{j1}\right)J_{\nu,\alpha}(b_1R_1) - \alpha^1_{j1}b_1^2R_1J_{\nu+1,\alpha+1}(b_1R_1),$$
$$v^{m1}_{j2}(b_2R_m) = -\alpha^m_{j2}b_2\sin b_2R_m + \beta^m_{j2}\cos b_2R_m,$$
$$v^{m2}_{j2}(b_2R_m) = \alpha^m_{j2}b_2\cos b_2R_m + \beta^m_{j2}\sin b_2R_m,$$
$$Y^{m1}_{\alpha_2;jk}(b_3,R_m) = [(\beta^m_{jk} - \alpha_2\alpha^m_{jk}R_m^{-1})\cos(b_3\ln R_m) - b_3R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\sin(b_3\ln R_m)]R_m^{-\alpha_2},$$
$$Y^{m2}_{\alpha_2;jk}(b_3,R_m) = [(\beta^m_{jk} - \alpha_2\alpha^m_{jk}R_m^{-1})\sin(b_3\ln R_m) + b_3R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\cos(b_3\ln R_m)]R_m^{-\alpha_2}.$$

Для того, щоб алгебраїчна система (19) мала ненульові розв'язки, необхідно й досить, щоб її визначник був рівний нулю [4]:

$$\delta_{\nu,(\alpha)}(\beta) \equiv u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)a_{\alpha_2;2}(\beta) - u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)a_{\alpha_2;1}(\beta) =$$
$$= b_{\nu,\alpha_1;1}(\beta)\delta_{\alpha_2;22}(b_3,R_2,R_3) - b_{\nu,\alpha_1;2}(\beta)\delta_{\alpha_2;12}(b_3,R_2,R_3) = 0. \qquad (20)$$

У рівностях (20) прийняті позначення:

$$\delta_{jk}(\beta) = v^{11}_{j2}(b_2R_1)v^{22}_{k1}(b_2R_2) - v^{12}_{j2}(b_2R_1)v^{21}_{k1}(b_2R_2),\ j, k = 1, 2,$$
$$\delta_{\alpha_2;j2} = Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)Y^{32}_{\alpha_2;22}(b_3,R_3) - Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)Y^{31}_{\alpha_2;22}(b_3,R_3),$$
$$a_{\alpha_2;j}(\beta) = \delta_{\alpha_2;22}(b_3,R_2,R_3)\delta_{j1}(\beta) - \delta_{\alpha_2;12}(b_3,R_2,R_3)\delta_{j2}(\beta),$$
$$b_{\nu,\alpha_1;j}(\beta) = u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)\delta_{2j}(\beta) - u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)\delta_{1j}(\beta).$$

Корені β_n трансцендентного рівняння (20) утворюють дискретний спектр ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$ [5]. Власному числу β_n відповідає власна функція $V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)$, компоненти $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)$ якої обчислюються стандартним способом [4]:

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = c_{21}b_{2n}c_{22}b_{3n}R_2^{-(2\alpha_2+1)}J_{\nu,\alpha_1}(b_1r),\ b_{jn} = (\beta_n^2 + k_j^2)^{1/2},$$
$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = c_{22}b_{3n}R_2^{-(2\alpha_2+1)}[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_1)\varphi^1_{22}(b_{2n}R_1,b_{2n}r) - u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n}R_1)\varphi^1_{12}(b_{2n}R_1,b_{2n}r)], \qquad (21)$$
$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = b_{\nu,\alpha_1;2}(\beta_n)\Psi^2_{\alpha_2;12}(b_{3n},r) - b_{\nu,\alpha_1;1}(\beta_n)\Psi^2_{\alpha_2;22}(b_{3n},r).$$

У рівностях (21) беруть участь функції:

$$\varphi^1_{j2}(b_{2n}R_1,b_{2n}r) = v^{12}_{j2}(b_{2n}R_1)\cos b_{2n}r - v^{11}_{j2}(b_{2n}R_1)\sin b_{2n}r,$$
$$\Psi^2_{\alpha_2;j2}(b_{3n},r) = Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_{3n},R_2)r^{-\alpha_2}\cos(b_{3n}\ln r) - Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_{3n},R_2)r^{-\alpha_2}\sin(b_{3n}\ln r).$$

Згідно з роботою [5] маємо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). *Корені трансцендентного рівняння (20) складають дискретний спектр ГДО* $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$: *дійсні, різні, симетричні відносно точки* $\beta = 0$ *й на півосі* $\beta > 0$ *утворюють монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою* $\beta = \infty$.

Введемо до розгляду вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1},$$

де $\sigma_1 = c_{11}c_{12}R_2^{2\alpha_2+1}(c_{21}c_{22}R_1^{2\alpha_1+1})^{-1}$, $\sigma_2 = c_{12}c_{22}^{-1}R_2^{2\alpha_2+1}$, $\sigma_3 = 1$, та квадрат норми спектральної вектор-функції

$$\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2 = \int_0^{R_3}[V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1}[V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)]^2\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}[V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)]^2\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{R_3}[V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)]^2\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr\cdot \tag{22}$$

Теорема 2 (про дискретну функцію). *Система* $\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *власних вектор-функцій ГДО* $M_{\nu,(\alpha)}$ *узагальнено ортогональна, повна та замкнена на множині* I_2*. При цьому квадрат норми власної функції обчислюється згідно формули (22).*

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). *Будь-яка вектор-функція* $g(r)$ *з області визначення ГДО* $M_{\nu,(\alpha)}$ *зображається на множині* I_2 *абсолютно й рівномірно збіжним рядом Фур'є за системою* $\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{R_3} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\,\frac{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)}{\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\right\|^2}. \tag{23}$$

Ряд Фур'є (23) визначає пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ та обернене $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ скічненне ГІП, породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n =$$

$$= \int_0^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr +$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr \equiv \tilde{g}_{1n} + \tilde{g}_{2n} + \tilde{g}_{3n} = \sum_{n=1}^{3}\tilde{g}_{kn}; \tag{24}$$

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1} \equiv g(r)\cdot \tag{25}$$

Теорема 4 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція* $f(r)$ = $\{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; g_2''(r); B^*_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ *неперервна на множин* I_2*, а функції* $g_j(r)$ *задовольняють крайові умови (3) та умови спряження (2), то має місце основна тотожність ГІП* $M_{\nu,(\alpha)}$*, визначеного рівністю (14):*

$$H_{\nu,(\alpha)}[M_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta_n^2\tilde{g}_n - \sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde{g}_{jn} + (\alpha_{22}^3)^{-1}R_3^{2\alpha_2+1}V_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)g_R +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}h_j[Z^j_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2j} - Z^j_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{1j}]\cdot \tag{26}$$

У рівності (26) прийняті позначення:

$h_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}$, $h_2 = \sigma_2 c_{12}^{-1}$, $Z^j_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n) = \left(\alpha^j_{i2}\dfrac{d}{dr} + \beta^j_{i2}\right)V_{\nu,(\alpha);j+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_j}$, $i, j = 1,2$.

Побудований методом скінченного ГІП, запровадженого формулами (24), (25), за відомою логічною схемою [5] єдиний розв'язок крайової задачі (1)–(3) має структуру:

$$u_j(r) = \int_0^{R_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);1}(\rho,\beta_n)\right)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho +$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);2}(\rho,\beta_n)\right)g_2(\rho)d\rho + \int_{R_2}^{R_3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}S_{\nu,(\alpha);}(r,\beta)\right)\text{x}$$

$$\text{x}\quad V_{\nu,(\alpha);3}(\rho,\beta_n)\ \Big)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho + \left[\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{22}^3)^{-1}V_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\right]\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}$$

$$+\sum_{m=1}^{2}h_m\left[\sum_{n=1}^{\infty}(Z^m_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\omega_{2m} - \sum_{n=1}^{\infty}Z^m_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\omega_{1m}\right], j = \overline{1,3}.$$

У рівностях (27) бере участь функція

$$S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n) = (\beta_n^2+q^2)^{-1}V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1},\ q^2 = \max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}.$$

Порівнюючи розв'язки (13) та (27) в силу єдиності, одержуємо наступні формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n) = \frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q),\ j,k=\overline{1,3}, \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{22}^3)^{-1}V_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n) = R_3^{-(2\alpha_2+1)}W_{\nu,(\alpha);3j}(r,q),\ j=\overline{1,3}, \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Z^m_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n) = h_m^{-1}\mathcal{R}^j_{\nu,(\alpha);2m}(r,q),\ m=1,2,\ j=\overline{1,3}, \tag{30}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Z^m_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)S_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n) = -h_m^{-1}\mathcal{R}^j_{\nu,(\alpha);1m}(r,q),\ m=1,2,\ j=\overline{1,3}. \tag{31}$$

Функції Гріна $W_{\nu,(\alpha);3j}(r,q)$ визначені формулами (10), функції Гріна $\mathcal{R}^j_{\nu,(\alpha);i2}(r,q)$ умов спряження визначені формулами (11), а функції $H_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q)$ – формулами (12).

Якщо $q^2 = q_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2$. При цьому $b_{1n}=\beta_n$, $b_{2n} = (\beta_n^2+q_1^2-q_2^2)^{1/2}$, $b_{3n} =$ і $(\beta_n^2+q^2)\equiv(\beta_n^2+q_1^2)$.

Якщо $q^2 = q_2^2$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2$, $k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2$. При цьому $b_{1n} = (\beta_n^2+q_2^2-q_1^2)^{1/2}$, $b_{2n}=\beta_n$, $b_{3n} = (\beta_n^2+q_2^2-q_3^2)^{1/2}$ і $(\beta_n^2+q^2)\equiv\beta_n^2+q_2^2$,.

Якщо $q^2 = q_3^2$, то $k_1^2=q_3^2-q_1^2\ge 0$, $k_2^2=q_3^2-q_2^2\ge 0$, $k_3^2=0$. При цьому $b_{1n} = (\beta_n^2+q_3^2-q_1^2)^{1/2}$, $b_{2n} = (\beta_n^2+q_3^2-q_2^2)^{1/2}$, $b_{3n}=\beta_n$ і $(\beta_n^2+q^2)\equiv\beta_n^2+q_3^2$.

Оскільки праві частини в формулах (28) – (31) не залежать від нерівності $(q_j^2-q_m^2)\ge 0$ ($j, m=\overline{1,3}$), то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q_0^2$, звужуючи при цьому сім'ю функціональних рядів.

Основна теорема. *Якщо вектор-функція $g(r)$ задовольняє умови теореми про основну тотожність і виконується умова (9) однозначної розв'язності крайової задачі (1) – (3), то мають місце формули (28) – (31) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (14).*

Висновок. Результати даної роботи поповнюють довідкову математичну літературу й можуть бути використані при підсумовуванні функціональних рядів за власними елементами ГДО, які з'являються при моделюванні фізико-технічних процесів в неоднорідних середовищах.

Список використаних джерел

1. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1982. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
5. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.

Tthe method of comparison of decisions, built on the segment of arctic a landmark with two points of interface for the separate system of the modified differential equalizations of Besselya, Furie and Euler by the method of functions Koshi and by the method of the proper eventual hybrid integral transformation summarized poliparametrichny family of functional rows.

УДК 378. 016: 53 (043. 3)

В.В.Мендерецький, доктор педагогічних наук

ПЛАНУВАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПРИ ФОРМУВАННІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ УМІНЬ МАЙБУТНЬОГО УЧИТЕЛЯ

У статті розглядається проблема впровадження цільових орієнтацій у забезпечення дієвої експериментальної підготовки майбутнього учителя.

***Ключові слова**: експеримент, еталон, пізнавальна задача, експериментальні вміння, цільова програма.*

Оскільки фізика – наука експериментальна, то якість особистісних набутків і практична підготовка майбутнього вчителя знаходяться в прямій залежності від якості забезпечення однієї із складових їх фахової підготовки – навчального фізичного експерименту. Перед цим видом діяльності ставиться завдання не лише сприяти поглибленому засвоєнню навчального матеріалу та розвитку здібностей використання вимірювальних приладів, але і формування професійної компетентності, що дозволяє вчителю самостійно й ефективно виконувати фахові завдання. Саме експеримент стає основою предметної діяльності майбутнього фахівця, критерієм істинності та міцності його знань.

Планування є обов'язковим елементом цілеспрямованої людської діяльності, зокрема педагогічної. У методичних посібниках розгляд цієї проблеми, як правило, обмежується висвітленням тематичного планування навчального матеріалу, тобто планування змісту навчання конкретної навчальної дисципліни, не враховуючи всіх аспектів навчального процесу. Продуктивним у розв'язанні даної проблеми може бути лише системний підхід, який поряд із змістом передбачає планування результатів навчальної діяльності, застосування різних методів навчання, які відповідають поставленим цілям, вибір відповідного типу заняття, визначення етапів навчання, форми контролю тощо [1]. У зв'язку з цим існують певні особливості планування навчального процесу на заняттях, які зорієнтовані на формування експериментальних умінь.

Зупинимось детальніше на описі планування розвитку експериментальних умінь у системі практикумів у курсі методики фізики. За характером діяльності студентів під час виконання експериментальних завдань експериментальні роботи можуть бути: а) репродуктивні, тобто такі, що не вимагають самостійного здобуття нового знання і виконуються за наперед даною інструкцією; б) частково-пошукові, які в одержаному при їх виконанні результаті містять новий елемент знань, як наслідок напівсамостійної пошукової діяльності студентів; в) дослідницькі, виконання яких вимагає відносної самостійності майбутнього спеціаліста, а одержаний результат і зроблені висновки мають статус нового для них знання, нової відкритої студентами закономірності чи закону [5]. Кожний з цих видів лабораторних робіт має свої межі застосування у навчальному процесі, займає певне місце у системі навчально-пізнавальної діяльності. Репродуктивні роботи, як правило, використовуються під час вивчення технічних пристроїв та їх моделей, при вироблені початкових умінь працювати з тим чи іншим приладом, або під час перевірки закону чи закономірності [4]. Їх виконання бажане після вивчення відповідного навчального матеріалу, що дає змогу молодій людині свідомо застосовувати набуті знання на практиці. Ці завдання у залежності від об'єму виконують на заняттях, які мають мету формування експериментальних умінь, або при закріпленні раніше вивченого матеріалу.

Частково-пошукові експериментальні завдання вимагають такої організації пізнавальної діяльності студентів, коли при незначній допомозі викладача майбутній спеціаліст знаходить певний спосіб вимірювання фізичних величин або встановлює характерні риси протікання фізичного явища або закономірності [5]. Оскільки, при виконанні таких робіт студенти застосовують на практиці набуті знання та вміння, то, зрозуміло, що такий вид робіт має значний закріплюючий ефект. Тому, здебільшого їх використовують після вивчення відповідного явища, поняття, фізичної величини або закономірності. Інколи їх бажано провести на етапі вивчення нового матеріалу, особливо коли студентам потрібно усвідомити суттєві ознаки фізичних явищ.

При виконанні дослідницьких експериментальних завдань студенти самостійно встановлюють певну закономірність чи закон або досліджують параметри певного пристрою. При проведенні таких робіт майбутні спеціалісти повинні виявити високий рівень пізнавальної самостійності, а отже, мати відповідну практичну підготовленість і знання, які дозволяють їм інтерпретувати одержані результати і зробити необхідні висновки [1]. Дослідницькі лабораторні завдання потребують від викладача особливого вміння керувати пізнавальною діяльністю студента. Як правило, даний вид завдань використовується на етапі засвоєння нового навчального матеріалу або при узагальнені і систематизації знань студентів під час фізичного практикуму.

Установити нормативно кількість різних за рівнем активності студентів експериментальних завдань практично неможливо, оскільки необхідно враховувати досить багато факторів, які впливають на вибір їх оптимального співвідношення [4]. Це й сам зміст експериментальної роботи, відповідність обраного рівня меті заняття, підготовленість молодих людей до виконання даного завдання на такому рівні та вміння самого викладача забезпечити належний рівень активності студентів на занятті тощо.

Кожне експериментальне завдання комплексно розв'язує конкретні освітні, виховні і розвиваючі цілі в їх єдності. Проте слід підкреслити, що не обов'язково вся сукупність зазначених вище освітніх, розвиваючих та виховних цілей передбачається і вирішується кожною лабораторною роботою. Їх реалізація у навчанні в усьому їхньому розмаїтті забезпечується не однією або кількома роботами, а всією системою експериментальної підготовки, визначеною навчальною програмою дисципліни.

Тому при плануванні цілей занять відповідного типу потрібно виходити з конкретних умов навчання, враховуючи особливості змісту експериментальних завдань, методів навчання (інформативно-репродуктивний, проблемно-пошуковий), організаційних форм проведення експерименту (фронтальне експериментальне завдання, практикум, позааудиторні дослідження і спостереження та ін.), готовності студентів до розв'язання визначених цілей під час виконання експериментальних завдань [3]. При цьому слід завжди орієнтуватися на центральне, головне завдання даного типу занять - сприяння оволодінню студентами досвідом експериментаторської діяльності.

Місце експериментальної роботи у структурі теми визначається в результаті конкретизації її цілей. Так, наприклад, постановка освітньої мети у формулюванні: «Шляхом самостійного експерименту встановити залежність між потужністю, яка споживається електричним приладом, і величиною сили струму, який проходить в електричному колі», вказує на те, що відповідне завдання виконується на занятті в ході вивчення нового матеріалу. У той же час, якщо стоїть мета перевірити дослідним шляхом закон Джоуля-Ленца або встановити дослідним шляхом величину потужності, яка споживається при роботі електричного приладу, то стає очевидним, що дане експериментальне завдання доцільно виконувати після вивчення відповідного навчального матеріалу.

Таким чином, навчальні цілі визначають пізнавальні функції експериментальної роботи - бути джерелом нових знань, сприяти закріпленню вивченого матеріалу або здійснювати завдяки самостійному навчальному експерименту систематизацію та узагальнення знань. Отже, конкретизація освітньої мети експериментальної роботи з'ясовує її місце у структурі теми. Це дає можливість викладачу визначити, на якому етапі заняття буде виконуватись пропоноване завдання - під час вивчення нового матеріалу, закріплення вивченого чи узагальнення і систематизації знань.

Рівень виконання експерименту, обраний викладачем (репродуктивний, частково-пошуковий, дослідницький), повинен враховувати різні фактори, головним з яких має бути готовність студентів до сприймання навчального матеріалу на запропонованому рівні. Зрозуміло, що малоефективним буде такий навчальний процес, коли всі експериментальні роботи матимуть репродуктивний характер. Так само, як і навпаки, якщо всі вони будуть частково-пошуковими чи дослідницькими. Тут викладачеві при плануванні навчального процесу необхідно знайти те оптимальне співвідношення між різними за рівнем експериментальними завданнями, яке даватиме у дидактичному відношенні найвищі результати, але яке у кожному конкретному випадку буде специфічним, відбиватиме пізнавальні можливості молодих людей.

Встановити нормативно кількість за рівнем активності експериментальних робіт практично неможливо, оскільки у даному випадку необхідно врахувати багато факторів, які впливають на вибір оптимуму. Єдине, що можна порадити викладачеві - це у своїй діяльності керуватися принципом, що кожне заняття, кожна експериментальна робота має розвивати у студентів готовність сприймати навчальний матеріал на більш високому рівні пізнавальної активності. Це й визначатиме той оптимум, який буде конкретним для кожної групи зокрема.

Наприклад, немає сенсу лабораторну роботу практикуму «Вивчення електронного осцилографа звукового генератора та підсилювача» планувати як частково-пошукову або дослідницьку, оскільки ходом попереднього навчання студенти ще не готові виконувати її на такому рівні. Інша справа, що додаткові завдання до експериментальної роботи можуть бути евристичними або проблемними. У той же час для лабораторної роботи «Практичне використання оптичних явищ» оптимальним рівнем буде частково-пошуковий, а для роботи «Практичне використання магнетизму» - дослідницький.

Таким чином, при цільовому плануванні навчального процесу викладач визначає рівень пізнавальної активності студентів для кожної лабораторної роботи з урахуванням тих факторів, які дозволяють йому домогтися на занятті найвищих результатів вивчення навчальної дисципліни. У залежності від цього плануються й відповідні методи навчання, які враховують відтворюючий чи пошуковий характер пізнавальної діяльності студентів [2].

Експериментальне вміння, яке формується у процесі виконання конкретних лабораторних завдань, у кожному випадку має свій набір елементарних умінь, що розвиваються у ході їх проведення [5]. За таких умов особливого значення набуває планування результатів навчальної діяльності студентів, коли викладачеві потрібно для кожної експериментальної роботи визначити елементи складного вміння, потім відповідним чином спланувати їх розвиток, виходячи з того, що одна окрема лабораторна робота не може самостійно розв’язати завдання формування у повному об’ємі експериментального вміння.

У процесі виконання робіт практикуму майбутній фахівець формується професійно: він вивчає конструкцію, призначення і правила експлуатації приладів, ресурсне оснащення з фізики для середньої школи, вчиться користуватися ним і давати оцінку його педагогічним і технічним якостям, пізнає загалом порядок виконання основних дослідів, складає установки за схемами й описами, які вміщені в посібниках; опановує методику і техніку виконання різних видів шкільного фізичного експерименту з дотриманням основних дидактичних вимог до них; повинен навчитися чітко демонструвати і правильно пояснювати передбачені інструкцією досліди, супроводжувати досліди чіткими, вичерпними і короткими поясненнями на рівні доступному для учнів відповідного класу, робити записи і замальовки в конспекті; здобуває навички в дотриманні правил безпеки роботи під час проведення усіх видів навчального експерименту. У професійному становленні майбутнього учителя фізики мають знайти відображення також психолого-педагогічні аспекти експериментальної підготовки студентів, елементи безпеки життєдіяльності та охорони праці, можливість філософського осмислення результатів експериментальної діяльності [1].

Разом з тим лабораторний практикум сприяє ознайомленню з різними методами в підготовці, виготовленні і монтажі обладнання, розвиває дослідницькі нахили, формує уміння застосовувати здобуті знання для вирішення практичних завдань. Як показує досвід [1; 5], дуже важливо в підготовці майбутніх учителів забезпечення чіткої цілеспрямованості щодо суті, місця і компетентного коментування того чи іншого досліду, спостереження, трактування експериментальної задачі. У цьому ракурсі методична складова, теоретичний та методологічний аспекти професійної підготовки майбутнього учителя фізики можуть розгортатись завдяки об'єднанню цільових орієнтацій змісту шкільного курсу фізики і змісту методики його викладання. Така постановка проблеми вимагає якісно нового підходу до формування професійних якостей майбутніх учителів фізики.

Як цілеспрямовуючий засіб підготовки фахівця використовуємо бінарну цільову програму - організаційний документ, що визначає змістовий компонент навчального матеріалу в особистісно-діяльнісному аспекті його реалізації. У бінарній цільовій програмі одночасно задаються орієнтири як щодо змісту шкільного курсу фізики, так і щодо методичного його препарування.

Особливість цільової програми [1; 2; 3] у цьому випадку полягає в чіткому окреслені якісних показників знань: заучування знань (ЗЗ), наслідування (НС), розуміння головного (РО), повне опанування знань (ПОЗ), уміння (У), навичка (Н), переконання (П), що співвідносяться як із змістом курсу фізики та змістом професійної підготовки.

Міра складності пізнавальних задач, щодо фахової підготовки від однієї лабораторної роботи до наступної повинна постійно зростати, при чому варто опиратися як на попередній педагогічний та методичний досвід, одержаний студентом як в ході навчально-пізнавальної діяльності у вузі, так і на досвід набутий в ході педагогічних практик. Такі елементи знань повинні більшою мірою базуватися на суб'єкт-об'єктній основі активності студента в навчальному процесі [1; 5].

Таблиця 1.

№ з/п	Змістово-методичні орієнтири експериментальної підготовки студента	Рівень знань	
		Початковий	**Кінцевий**
	ЗМІСТОВІ		
1.	Архімедові сила	ПОЗ	У
2.	Плавання тіл та суден	ПОЗ	П
3.	Повітроплавання	ПОЗ	П
	МЕТОДИЧНІ		
4.	Особливості вивчення явищ, які пов’язані з архімедовою силою	ПОЗ	У
5.	Науково-матеріалістичне виховання учнів в ході формування експериментальних умінь	ПОЗ	У
6.	Ознайомленню з різними методами в підготовці і монтажі обладнання	ПОЗ	У
7.	Психолого-педагогічні аспекти експериментальної підготовки учнів	РО	П
8.	Значення і форми позакласної експериментальної діяльності	РО	Н
9.	Здобуття навичок в дотриманні правил безпеки роботи під час проведення навчального експерименту	РО	ПО

Наш досвід організації «Практикуму з методики і техніки шкільного фізичного експерименту» ґрунтується на описаному підході. Можливість використання бінарних цільових програм проілюструємо на прикладі роботи «Навчальний експеримент при вивченні архімедової сили» (див. таблицю 1).

На основі бінарної цільової програми нескладно орієнтувати всі види діяльності в ході лабораторної роботи, добираючи характерні завдання для кожного етапу заняття.

Рівень опорних знань є своєрідним «пусковим механізмом» результативного навчання. Для виявлення рівня опорних знань (зміст відповідних тем шкільного курсу фізики та зміст фахової обізнаності щодо методичного препарування цього змісту) студентам пропонуються відповідні еталонні завдання:

1 (ПОЗ). Змоделюйте процес введення поняття архімедова сила.

2 (ПОЗ). Запропонуйте доступну версію пояснення причинно-наслідкової зумовленості виникнення виштовхувальної сили.

3 (РО). Переконайте «уявного» учня в тому, що: умова плавання тіла залежить від його густини.

4 (РО). Порекомендуйте спосіб за допомогою якого можна було б виміряти виштовхувальну силу.

5 (ПОЗ). Поясніть з погляду фізики технологію використання в побуті та техніці явища повітроплавання.

Якщо в процесі допуску до виконання роботи рівень первинної обізнаності студента виявиться недостатній, то це є підставою для надання йому належних консультацій (можуть залучатися студенти з кращою підготовкою), перш ніж надавати йому можливість виконувати експериментальні завдання.

Виконання та осмислення спостережень, дослідів, досліджень. У цій частині діяльності також орієнтуємося на еталонні вимоги. Смисл цілеорієнтацій зводиться до того, що відповідно до вищих рівнів, окреслених цільовою програмою необхідно більше уваги та навчального часу надавати проведенню спостережень, дослідів, досліджень тощо, що стосуються вагомішого навчального матеріалу (вищі цілі-еталони). Вимагаємо, щоб у своїх звітах студенти все більшою мірою подавали відповідні викладки, якими б засвідчували власний рівень змістової обізнаності та готовності методично і технологічно препарувати конкретний навчальний матеріал на мову викладок, доступну учневі. Нижче наводимо описи окремих дослідів стосовно до окресленої теми, у контекстах яких майбутній фахівець має "відкрити" для себе суттєві методичні "ніші":

1. Будова та використання ареометрів.

Дослід починають з розгляду ареометрів (рис. 1), з'ясування їх будови і принципу дії. Ареометр є скляною трубкою на дні якої знаходиться вантаж у вигляді металевого дробу. Загальна вага трубки з вантажем і форма приладу підібрані так, щоб прилад стійко плавав в рідинах, для вимірювання густини яких він призначений. Оскільки вага трубки з вантажем постійна, то глибина занурення ареометра в рідині залежатиме від її густини, від виштовхувальної сили, яка врівноважує вагу приладу. Верхня частина трубки ареометра, на яку нанесена шкала густини, робиться циліндричною. Завдяки цьому залежність між густиною рідини і глибиною занурення ареометра носить лінійний характер, і

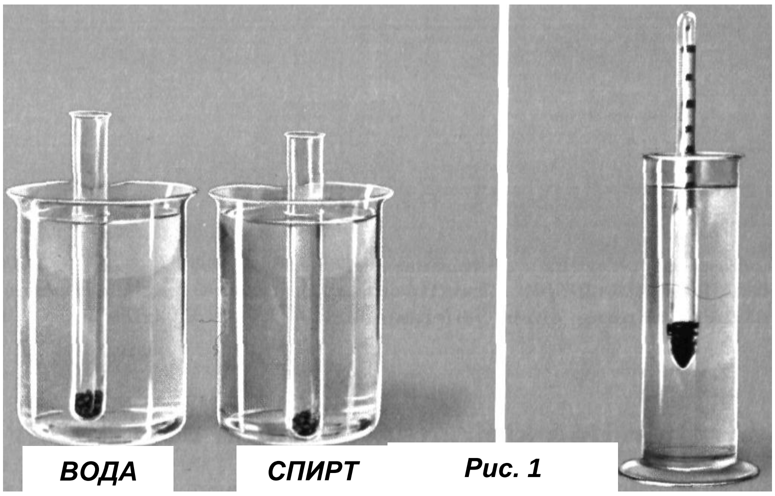


Рис. 1

шкала приладу рівномірна. Чим більша або менша густина рідини, тим більша або менша частина приладу виступає над нею. Опускають у воду ареометр для менш щільних рідин і показують як слід відлічувати густину рідини за шкалою (прилад покаже 1,00 г/см^3). Потім його опускають, наприклад, в гас і повторюють відлік (покази будуть 0,81 г/см^3). Після цього опускають у воду інший ареометр і звертають увагу, що він занурився дуже низько, а його покази1,00 г/см^3. Якщо ж перенести прилад в циліндр з наперед приготовленим розчином солі, то ареометр зануриться менше і покаже, наприклад, 1,15 г/см^3. Нарешті, у воду опускають обидва ареометри і стає зрозуміло, що один ареометр є як би продовженням іншого. Очевидно, може бути виготовлений один ареометр, який вимірював би густину рідин як щільніших за воду так і менш щільних. Проте він був би дуже громіздким і для вимірювання вимагав би велику кількість рідини.

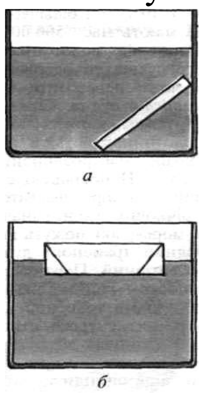


Рис. 2

2. Плавання суден.

Візьміть невелику жерстяну пластинку і опустіть її на воду. Пластинка потоне, бо густина заліза, з якого її виготовлено, більша за густину води (рис. 2, а). Якщо ж з цієї пластинки виготовимо коробочку і опустимо на воду, то вона плаватиме (рис. 2, б). Це явище покладено в основу будови різних водних суден.

3. Повітроплавання.

Паперову циліндричну посудину підвісили догори дном на важелі і зрівноважили. Якщо під відкритим отвором посудини помістити запалену спиртівку (рис. 3), то рівновага важеля порушується і посудина піднімається вверх. Оболонки, наповнені легким газом або гарячим повітрям, називають повітряними кулями та застосовують для повітроплавання.

В ході такої діяльності для студентів, які проявляють підвищений інтерес до навчання і оперативно справляються з поставленими завданнями пропонуємо додаткові експериментальні завдання еталонного характеру. Цільове призначення таких завдань полягає у наступному поглибленні рівня фахової експериментаторської підготовки майбутнього учителя фізики. Студентам наголошується, що вдумливе виконання таких завдань значно „скорочує" дистанцію між потенційним учнем та вчителем. Можлива версія таких завдань подається нижче:

1 (У). Дослідним шляхом визначте залежність виштовхувальної сили від об'єму зануреної частини тіла, глибини занурення, густини рідини.

2 (П). У склянку з водою опустіть виноградину. Чому вона потоне? Опустіть цю виноградину у склянку з газованою водою. Чому вона то тоне, то знову випливає?

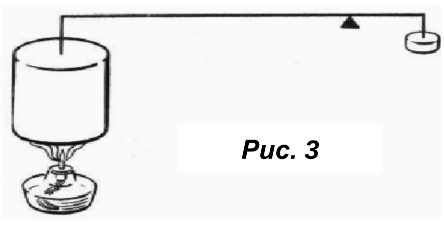


Рис. 3

Завершальний етап кожної лабораторної роботи практикуму – це доведення рівня змістової і професійної обізнаності майбутнього фахівця в рамках конкретної теми до межі вимог і потреб часу. Як предметна, так і професійна основи фахівця продовжують шліфуватися в процесі наступного узагальнення і систематизації навчального матеріалу за еталонними ознаками. Наводимо нижче описи завдань стосовно до окресленої теми, котрі мають конкретну методичну спрямованість та в яких містяться вимоги щодо професійної підготовки студента.

1 (У). Спроектувати досліди та підібрати обладнання для експериментального доведення факту, що умова плавання тіл залежить від густини даного тіла.

2 (ПОЗ). Опишіть психолого-педагогічні проблеми в коментуванні демонстрації для вивчення явища повітроплавання.

3 (Н). Яких правил безпеки праці потрібно дотримуватись при експериментальному вивченні проблеми плавання суден.

4 (П). Доберіть серію експериментальних задач, які, на вашу думку, можна запропонувати учням при вивченні питань даної теми з метою розвитку їх діалектичного мислення.

5 (У). Як пояснюється виникнення архімедової сили у шкільному курсі фізики? Як вивести формулу для значення архімедової сили?

Організована таким чином підготовка майбутнього учителя через призму лабораторних досліджень у прив'язці до цільових програм, еталонних вимог до розгортання процесу методично-експериментальних досліджень має сприяти саморозвитку особистості студента, допомогти пізнати себе, самовизначитись і самореалізуватись, що сприяє належній зорієнтованості на майбутню продуктивну і творчу професійну діяльність.

Список використаних джерел

1. Атаманчук П.С. Методичні основи організації і проведення навчального фізичного експерименту: Навч. посіб. / П.С.Атаманчук, О.І.Ляшенко, В.В.Мендерецький, А.М.Кух. – Кам'янець-Подільський: ПП Буйницький О.А., 2006. – 216 с..
2. Галузеві стандарти вищої освіти: Фізика: І. Освітньо-кваліфікаційна характеристика. ІІ. Освітньо-професійна програма підготовки бакалавра (укл. Грищенко Г.П. та ін.). – К.: Видавництво Національного педагогічного університету ім.. М.П.Драгоманова, 2003. – 74 с.
3. Державний стандарт базової і повної середньої освіти / Освіта України. - 2004. - №5. 20 січня 2004 р. – С. 9 - 10.
4. Ляшенко О.І. Планування навчального процесу на уроках формування експериментальних умінь // Підвищення ефективності уроків фізики. / Під. ред. О.І. Бугайова. –К.: Рад. шк., 1986.
5. Мендерецький В.В. Навчальний експеримент в системі підготовки вчителя фізики: Монографія. – Кам'янець-Подільський: К-ПДУ, ред.-вид. від., 2006. – 256 с. – Бібліогр.: с. 232-255.
6. Мендерецкий В.В. Развитие лабораторного практикума по физике на основании новых информационных технологий // Инновационные технологии обучения в условиях глобализации рынка образовательных услуг. Сбор. науч. трудов XIII Между-нар. науч.-метод. конф. – Вып. 11. – Т. 1. – Москва, 27-28 марта 2007 года. – С. 315–323.

In the article the problem of introduction of having a special purpose orientation is examined in providing of effective experimental preparation of future teacher.

***Key words**: experiment, standard, cognitive task experimental abilities, having a special purpose program.*

УДК 53(07)+372.853

О.М.Ніколаєв, кандидат педагогічних наук,
О.Г.Чорна, викладач

ОПЕРАТИВНИЙ КОНТРОЛЬ В СИСТЕМІ НАВЧАЛЬНОГО ФІЗИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

У статті розглядається можливість здійснення оперативного контролю з відповідним методичним забезпеченням у системі навчального фізичного експерименту.

Ключові слова: *навчальний фізичний експеримент, оперативний контроль, психологічна готовність.*

Фізика - експериментальна наука, що визначає низку специфічних завдань шкільного курсу фізики, спрямованих на, засвоєння наукових методів пізнання. Завдяки навчальному фізичному експерименту учні оволодівають досвідом практичної діяльності людства в галузі здобуття фактів та їх попереднього узагальнення на рівні емпіричних уявлень, понять і законів. За таких умов він виконує функцію методу навчального пізнання, завдяки якому у свідомості учня утворюються нові зв'язки і відношення, формується суб'єктивно нове особистісне знання. Саме через навчальний фізичний експеримент найефективніше здійснюється діяльнісний підхід до навчання фізики. Навчальний фізичний експеримент дидактично забезпечує процесуальну складову навчання фізики, зокрема формує в учнів експериментальні вміння і дослідницькі навички, озброює їх інструментарієм дослідження, який стає засобом навчання.

Таким чином, навчальний фізичний експеримент як органічна складова методичної системи навчання фізики забезпечує формування в учнів необхідних практичних умінь, дослідницьких навичок та особистісного досвіду експериментальної діяльності, завдяки яким вони стають спроможними у межах набутих знань розв'язувати пізнавальні завдання засобами фізичного експерименту. У шкільному навчанні він реалізується у формі демонстраційного і фронтального експерименту, лабораторних робіт, позаурочних дослідів і спостережень тощо, розв'язуючи такі завдання:

– формування конкретно-чуттєвого досвіду і розвиток знань учнів про навколишній світ на основі цілеспрямованих спостережень за плином фізичних явищ і процесів, вивчення властивостей тіл та вимірювання фізичних величин, усвідомлення їх суттєвих ознак;

– встановлення і перевірка засобами фізичного експерименту законів природи, відтворення фундаментальних дослідів та їхніх результатів, які стали вирішальними у розвитку і становленні конкретних фізичних теорій;

– прилучення учнів до наукового пошуку, висвітлення логіки наукового дослідження, що сприяє виробленню в них дослідницьких прийомів, формуванню експериментальних умінь і навичок;

– ознайомлення учнів з конкретними проявами і засобами експериментального методу дослідження, зокрема з різними способами і методами вимірювань - порівняння з мірою, безпосередньої оцінки, заміщення, калориметричним, стробоскопічним, осцилографічним, зондовим, спектральним тощо;

– демонстрація прикладного спрямування фізики.

Як бачимо, особливістю вивчення предмету "Фізика" є те, що кожне нове поняття, яке вводиться в шкільний курс фізики, набуває конкретного, образного змісту лише за умови, що з ним буде пов'язаний деякий певний прийом, спосіб, метод спостереження, експериментування, виконання практичних дій для отримання якісної оцінки, а то й на проведення кількісного вимірювання. Без цього введене поняття не зможе віднайти повнокровного використання у вивченні, фізичних явищ або процесів, встановленні притаманних їм закономірностей, розуміння їх учнями [8]. Навчальний експеримент володіє своїми, тільки йому притаманними особливостями. Проводиться він переважно в середовищі навчального кабінету, в зоні функціональних дій безпосередніх учасників навчально-виховного процесу [6]. Навчальний фізичний експеримент органічно вплітається в навчальний процес, безпосередньо випливає із його задач, тому всі його специфічні сторони поєднуються та узгоджуються із структурою і змістом процесу навчання.

З дидактичної точки зору навчальний фізичний експеримент є засобом отримання учнями відчуттів і сприйняттів від об'єктів оточуючого їх реального світу [3]. При цьому вчитель виділяє об'єкт спостереження, дослідження, вивчення, визначає доцільне для демонстрації фізичне явище, розкриває його суть, активізує мислення дітей шляхом переносу або співставлення знань про натуральні об'єкти і прилади із їх знаковими зображеннями на схемах і малюнках. В кожному досліді вчитель виділяє основну інформацію, логічно поєднує її і з максимально науковою достовірністю пояснює сенс і зміст фізичного явища чи процесу, що вивчається [9].

Аналіз розвитку навчального фізичного експерименту свідчить, що його роль у розкритті кількісних сторін фізичних явищ і процесів неухильно зростає. Саме такі експерименти виступають дієвими засобами активізації пізнавальної діяльності учнів на заняттях з фізики [12].

Така позиція є загальновизнаною, цієї методики дотримувались відомі педагоги різних часів. Зокрема, наголошується на ефективній системі навчання як такій, коли б учні займалися експериментальною стороною справи, отримуючи при цьому роз'яснення відповідних теоретичних положень [7].

Виступаючи ефективним методом активізації пізнавальної діяльності, навчальний фізичний експеримент в багатьох випадках може бути джерелом фізичних фактів, нових фізичних знань про оточуючий світ, забезпечуючи при цьому єдність абстрактного, конкретного, у навчанні, завдяки чому навчальний матеріал стає більш наочним та доступним учням [2].

Метою даної публікації є аналіз значення ти методичного забезпечення оперативного контролю психологічної готовності учнів до засвоєння пізнавальної задачі в системі навчального фізичного експерименту.

Для всіх видів контролю навчальних досягнень учнів, які слугують реальною основою для цілеспрямованого управління у навчанні, важливу роль відіграє зворотній зв'язок з кожним учнем. Без опори на нього знижується ефективність усіх методів навчання і всіх спеціальних методів перевірки знань. Суттєвим фактором у забезпеченні цілеспрямованого управління навчально-пізнавальною діяльністю є систематичне спостереження за дітьми, що допомагає вчителю скласти вірні судження стосовно посильності для них навчальних завдань і на цій основі планувати спеціальну перевірку знань кожного, що сприяє диференціації та здійсненню індивідуального підходу в навчанні. З досвіду відомо, що в умовах проведення групових занять обов'язково існує певна кількість учнів з досить низьким рівнем навчальних досягнень. Причини такої ситуації можуть бути різними і завдання вчителя в цьому випадку - допомогти окремим учням усвідомити суть явищ, процесів, законів, про які йдеться мова в ході заняття.

Виготський Л.С. висловив думку, що вірно поставлене навчання повинно бути орієнтованим на завтрашній день дитячого розвитку, що воно повинне йти попереду розвитку і слугувати джерелом нового в розвитку дитини. Далі Виготський Л.С. виділив два рівні розумового розвитку: перший - той, що має учень на певному етапі (рівень актуального розвитку), другий - вищий (зона найближчого розвитку).

Кожною дією особистість спершу оволодіває під керівництвом, але згодом вона виконує її самостійно. Тому те, що входить сьогодні в зону найближчого розвитку, завтра під впливом навчання переходить на рівень актуального розвитку [4; 5]. Процес засвоєння навчального матеріалу пов'язаний із виділенням в ньому основного змісту, із тим, наскільки нові знання мають для учня особистісний смисл. Діяльність особистості в таких умовах буде досить ефективною, якщо ця особистість має глибокі мотиви [9]. Необхідною умовою здійснення такої діяльності є відповідне середовище, де відбувається опора на внутрішні, природні нахили і погляди людини. Первинне сприймання і осмислення. нового матеріалу пов'язане також за умови його подальшого, більш глибокого осмислення і запам'ятовування, тому одноразове викладення і наступне закріплення знань є неефективним шляхом [11]. Це дає підставу визначити одним із завдань вчителя в умовах особистісно орієнтованого навчання створення психологічної готовності до засвоєння навчального матеріалу, що пов'язане із здатністю ".. .упереджувати кінцевий результат навчальної діяльності і діяти відповідно до нього" [1, с 73]. Досвід свідчить, що далеко не всі учні сприймають мету, висунуту на занятті, як свою власну мету, далеко не всі здатні зробити необхідні висновки щодо щойно спільно здійсненого навчального експерименту. Тому одним із завдань оперативного контролю операційної готовності є встановлення здатності кожного учня здійснювати інтерпретацію отриманих експериментальних даних, формулювань, висновків, узагальнень, з'ясування практичної значимості отриманих результатів. Така організація заняття дає можливість в ході обговорення результатів навчального фізичного експерименту досягти навчальної мети; тим самим створюються умови для досягнення одного із нижчих еталонів контролю: наслідування, розуміння головного, заучування. В зв'язку з цим зміст значної кількості завдань для оперативного контролю психологічної готовності має бути орієнтований на аналіз результатів навчального фізичного експерименту.

Здійснюючи контроль індивідуальних здобутків учнів, вчитель вступає з ними в діалог. Суть поняття "діалог" чітко відображена в його грецькому походженні “dialogos” від “dia” - проникнення, взаємність, завершеність, наскрізний рух, та “logos” - слово, знання. Тобто мова йде про мовленевий та психічний феномен, що є універсальною підвалиною спілкування. Діалог -

наскрізний рух словознання - є психологічним чинником взаємодії людини зі світом як зовнішнім, так і внутрішнім.

Без діалогу - обміну мовними (вербальними) та невербальними репліками: питаннями-відповідями, жестами, паузами-мовчанками неможливо, уявити не тільки процес передачі інформації, налагодження та координації взаємодії між людьми, обміну оцінками, точками зору, думками, розуміннями людьми один одного, спільне переживання, але й взагалі розвиток свідомості. В ході проведення контролю знань учня з допомогою усного опитування вчитель задає йому питання, яке є осердям діалогу. Розглянемо суть питання як такого.

Згідно результатів проведених досліджень, десь 70-80% часу вчителю ставить перед учнями запитання. З допомогою запитань він спрямовує діяльність дітей, коригує їхню поведінку, стимулює активність, уточнює розуміння своїх інструкцій, налагоджує зворотній зв'язок, створює навчальні ситуації.

Запитання завжди передбачає відповідь. Сутність її - особиста інтерпретація інформації, яку отримав учень. Задаючи запитання, вчитель робить спроби оцінити результативність свого повідомлення та визначити, які складові "не спрацювали" як годиться: чи він сам, чи характеристики змісту, чи особливості конкретної дитини. Запитання є стимулятором допитливості, вмикачем центральної системи людини. З допомогою запитань вчитель може, і, безсумнівно, повинен керувати процесом навчання та створювати оптимальні умови для учіння. Тобто можна сказати так: потрібно вміти ставити запитання, які цілеспрямовані на розвиток когнітивної сфери особистості; таке вміння є важливим чинником професійної компетентності вчителя.

Ефективним запитанням вважається те, яке:

– спрямоване на стимуляцію мислення та несе в собі закамуфльовану (сховану) відповідь (натяк на неї звужує зону пошуку вірогідної відповіді);
– вимовляється з оптимальною інтонацією, акцентує стрижневі слова.

Такі запитання провокують розумову роботу, стимулюють думку, змушують учня перегорнути весь свій інтелектуальний , багаж, вимагають висловити свою точку зору. Вони є ефективним засобом індивідуалізації навчання і контролю.

Звичайно, не завжди потрібно послуговуватися запитаннями такого змісту. Навчальна ситуація вимагає користуватися і прямими запитаннями, які спрямовані на отримання відповіді "так" чи "ні", на наведення конкретного факту та ставляться здебільшого класу, є прямими, фактичними. Тому на цій підставі можливо здійснити поділ запитань на стимуляційні і фактичні. Зрозуміло, що фактичні запитання мають таку ж саму вагу, як і стимуляційні, тому що у нашій пам'яті зберігаються різні відомості і ця інформація має ціну, коли вона була відтворена точно так, як була дана для запам'ятовування.

Умовно роботу пам'яті можна поділити на 3 етапи. Перший - запам'ятовування. Другий - збереження. Третій - відтворення (пригадування, упізнавання). Запам'ятовування - це процес і результат закріплення в пам'яті інформації. Якщо ця інформація якимсь чином пов'язана з досвідом людини чи інформацією, яка вже є в пам'яті, то запам'ятовується пізніше. Влучні питання допоможуть учневі тісно пов'язати навчальний матеріал зі своїм досвідом. Зберігання тісно пов'язане із повторенням. “Класична” схема повторення матеріалу, що зберігається у пам'яті, ось така: кожне повторення матеріалу має відбутися через 5-7 хвилин - 20 хвилин - 60 хвилин - 9 годин -24 години. За допомогою конкретних запитань стимулюється відновлення шляхів закріплення інформації в пам'яті, сліди пам'яті поглиблюються, і процес зберігання стає міцнішим і тривалішим [10].

На нижчому рівні засвоєння навчального матеріалу (оперативний контроль) можливі такі схеми засвоєння:

ЗЗ → РГ; НС → РГ; ЗЗ

↓↑ → РГ.

НС

Але можливі і такі:

ЗЗ → Хибне знання; НС → Хибне знання; ЗЗ

↓↑ → Хибне знання.

НС

Особистісно орієнтований підхід пов’язаний, перш за все, з необхідністю формування здатності кожного учня до передбачення та упередження кінцевого результату навчання,' здійснення пошукової та творчої діяльності - вироблення готовності до рефлексії. Тільки в тому випадку можна говорити про індивідуальні набутки учня, якщо, має місце його перетворювальна діяльність й предметі пізнавальної задачі - це можливо здійснити в умовах постійного контролю і коригування його навчальної діяльності.

Зрозуміло, що вказані процеси засвоєння навчального матеріалу відбуваються під впливом таких чинників, як наявний досвід учня, його змотивованість у навчанні, довір'я до джерела інформації, установка на сприймання тощо. Крім того, існує чимала небезпека і у випадку сильної зовнішньої змотивованості (коли учень, у якого значні прогалини у знаннях, змушений орієнтуватись на заучування), і у випадку сильної внутрішньої змотивованості (коли інший учень з" тієї ж причини (прогалин у знаннях) засвоює пізнавальну задачу шляхом наслідування розумових чи моторних дій) створити прецедент формування хибного знання. Тому гарантоване забезпечення в оперативному контролі первинних результатів навчання виступає необхідною умовою подальшого засвоєння навчального матеріалу, забезпечуючи тим самим результативне навчання фізики та: слугуючи передумовою інших видів контролю. Засвоєння пізнавальних задач теми, пов'язано також і з іншими видами діяльності учнів: розв'язування фізичних задач різних рівнів, виконання домашніх робіт та дослідів, виконання лабораторного практикуму, проведення семінарських занять тощо, внаслідок чого відбувається формування цілісного уявлення про навколишню дійсність.

Наведемо приклад. На занятті має бути засвоєна пізнавальна задача «Явище самоіндукції». Звернемо увагу на діяльність вчителя та учнів в ході засвоєння нових знань. Одним із способів є розгортання заняття таким чином: не пояснюючи, у чому полягає явище самоіндукції, зображуємо на дошці чи екрані схему електричного кола для його виявлення (рис. 1).

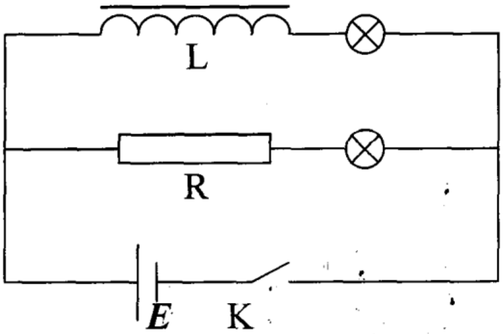


Рис. 1. Схема електричного кола для виявлення явища самоіндукції.

З допомогою кількох учнів (як правило, в основному це гуртківці) складаємо електричне коло та вмикаємо струм. Після цього разом з аудиторією робимо висновок, що лампочка, увімкнута в коло з котушкою з сердечником, спалахує пізніше, ніж лампочка, увімкнена в коло із активним опором. Перед учнями ставимо запитання: пояснити явище, що спостерігається. Для полегшення ставимо навідні запитання:

– як змінюватиметься магнітний потік навколо котушки з залізним сердечником під час вмикання струму?

– чи можливо і яким чином в цьому випадку застосувати закон електромагнітної індукції?

– в якій з двох віток електричного кола електрорушійна сила індукції буде більшою?

Відповідаючи на поставлені запитання, учні приходять до висновку, що в одній з паралельних віток виникає значна електрорушійна сила індукції. З'ясування напряму електрорушійної сили індукції дає відповідь на запитання, чому лампочка в колі з котушкою загоряється пізніше, ніж в колі без котушки. Після цього формулюємо означення явища самоіндукції, а наведені вище думки дають змогу зробити висновок, що вивчене явище - окремий випадок явища електромагнітної індукції.

Виникнення явища самоіндукції також можна продемонструвати з допомогою іншого досліду (рис. 2). Наш досвід показує, що саме такий спосіб є більш переконливим та доказовим.

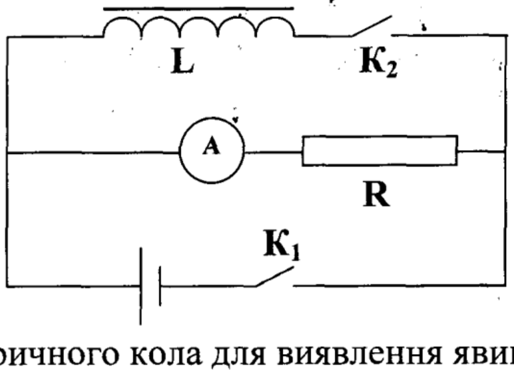


Рис. 2. Схема електричного кола для виявлення явища самоіндукції.

В цьому випадку наші дії наступні: при розімкненому ключі K_2 замикаємо та розмикаємо ключ K_1. Після цього замикаємо ключ K_2 та знову замикаємо та розмикаємо ключ K_1.

Перед учнями ставимо завдання: пояснити явища, які вони спостерігали; пропонуємо такі запитання:

– як змінюватиметься магнітний потік навколо котушки з сердечником під час розімкнення ключа K_1 при розімкненому ключі K_2?

– як змінюватиметься магнітний потік навколо котушки з сердечником під час розімкнення ключа K_1 при замкненому ключі K_2?

– чи можливо і яким чином в цьому випадку застосувати закон електромагнітної індукції?

– якого напряму індукційний струм виникає у ділянці кола із амперметром?

В ході обговорення цього досліду виходимо із того, що ЕРС індукції виникає тільки у замкнутому контурі; використовуючи схему, знаходимо напрям струму в ділянках кола до розмикання ключа K_1 знаходимо замкнений контур, в якому буде виникати індукційний струм (тобто контур із котушкою та амперметром); використовуючи правила Ленца, знаходимо напрям індукційного струму і встановлюємо, що він проходить у протилежному напрямі, ніж струм, створений джерелом. Формулюємо означення явища самоіндукції; наголошуємо на тому, що це один із проявів явища електромагнітної індукції.

Наведемо приклади завдань для здійснення оперативного контролю психологічної готовності до засвоєння пізнавальної задачі "Самоіндукція":

А. Ви провели дослід, який підтверджує існування явища самоіндукції. Встановіть причини, від яких залежить величина ЕРС індукції?

1) величина ЕРС залежить від індуктивності котушки;
2) величина ЕРС залежить від кількості витків котушки;
3) величина ЕРС залежить від наявності осердя;
4) величина ЕРС залежить від опору лампочки;
5) величина ЕРС залежить від потужності, споживаної лампочкою.

Б. Ви провели дослід, який підтверджує існування явища самоіндукції. Встановіть причини, від яких залежить величина ЕРС індукції?

1) величина ЕРС залежить від індуктивності котушки;
2) величина ЕРС залежить від кількості витків котушки;
3) величина ЕРС залежить від наявності осердя;
4) величина ЕРС залежить від наявності амперметра;
5) величина ЕРС залежить від опору резистора.

В. В яких міркуваннях щодо введення поняття явища самоіндукції Ви відчували труднощі?

1) величина ЕРС самоіндукції залежить від швидкості зміни магнітного потоку;
2) виникнення ЕРС самоіндукції при замиканні і розмиканні кола;

3) виникнення ЕРС самоіндукції залежить від<наявності осердя;
4) напрям ЕРС самоіндукції;
5) труднощів не відчувалось.

Таким чином, в сьогоднішній освіті оперативний контроль психологічної готовності є інновацією, яка дає можливість здійснити контроль" здатності кожної особистості до проведення перетворювальної діяльності в предметі пізнавальної задачі та досягти при цьому нижчого рівня її засвоєння в ході заняття. Розроблені завдання для оперативного контролю психологічної готовності з врахуванням параметра, за яким відбувається, засвоєння пізнавальної задачі, є основою для визначення рівня засвоєння пізнавальної задачі в кінці заняття. Але вищі еталони контролю призначаються на основі аналізу внутріпредметних і міжпредметних зв'язків кожної пізнавальної задачі та врахування вимог кваліфікаційної характеристики фахівця, якого готує навчальний заклад [1]. Перспективи подальшої роботи у цьому напрямі ми вбачаємо у створенні методичного посібника з наведеними завданнями, які б охоплювали весь курс фізики загальноосвітньої школи.

Список використаних джерел

1. Атаманчук П.С. Управління процесом навчально-пізнавальної діяльності. - Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний педагогічний інститут, інформаційно-видавничий відділ, 1997. - 136 с
2. Атаманчук П.С, Самойленко П.И., Сергеев А.В. Теоретико-технологический аспект объективизации контроля в обучении: объекты и параметры контроля учебной деятельности // Среднее профессиональное образование. - 1995. - №4-5. - С. 29-35.
3. Вольштейн С.Л., Позойский СВ., Усанов В.В Методы физической науки в школе / Пособие для учителя. - Минск: Народная асвета,1988. - 144 с.
4. Выготский Л.С Педагогическая психология / Под ред. В.В. Давыдова. - М.: Педагогика, 1991. - 480 с.
5. Выготский Л.С. Проблемы психического развития ребенка / Под ред. А.В. Петровского. - М.: Просвещение, 1979. - 288с.
6. Гуржій А.М., Величко СП., Жук Ю.О. Фізичний експеримент у загальноосвітньому навчальному закладі (Організація та основи методики): Навчальний посібник. - К.: ІЗМН, 1999. - 303 с
7. Дятлов Ю.В. М. Пильчиков і його погляди на проблеми фізичної освіти в Україні в кінці XIX - на початку XX ст. // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т.Г Шевченка: Збірник. Серія: педагогічні науки. - Чернігів: ЧДПУ. - 2002. -Вип. 13. - Т 2. - С 184-186.
8. Ніколаєв О.М. Оперативний контроль матеріального забезпечення пізнавальної задачі // Теорія та методика вивчення природничо-математичних і технічних дисциплін: Збірник науково-методичних праць. Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету. -Рівне: РДГУ. -2002. -Вип. 5. -С. 70-73.
9. Педагогика: Учебное пособие для студентов пед. ин-тов / Под ред. Ю.К. Бабанского. - М.: Просвещение,' 1983. - 608 с.
10. Федоров В.Д. Діа-логос. - Хмельницький, 1996. - 44 с
11. Хекхаузен X. Мотивация и деятельность: В 2-х т.: Пер. с нем. / Под ред. Б.М. Величковского; предисловие Л.И. Анциферовой, Б.М. Величковского. - М.: Педагогика, 1986. -Т.1.-408 с; - Т.2. - 392 с.
12. Шилов В.Ф. Демонстрационный эксперимент по электродинамике // Учебный эксперимент по электродинамике. Библ. ж-ла «Физика в школе». / Ред.-сост. А.В. Чеботарева. - М.: Школа-Пресс. -1996. - Вып. 7. - С. 4-27.

Possibility of realization of operative control with, the proper methodical providing in the system of educational demonstration experiment is examined in the article.

Key words: *educational physical experiment, operative control, psychological readiness.*

УДК: 378.637.016.51

О.П.Панчук, старший викладач

МІЖПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ ЯК НЕОБХІДНА УМОВА ПОЛІТЕХНІЧНОЇ ОСВІТИ

В даній статті розглянуто проблему міжпредметної інтеграції, як класичну проблему педагогіки, а також розкрито основні принципи реалізації політехнічної освіти на міжпредметній основі.

Ключові слова: *міжпредметні зв'язки, міжнаукові зв'язки, політехнічна освіта.*

Сьогодні у зв'язку із збільшенням об'єму інформації, який підлягає засвоєнню в період навчання, а також з необхідністю підготовки учнів до самоосвіти, важливе значення набуває вивчення ролі міжпредметних зв'язків.

Проблему міжпредметної інтеграції, можна віднести до числа традиційних, що стали вже класичними проблемами педагогіки. Її вивченню присвячені праці Ж.Ж.Руссо, Песталоцці, Л.Н.Толстого, Дж.Дьюі, П.Р.Атутова, С.Я.Батишева, О.Ф.Федорова, В.А.Кондакова, П.Н.Новікова, І.Д.Звєрєва, В.Н.Максимової, Н.А.Сорокіна, П.Г.Кулагіна, В.Т.Фоменка та інших [1],[3].

Міжпредметні зв'язки розглядалися вперше Ю.О. Самаріним, але сам термін в широкий ужиток пішов не відразу. До цих пір єдиного визначення терміну МПЗ у науковій літературі немає. В ряді робіт МПЗ окреслюються, як дидактичні умови, що забезпечують послідовне відображення в змісті навчальних дисциплін об'єктивних взаємозв'язків, що діють у природі. Визначення МПЗ знаходимо в роботі А.І. Єремкіна який визначає цей термін, як системи відносин між знаннями, вміннями, навичками, що формуються в результаті послідовного відображення в засобах, методах і змісті навчальних дисциплін тих об'єктивних зв'язків, що існують у реальній дійсності. Знання з різних дисциплін вступають між собою в зв'язки і при цьому утворюють системи – цикли природничо-математичних, соціально-гуманітарних, фундаментальних та спеціальних дисциплін.

Міжпредметні зв'язки в навчанні відображають комплексний підхід до виховання і навчання, дозволяють вичленувати як головні елементи змісту освіти. Вони формують конкретні знання учнів, розкривають гносеологічні проблеми, без яких неможливе системне засвоєння основ наук. Міжпредметні зв'язки включають учнів в операування пізнавальними методами, що мають загальнонауковий характер (абстрагування, моделювання, узагальнення, аналогія та інші).

Широке впровадження досягнень науки і техніки у виробництві і збільшення частки творчої праці змінюють характер і зміст діяльності робітника, що в свою чергу вимагає відповідних змін змісту, методів і форм навчання школярів як майбутніх фахівців.

Сучасному виробництву потрібна людина «з широким професійним кругозором майстерністю, з глибоким знанням політехнічних основ сучасного виробництва, здатна швидко освоювати нові машини і технологічні процеси» [3]. Зрозуміло, що першоосновою, фундаментом цього переходу повинна бути реалізація принципу політехнізму в роботі школи. У випускника середньої школи зрештою треба сформувати розуміння загальних основ сучасного виробництва. Але це вимагає встановлення міцних міжпредметних зв'язків, які відповідають організації суспільно корисної праці, трудового навчання.

Серед основних завдань у викладанні предметів природничо-математичного циклу здійснення принципу політехнізму означає: дати учням знання основних законів природи, навчити бачити їх вияв у житті; навчити використовувати ці знання на практиці; ознайомити учнів з науковими основами сучасного виробництва і таким чином підготувати базу для професійної підготовки. Ці завдання успішно реалізуються, коли у процесі трудового навчання буде забезпечено:

- достатньо широкий і педагогічно виправданий показ можливостей, форм використання законів природи для потреб людської практики і виробництва;
- таку послідовність і такі форми викладу навчального матеріалу, які сприяють якнайширшому застосуванню знань у всіх галузях людської діяльності;
- методи навчання, які максимально стимулюють пізнавальну активність учнів у напрямі вироблення вміння поєднувати теоретичні знання *з* практичною діяльністю;
- оптимальний об'єм практичних занять;
- ознайомлення учнів з простими приладами та інструментами і розвиток початкових навичок користування ними;
- погоджене з основним навчальним матеріалом ознайомлення учнів з технікою і технологією виробництва, розміщеного найближче до даної школи, а також тих виробництв, на яких працюють учні [3].

Крім того, здійснення принципу політехнічної підготовки вимагає такої організації роботи школи, яка в процесі навчання забезпечує: правильну організацію трудового виховання учнів; формування в них початкових загальнотрудових умінь і навичок; активну і безперервну роботу з професійної орієнтації; участь у суспільне корисній праці дорослих.

Основою реалізації міжпредметних зв'язків є використання навчальної інформації з іншого предмета для пояснення наукових понять, процесів, явищ, які вивчаються на уроках даного предмета, і навпаки, використання методів, прийомів і обладнання, властивих іншим предметам; вироблення, використання і вдосконалення узагальнених дій (умінь і навичок); формування і розвиток в учнів наукових уявлень про загальні поняття, ідеї, теорії, закони природи та суспільства і т. д.

Здійснення завдань політехнізму залежить від міжпредметних зв'язків, зумовлене особливостями сучасної науково-технічної революції. Однією з істотних її ознак є посилення інтегративних процесів (в науці, техніці і виробництві). Міжнаукові взаємодії, тісний зв'язок між окремими галузями знань, між наукою, технікою і виробництвом, ускладнення техніки, наукові основи виробництва, створення технологічних циклів, які базуються на закономірностях кількох наук,— усе це вимагає від фахівців, що працюють у сфері науки, техніки і виробництва, нових інтелектуальних, фізичних і психічних якостей [3].

Справді, у сучасному виробництві здійснюється комплексна автоматизація, створюються автоматизовані системи контролю й управління; підводиться наукова база під усі основні види виробництва; підвищується ефективність виробництва завдяки застосуванню наукових досягнень; зростає спільність наукових основ техніки і технології різних галузей виробництва, політехнічність природничих і математичних наук; докорінно змінюється характер праці в різних галузях народного господарства - людина переміщується із сфери виробничого циклу в сферу різноманітних і складних функцій виробничого застосування науки; збільшується частка розумової праці в загальних трудових затратах кожного робітника, посилюється роль знань як елемента культури праці; зростає спільність функцій робітників різних галузей народного господарства. В умовах розширення сучасного виробництва, появи нових галузей, нових методів праці, знарядь, матеріалів, видів енергії, її умовах передачі засобам праці контрольно-управлінських і логічних функцій виробничнику стають притаманними науково-дослідна, евристична діяльність і такі якості особистості, як сміливість, здатність до швидких самостійних рішень, енергійних дій, гнучкість розуму, творче застосування набутих знань. Виникають нові професії і професії широкого профілю, зростає кількість наскрізних професій у народному господарстві [2].

Ці характерні риси сучасного виробництва є певним "орієнтиром для визначення змісту політехнічних знань, умінь і навичок, якими повинні оволодіти учні, а також підтверджують, що міжпредметні зв'язки і результати міжпредметних взаємодій набули великого поширення і в сфері науки, і на виробництві. Міжпредметні зв'язки якоюсь мірою є педагогічною трансформацією зв'язків міжнаукових. Отже, як видно, задовольнити основні вимоги, які принцип політехнізму ставить до викладання предметів природничо-математичного циклу на сучасному рівні розвитку науки і виробництва, *неможливо без реалізації міжпредметних зв'язків* [4].

Політехнічні знання мають певні ознаки, а саме:

а) дають змогу розібратися в різноманітних знаряддях праці і технологічних процесах, що полегшує перенесення знань із однієї виробничої ситуації в іншу;

б) формуються на базі законів і понять природничих, математичних, суспільних наук, лежать в основі будови і функціонування сучасної техніки;

в) мають динамічний характер, змінюються в зв'язку з розвитком науки і виробництва і їх взаємовідносин;

г) відображають закономірності, поняття багатьох наук [3].

Визначаючи обсяг політехнічних знань, неминуче доводиться враховувати взаємозв'язок наук і розраховувати на ефективний вплив міжпредметних зв'язків на формування цих знань.

Міцність знань про закони природи залежить від вироблення в учнів уміння бачити їх вияв в навколишньому житті. Тому першим етапом політехнічної освіти є навчання учнів переносити набуті знання в умови, відмінні від тих, при яких вони одержані. Водночас це перший крок до здійснення спочатку внутрішньопредметних, а потім міжпредметних зв'язків. Так, під час вивчення на уроках фізики матеріалу про тертя в евристичній бесіді вчитель пропонує учням навести приклади частин технічних установок, в яких доводиться дбати про збільшення чи зменшення тертя, а також приклади із живої природи, які свідчили б, що внаслідок багатовікового пристосування до життя в умовах певного середовища в інтересах розглядуваного індивідууму виділились і розвинулись органи, які сприяють збільшенню або зменшенню тертя (слизистий покрив, обтічність форми тіла у риб, наявність гострих зубів, кігтів в хижих тварин, особливості будови поверхонь зубів і щелеп у травоїдних тварин та ін.).

Ефективність цього етапу залежить від добору дидактичного матеріалу, обладнання, прийомів і методів навчання, особистості і майстерності вчителя. Для здійснення принципу політехнізму важливо завчасно визначити політехнічний матеріал теми, яка вивчатиметься на уроці, зв'язок цього матеріалу з матеріалом іншого предмета, з навколишнім життям, його роль у техніці і технології виробництва, значення для успішної роботи людей певних професій [2].

Наступним кроком у реалізації принципу політехнічної освіти є вироблення в учнів навичок застосовувати знання з даного предмета на практиці, на уроках з інших предметів. Наприклад, учень на уроці праці усвідомлює необхідність очищення робочої поверхні напилка для збільшення тертя ковзання під час обробки ним поверхні заготовки і застосовує на практиці осмислену в даній ситуації закономірність. На уроці ботаніки учні усвідомлюють, чому треба розчищати крону дерев (щоб воно краще розвивалося й плодоносило), а на уроках праці виконують цю роботу.

Досить цінною є участь учнів у суспільне корисній праці під час виробничої практики. Треба дбати про те, щоб ефективність цієї роботи була якнайвищою, і організатори її (як школа, так і виробництво) не випускали з поля зору першочергові навчально-виховні .дання. Наприклад, якщо школа шефствує над певним мікрорайоном населеного пункту, де відбувається інтенсивне будівництво, то учні повинні брати активну участь в благоустрої території, зокрема в озелененні її.

Не менш приваблива для учнів робота на виробництві з комплексною механізацією і автоматизацією та автоматичним контролем технологічних процесів. Учні переконуються, що фізичні, хімічні, математичні, біологічні закономірності на виробництві часто взаємопов'язані, що сучасне виробництво вимагає не тільки глибоких знань з основ наук, а й уміння їх застосовувати в комплексі.

З науковими основами техніки і технології виробництв даної місцевості ознайомлюються учні під час екскурсій, трудових десантів, зустрічей з передовиками виробництва і т. д. Так зростає рівень політехнічності знань і готовності учнів до участі у виробничій діяльності на міжпредметній основі. Крім того, здійснення міжпредметних зв'язків сприяє набуванню учнями глибоких і міцних знань з окремих предметів [3].

Як відомо, знання-необхідна, але недостатня умова активної підготовки учнів до практичної діяльності на виробництві. Успішне оволодіння узагальненими вміннями і навичками є наступним серйозним кроком політехнічної освіти. Використання узагальнених дій (умінь і навичок) - один з видів міжпредметних зв'язків. Багато з них перетворюються в політехнічні навички і вміння, які стають основою інтересу до певної професії, елементами професійних дій. Під час викладання багатьох предметів вдосконалюються такі узагальнені дії: перенесення знань і навичок, набутих під час вивчення одного предмета, на уроки з інших предметів; запровадження НОП; свідоме швидке читання і скоропис; підбір необхідної літератури, опрацювання різних текстів; лаконічний запис прослуханого, побаченого, прочитаного; обчислення; вимірювання; самостійна робота і дослідження; контроль і самоконтроль; конструювання; складання і читання креслень і схем; ведення технічної документації; керування технічними установками, виявлення і ліквідація неполадок в них та ін.

Формування політехнічних знань, умінь і навичок на міжпредметній основі сприяє проведенню профорієнтаційної роботи, яка передбачає професійну освіту і виховання молоді; професійні консультації: психолого-педагогічну, медичну і фізіолого-гігієнічну; професійну орієнтацію молоді і допомогу в оволодінні професійною майстерністю [1].

Профорієнтаційна робота тісно пов'язана з набуттям політехнічних знань, умінь та навичок.

Характерною особливістю організації політехнічної освіти на міжпредметній основі є те, що кожний урок, на якому здійснюються міжпредметні зв'язки, має політехнічну спрямованість, оскільки вміння переносити, застосовувати знання їв нових ситуаціях та інші узагальнені вміння і навички є політехнічними (але не будь-яка міжпредметна інформація має політехнічний характер). Тому, плануючи роботу з кожного предмета, треба точно визначити, на якому уроці і в якій формі реалізовуватиметься принцип політехнізму (в тому числі й профорієнтаційна робота). Цей процес творчий і складний. Слід зауважити, що питання реалізації міжпредметних зв'язків і принципу політехнізму на їх основі, по суті, ще не розроблене.

На нашу думку, принцип політехнізму (включаючи профорієнтаційну роботу) на міжпредметній основі реалізується в такій послідовності (див схему на мал..1).

Все сказане вище дозволяє розглядати зв'язок трудового навчання і продуктивної праці з основами наук як важливу сторону політехнічної освіти. Навчальні досягнення, які здобувають учні з різних предметів, вступаючи в певні зв'язки між собою і з виробництвом, набувають політехнічного характеру.

Посиленню зв'язку основ наук з трудовим навчанням сприяють і вдосконалені шкільні програми, в яких значна увага націлена на вивчення знарядь праці і технології, а також суспільно корисної, продуктивної праці.

Пізнання об'єктивної дійсності людиною здійснюється на основі суспільно-виробничої практики. В процесі її люди не тільки створюють матеріальні і духовні цінності, але і впливаючи на матеріальний світ, розкривають властивості, зв'язки, закономірності відношення предметів і явищ.

виділення в програмному матеріалі і навколишньому житті міжпредметної інформації з політехнічним змістом

визначення об'єктів у межах школи, дія яких пояснюється на основі застосування знань з різних предметів

визначення об'єктів навколишнього виробничого оточення, які функціонують на основі закономірностей кількох наук

встановлення рівня і обсягу знань з різних предметів, потрібно застосовувати для пояснення будови і принципу функціонування вищезгаданих об'єктів

визначення узагальнених способів дій, які треба формувати в учнів відповідно до потреб виробництва у рідному краї

визначення професій, якими має оволодіти молодь, щоб задовольнити потреби підприємств даного району; визначення і розвиток мотивів, які сприяють прищепленню любові до необхідних професій

визначення місця (урок, факультатив, гурткова та інші види позакласної роботи, екскурсії, суспільне корисна праця, літня виробнича практика та ін.) та способів реалізації принципу політехнізму (включаючи профорієнтацію) з використанням міжпредметних зв'язків

Мал.1

Список використаних джерел

1. Архипова Т. Межпредметные связи: в чём их актуальность // Учитель (Россия). – 2001. - №4. – С.34-36.
2. Астанина С.Ю. Межпредметные связи на обобщающем уроке // Биология в школе. – 1999. - №6. – С.25.
3. Аутов П.Р., Бабакин Н.И Связь трудового обучения с основами наук. М.: - 1983. с. 127.
4. Устова А.В. Межпредметные связи в условиях стандартизации образования // Физика в школе. – 2000. - №3. – С.46-48.

The problem of intersubject integration is considered in this article, as a classic problem of pedagogics, and also basic principles of realization of polytechnic education are exposed on intersubject basis.

Key words: *intersubject copulas, interscientific copulas, polytechnic education.*

УДК 373.5.016:53

Т.П.Поведа, викладач,
Р.А.Поведа, кандидат фізико-математичних наук

ОПТИМІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ З ФІЗИКИ В УМОВАХ ОСОБИСТІСНИХ ОРІЄНТАЦІЙ

В статті увага приділяється методам оптимізації навчально-пізнавальної діяльності учнів з метою забезпечення результативності навчання з фізики в умовах особистісно орієнтованого навчання. Суть методики зводимо до того, що засвоєння конкретної пізнавальної задачі визначається означеним вимірником якості знань, яка встановлена за аналізом пізнавальної, світоглядної та практичної значущості її змісту з врахуванням міжпредметних та соціальних цілей.

Ключові слова: *оптимізація, особистісно орієнтоване навчання, рівневі задачі, навчально-пізнавальна діяльність, результативність навчання.*

Орієнтація освітньо-інформаційного простору України на єдиний світовий істотно розширює і ускладнює завдання навчально-пізнавальної роботи сучасної школи. Реформування освіти ставить нові вимоги до навчання як основи соціокультурного становлення молодої свідомої особистості. До таких належить задоволення ряду протирічь, що існують на даному етапі: зростаюча складність навчання пов’язана з швидким темпом розвитку науки і технологій та неоднакові можливості різних груп учнів; пізнавальна самостійність старшокласників та традиційний суб’єктивізм управління навчанням; лавинна інформатизованість учнів стосовно сучасних наукових, інформаційних, політичних проблем та невисокий рівень інформаційної культури, недостатні вміння практично застосувати знання, дати свою оцінку ситуації, усвідомити її значущість; великі обсяги програмного навчального матеріалу та перенавантаження учнів. Окрім оновлення змісту навчання, модернізації його форм і методів, важливо оптимізувати процес навчання, тобто організувати його на таких засадах, щоб досягти найкращих результатів у навчанні за найменших витрат часу і зусиль. Усе це має відбуватися водночас з інтенсифікацією процесу навчання. Тому потрібна така організацію процесу навчання, за якої збільшується працездатність учнів і учителів, підвищується їх продуктивність праці, зростає пізнавальна самостійність, ініціатива і творча активність.

«*Оптимізувати навчально-виховний процес означає вибирати цілі, завдання, зміст, форми і методи навчання і виховання так, щоб вони максимально враховували закономірності розвитку конкретного колективу і учня, а також зовнішніх і внутрішніх впливів, в яких протікає процес, забезпечуючи цим самим найкраще сприйняття і засвоєння педагогічних впливів, активізацію власних зусиль по самовихованню і самоосвіті*» [1, с. 3]. Проблемі оптимізації навчально-пізнавальної та виховної діяльності надавали великого значення А.С.Макаренко, К.Д.Ушинський, Ю.К.Бабанський, Д.І.Пеннер, І.І.Дяченко, Т.І.Ільїна, І.Т.Огородников, Г.Г.Ващенко, інші вітчизняні та зарубіжні педагоги і психологи.

На думку К.Д.Ушинського, для правильної організації навчання дітей, розвитку їх розумових здібностей треба знати вікові та індивідуальні особливості, передбачати правильне дозування змісту навчального матеріалу, його посильність для учнів, послідовність і систематичність вивчення, розвиток свідомості і активності учнів, міцність засвоєння знань, виховуюче навчання та ін. [2, с. 505].

Дослідження показують, що оптимізація «взагалі» неможлива, а можлива лише по відношенню до конкретного завдання управління, тобто з точки зору відповідного критерію. Потрібне чітке визначення параметра, який би досягав оптимальної межі відповідно до поставленої мети. Тому, зокрема, зупинимось на виділенні наступних критеріїв оптимізації:

1). зміст, структура і логіка функціонування забезпечують ефективні і якісні вирішення завдань розвитку і виховання школярів у відповідністю з вимогами державних програм на рівні максимальних навчальних досягнень для кожного учня;

2). поставлена мети досягається без перевищення витрат часу за навчальним планом для класу та без перевищення максимальних норм часу встановлених Положенням школи про класну і домашню роботу школярів і педагогів для попередження їх перенавантажень.

Але не може бути один раз і назавжди визначений критерій, тому педагог ще на початку своєї діяльності зобов'язаний чітко визначити які результати і затрати часу будуть оптимальні в його умовах [3, с. 10].

Оптимізація вимагає озброєння вчителів спеціальними вміннями вибирати в кожному конкретному випадку оптимальний варіант побудови навчально-пізнавальної діяльності учнів, який би привів найкоротшим шляхом до найкращих результатів у вирішенні поставлених завдань. Цей процес не можна ототожнювати з новою формою чи методом навчання, об'єктивно буде назвати його принципом дій педагога чи методикою спеціально спрямованою на досягнення максимально можливих результатів в даних умовах за певний час, а, при можливості, ще й коротший.

Теоретичним підґрунтям інноваційного типу навчання є особистісно орієнтована освіта. Воно базується на організації такої взаємодії вчителя та учнів, яка створює оптимальні умови для розвитку в учнів здатності до самоосвіти, самовизначення та самореалізації. Головною метою особистісно орієнтованого навчання є створення ситуації власного розуміння життєвої суті того, що вивчається. Сутнісні ознаки такого навчання визначила академік О.Я Савченко [4, с.15]:

– суб'єкт-суб'єктне гуманне співробітництво, співтворчість всіх учасників навчально-виховного процесу;
– діагностично-стимуляційний спосіб організації навчального пізнання (стимулювання розвитку, саморозвитку і відповідальності школярів);
– діяльнісно-комунікативна активність учнів;
– проектування вчителем (а пізніше учнями) індивідуальних досягнень учнів у всіх видах діяльності;
– піклування про фізичне та моральне самопочуття учнів;
– врахування в змісті, методиках, системі оцінювання широкого діапазону

особистісних потреб і можливостей учнів у здобутті якісної освіти.

Організованість у навчанні не можна зводити лише до зовнішніх виявів, тобто, так званих, організаційних моментів. Вона передбачає сукупність умінь, взаємодія яких забезпечує швидке включення школярів у навчання, їх здатність діяти цілеспрямовано, орієнтуватись в часі, заздалегідь обдумувати послідовність і способи виконання завдань, що дуже важливо в умовах оптимізації. Відповідно до цього О.Я Савченко звертає увагу на формування в учнів наступних умінь: організовувати своє робоче місце, орієнтуватись в часі та берегти його, планувати свої дії, доводити роботу до завершення.

Сучасна школа, орієнтуючись на особистість, повинна створювати ситуації власного усвідомлення учнями того, що вивчається. Для успішного навчання потрібно створити відповідні умови розвитку особистісних функцій самореалізації, шляхом спрямування і "спадної" допомоги вчитель повинен спрямовувати учіння учня, допомогти йому зрозуміти себе, активізувати внутрішні сили, самостійно здійснити вибір чи прийняти рішення і вміти його відстояти. Відсутність опори на особистість учня знецінює всі наміри щодо оптимізації, не дозволяє оптимізувати зміст, форми, методи, оскільки суть оптимізації полягає у відборі найкращого варіанту для даних умов. Відсутність цілеспрямованого вивчення учнів робить неможливою саму процедуру вибору оптимального варіанту уроку, оскільки не існує ознак, за якими потрібно здійснювати підбір.

Проблему оптимізації навчально-пізнавальної діяльності розв'язуємо на основі використання фіксованих (еталонних) результатів навчання учнів фізиці [5; 6]. Безумовно, що ця проблема безпосередньо проектується на проблему реалізації сучасного стандарту фізичної освіти. Розв'язання проблеми стандарту середньої фізичної освіти вчений-методист П.С.Атаманчук пропонує за такою схемою: *навчальний план – цільова програма – підручник– методика – освітнє середовище – управління.* Автор вказує на *основні новації у змістових елементах освітнього прогнозу*, а саме:

- навчальний план – нормалізація навчання і вільного часу учня;
- зорієнтованість на самоосвіту мінімум допомоги вчителя;
- навчальна програма цільового характеру;
- підручники та методики охоплюють зміст + діяльнісна складова процесу навчання;
- ознаки посібників з програмовим навчанням;
- алгоритмізація способів пізнавальної діяльності;
- управління (контроль, корекція).

Навчальний план – це план нормування навчального навантаження, який є опосередкованим засобом управління навчанням. Оптимальним навантаженням, враховуючи психологічні та вікові характеристики дитини, вважається 18-22 уроки на тиждень. При цьому треба врахувати думку, що до цих пір розрахунок часу проводиться «на око», за інтуїцією, а у вжиток вчителів повинні ввійти прилади для вимірювання часу: секундоміри, таймери. З досліджень виявилось, що деякі завдання з фізики під силу розв'язати лише третій частині учнів класу та ще й з великими затратами часу. А коли врахувати, що в школі вивчають більше десятка предметів, то стає зрозуміло, що ці завдання стають нездійсненними, а тому нецікавими для учнів. Отже, очевидно, що навчальний план повинен відігравати важливу роль унормування навчального процесу, тобто сприяти розв'язанню проблеми оптимізації навчального навантаження учнів [6, с.32].

Результати досліджень свідчать, що освітнє середовище має задовольняти можливості досягнення учнями завчасно заданого результату у навчанні фізики, тобто *фіксованими повинні бути не умови і засоби, а результати навчання*. Цього стану досягти можна завдяки використанню цільових програм (у яких конкретизовано мету-зразок конкретної пізнавальної задачі), тестових завдань рівневого характеру (які дають можливість не тільки зафіксувати, а й корегувати, під заданий результат навчання), а також шляхом врахування і доцільного використання інших чинників (індивідуальний стиль діяльності, робочий темп, самооцінка, ігрові моменти) та ін. *Рівневі завдання є упереджені цільовими програмами, які побудовані згідно ціннісної ваги та міжпредметних зв'язків кожної пізнавальної задачі*. Як наслідок, визначено рівневі рівні засвоєння конкретного матеріалу стосовно конкретного уроку та по завершенні всієї теми. Тому цільова програма виступає і для вчителя, і для учня засобом об'єктивного орієнтування на рівневі результати навчання, що виявляється у можливості коригувати, регулювати та управляти пізнавальною діяльністю. Враховуючи рівневу та профільну диференціації у навчанні, необхідно розробляти 4 типи навчальних програм: для основної школи та для старшої трьох профілів. За умови *цільового характеру навчальна програму з фізики* включає: визначення основних пізнавальних завдань теми; відведення на них відповідної кількості годин; використання педагогічних технологій та методів навчання; забезпеченість навчально-методичним комплексом; проектовані рівні засвоєння навчального матеріалу відносно окремого уроку, розділу та навчального курсу. Логічним є те, що еталони знань на окремому уроці, в переважній більшості, відрізняються від еталонів знань по закінченні теми чи курсу. На практиці використовуються наступні *рівні знань*: нижчий (*ЗЗ – завчені знання, НС – наслідування, РГ – розуміння головного*), оптимальний (*ПВЗ – повне володіння знаннями*), вищий (*УЗЗ – уміння застосувати знання, Н – навичка, П – переконання*). Подання навчальної програми, що охоплює одночасно змістову та діяльнісну сторони навчання на рівні окреслених цілей, дає можливість регулювати, корегувати і цілеспрямовувати навчально-пізнавальну діяльність учнів з фізики в напрямі їх особистісного збагачення. Єдиним джерелом знань є власна перетворююча діяльність учня щодо об'єкта пізнання і самого себе. В міру оволодіння способами отримання знань в учнів формуються такі особистісні якості як самоконтроль, самоуправління, самоосвіта [5; 6]. Отже, чітке окреслення рівня вимог до знань згідно рівневого підходу повною мірою сприяє оптимізації навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Основним носієм стандарту фізичної освіти з яким пов'язують свою діяльність вчитель і учень є підручник. І він є одним з основних гарантів оптимізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, а тому повинен забезпечувати своєю логічною будовою повний цикл процесу пізнання: спостереження – осмислення проблеми – висунення гіпотези – теоретичне обґрунтування наслідків – експериментальна перевірка висновків. Підручник містить досліди, які допомагають осмислити поставлену навчальну проблему з допомогою припущень, розв'язуванням задачі доступними засобами. Методисти-фізики Редька Г.Б., Толпекіна Г.М.: ставлять такі вимоги перед підручником: «Все, що є на сторінках має бути зрозумілим. Зміст має біти популярним, проводити «бесіду з учнем живою мовою», використовувати образні порівняння», аналогії, викликати в свідомості яскраві асоціації». Важлива роль в сучасній школі відводиться електронним підручникам, які доповнюють звичайні підручники, даючи теоретичний текст, одночасно консультують, дають вказівки, демонструють та моделюють, а особливо ефективні в швидкому пошуку необхідної інформації. В умовах особистісно орієнтованого навчання і з позицій раціональності та оптимізації використання робочого часу такі підручники цінні ще й тим, що дозволяють в індивідуальному темпі для конкретного учня перевірити знання з певного розділу чи теми. При впровадженні в практику таких підручників важливим є використання міжпредметних зв'язків, зокрема, з інформатикою. Головним для підручників нового типу є методологічність, управління та науково-популярний стиль.

Оптимізація процесу навчання передбачає також методичну підтримку, яка включає такі засоби навчання як: методичні рекомендації та керівництва, робочі зошити, збірники, програмні засоби, системи штучного інтелекту для самоосвіти, навчальне та демонстраційне навчання з допомогою комп'ютерних технологій, система еталонних вимірників знань. В сучасних умовах стану методичної підтримки навчання існує реальна можливість створення *навчально-методичного комплексу з фізики для всіх класів школи* за наступною схемою: *підручник + робочий зошит+методичне керівництво вчителя + збірник задач рівневого характеру + тематичні набори якості знань + програмові та навчальні аудіо- та відеозаписи* [5, с. 39].

«Ідеали, прогнози і плани будуть мати роль для інтелектуального, духовного, особистісного становлення особистості тоді, коли будуть враховувати можливості кожного індивіда. Тому стандарти необхідно трактувати як суспільний ідеалізований план «приземлений» до реальних можливостей сьогодення та ближньої перспективи. Все це можливе за наявності інтегральних еталонів якості навчання, співвіднесення їх з кожною складовою пізнання» [5, с. 28]. Означені рівні знань виступають як вимоги до результатів навчання учня, тому вони повинні узгоджуватись з можливостями освітнього середовища, а враховуючи спрямування освіти на гуманне навчання, не повинні приводити до надмірних напружень, стресів, зневіри учня в себе. Відповідні рівні стосовно конкретної пізнавальної задачі являють собою критичні значення для кожного з параметрів засвоєння. Граничними нормами визначається ряд допустимих значень, серед яких є оптимальне, тобто те, яке найкраще відповідає повноцінному функціонуванню операційних і мотиваційних механізмів психіки в процесі навчально-пізнавальної діяльності. Для кожного параметру оптимальний критерій задовольняє вимогам, ергономіки навчання, «закону економії часу», психогігієни стресових ситуацій, забезпечення пошукової активності.

Оскільки навчання – це організований процес, то в полі зору педагога перш за все повинно знаходитись матеріальне і психологічне забезпечення кожної пізнавальної задачі, без відсутності яких неможливий сам процес пізнання. До матеріального відносяться моделі, засоби, обладнання, які складають її основу, до психологічного – приведення свідомості учня за допомогою педагогічного впливу в стан готовності до активного відображення об'єкта пізнання. Вчитель різними способами забезпечує
виникнення в учня внутрішніх установок на сприйняття змісту пізнавальної задачі, приведення психіки учня в стан готовності до активного відображення об'єкту пізнання. Без створення таких умов неможливі позитивні результати, оскільки і сама діяльність не відбуватиметься. Лише власна діяльність виступає джерелом і засобом формування особистісних набутків (знань різної якості) людини.

До кожної вимоги за особистісно орієнтованою цільовою програмою може існувати два випадки: вона досягнута або не досягнута. *Обов'язковий мінімум знань* – це та критична межа, нижче якої стає неможливим духовний, світоглядний та інтелектуальний розвиток учня. Ця межа є похідною не від змісту освіти, а змісту навчально-пізнавальної діяльності з оволодіння конкретними фізичним знаннями [5, с.44]. Можливість недопущення низької якості знань забезпечується *систематичним контролем, орієнтованим на певний зразок дій*, який однаково чітко сприймається і вчителем, і учнем. Передувати цьому повинен ряд сприянь стосовно процесів навчання та самоосвіти: готовність до діяльності, оптимальна частота перевірок, індивідуалізація роботи над помилками, принцип максимальної вимогливості і поваги. Проектуючи еталони контролю для конкретної пізнавальної діяльності, потрібно забезпечити *оптимальне врахування факторів,* які впливають на її перебіг. До головних належать: *ціннісно-орієнтаційна значущість змісту пізнавальної задачі* (зміст пізнавальної задачі повинен мати значущість для учня, щоб він хотів її засвоїти)*, міжпредметні та внутрішні зв'язки предмета* (у відповідності з «питомою вагою» конкретної задачі, в загальній системі її зв'язків, призначається відповідний еталон засвоєння знань).

Залежно від структури розгортання навчально-пізнавальної задачі контроль навчальної діяльності учнів потрібно орієнтувати на комплекс цілей: навчальну, виховну і розвиваючу, що є основою для об'єктивізації контролю знань згідно еталонів. Враховуючи таку орієнтацію, учні повинні завчасно бути детально ознайомлені з вимогами кожного еталону, оскільки вони повинні навчитись самостійно оцінювати результати свого просування у навчанні, тобто їм повинна бути відома сутність оціночної діяльності вчителя. *Варіанти рівневих завдань можуть бути різними, але завжди відповідати тому, щоб учні могли виявити своє особистісне ставлення до об'єкту пізнання та готовність захищати власну світоглядну позицію*.

Ідеї оптимізації являють собою широку методологічну концепцію. Досягти оптимального результату вчитель-одиночка не зможе. Це головне завдання методистів, всього колективу вчителів, учнів. Важливим є і раціональне планування розкладу, і використання дня самоосвіти вчителя, і процес підготовки вчителя до уроку, який має бути оптимальним і включати регулярне накопичення матеріалів з різних носіїв інформації. Ідеї оптимізації органічно пов'язані з ідеями педагогіки і перестануть бути актуальними лише тоді, коли стануть нормою педагогічних дій. Тому найближчими актуальними завданнями на майбутнє мають бути наступні: методичні посібники повинні чітко вказувати завдання освіти, виховання і навчання; в методиках викладання предметів повинно бути по кілька варіантів вивчення особливо важких тем стосовно різних об'єктивних умов; диференціація навчання мала б здійснюватись відповідно до фіксованих результатів, тобто інтегральних діяльнісно-особистісних характеристик індивіда, які виконують у навчанні роль рівневих цілей. Запропонований нами підхід щодо організації і управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів з фізики, дозволяє оптимізувати таку діяльність і цілком виправдовує надії щодо покращення результативності навчання.

Список використаних джерел

1. Бабанський Ю.К.. Оптимизация учебной деятельности учащихся. М.: Просвещение, 1987. – 192 с.
2. Фіцула М.М.. Педагогіка: навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. – Київ.: Видавничий центр «Академія», 2002. –528 с.
3. Бабанський Ю.К.. Оптимизация педагогического процесса. В вопросах и ответах. М.: Просвещение, 1987. – 192 с.
4. Савченко О.Я. Набуття освітніх компетенцій учнями в процесі навчально-пізнавальної діяльності\\Педагогіка толерантності, 2001. – № 1.
5. Атаманчук П.С. Інноваційні технології управління навчанням фізики. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний педагогічний університет, інформаційно-видавничий відділ, 1999. – 174 с.
6. Концепція державного стандарту загальної середньої освіти в Україні та проект базового навчального плану середньої загальноосвітньої школи. –К.: Видавничий відділ «Компас», 1996. –15 с.

Possibilities of optimization of educational-cognitive activity of students are considered for providing of effectiveness of teaching from physics in the conditions of the personality oriented teaching on the basis of standard measuring devices of knowledges.

Key words: *optimization, personality the oriented teaching, standards, educational-cognitive activity, effectiveness of teaching.*

УДК 004.057.4

В.В.Понеділок, викладач,
М.О.Мястковська, викладач

МЕРЕЖЕВИЙ ПРОТОКОЛ SNMP

У статті описані основні можливості мережевого протоколу SNMP.
Ключові слова: *мережевий протокол, моніторинг, автоматизована система.*

Для мереж розроблено чимало протоколів, кожен з них несе певне функціональне навантаження, що визначається реалізацією стеку протоколів TCP/IP. Досить часто потрібен інструмент, який водночас є не тільки простим та зрозумілим, але й носив би сукупність засобів щодо моніторингу деякої структурованої кабельної мережі. Тому було вирішено зупинитись на протоколі SNMP (Простий Протокол Управління Мережі).

Це internet-стандартизований протокол для пристроїв, що обслуговують мережі IP, що забезпечує можливість контролювати стан маршрутизаторів, серверів, та інших частин структурованої мережі.

Крім даного функціоналу, система керування, побудована на протоколі SNMP, повинна виконувати низку функцій (незалежно від об’єкта керування), які визначені міжнародними стандартами та узагальнюють досвід застосування систем керування в різних областях. Існують рекомендації ITU-T X.700 і близький до них стандарт ISO 7498-4, які ділять задачі системи керування на п’ять функціональних груп:

- керування конфігурацію мережі;
- обробка помилок;
- аналіз продуктивності та надійності;
- керування безпекою;
- облік роботи мережі.

Сімейство стандартів SNMP створене для вирішення завдань обробки помилок і аналізу продуктивності та надійності структурованої системи:

- Обробка помилок — виявлення, визначення і усунення наслідків збоїв і відмов в роботі мережі. На цьому рівні виконується реєстрація повідомлень про помилки, їх фільтрація, маршрутизація та аналіз на основі деякої кореляційної моделі.
- Аналіз продуктивності та надійності — оцінка на основі статистичної інформації таких параметрів, як час реакції системи, пропускна спроможність каналів зв’язку, інтенсивність трафіку в окремих сегментах мережі, вірогідність спотворення даних, коефіцієнт готовності служб мережі. Результати такого аналізу дозволяють контролювати угоду про рівень обслуговування (Service Level Agreement, SLA).

Згідно ідеології SNMP, управління повинне бути простим, нехай навіть ціною втрати потужності, масштабованості та захищеності. Тому при розробці стандартів SNMP враховувалися наступні умови:

- Масовість. Системи під управлінням SNMP можуть бути будь-якими та можуть застосовуватися скрізь: від принтерів до мейнфреймів.
- Керована система обмежена у функціональності управління, дуже проста і не може контролювати себе.
- Стійкість в критичних ситуаціях. Наприклад, при перевантаженні та проблемі в мережі, тобто при великій кількості помилок.

Ще одною важливою перевагою протоколу SNMP є вирішення проблеми несумісності протоколів обміну. Ця перевага яскраво проявляється на підприємствах, де представлено обладнання різних виробників, кожен з яких пропонує свої засоби моніторингу і керування, несумісними як по протоколам обміну, так і у використаних програмних засобах. Також мережеві адаптери, відомі як SNMP-адаптери, крім передачі інформації в мережу по протоколу SNMP, можуть генерувати web-сторінки для більшої наочності звітів.

Модель SNMP складається з чотирьох компонентів:

- керованих вузлів;
- станцій управління (менеджерів);
- керуючої інформації;
- протоколу управління.

Керованими вузлами можуть бути комп’ютери, маршрутизатори, комутатори, принтери або будь-які інші пристрої, здатні повідомляти інформацію про свій стан. В базовій моделі вузол повинен виконувати процес SNMP, що управляє агентом SNMP. Кожен агент веде власну локальну базу даних про стан пристрою та історію подій.

Управління мережею здійснюється із станцій управління, які є комп’ютерами загального призначення із спеціальним програмним забезпеченням для управління. Станції управління можуть виконувати декілька процесів, що взаємодіють з агентами по мережі. В такій схемі вся складність зосереджена на станціях управління, з метою спрощення агентів для економії ресурсів пристроїв, на яких вони працюють.

SNMP найретельнішим чином описує, яку інформацію агент повинен збирати і в якому форматі її слід надавати. Таким чином, кожен пристрій підтримує декілька змінних з описом свого стану. Станції управління взаємодіють з агентами за допомогою протоколу SNMP. Він дозволяє станції отримувати значення локальних змінних агента і за необхідності змінювати їх.

Проте іноді в мережі можуть відбуватися небажані події. Керовані вузли можуть ламатися, лінії зв’язку — вийти з ладу і т.п. Як тільки агент помічає яку-небудь значну подію, він негайно повідомляє про неї всі станції з свого конфігураційного списку. Це повідомлення називається перериванням SNMP. Агент лише повідомляє про подію, а всі подробиці станція управління повинна з'ясовувати самостійно. Через ненадійність комунікацій між станцією і агентами (отримання повідомлень не підтверджується) кожна станція періодично проводить опитування керованих вузлів для виявлення незвичних подій.

Власне SNMP є протоколом, що реалізується на основі моделі: запит-відповідь, відповідно яких мережеві станції управління і агенти обмінюються інформацією між собою. Перша версія протоколу SNMP передбачає всього п'ять різних типів повідомлень. Три з них може відправляти менеджер агенту, а два інших — агент менеджеру.

Якщо в мережі нічого незвичайного не відбувається, то SNMP використовується менеджером для відправки агентові запиту з проханням передати запитану інформацію або з наказом змінити свій стан відповідно вказаного чину. Агент посилає у відповідь необхідну інформацію або підтверджує зміну свого стану. Проте агент може передати повідомлення про помилку, наприклад "змінна невизначена". У надзвичайних обставинах, зокрема при перевищенні порогу заданого значення, агент відправляє менеджерові певне переривання. Дані передаються з використанням синтаксису ASN.1.

Менеджер агенту може послати наступні три повідомлення: GetRequest, GetNextRequest і SetRequest. Перші два служать для запиту у агента значень конкретних змінних.

Агент може відправляти два різні повідомлення: одне з них — GetResponse — служить для відповіді (та підтвердження) на запит від менеджера, а друге — Trap — посилається при виявленні агентом зумовленої надзвичайної події.

Протоколом SNMPv2 вводиться ще два типи повідомлень. GetBulkRequest дозволяє отримати цілий масив змінних, наприклад таблицю, а InformRequest — одного менеджера повідомити іншому, якими змінними він керує.

Проблеми, які ймовірно будуть виникати під час роботи в деякій структурованій мережі можна подолати за допомогою протоколу SNMP. Замість дочекатися, щоб адміністратор виправив помилку власноруч, SNMP дозволяє контролювати мережу постійно. Наприклад, при виявлені значного числа помилкових пакетів при передачі даних, повідомить інтерфейс маршрутизатора, про наявність проблеми та можливість автоматичного її вирішення.

SNMP надає нам можливість весь час тримати мережу під контролем, а також попередити вихід з ладу устаткування.

Список використаних джерел

1. Douglas Mauro, Kevin Schmidt. Essential SNMP. Publisher: O'Reilly
2. X.700-series OSI Systems Management Implementers' Guide
3. Information processing systems — Open Systems Interconnection — Basic Reference Model — Part 4: Management framework

In the articles described basic properties of network protocol SNMP.

Key words: *network protocol, monitoring, AS.*

УДК 372. 853

Рачковський О.М., старший викладач

ВПРОВАДЖЕННЯ БОЛОНСЬКОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ В КУРС ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

В статті розглянуті питання використання у навчальному процесі з загальної фізики кредитно-модульної системи на прикладі розділу «Механіка». Описані методи та прийоми подання знань, перевірка та оцінювання результатів навчання.

Ключові слова: *модуль, лекції, практичні, лабораторні, індивідуальні завдання.*

Особливість вивчення фізики у ВНЗ полягає в тому, що студенти мають оволодіти системою вмінь і навичок, які б давали можливість ефективно передавати знання наступним поколінням, виховувати в них допитливість, інтерес до знань, любов до творчої праці. Вивчення теоретичного матеріалу супроводжується формуванням умінь їх застосування для аналізу та розрахунку параметрів перебігу механічних процесів а також виробленню навичок експериментальної реалізації різних видів руху, вивчення їх особливостей та перевірки основних законів. Самостійна робота передбачає поглиблення теоретичних знань, аналіз сучасного стану використання фізики для практичних потреб людства та тренування у застосуванні теоретичних моделей до пояснення різних механічних явищ.

Лекційний курс призначений для ознайомлення з основними теоретичними положеннями, він розбивається на три змістовних модулі. Кожен модуль включає матеріал окремих тем розділу «Механіка». Практичні заняття застосовуються для вироблення навичок застосування теоретичних знань у розрахунку особливостей перебігу механічних явищ, які також поділяються на три модулі. Закріплення теоретично матеріалу відбувається шляхом розв’язування задач еталонного характеру різного типу. В кінці практичного заняття подається завдання до дому для закріплення матеріалу. При завершенні вивчення модуля студенти пишуть контрольну роботу, яка оцінюється 1-5 балів. В загальному за практичний курс студенти набирають до 20 балів. Лабораторний практикум призначений для перевірки основних законів, а також вироблення вмінь експериментальних досліджень та вимірювань, необхідних у подальшій практичній роботі, обробки результатів, їх графічного або табличного подання, аналізу отриманих результатів, а також допомагає наочно побачити та зрозуміти явища природи та їх закономірність, засвоїти фізичні поняття та закони, глибше ознайомитись з методикою вимірювання фізичних величин та спостереження фізичних процесів [1, 2].

Для успішного проведення лабораторної роботи студент повинен пройти кілька етапів підготовки. Тому, насамперед, потрібно уважно ознайомитись зі змістом завдання. Виявнити завдання та мету роботи, а також на достатньому рівні засвоїти теоретичний матеріал, який стосується тієї чи іншої роботи.

Наступний етап виконання лабораторної роботи потребує не лише засвоєння теоретичного матеріалу, але й потребує тренування і певних навичок. Лабораторна робота вимагає добросовісного ставлення до кожного вимірюваного результату, і є результатом, індивідуальним для кожного дослідника. Тому кожен студент повинен намагатися одержати не просто табличні дані, або дані своїх колег, а провести експеримент з такою точністю, щоб бути впевненим у правильності виконаних вимірювань.

Студент повинен не лише виконати роботу, але точно та правильно виміряти вимірювальними приладами шукані величини. На подальшому етапі потрібно обчислити експериментальні похибки та побудувати при потребі графік або замалювати картину досліджуваного процесу.

Під час лабораторного практикуму студенти виконують 18 лабораторних робіт, які оцінюються 1-2,5 бали. На завершальному етапі за лабораторний практикум студенти набирають до 25 балів.

Самостійна робота з опрацювання окремих питань теоретичного характеру, виконання домашніх завдань, підготовки до практичних і лабораторних занять, оформлення результатів вимірювань передбачає поглиблення і деталізацію теоретичних знань, аналіз сучасного стану використання фізики для практичних потреб людства та тренування у застосуванні теоретичних моделей до пояснення різних механічних явищ.

Індивідуальні завдання призначені для виконання творчої роботи з оцінки сучасних питань застосування фізичних явищ, розв’язування задач якісного і кількісного характеру. Для виконання індивідуальних завдань розроблені три навчально-методичні посібники (три модулі). Вони призначені для вивчення теоретичного матеріалу та виконання індивідуальних завдань за поданими зразками.

Перші частини навчально-методичних посібників містять теоретичні відомості основних питань та фізичні величини, що допомагає студентам закріпити та доповнити знання, набуті у лекційному курсі та при самостійному опрацюванні матеріалів з кожної теми.

Наступними елементами цих посібників є індивідуальні завдання, розроблені за варіантами для кожного студента з різними ступенями складності: теоретичні, практичні та тестові. Це дає змогу студентам поступово заглиблюватися у зміст предмету. Завдання супроводжуються прикладами розв’язку задач та довідковими дані, які потрібні для виконання завдань.

Після виконання трьох індивідуальних завдань студенти набирають до 15 балів. В загальному результаті студент при успішному виконанні всіх поставлених завдань набирає 60 балів. В разі малої кількості балів студент може або повторно звітувати за окремі модулі, або ж отримати додаткових 40 балів іспитовим контролем.

Список використаних джерел

1. Винниченко В.Є. Фізичний практикум. –К.: Радянська школа, 1950. – 296 с.

2. Рачковський О.М. Роль комп’ютерних технологій у постановці лабораторного практикуму з курсу фізики /Збірник наукових праць Кам’янець-Подільського державного університету. Серія педагогічна. Випуск 10. – Кам’янець-Подільський: інформаційно-видавничий відділ, 2004. – С. 128-129.

3. Нісімчук А.С., Падалка О.С., Шпак О.Т. Сучасні педагогічні технології: Навчальний посібник. –К.: Просвіта. Пошуково-видавниче агентство “Книга Пам’яті України”, 2000. -368 с.

In the article the questions of the use in an educational process from general physics of the credit-module system is considered, on the example of section of «Mechanic». Methods and receptions of knowledge representation, verification and evaluation of results of teaching are described.

***Key words**: module, lectures, practical, laboratory, individual tasks.*

УДК: 372.853

М.О.Роздобудько, аспірант

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ СТУДЕНТІВ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ФІЗИКИ

У статті розглянуто основні методи застосування комп'ютерних моделей при викладанні фізики.

Ключові слова: *модель, комп'ютер, студент, інформація.*

На сьогодні вищим пріоритетом в освіті стає розвиток у студентів творчих здібностей, уміння нестандартно мислити і вирішувати завдання підвищеної складності, швидко засвоювати нову інформацію, її переосмислювати і застосовувати на практиці.[3]

Уміння оперативно переробляти і оцінювати інформацію, що поступає, приводить до зростання значущості розвитку критичного мислення студентів в навчальному закладі. Оскільки в процесі навчання студенти повинні не тільки запам'ятовувати великі обсяги інформації, але перш за все уміти виділяти суттєве в матеріалі, що вивчається, виявляти суперечності знаходити помилки, аналізувати причини, що породжують ці помилки, застосовувати оптимальний спосіб вирішення учбових проблем. В зв'язку з цим актуальним є питання про формування у студентів критичного мислення.

Великим потенціалом для формування критичного мислення володіє процес вивчення фізики, оскільки в ході роботи надаються можливості здійснювати активну пізнавальну діяльність, що припускає самостійне отримання і аналіз результатів; діалогову форму організації пошукової діяльності і вирішення завдань будь-якої складності. [4]В процесі навчання фізиці доцільно створювати ситуації, при яких розумові і логічні операції (аналіз і синтез, абстрагування і узагальнення, порівняння і аналогія, класифікації) систематично використовуються в ході учбового процесу, і стають предметом цілеспрямованого вивчення.

Перераховані методи пізнання найуспішніше використовувати при створенні моделей, їх аналізі і оцінці. Для цього необхідно використовувати як натурні моделі, так і віртуальні. Створення моделей фізичних процесів розвивається спільно із збільшенням якісних методів дослідження. І в цьому випадку їх розвитку сприяє впровадження інформаційних технологій. Нові інформаційні технології припускають широке використання комп'ютерів, що дозволяють вирішувати ряд завдань, з них можна виділити – створення комп'ютерних моделей фізичних явищ, які з ряду причин неможливо показати натурно. Застосування комп'ютерних моделей для формування критичного мислення актуально в наступних випадках, коли:

1. Використання комп'ютерних моделей, дозволяє демонструвати явища, які безпосередньо не можуть стати предметом спостереження учнів в ході уроку; моделювання безпосередньо не спостережуваних процесів і явищ, в ході чого в студентів виникає інтерес, а як слідство підвищується мотивація до подальшого вивчення питання.

2. Створюються комп'ютерні моделі, із заздалегідь закладеною в ній фізичною помилкою, щоб у студентів була можливість самостійної перевірки достовірності своїх міркувань, на основі інформації, що вже є у них.

3. Застосовуються комп'ютерні моделі, у яких можливий вибір початкових даних і встановлення меж застосовності. Залежно від параметрів моделі і встановлюваних

меж застосовності властивості моделі, що задаються, міняються [2].

Розвиток критичного мислення при вивченні фізики з використанням комп'ютерних моделей доцільно здійснювати з використанням узагальненого плану діяльності для школярів при роботі з комп'ютерними моделями.

Основні методи, які дозволять вчителеві, використовуючи комп'ютерні моделі, сформувати критичне мислення в учнів полягають в умінні виділяти істотне в об'єкті, що вивчається, виявляти суперечності, знаходитипомилки, аналізувати причини, що породжують ці помилки, знаходити оптимальний спосіб вирішення учбових проблем, висловлювати свою думку. Студенти при роботі з комп'ютерними моделями по запропонованому плану поступово освоюють на практиці методи формування критичного мислення, вчаться не просто спостерігати картинку на екрані, а формують уміння оцінювати і аналізувати.

Основними елементами узагальненого плану є:

• формулювання мети (з якою демонструється модель);

• постановка питань для прояснення сенсу моделі, що вивчається, і відповідей на ці питання;

• облік всіх істотних умов при розгляді моделі;

• знаходження логічних помилок у висловах, аналіз аргументів на точність демонстрованої моделі;

• оцінювання достовірності джерела, з якого була узята демонстрована модель;

• наведення прикладу того, де ще може бути використана комп'ютерна модель і обґрунтування застосуванняв цих випадках;

• обґрунтування власної думки, конструктивна взаємодія з іншими студентами (розгляд і прийняття інших точок зору).

Запропонований узагальнений план діяльності студентів дозволяє цілеспрямовано формувати критичне мислення студенів особливо на ранніх етапах. Це обумовлено тим, що у студентів ще не сформовано чітке уявлення про критичне мислення, і їм необхідно показати способи його формування.

Для комплексної оцінки визначення рівня сформованості критичного мислення при використанні комп'ютерних моделей як кількісні показники були виділені критерії: об'єм виконуваних дій, частка самостійності в діяльності студентів, аргументованість і послідовність дій [1]. Запропоновану методику, по формуванню критичного мислення у студентів доцільно реалізовувати безперервно протягом всього розділу вивчення учбової теми або впродовж учбового семестру.

Застосування нашої методики протягом трьох років дозволяє говорити про ефективності формування у студентів самостійності при оцінюванні своєї діяльності за допомогою створених комп'ютерних моделей; підвищенню об'єктивності при аналізі результатів своєї праці, а також критичному осмисленню отримуваної інформації.

Список використаних джерел

1. Ананьин В. «Эврика» в Интернете. Интеграция электронных средств коммуникации и образования // Управление школой. – 2001. - № 42. – С.16.
2. Информационные технологии в образовании – шаг в будущее // Учитель. – 2002. - № 4. – С.53.
3. Матіюк Л. Інтернет у сучасній системі освіти // Студентські наукові студії. Вип..1. – Миколаїв, 2001. – С.155-156.
4. Сосницька Н.Л. Удосконалення навчального експерименту з хвильової оптики засобами нових інформаційних технологій: Дисертація кандидата педагогічних наук: 13.00.02 / НПУ ім. Драгоманова. - 1998.- 272 с.
5. Гуржій А.М., Жук Ю.О., Волинський В.П., Засоби навчання: навчальний посібник. – К.,ІЗМН, 1997.
6. Хейг М. Электронный Public Relations.- М., 2002.

In the article the basic methods of application of computer models are considered at teaching of physics.

Key words: *model, computer, student, information*

УДК 681.142.2

Л.О.Сморжевський, кандидат педагогічних наук, доцент,
Ю.Л.Сморжевський, викладач

ПРО МЕТОДИКУ РОЗРОБКИ І ВИКОРИСТАННЯ ДИДАКТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ РІВНЕВОГО НАВЧАННЯ УЧНІВ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ В 10 – 11 КЛАСАХ

В статті розглянуто методику розробки і використання дидактичних матеріалів для рівневого навчання учнів алгебри і початків аналізу на прикладі теми „Показникові функція”.
Ключові слова: *рівневе навчання, показникова функція, показникові рівняння і нерівності.*

Залежно від ступеня компетентності учня розрізняють такі чотири рівні навчальних досягнень: початковий, середній, достатній, високий. Розроблені Міністерством освіти і науки України і опубліковані в журналі “Математика в школі” [1] критерії дають змогу оцінювати навчальні досягнення учнів за 12-бальною шкалою оцінювання.

Вже дев’ятий рік загальноосвітні школи користуються 12-бальною шкалою оцінювання навчальних досягнень учнів. Однак практика роботи шкіл показує, що перехід до нової, більш досконалої системи оцінювання навчальних досягнень учнів носить, на жаль, формальний характер. Причиною цього є невідповідність шкільних підручників сучасним принципам організації навчально-виховного процесу в школі, відсутність методичних розробок, які б дозволили вчителю організувати рівневе навчання, без якого неможливо перейти на 12-бальну шкалу оцінювання навчальних досягнень учнів.

Нині діючі шкільні підручники з математики, зокрема, з алгебри і початків аналізу ([2], [3]), не орієнтовані на чотирьохрівневе навчання учнів математиці. Тому вчителю важко перейти на 12-бальну шкалу оцінювання навчальних досягнень учнів.

Виходячи з вищесказаного, ми розробили дидактичні матеріали, які допоможуть вчителям математики успішно здійснювати рівневе навчання учнів алгебри і початків аналізу, використовуючи 12-бальну шкалу оцінювання навчальних досягнень учнів. При розробці дидактичних рівневих завдань за навчальну тему брали параграф діючих підручників “Алгебра і початки аналізу” ([2], [3]).

До кожного розділу подано зразок контрольної роботи для тематичного оцінювання навчальних досягнень учнів. Кількість завдань для тематичного оцінювання кожного рівня і критерії оцінювання навчальних досягнень учнів за їх розв’язання подано в наведеній нижче таблиці 1.

Наведемо для зразка дидактичні матеріали для теми „Розв’язування показникових рівнянь і нерівностей” та тематичну перевірочну роботу до розділу IV “Показникова функція” (10 клас).

I

1. Розв’язати рівняння:

1) $5^x = 5$; 2) $2^x = 4$; 3) $4^x = 16$; 4) $10^x = 100$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4}{3}$; 7) $7^{x-4} = 49$; 8) $3^x = \frac{1}{3}$;

9) $3^{x-1} = \frac{1}{3}$; 10) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$; 11) $5^{2x-1} = 5^3$; 12) $2^x = 1$.

Таблиця 1

Рівні навчальних досягнень учнів	Кількість завдань	Кількість вірно розв'язаних завдань	Бали
I	10	5 – 6 7 – 8 9 – 10	1 2 3
II	6	4 5 6	4 5 6
III	5	3 4 5	7 8 9
IV	4	2 3 4	10 11 12

2. Які з пар (1; 0) і (0; 1) є розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 3, \\ 5^{x-y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 4, \\ 5^{x+y} = 5; \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 5^{x+y} = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 5^{x+y} = 25; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 3^{x-y} = 81; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ 4^{x-y} = 4; \end{cases}$

4. Розв'язати нерівності:

1) $2^x > 2^2$; 2) $4^x \le 4$; 3) $3^{2x} \ge 3$; 4) $5^{4x} < 25$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{2}$ 6) $4^{-x} \le 16$; 7) $6^{5-x} \ge 36$; 8) $3^x > \frac{1}{3}$;

9) $2^{2x} < 8$; 10) $(0{,}3)^{x+3} < 0{,}3$.

5. Температура тіла змінюється за законом $T = \left(\frac{1}{3}\right)^t$, де t – час, T – температура. Чи може температура бути рівна нулю в цьому випадку?

6. В залежності від температури швидкість руху матеріальної точки змінюється за законом: $\upsilon = 1{,}01^T$, де υ – швидкість, T – температура. При якій температурі швидкість точки рівна 1?

II

1. Розв'язати рівняння:

1) $25^{-x} = \frac{1}{5}$; 2) $8^x = 16$; 3) $0{,}5^x = \frac{1}{64}$; 4) $27 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

5) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{27}$; 6) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$; 7) $3^{x^2-x-2} = 81$; 8) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x-5} = 25$.

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3^x - 7^y = 2, \\ 3^x + 7^y = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-y} = 25, \\ 3^{9x-y} = \sqrt{7}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1. \end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

1) $4^x \ge 64$; 2) $25^{-x} > \frac{1}{5}$; 3) $8^x < 16$;

4) $0{,}5^x < \frac{1}{64}$; 5) $27 > \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 6) $2^x < 1$.

4. За сприятливих умов кількість гілок в деяких коралових рифах збільшується за законом $y = 3^{x+2}$, де y – кількість гілок, які утворюються через x століть. Через скільки років одна гілка розростеться в корал з 729 гілками?

5. Метелик, злітаючи з квітки, летить по траєкторії, яку можна описати рівнянням: $S = \frac{1}{8}2^{4t-3}$. Через скільки секунд метелик пролетить відстань 64 см?

III

1. Розв'язати рівняння:

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^3-9x} = 1$; 2) $\sqrt{2^x \cdot 3^x} = 30$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{2}{6}$;

4) $5^x + \frac{125}{5^x} = 30$; 5) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; 6) $3^{x+1} - 4 \cdot 2^{x+1} \cdot 7 \cdot 5^{x+1} = 0$.

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 125, \\ 5^x + 5^y = 30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{2^x} - 3^y = -7, \\ 2^x - 3^y = -5. \end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

1) $2^{9x-x^3} > 1$; 2) $2^{9x-x^3} < 1$; 3) $2{,}56^{\sqrt{x+1}} \ge \left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x+1}}$;

4) $(0{,}4)^{x^2-x-20} > 1$; 5) $1{,}6^{\frac{2x+1}{3}} - 6^{\frac{1}{3}} \cdot (0{,}2)^{2} > 0$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x+8} < \frac{1}{9}$.

4. Собівартість продукції на одному підприємстві знижується за законом: $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2}$, а на другому – за законом: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{8-2x}$, де x – ціна матеріалу за одиницю продукції. В яких межах може змінюватися ціна x, щоб собівартість продукції на другому підприємстві знижувалась швидше, ніж на першому?

5. На одному заводі продуктивність праці зростає за законом: $y = 3^{x^2}$, а на другому – за законом: $y = 3^{x+6}$, де x – час в роках. Протягом якого часу продуктивність праці на другому заводі перевищуватиме продуктивність праці на першому заводі?

IV

1. Розв'язати рівняння:

1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$; 2) $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$; 3) $(x-3)^{x^2} = (x-3)^{x}$;

4) $3^{x+1}-13^{x-1}-13^{x-2}=5^{x}-15^{x-1}-15^{x-2}$; 5) $\sqrt[x]{4}+2\sqrt[x]{6}+\sqrt[x]{9}=6$.

2. Розв’язати систему рівнянь:

7. $\begin{cases} 3^{x}\cdot 5^{y}=75, \\ 3^{y}\cdot 5^{x}=45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2x-1}\cdot 27^{x+y}=3, \\ (5x-y)^{2}=36; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4^{\sin x}+3^{\frac{1}{\cos y}}=11, \\ 5\cdot 16^{\sin x}-2\cdot 3^{\frac{1}{\cos y}}=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2^{x}+2^{y}+2^{z}=7, \\ 2^{-x}+2^{-y}+2^{-z}=\frac{7}{4}, \\ x+y+z=3. \end{cases}$

3. Розв’язати нерівності:

1) $\frac{4^{x}-2^{x+1}+8}{2^{1-x}}<8^{x}$; 2) $6{,}3^{\frac{x-3}{x^{2}+6x+11}}<1$;

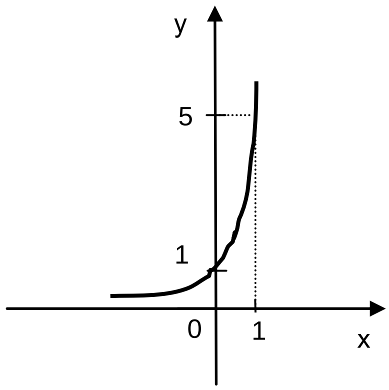
3) $|x|^{x^{2}-x-2}<1$; 4) $(4x^{2}+2x+1)^{x^{2}-x}>1$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+7|}<\left(\frac{1}{2}\right)^{|x^{2}-3x+2|}$

4. Ріст ялини відбувається за законом: $y=3^{x+2}-3^{x+1}$, а берези – $y=3^{x}$, де y – висота дерева в метрах, x – час в роках. Протягом якого часу висота ялини і берези разом не перевищуватиме 21 м?

Тематична перевірочна робота

І рівень	**Кількість завдань**	**9 – 10**	**7 – 8**	**5 – 6**
	Бали	“3”	“2”	“1”



1. Графік якої функції зображено на малюнку?

а) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$; б) $y=5^{x}$;

в) $y=\frac{x}{5}$; г) $y=\frac{5}{x}$.

2. Яка з функцій $y=(1{,}4)^{x}$, $y=(\sqrt{2}+1)^{x}$, $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$, $y=(7{,}2)^{x}$ є спадною?

3. В якій точці перетинаються графіки функцій $y=4^{x}$ і $y=16$:

а) A (2; 4); б) Б (16; 2); в) C (2; 16); г) D (1; 16).

4. Розв’язати рівняння:

а) $3^{x}=27$; б) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x}=\frac{6}{5}$; в) $10^{x+4}=100$.

5. Яка з нерівностей а – г є правильною?

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; б) $6{,}1^{0{,}7}>6{,}1^{0{,}8}$; в) $0{,}4^{1{,}7}>0{,}4^{1{,}5}$; г) $5^{0{,}9}>5^{0{,}8}$.

6. Розв’язати нерівності:

а) $2^{2x}\le 2^{6}$; б) $(0{,}3)^{x}>0{,}3$.

7. Температура тіла змінюється за законом: $T=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$, де t – час, T – температура. Чи може температура бути рівною нулю в цьому випадку?

II рівень	Кількість завдань	6	5	4
	Бали	“4”	“5”	“4”

1. Зобразити схематично графік функції $y=(\sin 30^\circ)^x$.
2. Розв’язати рівняння:

а) $3^x=1$; б) $2^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ в) $9^{-x}=27$.

3. Розв’язати нерівності:

а) $\left(\frac{1}{8}\right)^x \ge \frac{1}{64}$; б) $2^{4x}<16$.

III рівень	Кількість завдань	5	4	3
	Бали	“9”	“8”	“7”

1. Зобразити схематично графік функції $y=2^{|x|}+1$.
2. Знайти абсцису точки перетину графіків функцій $y=3^{x^2+1}$, $y=9^{5x-12}$, не будуючи їх.
3. При яких значеннях x вираз $49^x+6\cdot 7^x$ дорівнює 7.
4. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3^x+3^y=28; \\ x-y=3. \end{cases}$.
5. Розв’язати нерівність $(0,3)^{x^2-2x+2} \le 0,09$.

IV рівень	Кількість завдань	4	3	2
	Бали	“12”	“11”	“10”

1. Побудувати графік функції $y=\left|2^{|x|}-2\right|$.
2. Розв’язати рівняння: $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.
3. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3^{2x-1}\cdot 3^{y+x}=9^{0,5}; \\ 3x+y^2=4. \end{cases}$.
4. Розв’язати нерівність $\left(4^{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}>4$.

Експериментальна перевірка підтверджує, що розроблені рівневі дидактичні матеріали і перевірочні роботи сприяють розвитку в учнів стійкого інтересу до вивчення математики, формуванню рівневих знань, їх об’єктивній перевірці, а вчителям математики допомагають об’єктивно оцінювати навчальні досягнення учнів з курсу алгебри і початків аналізу, користуючись 12-бальною шкалою оцінювання.

Список використаної джерел

1. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти // Математика в школі. № 4, 2001 р., с. 7 – 9.
2. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Зодіак - ЕКО, 2002. – 272 с.
3. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Зодіак - ЕКО, 2002. – 384 с.

In the article the method of development and use of didactics materials is considered for the level studies of students of algebra and beginnings of analysis on the example of theme „Index function”.

Key words: *level studies, index function, to the index of equalization and inequality.*

УДК 517.5

В.А.Сорич, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Н.М.Сорич, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
А.В.Сорич, здобувач Інституту математики НАН України

НЕРІВНІСТЬ ЛЕБЕГА ДЛЯ ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ ЯДЕР ПУАССОНА

Одержано нерівність типу Лебега для лінійної комбінації ядер Пуассона в просторі $L_p,\ p \geq 1$.

Ключові слова: *ядро Пуассона, лінійна комбінація, нерівність Лебега.*

Позначення та основні результати.

Нехай $f(\cdot) - 2\pi$ – періодична інтегровна на $(0,2\pi)$ функція $(f \epsilon L)$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

– її ряд Фур'є.

Інтегралом Пуассона функції $\varphi \epsilon L$ називають функцію $f(x)$, яку можна записати у вигляді:

$$f(x) = \mathcal{I}_{\beta}^{q}(\varphi, x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, \mathcal{P}_{\beta}^{q}(t)dt, \qquad (2)$$

де

$$\mathcal{P}_{\beta}^{q}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

– ядро Пуассона з параметрами $q \epsilon (0,1)$ і $\beta \in \mathcal{R}$.

Множину всіх функцій , що подаються у вигляді (2) при $\varphi \in L$, позначають через L_{β}^{q}; множину функцій, що подаються у вигляді (2) при $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина із L, позначають через $L_{\beta}^{q}\mathfrak{N}$ (так, що при $\mathfrak{N} = L$ $L_{\beta}^{q}\mathfrak{N} = L_{\beta}^{q}$). Функцію $\varphi(\cdot)$ в рівності (2) інколи зручно позначати через $f_{\beta}^{(q)}(\cdot)$ та називати (q, β) – похідною функції $f(\cdot)$.

Нехай, далі, числа $q_1, q_2, \dots, q_m$, q підпорядковані умові $0 < q < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m \leq 1$, а $\beta_i \epsilon \mathcal{R}$, $i = \overline{1,m}$. Позначимо через $\sum_{n,m}(f; x; \bar{c})$ наступну суму

$$\sum\nolimits_{n,m}(f; x; \bar{c}) = \sum_{i=1}^{m} c_i(n)\left(f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - S_{n-1}\left(f_{\beta_i}^{(q_i)}; x\right)\right), n \epsilon \mathcal{N},$$

де $S_n(f; x)$ – частинна сума порядку n ряду Фур'є функції $f(x)$, $\bar{c} = \left(c_1(n), c_2(n), \dots, c_m(n)\right)$ – довільні сталі, а $f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - (q_i, \beta_i)$ – похідні функції $f(x)$ в сенсі Степанця, які означаються наступним чином: якщо $S[f]$ в (1) ряд Фур'є функції $f(x)$, то

$$f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_i^{-k}\left(a_k(f)\cos\left(kx + \frac{\beta_i\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx + \frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right)$$

(див., напр., [1, с. 25] $\psi(k) = q_i^{-k}$).

Через $L_p, 1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір функцій $f \epsilon L$ із нормою $\|f\|_p$, де при $p \epsilon [1, \infty)$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

тоді $L_1 = L$, а при $p = \infty$ $\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_M = \operatorname{ess\,sup}|f(t)|$.

Одиничну кулю в L_p позначимо через U_p, де $U_p = \{f: f \epsilon L_p, \|f\|_p \leq 1\}$, а також покладемо $L_\beta^q U_p$=$L_{\beta,p}^q$.

Підмножину неперервних функцій із множини L позначимо через C; $\|\cdot\|_c$– норма в просторі C:

$$\|f\|_c = \max_t |f(t)|.$$

Зазначимо також (див. напр., [2, с. 88]), що функції, які записуються у вигляді рівності (2), допускають аналітичне продовження до функції $f(z) = f(x+iy)$, аналітичної в смузі $|y| \leq \ln\frac{1}{q}$.

Простір тригонометричних многочленів $t_{n-2}(\cdot)$, степінь яких не вищий за $n-1$, позначимо через $\mathcal{T}_{2n-1}$, а величину:

$$E_n(f)_p = \underset{t_{n-1}\epsilon\mathcal{T}_{2n-1}}{Inf} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_p$$

назвемо найкращим наближенням $f(\cdot)$ в просторі L_p тригонометричними многочленами із $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Позначимо

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x). \tag{3}$$

Якщо функцію $f(x)$ можна подати у вигляді інтеграла Пуассона вигляду (2), то її (q_i, β_i) – похідна (див., напр., [1, с. 36]) подається наступним чином

$$f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x+t)\, \mathcal{P}_{\beta-\beta_i}^{\frac{q}{q_i}}(t)dt. \tag{4}$$

Нехай константи $c_i(n)$ $m-$ вимірного вектора $\bar{c}$ мають вигляд $c_i(n) = q_i^n$. В роботі досліджується відхилення лінійної комбінації інтегралів Пуассона від сум Фур'є, а саме

$$\sum\nolimits_{n,m}(f;x;\bar{c}) = \sum_{i=1}^m q_i^n \cdot f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - S_{n-1}\left(\sum_{i=1}^m q_i^n \cdot f_{\beta_i}^{(q_i)};x\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m q_i^n \left(f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - S_{n-1}\left(f_{\beta_i}^{(q_i)};x\right)\right), n\epsilon\mathcal{N}. \tag{5}$$

Введемо позначення

$$F(x;\bar{q}) = \sum_{i=1}^m q_i^{(n)} f_{\beta_i}^{(q_i)}(x).$$

Тоді рівність (5) можна записати

$$\sum\nolimits_{n,m}(f;x;\bar{c}) = \rho_n(F;x) = F(x;\bar{q}) - S_{n-1}(F;x). \tag{6}$$

Основні результати містяться в наступному твердженні.

Теорема. Нехай $q\epsilon(0,1)$, числа q_i, $i = \overline{1,m}$ підпорядковані співвідношенням $0 < q < q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_m \leq 1$, а $\beta_i\epsilon\mathcal{R}$, $i = \overline{1,m}$ і $p \geq 1$. Тоді для довільної функції $f\epsilon L_\beta^q L_p$ справедлива асимптотична нерівність

$$\|\rho_n(F;x)\|_p \leq \left(\frac{8q^n}{\pi^2}\sum_{i=1}^m \mathcal{H}\left(\frac{q}{q_i}\right) + \sum_{i=1}^m O(1)\cdot\frac{q^n}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2 n}\right) E_n\left(f_\beta^q\right)_p,$$

в якій $\mathcal{K}\left(\frac{q}{q_i}\right)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду:

$$\mathcal{K}\left(\frac{q}{q_i}\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-\left(\frac{q}{q_i}\right)^2 sin^2u}},$$

а $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена відносно параметрів $q,\ q_i,\beta,\beta_i,\ p,n$ та відносно $f\epsilon L^q_\beta L_p$.

Нерівності такого вигляду для інших класів функцій доведені в [3] та [4]. Там же звернено увагу та те, що такі нерівності є точними на деяких важливих підмножинах досліджуваних функцій. Пригадаємо декілька таких випадків нерівностей.

Якщо $f\epsilon L^q_{\beta,p}$, то $\left\|f^q_\beta\right\|_p\le 1$ і, отже, $E_n\left(f^q_\beta\right)_p\le 1$. Розглядаючи верхні межі обох частин нерівності теореми на множині $L^q_{\beta,p}$, отримаємо при $m=1$

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_p=\sup_{f\epsilon L^q_{\beta,p}}\|\rho_n(F;x)\|_p\le\frac{8q^n}{\pi^2}\cdot\mathcal{K}\left(\frac{q}{q_1}\right)+O(1)\cdot\frac{q^n}{\left(1-\frac{q}{q_1}\right)^2\cdot n},$$

яка при $q_1=1$ співпадає із результатами О.І. Степанця, А.С. Сердюка (див. [4, с. 799]). Співставляючи же останнє співвідношення із результатами С.М. Нікольського (див. [3, с. 221], див. також [6;1, с. 126]), який довів, що

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,p}\right)_p=\frac{8q^n}{\pi^2}\cdot\mathcal{K}(q)+\frac{O(1)q^n}{n},\qquad p=1,\ p=\infty,$$

робимо висновок, що при $p=1$ і $p=\infty$ нерівність в теоремі перетворюється в рівність.

Доведення теореми. Якщо $f\epsilon L^q_\beta$, то внаслідок (2), (4) та (6)

$$\rho_n(F,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(q)}_\beta(x+t)\,\mathcal{P}_n(t,\bar{q},\bar{\beta})dt,$$

де

$$\mathcal{P}_n(t,\bar{q},\bar{\beta})=\sum_{i=1}^{m}q_i^n\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{q}{q_i}\right)^k cos\left(kt+\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right).\tag{7}$$

Функція $\mathcal{P}_n(t,\bar{q},\bar{\beta})$ ортогональна кожному многочлену $t_{n-1}\,\epsilon\,\mathcal{T}_{2n-1}$. А тому

$$\rho_n(F;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta_n(x+t)\mathcal{P}_n(t,\bar{q},\bar{\beta})dt,\delta_n(t)=f^q_\beta(t)-t_{n-1}(t),\tag{8}$$

де

$$t_{n-1}(\cdot)\,\epsilon\,\mathcal{T}_{2n-1}.$$

Далі в силу (7) маємо

$$\mathcal{P}_n(t,\bar{q},\bar{\beta})=q^n\left[g(t)cos\left(nt+\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right)-h(t)sin\left(nt+\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right)\right],$$

де

$$g(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{q_i}\right)^k coskt=\sum_{i=1}^{m}\frac{1-\frac{q}{q_i}cost}{1-2\frac{q}{q_i}cost+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2},\tag{9}$$

$$h(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q}{q_i}\right)^k sinkt=\sum_{i=1}^{m}\frac{\frac{q}{q_i}sint}{1-2\frac{q}{q_i}cost+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2}.\tag{9'}$$

Таким чином,

$$\mathcal{P}_n(t,\bar{q},\bar{\beta}) = q^n\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{P_{q_i}(t)}\left(1-\frac{q}{q_i}cost\right)cos\left(nt+\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{P_{q_i}(t)}\frac{q}{q_i}sint\cdot sin\left(nt+\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right)\right), \qquad (10)$$

де

$$P_{q_i}(t) = 1-2\frac{q}{q_i}cost+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2. \qquad (11)$$

Зауважимо, що

$$\left(1-\frac{q}{q_i}cost\right)^2+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2 sin^2t = P_{q_i}(t).$$

Тоді визначимо функцію $\theta_i(t)$ рівностями

$$\frac{1-\frac{q}{q_i}cost}{\sqrt{P_{q_i}(t)}} = cos\theta_i(t), \quad \frac{\frac{q}{q_i}sint}{\sqrt{P_{q_i}(t)}} = sin\theta_i(t),$$

а, отже,

$$\theta_i(t) = arctg\frac{\frac{q}{q_i}sint}{1-\frac{q}{q_i}cost}. \qquad (12)$$

Тоді в силу (10)

$$\mathcal{P}_n(t,\bar{q},\bar{\beta}) = q^n\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{P_{q_i}(t)}}cos\left(nt+\theta_i(t)+\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right)\right). \qquad (13)$$

Об'єднуючи (8) і (13), знаходимо

$$\rho_n(F;x) = \frac{q^n}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta_n(x+t)\sum_{i=1}^{m}\frac{cos\left(nt+\theta_i(t)+\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right)}{\sqrt{P_{q_i}(t)}}dt. \qquad (14)$$

Права частина в (14) є 4-и періодичною функцією по параметру $\beta-\beta_i$. Тому в подальшому будемо вважати, що $\beta-\beta_i \in [0,4)$.

Покладемо

$$\tau(t) = y_i^1(t) = t+\frac{\theta_i(t)+t+\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi}{n-1}, n\geq 2. \qquad (15)$$

Враховуючи рівність (12), маємо

$$(y_i^1(t))' = 1+\frac{1-\frac{q}{q_i}cost}{(n-1)P_{q_i}(t)} = \frac{P_{q_i,n}(t)}{P_{q_i}(t)},$$

де

$$P_{q_i,n}(t) = \frac{n}{n-1}-\frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{q}{q_i}\cdot cost+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2. \qquad (16)$$

Звідки видно, що завжди $(y_i^1(t))' > 1$, отже $y_i^1(t)$ строго зростаюча функція і тому в неї існує обернена функція $t_i = y_i(\tau) = (y_i^1(\tau))^{-1}$, задана на всій осі, причому

$$y_i'(\tau) = \frac{P_{q_i}(y_i(\tau))}{P_{q_i,n}(y_i(\tau))}, \qquad i=\overline{1,m}. \qquad (17)$$

А тому, при всіх $\tau\epsilon\mathcal{R}$ та $\left(\frac{q}{q_i}\right)\epsilon(0{,}1)$, $i=\overline{1,m}$,

$$0 < y_i'(\tau) < 1. \tag{18}$$

Прийнявши в інтегралі в (14) $t = y_i(\tau)$, та враховуючи рівність (16), отримаємо

$$\rho_n(F;x) = \frac{q^n}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)} \delta_n(x+y_i(\tau))\frac{\sqrt{P_{q_i}(y_i(\tau))}}{P_{q_i,n}(y_i(\tau))}\cos(n-1)\tau d\tau.$$

Покладемо

$$r_{n,i}^{(1)}(\tau) = \frac{\sqrt{P_{q_i}(y_i(\tau))}}{P_{q_i,n}(y_i(\tau))} - \frac{1}{\sqrt{P_{q_i}(y_i(\tau))}}, \quad i=\overline{1,m}. \tag{19}$$

Тоді

$$\rho_n(F;x) = \frac{q^n}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)} \delta_n(x+y_i(\tau))\frac{\cos(n-1)\tau}{P_{q_i}(y_i(\tau))}d\tau + R_{n,i}^{(1)}(F;x)\right),$$

$$\forall f\epsilon L_\beta^q \tag{20}$$

де

$$R_{n,i}^{(1)}(F;x) = \int\limits_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)} \delta_n(x+y_i(\tau))\, r_{n,i}^{(1)}(\tau)\cos(n-1)\tau d\tau.$$

Враховуючи рівності (11), (16) і (9), знаходимо

$$\left|r_{n,i}^{(1)}(\tau)\right| = \frac{\left|1-2\frac{q}{q_i}cosy_i(\tau) - \frac{n}{n-1} + \frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{q}{q_i}\cdot cosy_i(\tau)\right|}{\left(\frac{n}{n-1} - \frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{q}{q_i}\cdot cosy_i(\tau) + \left(\frac{q}{q_i}\right)^2\right)\sqrt{1-2\left(\frac{q}{q_i}\right)cosy_i(\tau)+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2}} \le$$

$$\le \frac{1-\frac{q}{q_i}cosy_i(\tau)}{(n-1)\left(1-\frac{q}{q_i}\right)\left(1-2\left(\frac{q}{q_i}\right)cosy_i(\tau)+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2\right)} \le$$

$$\le \frac{1}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2(n-1)}, \quad n\ge 2, \qquad i=\overline{1,m}. \tag{21}$$

Застосовуючи для величини $R_n^{(1)}(F;x)$ узагальнену нерівність Мінковського

$$\left(\int\limits_a^b\left|\int\limits_c^d F(x;y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} \le \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b |F(x;y)|^p dx\right)^{1/p} dy, \tag{22}$$

при $p\epsilon[1;\infty)$ отримаємо

$$\left\|R_n^{(1)}(F;x)\right\|_p \le \frac{q^n}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)}\left|\delta_n(x+y_i(\tau))r_{n,i}^{(1)}(\tau)\right|d\tau\right)^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{q^n}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\left\|r_{n,i}^{(1)}\right\|_M\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)}|\delta_n(x+y_i(\tau))|\,d\tau\right)^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{q^n}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\left\|r_{n,i}^{(1)}\right\|_M\int\limits_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)}\left(\int\limits_0^{2\pi}|\delta_n(x+y_i(\tau))|^p dx\right)^{1/p} d\tau =$$

$$= \frac{q^n}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\left\|r_{n,i}^{(1)}\right\|_M \cdot \|\delta_n(\cdot)\|_p (y_i^1(2\pi) - y_i^1(0)) \le$$

$$\le \frac{q^n \cdot 2\|\delta_n(\cdot)\|_p \left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2}, \quad n \ge 2,$$

оскільки в силу (15) та (12)

$$y_i^1(2\pi) - y_i^1(0) = 2\pi\left(1+\frac{1}{n-1}\right). \tag{23}$$

Очевидно, що така ж оцінка для $\left\|R_n^{(1)}(F;x)\right\|_p$ вірна і при $p=\infty$.

Таким чином

$$\left\|R_n^{(1)}(F;x)\right\|_p \le$$

$$\le \frac{q^n \cdot 2\|\delta_n(\cdot)\|_p \left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2}, \quad \forall p \ge 1. \tag{24}$$

Виберемо тепер точки $x_k = \frac{k\pi}{n-1}, k = 0, \pm 1, \ldots$,. Оскільки

$$y_i^1(0) = \frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2(n-1)}, \quad y_i^1(2\pi) = 2\pi + \frac{2\pi}{n-1} + \frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2(n-1)},$$

то при $k = 2, \ldots, 2n$ всі точки x_k лежать на проміжку $[y_i^1(0); y_i^1(2\pi)]$, причому

$$x_2 - y_i^1(0) \le \frac{2\pi}{n-1}, \quad y_i^1(2\pi) - x_{2n} \le \frac{2\pi}{n-1}. \tag{25}$$

Задамо функцію $\ell_{n,i}(\tau) = \ell_{n,q_i}(\tau)$, поклавши, $\tau_k = x_k + \frac{\pi}{2(n-1)}$

$$\ell_{n,i}(\tau) = \begin{cases} \left(P_{q_i}(y_i(\tau_k))\right)^{\frac{1}{2}}, & \tau \in [x_k; x_{k+1}], \quad k = 2, \ldots, 2n-1, \\ 0, & \tau \in [y_i^1(0); x_2) \cup (x_{2n}; y_i^1(2\pi)], i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{26}$$

В силу (20) будемо мати

$$\rho_n(F;x) = \frac{q^n}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{x_2}^{x_{2n}} \delta_n(x+y_i(\tau))\ell_{n,i}(\tau)\cos(n-1)\tau d\tau + \right.$$

$$\left. + R_{n,i}^{(1)}(F;x) + R_{n,i}^{(2)}(F;x)\right), \quad \forall f \in L_\beta^q, \tag{27}$$

де

$$R_{n,i}^{(2)}(F;x) = \frac{q^n}{\pi}\int_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)} \delta_n(x+y_i(\tau))\, r_{n,i}^{(2)}(\tau)\cos(n-1)\tau d\tau, \tag{28}$$

та

$$r_{n,i}^{(2)}(\tau) = \left(P_{q_i}(y_i(\tau))\right)^{-1/2} - \ell_{n,i}(\tau).$$

На проміжках $[y_i^1(0); x_2)$ і $(x_{2n}; y_i^1(2\pi)]$

$$\left|r_{n,i}^{(2)}(\tau)\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{P_{q_i}(y_i(\tau))}}\right| \le \frac{1}{1-\frac{q}{q_i}}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{29}$$

На проміжку $[x_2; x_{2n}]$

$$\left|r_{n,i}^{(2)}(\tau)\right| \le \frac{\pi}{2(n-1)} \max_{\tau\epsilon[x_2;x_{2n}]} \left|\left(\frac{1}{\sqrt{P_{q_i}(y_i(\tau))}}\right)'\right|. \qquad (30)$$

Враховуючи (18), при кожному $i = \overline{1,m}$ одержимо

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{P_{q_i}(y_i(\tau))}}\right)'\right| = \left|\frac{\frac{q}{q_i} sin y_i(\tau)\cdot y_i'(\tau)}{\left(P_{q_i}(y_i(\tau))\right)^{3/2}}\right| \le$$

$$\le \frac{y_i'(\tau)}{\sqrt{1-2\frac{q}{q_i}+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2}} \left|\frac{\frac{q}{q_i} sin y_i(\tau)}{P_{q_i}(y_i(\tau))}\right| \le \frac{1}{1-\frac{q}{q_i}} \left|\frac{\frac{q}{q_i} sin y_i(\tau)}{P_{q_i}(y_i(\tau))}\right|,$$

тому в силу співвідношення $(9')$, будемо мати

$$\max_{\tau\epsilon\,[y_i^1(0);y_i^1(2\pi)]} \left|\left(\frac{1}{\sqrt{P_{q_i}(y_i(\tau))}}\right)'\right| \le \frac{1}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2}. \qquad (31)$$

Таким чином, згідно (30) та (31)

$$\left|r_{n,i}^{(2)}(\tau)\right| \le \frac{\pi \frac{q}{q_i}}{2(n-1)(1-\frac{q}{q_i})}, \quad i=\overline{1,m}, \quad \tau\,\epsilon\,[x_2;x_{2n}]\,. \qquad (32)$$

Враховуючи (28) і (31), та внаслідок (27) і (20) для довільної $f\epsilon L_\beta^q$ будемо мати

$$\left\|R_{n,i}^{(2)}(F;x)\right\|_p \le \frac{q^n}{\pi}\left[\left\|\int_{y_i^1(0)}^{x_2} \delta_n(x+y_i(\tau))\, r_{n,i}^{(2)}(\tau)\cos(n-1)\,\tau d\tau\right\|_p + \right.$$

$$+\left\|\int_{x_2}^{x_{2n}} \delta_n(x+y_i(\tau))\, r_{n,i}^{(2)}(\tau)\cos(n-1)\,\tau d\tau\right\|_p +$$

$$\left.+\left\|\int_{x_{2n}}^{y_i^1(2\pi)} \delta_n(x+y_i(\tau))\, r_{n,i}^{(2)}(\tau)\cos(n-1)\,\tau d\tau\right\|_p\right] \le$$

$$\le \frac{q^n}{\pi}\left[\frac{1}{1-\frac{q}{q_i}}\|\delta_n\|_p\left(x_2 - y_i^1(0) + y_i^1(2\pi) - x_{2n}\right)\right] +$$

$$+\frac{\pi\frac{q}{q_i}}{2(n-1)\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2}\|\delta_n\|_p(x_{2n}-x_2) \le$$

$$\le \frac{q^n}{(n-1)\left(1-\frac{q}{q_i}\right)}\|\delta_n\|_p\cdot\left(4+\frac{\pi\frac{q}{q_i}}{1-\frac{q}{q_i}}\right) = O(1)\frac{q^n\|\delta_n\|_p}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2\cdot n},$$

$$n\ge 2, \quad i=\overline{1,m}, \quad p\,\in[1;\infty). \qquad (33)$$

В (33) і далі O(1) – величина, рівномірно обмежена по всіх параметрах задачі. Зрозуміло, що така ж оцінка має місце і при $p=\infty$. Об’єднуючи співвідношення (27), (24), (33), для довільного $p\ge 1$ отримаємо :

$$\|\rho_n(F;x)\|_p =$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{m}\int_{x_2}^{x_{2n}} \delta_n(x+y_i(\tau))\,\ell_{n,i}(\tau)\cos(n-1)\,\tau d\tau\right\|_p +$$

$$+O(1)\sum_{i=1}^{m}\frac{q^n\|\delta_n\|_p}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2\cdot n}. \qquad (34)$$

Позначимо через $\mathcal{J}_n(F;x)$ суму в першому доданку в правій частині останньої рівності. Тоді враховуючи (26), маємо

$$\mathcal{J}_n(F;x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{2n-1}\left(P_{q_i}(y_i(\tau_k))\right)^{-1/2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\delta_n\left(x+y_i(\tau)\right)\ell_{n,i}(\tau)\cos(n-1)\tau d\tau.$$

Застосувавши нерівність Мінковського (22), знайдемо

$$\left\|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\delta_n\left(x+y_i(\tau)\right)\cos(n-1)\tau d\tau.\right\|_p\le$$

$$\le\int_{x_k}^{x_{k+1}}|\cos(n-1)\tau|\left(\int_0^{2\pi}\left|\delta_n\left(x+y_i(\tau)\right)\right|^p dx\right)^{1/p}d\tau=$$

$$=\|\delta_n\|_p\int_{\frac{k\pi}{n-1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n-1}}|\cos(n-1)\tau|\,d\tau=\frac{2\cdot\|\delta_n\|_p}{n-1},\quad i=\overline{1,m},\ \ 1\le p<\infty.$$

Очевидно, що така ж нерівність має місце і при $p=\infty$. Тому в силу властивостей норми

$$\|\mathcal{J}_n(F;x)\|_p\le\frac{2\cdot\|\delta_n\|_p}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{2n-1}\left(P_{q_i}(y_i(\tau_k))\right)^{-1/2}. \qquad (35)$$

Оскільки

$$\frac{\pi}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1}\left(P_{q_i}(y_i(\tau_k))\right)^{-1/2}=\int_{x_2}^{x_{2n}}\ell_{n,i}(\tau)\,d\tau, \qquad (36)$$

то

$$\frac{\pi}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1}\left(P_{q_i}(y_i(\tau_k))\right)^{-1/2}=\int_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)}\left(P_{q_i}(y_i(\tau))\right)^{-1/2}d\tau+R_{n,i}^{(2)}, \qquad (37)$$

де

$$R_{n,i}^{(2)}=-\int_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)}r_{n,i}^{(2)}(\tau)\,d\tau$$

і, отже, внаслідок (29), (25) та (32)

$$\left|R_{n,i}^{(2)}\right|\le\frac{4\pi}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)(n-1)}+\frac{\pi^2\frac{q}{q_i}}{(n-1)\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2}=O(1)\frac{1}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2n},$$

$$i=\overline{1,m},\quad n\ge 2. \qquad (38)$$

Далі маємо

$$\int_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)}\left(P_{q_i}(y_i(\tau))\right)^{-1/2}d\tau=\int_0^{2\pi}\left(P_{q_i}(t)\right)^{-1/2}dt+R_{n,i}^{(1)}, \qquad (39)$$

де внаслідок (19)

$$R_{n,i}^{(1)} = -\int_{y_i^1(0)}^{y_i^1(2\pi)} r_{n,i}^{(1)}(\tau)\,d\tau. \qquad (40)$$

Тому, згідно (21) та (23)

$$\left|R_{n,i}^{(1)}\right| \le \frac{2\pi\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2(n-1)}, \quad i=\overline{1,m}, \quad n \ge 2. \qquad (41)$$

Таким чином, внаслідок (36) – (41) знаходимо

$$\frac{\pi}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1}\left(P_{q_i}(y_i(\tau_k))\right)^{-1/2} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{1-2\left(\frac{q}{q_i}\right)cost+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2}} + O(1)\frac{1}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2 n}.$$

Оскільки

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{1-2\left(\frac{q}{q_i}\right)cost+\left(\frac{q}{q_i}\right)^2}} = 4\,\mathcal{H}\left(\frac{q}{q_i}\right),$$

то

$$\frac{\pi}{n-1}\sum_{k=2}^{2n-1}\left(P_{q_i}(y_i(\tau_k))\right)^{-1/2} = 4\mathcal{H}\left(\frac{q}{q_i}\right) + O(1)\frac{1}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2 n}. \qquad (42)$$

Отже, згідно (35)

$$\|\mathcal{I}_n(F;x)\|_p \le \frac{8}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\mathcal{H}\left(\frac{q}{q_i}\right) + \sum_{i=1}^{m} O(1)\frac{1}{\left(1-\frac{q}{q_i}\right)^2 n}\|\delta_n\|_p. \qquad (43)$$

Вибравши в ролі $t_{n-1}(\cdot)$ у (8) многочлен $t_{n-1}^*(\cdot)$, який забезпечує найкраще наближення функції $f_\beta^q(\cdot)$ в просторі L_p та об'єднуючи співвідношення (34) і (43) переконуємося в справедливості нерівності теореми.

Цікавим також є питання про непокращуваність нерівності в даній теоремі. Ми можемо дати ствердну відповідь на нього для випадку, коли б досліджували на класі $L_{\beta,p}^q$ наступний функціонал

$$\widetilde{\sum}_{n,m}(f;x;c) = \sum_{i=1}^{m} q_i^n \left|\rho_n\left(f_{\beta_i}^{(q_i)};x\right)\right|,$$

використовуючи наведені результати та методику їх доведення.

Список використаних джерел

1. Степанец А.И.. Классификация и приближение периодических функций.–Киев: Наук. думка, 1987.–268 с.
2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936с.
3. Степанец А.И. К неравенству Лебега на классах (ψ,β) - дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, №4. – с.499 – 510.
4. Степанец А.И., Сердюк А.С. Неравенства Лебега для интегралов Пуассона //Укр. мат. журн. – 2000. – 52, №6. – с.798 – 808.
5. Никольський С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем //Изв. Ан СССР. сер. мат. – 1946. – 10, №3. – с.207 – 256.
6. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций //Тр. мат. ин-та Ан СССР. – 1980. – 145, – с.126 – 151.

We obtain the inequality of Lebeg's type for the line combination of Poisson's kernels in L_p *space,* $p \ge 1$.

Key words: *Poisson's kernel, the line combination, Lebeg's inequality.*

УДК 641.07

В.С. Щирба, кандидат фізико-математичних наук, доцент

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК МІЖДИСЦИПЛІНАРНИХ НАУКОВИХ НАПРЯМІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ІНФОРМАТИКОЮ ТА КІБЕРНЕТИКОЮ

В роботі розглядаються питання міждисциплінарних зв'язків інформатики і кібернетики, їх місце в системі комп'ютерних наук.

Ключові слова: *інформатика, кібернетика, предмет дослідження*

Інформація — це одне з головних понять сучасності. Незважаючи на інтуїтивну зрозумілість терміну «інформація» та його велике значення для багатьох наукових дисциплін, не існує загальноприйнятого визначення цього поняття. Тому замість означення використовують так зване поняття про інформацію. Поняття, на відмінну від означення, не даються однозначно, а вводяться на прикладах, причому кожна наукова дисципліна робить це по-своєму, виділяючи ті характерні риси, які найкращим чином відповідають даному предмету.

Наука в основному розглядає інформацію, як форму зв'язку між об'єктом, що передає повідомлення, і об'єктом, який його приймає. В побуті слово «інформація» ототожнюється зі змістом якихось відомостей, які можуть набирати форми усного повідомлення, листа, доповіді, результатів деякого дослідження, спостереження тощо.

Залежно від галузі дослідження та від класу розв'язуваних задач користуються різними визначеннями інформації. Наприклад, у кібернетиці, визначаючи термін «інформація», акцентують увагу на тому факті, що вона усуває невизначеність, розуміючи інформацію як повідомлення, відомості про якусь подію, чиюсь діяльність чи розвиток якогось процесу, що зменшує нашу необізнаність про зазначені явища. У теорії автоматизованого оброблення інформації її розглядають як сукупність знань, що є об'єктом нагромадження, реєстрації, передачі, збереження, оброблення. Тут поняття інформації більш широке, оскільки, наприклад, допускається неправдива інформація.

Більш повно можна визначити інформацію, зіставляючи це поняття з іншим важливим поняттям того самого термінологічного ряду – «дані». Розглянемо взаємозв'язок між цими поняттями. У світі безперервно відбуваються події, що полягають у змінюванні станів об'єктів. Ці події (точніше, не вони самі, а люди, які планують або реєструють їх) породжують повідомлення, які можна зафіксувати на довільному носії в деякій знаковій системі. Сукупність повідомлень та фактів про реальні події, що не співвіднесені з можливостями їх використання, називають даними.

Дані стають інформацією, якщо їх споживач розв'язує певне завдання. Іншими словами, інформація — це дані, які використовуються.

Інформація є вузловим поняттям інформатики. В зв'язку з цим виникає цілий ряд питань. Наприклад, чим відрізняються поняття «інформатика» і «кібернетика» ? Що таке кібернетика, які завдання вирішують в Інституті кібернетики і чому в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка підготовкою фахівців з інформатики здійснює факультет кібернетики, а в інших навчальних закладах на факультетах інформаційних технологій ?

Інформатикою називається розділ науки, що вивчає структуру і загальні властивості інформації, а також питання, пов'язанні з її збиранням, зберіганням, пошуком, перетворенням, розповсюдженням і використанням в різних сферах людської діяльності.

Легко переконатися, що, наприклад, далеко не всі питання, пов'язанні з збиранням інформації, вивчає інформатика. Прикладом може служити журналістика.

Більш точним варто визнати наступне означення.

Інформатика – це технічна наука, яка систематизує прийоми створення зберігання, відтворення, обробки і передачі даних засобами обчислювальної техніки, а також принципи функціонування цих засобів і методи управлінні ними.

В історичних джерелах термін кібернетика зустрічається ще з часів Олександра Македонського, де з філософських поглядів розглядалися питання управління державою. Мабуть з цих часів існує тезис «хто володіє інформацією, той володіє світом», в якому фактично розкривається нерозривний зв'язок інформації і кібернетики. Питання про науковий підхід до керування чи не вперше в конкретному вигляді було поставлене М.А. Ампером в його роботі «Дослідження філософії наук, або аналітичний виклад класифікації всіх людських знань» (част. І – 1834 р., ІІ – 1843 р.), в якій була виділена наука про керування державою, названа кібернетикою.

В той час, коли Ампер лише прийшов до висновку про необхідність такої науки, польський вчений Броніслав Трентовський видав в 1843 р. польською мовою книгу «Ставлення філософії до кібернетики як до мистетства керування народом». Метою Трентовського була побудова наукових основ практичної діяльності керівника (гібернета), який повинен вміти, виходячи із загального блага, примиряти деякі суперечності, інші – загострювати, скеровуючи розвиток до потрібної мети. В цей час сенс грецького слова гіберно був добре зрозумілий і означав адміністративну одиницю, населену людьми. Від нього пішов термін губернія.

Наступний етап становлення кібернетичних ідей пов'язаний з російським ученим А. Богдановим (Маліновський), який опублікував свою відому працю «Загальна організаційна наука тектологія» (1910—1927), де набагато повніше розкрив головні принципи кібернетики та загальної теорії систем.

Здавна було помічено, що процеси управління в різних природних і штучних системах мають багато спільного. У 1948 році американський математик Н. Вінер опублікував книгу «Кібернетика, або управління і зв'язок у тварині та машині», де розкрив глибоку аналогію між принципами саморегуляції в живих організмах і технічних пристроях. В обох випадках процеси саморегуляції можна подати за допомогою аналогічних схем та описати однаковими математичними моделями. Проте Вінер пішов далі, звернувши увагу на те, що пропонований ним підхід можна застосувати й до регулювання та управління і суспільними, і економічними процесами.

Так виникла кібернетика — міждисциплінарний науковий напрямок, що досліджує процеси управління та регулювання систем довільної природи.

Доречно відмітити, що в нашій країні кібернетику довгий час називали лженаукою і навіть на Першому міжнародному конгресі з кібернетики в Парижі у 1956 році пропонувалося розглядати її як мистецтво ефективної дії, а не як науку.

Системи, які вивчає кібернетика, — це складні системи, що утворені з численних взаємоз'єднаних елементів, що мають спільну мету. Такі поєднання елементів називаються зв'язками.

Основні поняття кібернетики — «система», «моделювання», «управління», «інформація» і «зворотний зв'язок».

Об'єктом кібернетики є складні динамічні системи.

Предметом — інформаційні процеси, пов'язані з управлінням такими системами.

Метою вивчення — створення принципів, методів і засобів для досягнення найбільш ефективних у тому чи іншому сенсі результатів управління.

Кібернетика вивчає загальні закономірності та принципи, яким підпорядковуються всі складні динамічні системи, незалежно від їхньої фізичної природи. Теза про наявність спільних принципів функціонування та управління в технічних, біологічних, економічних та інших системах являє собою головне відкриття кібернетики.

Варто зауважити, що окремі принципи були відомі й раніше, але не було узагальнення цих принципів з установленням загальних закономірностей. Відкриття кібернетикою подібності й спільності принципів функціонування та управління привело до дуже важливих наслідків. Теоретичне значення цього відкриття полягає в усвідомленні структурної аналогії (математичною мовою — ізоморфізму) процесів, що відбуваються у системах різної природи.

Але попри всю загальність ідей кібернетика є конкретною наукою. Це виявляється в тому, що якісні властивості, притаманні системам тієї чи іншої природи, є основою, на якій будуються кібернетичні підходи до їх вивчення. Так з'явилася технічна кібернетика в техніці, біологічна кібернетика в біології та економічна кібернетика в економіці.

Виникнення, наприклад, економічної кібернетики як самостійного наукового напрямку відносять до 60-х років XX ст., що було значною мірою зумовлено розвитком як якісних, так і кількісних уявлень про економічні процеси, розширенням досліджень у галузі системного аналізу економіки, економіко-математичного моделювання, розширенням використання ЕОМ в обробці економічної інформації.

Вперше термін «економічна кібернетика» з'явився майже одночасно й незалежно у працях академіка В.Немчинова, польських вчених О.Ланге і Г.Гриневського, англійського вченого С.Біра. Саме вони окреслили первісне коло проблем цієї науки, приділивши особливу увагу зв'язку системного аналізу економіки з теорією регулювання, логічними та математичними моделями, теорією інформації. Магістральну лінію формування цього напрямку становив синтез економіко-математичного моделювання із загальними принципами кібернетики. Значний внесок у розвиток економічної кібернетики зробили Н.Кобринський, Є.Майминас, О.Смирнов, О.Гранберг, Ю.Черняк, М.Мойсеєв та інші.

Економічна кібернетика розглядає економіку, а також її структурні й функціональні ланки як системи, в яких відбуваються процеси управління, що реалізуються за допомогою руху та перетворення інформації.

Об'єктом вивчення економічної кібернетики є економіка в цілому, галузі та сектори економіки, окремі підприємства та організації тощо.

Предметом дослідження — функціонування й розвиток економіки як керованої системи і, насамперед, інформаційні за своїм змістом механізми управління економічними процесами.

Економічна кібернетика тісно пов'язана, з одного боку, з теорією управління, економіко-математичним моделюванням, сучасними інформаційними системами та технологіями, а з другого — з широким колом конкретних економічних дисциплін (економічною теорією, макро- та мікроекономікою, менеджментом тощо), а також соціологією, соціальною психологією, правознавством.

Використовуючи результати цих наук, економічна кібернетика формує цілісне уявлення про економіку як складну динамічну систему, вивчає взаємодію її виробничо-технічної, соціально-економічної та організаційно-господарської структури у процесах управління, функціонування та розвитку економіки як системи.

Кібернетичні підходи в економіці використовуються, насамперед, тією мірою, якою виявляються спільні риси й аналогії в її функціонуванні та процесах управління в системах різних типів.

Але самі по собі ці аналогії не дають змоги розкрити зміст процесів, що відбуваються в економіці. Кожний тип динамічних систем — технічних, біологічних, соціальних — має свою якісну специфіку. Без її врахування скласти цілісне уявлення про функціонування та управління відповідним типом систем практично неможливо. Тому економічна кібернетика використовує досягнення інших економічних дисциплін.

Оскільки економічна кібернетика вивчає реальні економічні об'єкти за допомогою моделей, то залучаються досягнення інших дисциплін із галузі моделювання, зокрема економіко-математичного, результати системного аналізу, теорії управління, теорії автоматичного регулювання тощо.

Економічна кібернетика досліджує інформаційні процеси та процеси перетворення інформації в процесах управління, тому вона використовує результати теорії інформації та передавання повідомлень. З метою обробки економічної інформації застосовуються методи статистики та широко використовуються сучасні інформаційні системи й технології.

Список використаних джерел

1. Глушков В.М. Основы безбумажной информатики. – М.: Наука, 1987. - 552 с.
2. Інформаційні системи і технології в економіці: Посібник для студентів вищих навчальних закладів / За редакцією В.С. Пономаренка. – Видавничий центр «Академія», 2002. – 544 с.
3. Катренко А.В. Системний аналіз об’єктів та процесів комп’ютеризації: Навчальний посібник. – Львів: «Навчальний світ – 2000». – 424 с.
4. Проектування інформаційних систем: Посібник / За ред. В.С.Пономаренка. — К.: Академія, 2002. — 488 с.

The questions of connections of informatics and cybernetics are considered in work, their seat in the system of computer sciences.

Key words: *informatics, cybernetics, article of research*

УДК 517.946

І.М.Конет, кандидат фізико-математичних наук, професор,
М.П.Ленюк, доктор фізико-математичних наук, професор

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА-ФУР'Є-ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ [R_0, R_3] ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом інтегрального перетворення Лапласа в поєднанні з методом функцій одержано в замкнутій алгоритмічній формі інтегральне зображення розв'язку задачі дифузії в неоднорідних середовищах з м'якими межами. Моделювання дифузійних процесів здійснено медом гібридного диференціального оператора Лежандра – Фур'є – Фур'є на сегменті полярної осі.

Постановка проблеми та її аналіз. Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, на протязі всієї історії людства привертали до себе увагу. Найпростішою моделлю такого процесу є диференціальне рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t,r) \qquad (1)$$

з відповідними початковою умовою та крайовими умовами. Потреби практики приводили до різного узагальнення рівняння (1): перехід до квазілінійності та нелінійності; перехід до кусково-однорідних коефіцієнтів; перехід до нових криволінійних ортогональних систем координат (у випадку розмірності простору $n \geq 2$) та ін. При цьому в крайових умовах не брав участі диференціальний оператор $\frac{\partial}{\partial t}$, тобто завжди припускалося, що межа області є жорсткою по відношенню до відбиття хвиль. Особливу увагу заслуговує дуже поширений в другій половині XX-го століття для вивчення стану композитних матеріалів метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик. Це привело навіть у випадку жорсткості межі області до диференціального рівняння із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних [2]. Інтегральне зображення в точній аналітичній формі розв'язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Ці труднощі можна обійти, якщо здійснити моделювання дифузійних процесів методом гібридних диференціальних операторів.

Дана робота присвячена моделювання нестаціонарних дифузійних процесів методом гібридного диференціального оператора Лежандра-Фур'є-Фур'є в припущенні, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття теплових хвиль.

Основна частина. Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2 = \{(t, r): t \in (0, \infty), r \in I_2 = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); 0 < R_0 < R_1 < R_3 < \infty)\}$ розв'язку сепаратної системи класичних рівнянь теплопровідності параболічного типу [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_\mu[u_1] = f_1(t, r),\ r \in (R_0, R_1), \\ &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = f_2(t, r),\ r \in (R_1, R_2), \\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = f_3(t, r),\ r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \qquad (2)$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$L_{11}^0[u_1(t,r)]\big|_{r=R_0} = \omega_0(t),\ L_{22}^3[u_3(t,r)]\big|_{r=R_3} = \omega_3(t) \qquad (3)$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)]\right)\big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t),\ j, k = 1, 2. \qquad (4)$$

У рівностях (2) – (4) беруть участь диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_\mu = d^2/dr^2 + \mathrm{cth}\, r\, d/dr + 1/4 - \mu^2/\mathrm{sh}^2 r$ [3] та диференціальний оператор

$$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t},\ j, m = 1, 2,\ k = \overline{0,3}. \qquad (5)$$

Ми вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\gamma_j^2 > 0$, $a_j > 0$, $\mu \ge 0$, $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \ne 0$, $\alpha_{22}^3 \ge 0$, $\beta_{22}^3 \ge 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0$, $c_{11,k}\, c_{21,k} > 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{j2,k} = \delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k = 0$, $c_{j1,j2}^{21,k} = \delta_{2j}^k\beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{j1,j2}^{12,k} = \gamma_{2j}^k\alpha_{1j}^k - \gamma_{1j}^k\alpha_{2j}^k$, $c_{j1,j2}^{12,k} = c_{j1,j2}^{21,k}$, $j, k, m = 1, 2$.

Припустимо, що задані та шукані функції є оригіналами Лапласа стосовно змінної t [3]. У зображенні за Лапласом задачі (2) – (4) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2 розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\begin{gathered}\left(\Lambda_\mu - q_1^2\right)u_1^*(p,r) = a_1^2 f_1^*(p,r),\ r \in (R_0, R_1),\\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right)u_2^*(p,r) = a_2^2 f_2^*(p,r),\ r \in (R_1, R_2),\\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_3^2\right)u_3^*(p,r) = a_3^2 f_3^*(p,r),\ r \in (R_2, R_3)\end{gathered} \qquad (6)$$

з крайовими умовами

$$\left.\left(\overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0\right)u_1^*(p,r)\right|_{r=R_0} = \omega_0^*(p),\quad \left.\left(\overline{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{22}^3\right)u_3^*(p,r)\right|_{r=R_3} = \omega_3^*(p) \qquad (7)$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*(p,r) - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p,r)\right]\right|_{r=R_k} = \omega_{jk}^*(p),\ j, k = 1, 2. \qquad (8)$$

У рівностях (6) – (8) прийняті позначення:

$$u_j^*(p,r) = \int_0^\infty u_j(t,r)e^{-pt}dt,\ f_j^*(p,r) = \int_0^\infty f_j(t,r)e^{-pt}dt,\ \omega_0^*(p) = \int_0^\infty \omega_0(t)e^{-pt}dt,$$

$$\omega_3^*(p) = \int_0^\infty \omega_3(t)e^{-pt}dt,\ \omega_{jk}^*(p) = \int_0^\infty \omega_{jk}(t)e^{-pt}dt,\ q_j = a_j^{-1}(p + \gamma_j^2)^{1/2},$$

$$\overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p,\ \overline{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m p,\ p = \sigma + is,\ i^2 = -1.$$

Зафіксуємо ту вітку двозначної функції q_j, на якій $\mathrm{Re}\, q_j > 0$ для $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu - q_1^2)v = 0$ утворюють приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_1}^\mu(\mathrm{ch} r)$ та другого роду $L_{\nu_1}^\mu(\mathrm{ch} r)$, $\nu_1 = -1/2 + q_1$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \mathrm{ch} qr$ та $v_2 = \mathrm{sh} qr$ [5].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати загальний розв'язок крайової задачі (6) – (8) методом функцій Коші [5, 6]:

$$\begin{gathered}u_1^*(p,r) = A_1 P_{\nu_1}^\mu(\mathrm{ch} r) + B_1 L_{\nu_1}^\mu(\mathrm{ch} r) + \int_{R_0}^{R_1} E_1^*(p,r,\rho)a_1^{-2} f_1^*(p,\rho)\mathrm{sh}\rho\, d\rho,\\ u_2^*(p,r) = A_2 \mathrm{ch} q_2 r + B_2 \mathrm{sh} q_2 r + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho)a_2^{-2} f_2^*(p,\rho)d\rho,\\ u_3^*(p,r) = A_3 \mathrm{ch} q_3 r + B_3 \mathrm{sh} q_3 r + \int_{R_2}^{R_3} E_3^*(p,r,\rho)a_3^{-2} f_3^*(p,\rho)d\rho.\end{gathered} \qquad (9)$$

Тут $E_j^*(p,r,\rho)$ – функції Коші [5, 6]:

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=0,$$

$$\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho+0}-\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)},\ j=\overline{1,3}, \tag{10}$$

де $\varphi_1(r)=\operatorname{sh} r$, $\varphi_2(r)=1$, $\varphi_3(r)=1$.

Введемо до розгляду функції:

$Z_{\nu_1;jk}^{\mu,m1}(\mathrm{ch}R_m)=\overline{\alpha}_{jk}^m\mathrm{sh}R_m P_{\nu_1}^{\mu'}(\mathrm{ch}R_m)+\overline{\beta}_{jk}^m P_{\nu_1}^{\mu}(\mathrm{ch}R_m)$,

$Z_{\nu_1;jk}^{\mu,m2}(\mathrm{ch}R_m)=\overline{\alpha}_{jk}^m\mathrm{sh}R_m L_{\nu_1}^{\mu'}(\mathrm{ch}R_m)+\overline{\beta}_{jk}^m L_{\nu_1}^{\mu}(\mathrm{ch}R_m)$,

$F_{\nu_1;jk}^{\mu,m}(\mathrm{ch}R_m,\mathrm{ch}r)=Z_{\nu_1;jk}^{\mu,m1}(\mathrm{ch}R_m)L_{\nu_1}^{\mu}(\mathrm{ch}r)-Z_{\nu_1;jk}^{\mu,m2}(\mathrm{ch}R_m)P_{\nu_1}^{\mu}(\mathrm{ch}r)$,

$\Delta_{\nu_1;j1}^{\mu}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)=Z_{\nu_1;11}^{\mu,01}(\mathrm{ch}R_0)Z_{\nu_1;j1}^{\mu,12}(\mathrm{ch}R_1)-Z_{\nu_1;11}^{\mu,02}(\mathrm{ch}R_0)Z_{\nu_1;j1}^{\mu,11}(\mathrm{ch}R_1)$,

$B_\mu(q_1)=\frac{\pi}{2}\Gamma(1/2+q_1-\mu):\Gamma(1/2+q_1+\mu)$.

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_1^*(p,r,\rho)=\frac{B_\mu(q_1)}{\Delta_{\nu_1;11}^{\mu}}\begin{cases}F_{\nu_1;11}^{\mu,0}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r)F_{\nu_1;11}^{\mu,1}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ F_{\nu_1;11}^{\mu,0}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)F_{\nu_1;11}^{\mu,1}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r), & R_0<\rho<r<R_1.\end{cases} \tag{11}$$

Визначимо функції:

$$V_{jk}^{m1}(q_sR_m)\equiv\left(\overline{\alpha}_{jk}^m\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{jk}^m\right)\mathrm{ch}q_sr\bigg|_{r=R_m}=\overline{\alpha}_{jk}^m q_s\mathrm{sh}q_sR_m+\overline{\beta}_{jk}^m\mathrm{ch}q_sR_m,$$

$$V_{jk}^{m2}(q_sR_m)\equiv\left(\overline{\alpha}_{jk}^m\frac{d}{dr}+\overline{\beta}_{jk}^m\right)\mathrm{sh}q_sr\bigg|_{r=R_m}=\overline{\alpha}_{jk}^m q_s\mathrm{ch}q_sR_m+\overline{\beta}_{jk}^m\mathrm{sh}q_sR_m,$$

$\Phi_{jk}^m(q_sR_m,q_sr)=V_{jk}^{m2}(q_sR_m)\mathrm{ch}q_sr-V_{jk}^{m1}(q_sR_m)\mathrm{sh}q_sr$,

$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2)-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{21}(q_2R_2)$, $j,k=1,2$.

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_2^*=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases}\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases} \tag{12}$$

а функція Коші

$$E_3^*(p,r,\rho)=-\frac{1}{q_3\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)}\begin{cases}\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3r)\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3\rho), & R_2<r<\rho<R_3,\\ \Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3\rho)\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r), & R_2<\rho<r<R_3,\end{cases} \tag{13}$$

$\Delta_{j2}(q_3R_3,q_3R_3)=V_{j2}^{21}(q_3R_2)V_{22}^{32}(q_3R_3)-V_{j2}^{22}(q_3R_2)V_{22}^{31}(q_3R_3)$, $j=1,2$.

Повернемось до формул (9). Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення величин A_j та B_j ($j=\overline{1,3}$) дають алгебраїчну систему з шести рівнянь:

$$\begin{gathered}
Z_{\nu_1;11}^{\mu,01}(\mathrm{ch}R_0)A_1+Z_{\nu_1;11}^{\mu,02}(\mathrm{ch}R_0)B_1=\omega_0^*(p),\\
Z_{\nu_1;11}^{\mu,11}(\mathrm{ch}R_1)A_1+Z_{\nu_1;11}^{\mu,12}(\mathrm{ch}R_1)B_1-V_{12}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{12}^{12}(q_2R_1)B_2=\omega_{11}^*(p),\\
Z_{\nu_1;21}^{\mu,11}(\mathrm{ch}R_1)A_1+Z_{\nu_1;21}^{\mu,12}(\mathrm{ch}R_1)B_1-V_{22}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{22}^{12}(q_2R_1)B_2=\omega_{21}^*(p)+G_{12}^*,\\
V_{11}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{11}^{22}(q_2R_2)B_2-V_{12}^{21}(q_3R_2)A_3-V_{12}^{22}(q_3R_2)B_3=\omega_{12}^*(p),\\
V_{21}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{21}^{22}(q_2R_2)B_2-V_{22}^{21}(q_3R_2)A_3-V_{22}^{22}(q_3R_2)B_3=\omega_{22}^*(p)+G_{23}^*,\\
V_{22}^{31}(q_3R_3)A_3+V_{22}^{32}(q_3R_3)B_3=\omega_3^*(p).
\end{gathered} \tag{14}$$

У системі (14) беруть участь функції:

$$G_{12}^*=\frac{c_{11,1}}{\mathrm{sh}R_1}\int_{R_0}^{R_1}\frac{F_{\nu_1;11}^{\mu,0}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)}{\Delta_{\nu_1;11}^{\mu}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)}a_1^{-2}f_1^*(p,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho\ +\ c_{21,1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}a_2^{-2}f_2^*(p,\rho)d\rho,$$

$$G_{23}^{*}=-c_{11,2}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}a_2^{-2}f_2^{*}(p,\rho)d\rho+c_{21,2}\int\limits_{R_2}^{R_3}\frac{\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho)}{\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)}a_3^{-2}f_3^{*}(p,\rho)d\rho.$$

Введемо до розгляду функції:

$A_{\mu,\,j}(p) = \Delta^{\mu}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\,\Delta_{2j}(q_2R_1,\,q_2R_2) - \Delta^{\mu}_{\nu_1;21}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\,\Delta_{1j}(q_2R_1,\,q_2R_2)$.

$B_j^{*}(p) = \Delta_{j1}(q_2R_1,\,q_2R_2)\Delta_{22}(q_3R_2,\,q_3R_3) - \Delta_{j2}(q_2R_1,\,q_2R_2)\Delta_{12}(q_3R_2,\,q_3R_3)$, $j = 1, 2$,

$\theta^{*}_{\mu,1}(p,r) = \Delta^{\mu}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\Phi^{1}_{22}(q_2R_1,q_2r) - \Delta^{\mu}_{\nu_1;21}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\Phi^{1}_{12}(q_2R_1,q_2r)$,

$\theta^{*}_{2}(p,r) = \Delta_{12}(q_3R_2,\,q_3R_3)\,\Phi^{2}_{21}(q_2R_2,q_2r) - \Delta_{22}(q_3R_2,\,q_3R_3)\,\Phi^{2}_{11}(q_2R_2,q_2r)$.

Припустимо, що виконана умова однозначної розв’язності даної крайової задачі: для $p = \sigma + is$ з $\mathrm{Re}p = \sigma > \sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\mathrm{Im}p = s \in (-\infty, \infty)$ визначник алгебраїчної системи (14)

$$\Delta_{\mu}(p) \equiv A_{\mu,1}(p)\,\Delta_{22}(q_3R_2,\,q_3R_3) - A_{\mu,2}(p)\,\Delta_{12}(q_3R_2,\,q_3R_3) =$$
$$= B_2^{*}(p)\,\Delta^{\mu}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1) - B_1^{*}(p)\,\Delta^{\mu}_{\nu_1;21}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1) \neq 0. \qquad (15)$$

Визначимо головні розв’язки крайової задачі (6) – (8):

1) породжені неоднорідністю крайової умови в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W^{*}_{\mu;11}(p,r)=\frac{1}{\Delta_{\mu}(p)}[B_1^{*}(p)F^{\mu,1}_{\nu_1;21}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r)-B_2^{*}(p)F^{\mu,1}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r)],$$

$$W^{*}_{\mu;12}(p,r)=-\frac{c_{11,1}(p)}{B_{\mu}(q_1)\mathrm{sh}R_1}\frac{1}{\Delta_{\mu}(p)}\theta_2^{*}(p,r),\ W^{*}_{\mu;13}(p,r)=-\frac{c_{11,1}(p)}{B_{\mu}(q_1)\mathrm{sh}R_1}\frac{c_{11,2}q_2}{\Delta_{\mu}(p)}\Phi^{3}_{22}(q_3R_3,q_3r) \qquad (16)$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W^{*}_{\mu;31}(p,r)=\frac{c_{21,1}c_{21,2}q_2q_3}{\Delta_{\mu}(p)}F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r),\ W^{*}_{\mu;32}(p,r)=-\frac{c_{21,2}q_3}{\Delta_{\mu}(p)}\theta^{*}_{\mu,1}(p,r), \qquad (17)$$

$$W^{*}_{\mu;33}(p,r)=\frac{1}{\Delta_{\mu}(p)}[A_{\mu,2}(p)\Phi^{2}_{12}(q_3R_2,q_3r)-A_{\mu,1}(p)\Phi^{2}_{22}(q_3R_2,q_3r)];$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{1*}_{\mu;11}(p,r)=\frac{B_2^{*}(p)}{\Delta_{\mu}(p)}F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1),\ \mathcal{R}^{1*}_{\mu;21}(p,r)=-\frac{B_1^{*}(p)}{\Delta_{\mu}(p)}F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1),$$

$$\mathcal{R}^{1*}_{\mu;12}(p,r)=-\frac{c_{21,1}q_2}{\Delta_{\mu}(p)}\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{1*}_{\mu;22}(p,r)=\frac{c_{21,1}q_2}{\Delta_{\mu}(p)}\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r),$$

$$\mathcal{R}^{2*}_{\mu;11}(r,p)=-\frac{\Delta^{\mu}_{\nu_1;21}}{\Delta_{\mu}(p)}\theta_2^{*}(p,r),\quad \mathcal{R}^{2*}_{\mu;21}(r,p)=\frac{\Delta^{\mu}_{\nu_1;11}}{\Delta_{\mu}(p)}\theta_2^{*}(p,r), \qquad (18)$$

$$\mathcal{R}^{2*}_{\mu;12}(p,r)=-\frac{\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta_{\mu}(p)}\theta^{*}_{\mu,1}(p,r),\ \mathcal{R}^{2*}_{\mu;22}(p,r)=\frac{\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta_{\mu}(p)}\theta^{*}_{\mu,1}(p,r),$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{\mu;11}(p,r)=-\frac{c_{11,2}q_2}{\Delta_{\mu}(p)}\Delta^{\mu}_{\nu_1;21}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\Phi^{3}_{22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{\mu;21}(p,r)=\frac{c_{11,2}q_2}{\Delta_{\mu}(p)}\Delta^{\mu}_{\nu_1;21}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\Phi^{3}_{22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$\mathcal{R}^{3*}_{\mu;12}(p,r)=\frac{A_{\mu,2}(p)}{\Delta_{\mu}(p)}\Phi^{3}_{22}(q_3R_3,q_3r),\ \mathcal{R}^{3*}_{\mu;22}(p,r)=-\frac{A_{\mu,1}(p)}{\Delta_{\mu}(p)}\Phi^{3}_{22}(q_3R_3,q_3r);$$

4) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\mathcal{H}^{*}_{\mu;11}(p,r,\rho)=-B_{\mu}(q_1)\begin{cases}F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r)W^{*}_{\mu,11}(p,\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)W^{*}_{\mu,11}(p,r), & R_0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}^*_{\mu;12}(p,r,\rho)=\frac{c_{21,1}(p)}{\Delta_\mu(p)}F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r)\theta^*_2(p,\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{\mu;13}(p,r,\rho)=\frac{1}{\Delta_\mu(p)}c_{21,1}q_2c_{21,2}F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$\mathcal{H}^*_{\mu;21}(p,r,\rho)=\frac{c_{11,1}}{\mathrm{sh}R_1}\frac{1}{\Delta_\mu(p)}F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)\theta^*_2(p,r),$$

$$\mathcal{H}^*_{\mu;22}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta_\mu(p)}\begin{cases}\theta^*_{\mu,1}(p,r)\theta^*_2(p,\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \theta^*_{\mu,1}(p,\rho)\theta^*_2(p,r), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases} \qquad (19)$$

$$\mathcal{H}^*_{\mu;23}(p,r,\rho)=\frac{c_{21,2}}{\Delta_\mu(p)}\theta^*_{\mu,1}(p,r)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{\mu;31}(p,r,\rho)=\frac{c_{11,1}}{\mathrm{sh}R_1}\frac{c_{11,2}q_2}{\Delta_\mu(p)}F^{\mu,0}_{\nu_1;11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$\mathcal{H}^*_{\mu;32}(p,r,\rho)=\frac{c_{11,2}}{\Delta_\mu(p)}\theta^*_{\mu,1}(p,\rho)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$\mathcal{H}^*_{\mu;33}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_3}\begin{cases}W^*_{\mu,33}(p,r)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3\rho), & R_2<r<\rho<R_3,\\ W^*_{\mu,33}(p,\rho)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3r), & R_2<\rho<r<R_3.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (14) в силу умови (15), підстановки отриманих значень величин A_j та B_j ($j=\overline{1,3}$) у формули (9) та низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (6) – (8):

$$u^*_j(p,r)=W^*_{\mu;1j}(p,r)\omega^*_0(p)+W^*_{\mu;3j}(p,r)\omega^*_3(p)+\sum_{k,m=1}^{2}\mathcal{R}^{j*}_{\mu,km}(p,r)\omega^*_{km}(p)+$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}^*_{\mu;j1}(p,r,\rho)a_1^{-2}f_1^*(p,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^*_{\mu;j2}(p,r,\rho)a_2^{-2}f_2^*(p,\rho)d\rho+$$
$$+\int_{R_2}^{R_3}\mathcal{H}^*_{\mu;j3}(p,r,\rho)a_3^{-2}f_3^*(p,\rho)d\rho,\ j=\overline{1,3}. \qquad (20)$$

Повертаючись до оригіналу за Лапласом, одержуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (2) – (4):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\left[W_{\mu;1j}(t-\tau,r)\omega_0(\tau)+W_{\mu;3j}(t-\tau,r)\omega_3(\tau)\right]d\tau+\sum_{k,m=1}^{2}\int_0^t\mathcal{R}^j_{\mu,km}(t-\tau,r)\omega_{km}(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{\mu;j1}(t-\tau,r,\rho)a_1^{-2}f_1(\tau,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho d\tau+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\mu;j2}(t-\tau,r,\rho)a_2^{-2}f_2(\tau,\rho)d\rho d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{R_2}^{R_3}\mathcal{H}_{\mu;j3}(t-\tau,r,\rho)a_3^{-2}f_3(\tau,\rho)d\rho d\tau,\qquad j=\overline{1,3}, \qquad (21)$$

У рівностях (21) за означенням [4] маємо, що

$$W_{\mu;mj}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}W^*_{\mu;mj}(p,r)e^{pt}dp,\ m=1,3,\ j=1,2,3; \qquad (22)$$

$$\mathcal{R}^j_{\mu;km}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathcal{R}^{j*}_{\mu;km}(p,r)e^{pt}dp,\ k,m=1,2,\ j=\overline{1,3}. \qquad (23)$$

$$\mathcal{H}_{\mu;jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathcal{H}^*_{\mu;jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp,\ j,k=\overline{1,3}. \qquad (24)$$

Подамо коректний для дослідження (розрахунку) вираз головних розв'язків даної параболічної задачі: функцій Гріна крайових умов $W_{\mu,1j}$ та $W_{\mu,3j}$, функцій Гріна умов спряження $\mathcal{R}^j_{\mu,km}$ та функцій впливу $\mathcal{H}_{\mu,jk}$.

Особливими точками функцій $W^*_{\mu,1j}(p,\, r)$, $W^*_{\mu,3j}(p,\, r)$, $\mathcal{R}^{j*}_{\mu,km}(p,\, r)$ та $\mathcal{H}^*_{\mu,jk}(p,$ $r,\, \rho)$ є точки галуження $p = -\gamma_1^2$, $p = -\gamma_2^2$, $p = -\gamma_3^2$ та $p = \infty$. Всі ці точки знаходяться на від'ємній частині дійсної вісі Re$p = \sigma$. Це дає нам право „сісти на уявну вісь" і одержати розрахункові формули:

$$W_{\mu;mj}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[W^*_{\mu;mj}(is,r)e^{ist}]ds\,,\ m = 1,\,3,\, j = \overline{1,3}\,, \tag{25}$$

$$\mathcal{R}^j_{\mu;km}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\mathcal{R}^{j*}_{\mu;mk}(is,r)e^{ist}]ds\,,\ k,\, m = 1,\,2,\, j = \overline{1,3}\,, \tag{26}$$

$$\mathcal{H}_{\mu;jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\mathcal{H}^*_{\mu;jk}(is,r,\rho)e^{ist}]ds\,,\ j,\, k = \overline{1,3}\,. \tag{27}$$

У рівностях (25) – (27) Re(...) означає дійсну частину від виразу (...).

Зауважимо, що формули (25) – (27) зручні для використання в інженерних розрахунках, але не є компактними стосовно аналітичних досліджень.

Подамо структуру головних розв'язків даної параболічної задачі у вигляді функціональних рядів. Покладемо $q_j = ia_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 = \gamma^2 - \gamma_j^2 \ \geq 0$, де $\gamma^2 =$ $\max\{\gamma_1^2;\, \gamma_2^2;\, \gamma_3^2\}$. Тоді $p = -(\beta^2 + \gamma^2) \equiv (\beta^2 + \gamma^2)\exp(\pi i)$, $dp = -2\beta d\beta$; i – уявна одиниця.

При $\tilde{\alpha}^m_{kj} = \alpha^m_{kj} - (\beta^2 + \gamma^2)\delta^m_{kj}$, $\tilde{\beta}^m_{kj} = \beta^m_{kj} - (\beta^2 + \gamma^2)\gamma^m_{kj}$ маємо:

$$V^{m1}_{jk}(ib_sR_m) = -\tilde{\alpha}^m_{jk}b_s\sin b_sR_m + \tilde{\beta}^m_{jk}\cos b_sR_m \equiv v^{m1}_{jk}(b_sR_m)\,,$$

$$V^{m2}_{jk}(ib_sR_m) = i[\tilde{\alpha}^m_{jk}b_s\cos b_sR_m + \tilde{\beta}^m_{jk}\sin b_sR_m] \equiv iv^{m2}_{jk}(b_sR_m)\,,$$

$$\Phi^m_{jk}(ib_sR_m, ib_sr) = i[v^{m2}_{jk}(b_sR_m)\cos b_sr - v^{m1}_{jk}(b_sR_m)\sin b_sr] \equiv i\varphi^m_{jk}(b_sR_m, b_sr)\,,$$

$$\Delta_{jk}(ib_2R_1, ib_2R_2) = i[v^{11}_{j2}(b_2R_1)v^{22}_{k1}(b_2R_2) - v^{12}_{j2}(b_2R_1)v^{21}_{k1}(b_2R_2)] \equiv i\delta_{jk}(b_2R_1, b_2R_2)\,,$$

$$\Delta_{j2}(ib_3R_2, ib_3R_3) = i[v^{21}_{j2}(b_3R_2)v^{32}_{22}(b_3R_3) - v^{22}_{j2}(b_3R_2)v^{31}_{22}(b_3R_3)] \equiv i\delta_{j2}(b_3R_2, b_3R_3)\,,$$

$$B_j(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2)) = -[\delta_{j1}(b_2R_1, b_2R_2)\delta_{22}(b_3R_2, b_3R_3) - \delta_{j2}(b_2R_1, b_2R_2)\delta_{12}(b_3R_2, b_3R_3)] \equiv$$
$-B_j(\beta)$, $j = 1,\, 2$.

Скористаємося тим, що приєднані функції Лежандра

$$P^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r) = A^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r)\sin\mu\pi - B^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r)\cos\mu\pi\,,\ \nu_1^* = -1/2 + ib_1\,,$$

$$L^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r) = A^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r) - i\,\mathrm{th}\pi b_1 B^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r)\,,$$

де $A^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r)$ та $B^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r)$ – дві дійсні приєднані функції Лежандра дійсної змінної [3].

Безпосередньо встановлюємо:

$$Z^{\mu,m1}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m) = Y^{\mu,m1}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m)\sin\mu\pi - Y^{\mu,m2}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m)\cos\mu\pi\,,$$

$$Z^{\mu,m2}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m) = Y^{\mu,m1}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m) - i\,\mathrm{th}\pi b_1 Y^{\mu,m2}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m)\,,$$

$$F^{\mu,m}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m, \mathrm{ch}r) = -\gamma_2(\beta)[Y^{\mu,m1}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m)B^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r) - Y^{\mu,m2}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m)A^\mu_{\nu_1^*}(\mathrm{ch}r)] \equiv$$

$$\equiv -\gamma_2(\beta)f^{\mu,m}_{\nu_1^*;jk}(\mathrm{ch}R_m, \mathrm{ch}r)\,,\ \gamma_2(\beta) = \cos\mu\pi + i\,\mathrm{th}\pi b_1 \cdot \sin\mu\pi;$$

$$\Delta^\mu_{\nu_1^*;j1}(\mathrm{ch}R_0, \mathrm{ch}R_1) = -\gamma_2(\beta)[Y^{\mu,01}_{\nu_1^*;11}(\mathrm{ch}R_0)Y^{\mu,12}_{\nu_1^*;j1}(\mathrm{ch}R_1) - Y^{\mu,02}_{\nu_1^*;11}(\mathrm{ch}R_0)Y^{\mu,11}_{\nu_1^*;j1}(\mathrm{ch}R_1)] \equiv$$

$$\equiv -\gamma_2(\beta)\delta^\mu_{\nu_1^*;j1}(\mathrm{ch}R_0, \mathrm{ch}R_1)\,,$$

$$A_{\mu,j}(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2)) = -i\gamma_2(\beta)[\delta^\mu_{\nu_1^*;11}(\mathrm{ch}R_0, \mathrm{ch}R_1)\delta_{2j}(b_2R_1, b_2R_2) - \delta^\mu_{\nu_1^*;21}(\mathrm{ch}R_0, \mathrm{ch}R_1) \times$$
$\times\ \delta_{1j}(b_2R_1, b_2R_2)] \equiv -i\gamma_2(\beta)\, a_{\mu,j}(\beta)$, $j = 1,\, 2$;

$$\Delta_\mu(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2)) \equiv \gamma_2(\beta)[a_{\mu,1}(\beta)\delta_{22}(b_3R_2, b_3R_3) - a_{\mu,2}(\beta)\delta_{12}(b_3R_2, b_3R_3)] \equiv$$

$$\equiv \gamma_2(\beta)[B_2(\beta)\delta^\mu_{\nu_1^*;11}(\mathrm{ch}R_0, \mathrm{ch}R_1) - B_1(\beta)\delta^\mu_{\nu_1^*;21}(\mathrm{ch}R_0, \mathrm{ch}R_1)] \equiv \gamma_2(\beta)\delta_\mu(\beta)\,.$$

Якщо б $\delta_\mu(\beta) \neq 0$, то згідно формул (22) – (24) функції $W_{\mu,j} \equiv 0$, $\mathcal{R}^j_{\mu,km} \equiv 0$ і

$\mathcal{H}_{\mu,jk} \equiv 0$. Тоді $u_j(t, r) = 0$ згідно формули (21), що не можливо: дана параболічна задача має ненульовий розв'язок.

Для існування $u(t, r) \equiv \{u_1(t, r); u_2(t, r); u_3(t, r)\} \neq 0$ необхідно й досить, щоб $\delta_\mu(\beta) = 0$. Ми одержали трансценденте рівняння, корені β_n якого утворюють дискретний спектр гібридного диференціального оператора (ГДО) [7].

$\mathrm{M}_\mu = \theta(r - R_0)\,\theta(R_1 - r)a_1^2\Lambda_\mu + [a_2^2\,\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) + a_3^2\,\theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)]d^2/dr^2$,
де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [6].

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}\mathrm{sh}R_1}\frac{1}{a_1^2},\ \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{1}{a_2^2},\ \sigma_3 = \frac{1}{a_3^2};$$

$$V_{\mu,1}(r,\beta_n) = c_{21,1}c_{21,2}b_{2n}b_{3n}f^{\mu,0}_{\nu^*_{1n};11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r),\ b_{jn} = (\beta_n^2 + k_j^2)^{1/2}a_j^{-1},\ j = \overline{1,3};$$

$$f^{\mu,0}_{\nu^*_{1n};11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}r) = Y^{\mu,01}_{\nu^*_{1n};11}(\mathrm{ch}R_m)B^\mu_{\nu^*_{1n}}(\mathrm{ch}r) - Y^{\mu,02}_{\nu^*_{1n};11}(\mathrm{ch}R_0)A^\mu_{\nu^*_{1n}}(\mathrm{ch}r), \tag{28}$$

$$V_{\mu,2}(r,\beta_n) = c_{21,2}b_{3n}[\delta^\mu_{\nu^*_{1n};11}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\varphi^1_{22}(b_{2n}R_1,b_{2n}r) -$$

$$-\ \delta^\mu_{\nu^*_{1n};21}(\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}R_1)\varphi^1_{12}(b_{2n}R_1,b_{2n}r)],$$

$$V_{\mu,3}(r,\beta_n) = -\frac{a_{\mu,1}(\beta_n)c_{21,2}b_{3n}}{\delta_{12}(b_{2n}R_2,b_{3n}R_3)}\varphi^3_{22}(b_{3n}R_3,b_{3n}r).$$

За узагальненою теоремою розвинення [4], одержимо

$$\mathrm{H}_{\mu,jk}(t, r, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{V_{\mu,j}(r,\beta_n)V_{\mu,k}(\rho,\beta_n)}{\|V_\mu(r,\beta_n)\|_1^2}\sigma_k a_k^2,\ j, k = \overline{1,3}. \tag{29}$$

Тут бере участь квадрат узагальненої норми власної функції

$$V_\mu(r, \beta_n) = \sum_{j=1}^{3}\theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r)V_{\mu,j}(r,\beta_n),$$

який обчислюється за формулою [7]

$$\|V_\mu(r,\beta_n)\|_1^2 = -\frac{a_{\mu,1}(\beta_n)}{\gamma_2(\beta_n)}\frac{c_{21,2}b_{3n}^2}{\delta_{12}(b_{3n}R_2,b_{3n}R_3)}\left[\frac{d}{dp}\Delta_\mu(p)\right]\Bigg|_{p=p_n}. \tag{30}$$

Зауважимо, що [7]

$$\|V_\mu(r,\beta_n)\|_1^2 \neq \|V_\mu(r,\beta_n)\|^2 \equiv \int_{R_0}^{R_3}[V_\mu(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr.$$

Вони стають рівними при $\delta^m_{jk} = 0$ та $\gamma^m_{jk} = 0$.

Аналогічно одержуємо:

$$W_{\mu,1j}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{\sigma_1 a_1^2\mathrm{sh}R_0V_{\mu,1}(R_0,\beta_n)}{(-\tilde{\alpha}^0_{11})\|V_\mu(r,\beta_n)\|_1^2}V_{\mu,j}(r,\beta_n),\ j = \overline{1,3}. \tag{31}$$

$$W_{\mu,3j}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{V_{\mu,j}(r,\beta_n)V_{\mu,3}(R_3,\beta_n)}{(\alpha^3_{22})\|V_\mu(r,\beta_n)\|_1^2}\sigma_3 a_3^2,\ j = \overline{1,3}. \tag{32}$$

Введемо до розгляду функції:

$$Z^m_{\mu,j2}(\beta_n) = \left(\tilde{\alpha}^m_{j2}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^m_{j2}\right)V_{\mu,m+1}(r,\beta_n)\Bigg|_{r=R_m},\ j, m = 1, 2,$$

$h_1 = \sigma_1 a_1^2\,\mathrm{sh}R_1(c_{11,1})^{-1}$, $h_2 = \sigma_2 a_2^2\,\mathrm{sh}R_1(c_{11,2})^{-1}$.

Безпосередньо перевіряється, що

$$\mathcal{R}^j_{\mu,1m}(t,r) = -h_m\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{Z^m_{\mu,22}(\beta_n)V_{\mu,j}(r,\beta_n)}{\|V_\mu(r,\beta_n)\|_1^2},\ m = 1, 2,\ j = \overline{1,3}. \tag{33}$$

$$\mathcal{R}^{j}_{\mu,2m}(t,r)=h_m\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{Z^{m}_{\mu,12}(\beta_n)V_{\mu,j}(r,\beta_n)}{\|V_{\mu}(r,\beta_n)\|_1^2},\ m=1,2,\ j=\overline{1,3}. \qquad (34)$$

У вигляді (29) – (34) головні розв'язки параболічної задачі (2) – (4) зручні як для теоретичних досліджень, так і для інженерних розрахунків. При цьому параметри, що беруть участь у формулюванні задачі, дають можливість в рамках даної моделі безпосередньо із загальних структур виділити будь-який практично важливий випадок.

Зауваження 1. Якщо початкові умови ненульові, тобто

$$u_j(t,r)|_{t=0}=g_j(r),\ r\in(R_{j-1},R_j),\ j=\overline{1,3},$$

то переходимо до нових функцій

$$v_j(t,r)=u_j(t,r)-g_j(t,r)\ (v_j(t,r)|_{t=0}=0).$$

Якщо визначити величини

$$\psi^0_{11}=\delta^0_{11}g_1'(R_0)+\gamma^0_{11}g_1(R_0),\ \psi^3_{22}=\delta^3_{221}g_3'(R_3)+\gamma^3_{22}g_3(R_3),$$

$$\psi_{jk}=\delta^k_{j1}g_k'(R_k)+\gamma^k_{j1}g_k(R_k)-[\delta^k_{j2}g_{k+1}'(R_k)+\gamma^k_{j2}g_{k+1}(R_k)],$$

то розв'язком параболічної задачі (2) – (4) при $g_j(r)\neq 0$ є функції

$$u_j(t,r)=\int_0^t\left[W_{\mu;1j}(t-\tau,r)\omega_0(\tau)+W_{\mu;3j}(t-\tau,r)\omega_3(\tau)\right]d\tau+$$

$$+W_{\mu,1j}(t,r)\psi^0_{11}+W_{\mu,3j}(t,r)\psi^3_{22}+\sum_{k,m=1}^{2}\mathcal{R}^{j}_{\mu,km}(t,r)\psi_{km}+\sum_{k,m=1}^{2}\int_0^t\mathcal{R}^{j}_{\mu,km}(t-\tau,r)\omega_{km}(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{\mu;j1}(t-\tau,r,\rho)a_1^{-2}[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]\mathrm{sh}\rho d\rho d\tau+ \qquad (35)$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\mu;j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]a_2^{-2}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{R_3}\mathcal{H}_{\mu;j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]a_3^{-2}d\rho d\tau,\ j=\overline{1,3},$$

де $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau=0+$ [6].

Зауваження 2. Якщо покласти $\delta^m_{jk}=0,\ \gamma^m_{jk}=0$, то одержимо розв'язок задачі дифузії для даного середовища з жорсткими (по відношенню до відбиття хвиль) межами.

Висновок. За відомими функціями $f=\{f_1(t,r);f_2(t,r);f_3(t,r)\}$, $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ та функціями $\omega_0(t)$, $\omega_{jk}(t)$, $\omega_3(t)$ функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r)\}$ однозначно описує дифузійний процес в даному трискладовому середовищі з м'якими межами.

Список використаних джерел

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992. – 280 с.
3. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. – Львов, 1989. – 60 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики).
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.–М.:Наука,1987. – 688с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. Ленюк М.П., Мороз В.В. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження // Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314 – 315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 105 – 113.

The method of integral transformation of Laplasa in combination with the method of functions is get in the reserved algorithmic form the integral image of decision of task of diffusion in heterogeneous environments with soft limits. The design of diffusive processes is carried out honey of hybrid differential operator Legandra – Fur'e – Furie on the segment of arctic a landmark.

УДК 378.145

А.Б.Андруховський, старший викладач

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ СКЛАДНОСТІ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ДЛЯ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ ТЕСТУВАННЯ

Розглядаються питання розробки програмного комплексу тестування і моніторингу знань студентів і основи розробки тестових завдання на нечіткій логіці.

***Ключові слова:** адаптивна модель тестування, педагогічні тести.*

Актуальною проблемою систем тестування є створення надійного інструменту організації тестування та підтримки бази даних контрольних питань, визначення складності завдань для об'єктивного оцінювання рівня знань.

Для викладачів введення нечітких характеристик може допомогти в розробці завдань і складанні готових тестів. Наприклад, викладач може досить швидко визначити, чи є завдання складним або ні, та чітко визначити складність, за 100-бальною шкалою, але точно оцінити різницю складності двох завдань, буде досить важко. Однак, розуміння складності питань автором тесту може відрізнятися від реальних спроб проходження тесту. Наприклад, автор може написати тест із дуже легкими питаннями, поставивши рівень складності середній.

Проведений аналіз досліджень і публікацій показав, що розробка тестів і обробка результатів тестування детально викладені в [1] і [4], а відомі моделі тестування – в [3].

Відомими на сьогодні методиками [7] пропонується проводити відбір питань наступним чином: питання, на які не відповів жоден із опитуваних і питання, на які відповіли усі опитувані вилучати з тесту. Такий підхід варто оптимізувати, оскільки для тесту важливо мати достатньо велику кількість питань різної складності. Відкидаючи частину питань ми істотно збільшуємо час на запровадження самого тесту, оскільки перед укладачем необхідно буде поставити питання про доопрацювання тесту.

Метою даної статті є опис методики визначення складності питання, що використовує апарат нечіткої логіки.

Основною ідеєю методики є апробація тесту на двох групах опитуваних: «студентів» (осіб, які пройшли навчання за курсом, до якого складається тест) та «експертів» (фахівців компетентних у даній галузі).

Розглянемо реалізацію запропонованої методики. Для визначення складності питань застосуємо терміни нечіткої логіки: *Дуже легке(ДЛ), Легке (ЛГ), Середнє (СР), Вище середнього (ВС), Складне (СК), Дуже складне (ДС).* При цьому розробнику тесту дозволяється використовувати лише терміни *Легке, Середнє, Складне*.

Опитуваним пропонується відповісти на усі питання тесту (без урахування часу відповіді). Отримані результати слід обробити відповідно до наступного алгоритму:

1. Питанням, на які дали відповідь усі експерти та усі студенти встановити рівень складності «Дуже легке».
2. Питанням, для яких автор встановив рівень «Легке» або «Середнє», і на які дали відповідь усі експерти та більше 80% студентів, встановити рівень складності «Легке».
3. Питанням, на які дали відповідь усі експерти та від 30-80% студентів, встановити рівень складності «Середнє».
4. Питанням, для яких автор встановив рівень «Середнє» або «Складне», і на нього відповіли усі експерти та менше 30% студентів, встановити рівень складності «Вище середнього».

5. Питанням, для яких автор тесту встановив рівень складності «Складне» матиме рівень складності «Складне», якщо на нього не дав відповідь жоден студент і більше одного експерта.
6. Питання «Дуже складне», якщо на нього не дав відповідь жоден студент і один експерт.
7. Питання, які не потрапили у розгляд п. 1-6, з тесту вилучаються.

Таким чином, рівень складності заданий укладачем тесту не буде врахований на «легких» питаннях і буде уточнений на «середніх» і «важких».

Сам тест, який буде використовувати підготовлений таким чином набір питань, можна описати наступним алгоритмом.

Тестування починається, виходячи з припущення, що опитуваний має середній рівень підготовки (50 балів із 100 можливих).

1. Оцінити рівень підготовки як середній (R=50 балів)
2. Задати серію запитань S_i складності T_i
3. Проаналізувати результат та змінити складність завдань $T_{i+1}=f_1(T_i,p_i,t_i)$
4. Задати серію запитань S_{i+1}
5. Проаналізувати результат і змінити рівень підготовки $R=f_2(R,p_{i+1},t_i)$
6. Повторювати п. 2-5, доки $i<N$ (N – к-сть серій)
7. Обрахувати сумарну кількість балів, набраних студентом.

t_i – це час, за який студент пройшов завдання і-го рівня тесту. Вплив фактору часу не є предметом розгляду даної статті, однак зазначимо, що він має істотний вплив на параметри Т і R. Його вплив на зміну складності пов'язується із психологічними особливостями опитуваного (напр. прив'язка часу до темпераменту опитуваного).

Таким чином, маємо процедуру адаптивного тестування (оскільки складність завдань змінюється залежно від правильності відповідей студента), яка використовує апарат нечіткої логіки (оскільки поняття рівня підготовки, правильності відповіді на завдання, складності завдань та інші є нечіткими).

Останнім часом спостерігається тенденція різкого підвищення попиту на системи тестування для контролю знань, які представлені на ринку спеціалізованого програмного забезпечення. На підставі даного опису нечітких множин і правил виведення складності питання можна побудувати діючу систему тестування і підсистему для оцінювання результатів. Слід зазначити, що складність завдань і рівень підготовки є взаємопов'язаними і змінюються залежно один від одного.

Запропонована методика є на даний момент реалізована у альфа-версії системи тестування, яка розробляється на кафедрі інформатики та МВІ Кам'янець-Подільськокого національного університету ім. Івана Огієнка, і буде апробована найближчим часом.

Список використаних джерел

1. Аванесов В.С. Композиция тестовых заданий. М.: АДЕПТ, 1998.
2. Васильев В.И., Тягунова Т.Н., Хлебников В.А. Триадная сущность шкалы оценивания // Дистанционное образование. 2000. №6. С.19-25.
3. Глова В.И., Дуплик С.В. Модели педагогического тестирования обучаемых // Вестник Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. 2003. №2. С. 74-79.
4. Нейман Ю.М., Хлебников В.А. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. М., 2000.
5. Попов Д.И. Способ оценки знаний в дистанционном обучении на основе нечётких отношений // Дистанционное образование. 2000. №6.
6. Тарасов В.А. Проектирование компьютерных тестов с открытыми ответами // Информатика и образование. 2003. №1. С.72-76.
7. Гультяев А.К. Macromedia Authorware 6.0. Разработка мультимедийных учебных курсов. – СПб.: Корона-принт, 2002 – 400 с.

The questions of development of programmatic complex of testing and monitoring of knowledges of students and basis are examined developments the test of task on fuzzy logic.

***Key words:** adaptive model of testing, pedagogical tests.*

УДК 681.3:004.42

О.А.Смалько, кандидат педагогічних наук, старший викладач

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРОБКИ ПРОГРАМНИХ З АСОБІВ НАВЧАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

У статті йдеться про особливості процесу створення сучасних програмних засобів навчального призначення, про основні тенденції розробки електронних освітніх ресурсів та рекомендації щодо їх створення та оформлення.

Ключові слова: *педагогічні програмні засоби, прикладні програми навчального призначення, дизайн електронних освітніх ресурсів.*

Аналіз поширеного в наш час програмного забезпечення навчального призначення, зокрема вітчизняного, створеного для підтримки вивчення переважної кількості дисциплін, яким навчають у школах, ліцеях, гімназіях, коледжах, вищих закладах освіти, переконує в тому, що ще недостатньою мірою у розробників сформувались належні навички стосовно проектування, розробки, програмування педагогічних програмних засобів. Інтегровані електронні комплекси, віртуальні комп’ютерні лабораторії, інтерактивні навчальні курси, в яких використовуються Java-аплети, елементи Flash-анімації — все це найкращі рішення, призначені для реалізації різноманітних навчальних цілей, яких поки що небагато є на вітчизняному ринку програмних засобів. Це пояснюється тим, що наукові та експериментальні дослідження, присвячені проблемам створення прикладних програм навчального призначення, електронних освітніх ресурсів та видань, здебільшого "не встигають" за розвитком інформаційно-комунікаційних засобів та динамічно змінюваних освітніх технологій і форм організації навчальних занять. Не так-то і легко серед лавиноподібного масиву науково-методичних публікацій, присвячених цій тематиці, знайти комплексно дібрані рекомендації щодо створення комп’ютерних освітніх ресурсів різних типів, призначених для підтримки навчальної діяльності користувачів різних категорій, в тому числі й вікових. Тому розробники не завжди можуть повною мірою використати найкращий досвід фахівців програмної індустрії по створенню електронних ресурсів навчального призначення.

Аналіз останніх досліджень, науково-методичних публікацій, тематичних Інтернет-ресурсів та існуючих вітчизняних програмних рішень навчального призначення показує, що у країні з кожним роком все більше уваги приділяється розробці електронних освітніх ресурсів і педагогічних програмних засобів. Але не завжди при цьому враховується досвід закордонних розробників, найкращих у своїй галузі, не скрізь використовуються варті уваги наукові здобутки, на зразок [1-2; 4-5] та багатьох інших, а також не повсюдно в практику розробки програмних засобів навчального призначення впроваджуються експериментально перевірені рекомендації щодо особливостей їх організації, проектування та оформлення інтерфейсів.

Метою даної статті є окреслити сучасні тенденції розробки електронних освітніх ресурсів та навести основні рекомендації щодо їх створення та оформлення.

Основна частина. Крім загальновідомих правил і принципів проектування програмних продуктів при розробці засобів навчального призначення слід враховувати багато аспектів, пов’язаних із формуванням організаційної моделі, що відображатиме особливості функціонування системи, механізми здійснення навчального впливу, форму і дидактичну основу навчальної діяльності, включаючи методики, засоби, інформаційне наповнення, конкретні інструменти та ін. Необхідно також побудувати формально-структурну модель процесу навчання, врахувавши при цьому всі основні особливості цього процесу. При розробці моделі процесу навчання доцільно реалізовувати технології диференційованого та індивідуально-орієнтованого підходів за рахунок можливості вибору рівня складності і виду подання навчальних матеріалів, організації самостійного просування користувача тематичними блоками, можливості повернення до потрібних матеріалів курсу і т.ін. [5, с. 11-42]

Якщо у програмному навчальному засобі передбачено організацію процесу педагогічного контролю знань, то під час його проектування потрібно визначити його форми, підібрати необхідні моделі і відповідно алгоритми оцінювання навчальних досягнень та розробити процедури, за якими у системі буде здійснюватись контроль знань [5, с. 43-161].

Педагогічна цінність програмного продукту зростає з використанням у ньому ефективних методик подання навчального матеріалу, з урахуванням основних психолого-педагогічних вимог, що розробляються на основі принципів педагогічної психології і дидактики, із втіленням у програмному продукті рекомендацій по організації зворотного зв’язку, по проектуванню навчальних цілей, по побудові діалогу із суб’єктом навчання [6], а також завдяки організації об’єктивної системи контролю і дотриманню принципів варіативності та диференційованого підходу до суб’єктів навчання.

Забезпечити досягнення належних результатів у навчанні можна використовуючи при проектуванні програмного продукту різні методи і засоби активізації пізнавальної діяльності суб’єктів навчання, наприклад, створюючи проблемні ситуації, пропонуючи завдання проблемного, логічного, прикладного характеру, генеруючи запитання і пізнавальні завдання, що вимагають для свого вирішення залучення знань з додаткових джерел або з інших галузей знань.

Важливою передумовою створення ефективних засобів електронного навчання є дотримання вимог, пропонованих у міждержавних стандартах країн СНД, у стандартах і специфікаціях, розроблених національною системою стандартизації, гармонізованих з міжнародними та європейськими стандартами, а також розроблених Глобальним освітнім консорціумом (IMS), Комітетом зі стандартизації освітніх технологій Інституту інженерів у галузі електротехніки й електроніки (IEEE LTSC), Комітетом з комп'ютерного навчання в авіаційній промисловості (AICC) і Технічним комітетом з інформаційних технологій Міжнародної організації по стандартизації (JTC ISO) [4, с. 121-141].

Сучасні електронні навчальні видання і ресурси перед їх широким поширенням в освітніх установах і глобальних мережах повинні пройти комплексну експертизу, що включає технічну, змістовну експертизу та експертизу дизайн-ергономіки. Також програмний освітній ресурс повинен пройти сертифікацію та отримати сертифікат відповідності, зареєстрований в реєстрі УкрСЕПРО.

Сучасний програмний педагогічний засіб обов’язково повинен відповідати канонам педагогічного дизайну. Педагогічний дизайн, як відомо, ґрунтується на таких основних принципах: науковості (використання теоретично обґрунтованих та перевірених на практиці прийомів і методів організації навчального матеріалу), наочності (виправдане залучення при навчанні максимальної кількості каналів сприйняття інформації), доступності науки (забезпечення доступності наукових знань та можливості їх використання суб'єктами навчання), осяжності мислення (максимальне врахування психології сприйняття і навчання, забезпечення відображення проходження процесу пізнання), безперервності і наступності (забезпечення узгодженості навчальних курсів, правил і засобів їхнього засвоєння), комфортності (забезпечення зручності та ергономічності сприйняття інформації суб'єктом навчання) [1].

В педагогічному програмному засобі матеріал повинен подаватись в обсязі, послідовності і формі, передбаченими навчальною програмою відповідного закладу освіти. Зміст і структура матеріалу також повинні бути узгодженими зі стандартами вітчизняної освіти та науки. До того ж матеріал має бути актуальним, фактографічним, характеризуватись практичною змістовністю, системністю, цілісністю, новизною та оригінальністю.

Найбільшу практичну цінність мають електронні педагогічні ресурси модульної архітектури [4, с. 74-81]. Кожен модуль повинен бути змістовно і функціонально повним. Компоновані модулі, блоки і об'єкти навчальних систем мають бути сумісними. Це надає користувачам можливість вільно обирати обсяг навчання, потрібну послідовність матеріалу, а в найкращому випадку і спосіб представлення порцій інформації.

Розробники, багато уваги приділяючи змістовому наповненню програмного продукту, неодмінно повинні враховувати ергономіку сприйняття і логіку розуміння пропонованого навчального матеріалу, адже вся інформація повинна добре сприйматись та легко засвоюватись.

Крім того, розробникам слід звертати увагу на питання, пов'язані з підвищенням комфортності освітнього середовища, особливо актуальні в умовах модернізації освіти, коли частка самостійної роботи суб'єктів навчання збільшується.

Користувач повинен швидко пристосовуватись до навчального середовища. З метою прискорення адаптації необхідно, щоб в інтерфейсі умовні зображення, піктограми, навігаційні знаки і кнопки управління інтерпретувались однозначно, були виразними, зрозумілими. Для цього також потрібно, щоб наявність чи відсутність додаткових позначень у вікнах, графічних значків на інструментальних панелях, гліфів (маленьких значків на командних кнопках) могла регулюватись користувачем.

Крім форми, кольору та інтуїтивної зрозумілості піктограм важливою також є загальна кількість рівноцінних елементів на екрані. Наприклад, якщо число однакових кнопок навігаційної панелі не перевищує 6-7, користувач може швидко «зафіксувати» їх у пам'яті і звести користування ними до автоматизму.

Графічний інтерфейс повинен легко запам'ятовуватись, бути привабливим та добре продуманим. При роботі з програмою користувач повинен бути поставлений у такі умови, щоб він міг швидко і точно визначити, де знаходиться найважливіша інформація і найголовніші частини інтерфейсу.

У розробника в розпорядженні є кілька методів, за допомогою яких він може залучати і переключати увагу користувача. Мова йде про колірне виділення, графіку, анімацію, обмежувальні лінії, підсвічування, стилі і розмірі шрифту, товщини ліній і т.п. Проте, якщо в один контекст взаємодії включити надто багато таких прийомів або якщо розмістити в ньому надто велику кількість важливої інформації, не виключено, що користувачу буде складно орієнтуватись в пропонованому навчальному середовищі.

Організація візуальних елементів здійснюється за допомогою набору графічних прийомів, що поєднують чи роз'єднують об'єкти за їхніми видимими особливостями. Наприклад, схожі чи взаємозалежні елементи в інтерфейсі, як правило й виглядають схоже. Важливо також продумано розташовувати елементи, забезпечуючи сусідство лише взаємозалежних об’єктів або демонструючи взаємозв'язок віддалено розміщених об’єктів за допомогою, наприклад, кольору, звичайних ліній чи візуально утворюваних блоків.

Для підвищення практичності інтерфейсу також корисно залишати пропуски між написами і межами командних кнопок. Керуючі елементи не повинні групуватися біля країв діалогових вікон чи рамок.

Обов'язково інтерфейс повинен бути охайним. Усі видимі елементи вікна повинні бути створені на професійному рівні, вирівняні з усіх боків, повинні гарно виглядати. Основні засоби навігації і стандартні командні кнопки, безсумнівно, повинні бути однакового, стандартного розміру, хоч іноді деякі інші елементи екранних інтерфейсів можуть відрізнятись як за розміром, так і за формою.

Універсальні знаки завжди повинні мати подібність з тим, що вони представляють. При цьому також може використовуватись аналогія, метафори, синекдоха (такий вигляд метонімії, при якій частина об’єкта представляє цілий об’єкт, або навпаки) і омоніми (різні за змістом одиниці мови, які однаково звучать або пишуться). Однак усе це не повинно бути надто заумним, далеким від реальності чи походити на візуальні каламбури.

Не ставлячи за мету видовищність інтерфейсу, варто, однак, використовувати значну кількість високоякісної графіки, щоправда записаної у компактних форматах (jpeg, gif, png); виконану з високим ступенем вірогідності анімацію, в тому числі і тривимірну; відеофрагменти, дикторський текст, коментарі; можливо також спокійну фонову музику, звуки подій (звичайно, із реалізованою можливістю в разі потреби їх відключати) і т. ін.

При організації меню слід враховувати, що елементи, які мають мало спільного, не повинні опинятись в одному меню. Назви меню повинні підказувати користувачеві їхній вміст, а назви пунктів повинні відповідати функціям, доступ до яких вони забезпечують.

Добре продумані структури меню в середньому вміщують 6-9 назв. Що стосується кількості елементів у кожному з меню, то воно також повинно бути розумним, але слід мати на увазі, що вдалішим варіантом меню є більша кількість пунктів і менший ступінь вкладеності, а не навпаки. Вкладені меню повинні бути меншими, ніж меню верхніх рівнів. В загальному випадку два рівні вкладеності повинно вважатись максимумом.

Розробник повинен подумати як про повну, так і про скорочену версію меню, панелей (чи наборів) інструментів, команд. Скорочені версії зазначених об'єктів інтерфейсу, за звичай, з'являються за замовчуванням при встановленні програми і повинні містити в собі найважливіші, ключові елементи. За умов невикористання окремих команд, кнопок чи панелей інструментів протягом тривалого часу можна запрограмувати їхнє приховування (із можливістю подальшого розгортання до повного вигляду).

Доступ до команд меню, зокрема до основних, що часто використовуються, можна організувати також за допомогою клавіатури. Корисними вважаються також і контекстні меню, правила організації яких нагадують правила організації звичайних випадаючих меню, з тією лише різницею, що у контекстному меню повинні розміщуватись операції, які відносяться до виділеного об'єкта. У контекстному меню не повинно бути більше 7-8 пунктів, а порядок їхнього розташування повинен відповідати передбачуваній імовірності звертання до відповідних функцій. При цьому досить спірною вважається доцільність дублювання команди, яка може викликатись за допомогою подвійного натискання клавіші миші, у першому пункті контекстного меню [2].

Корисною вбачається тенденція використання технології розгортання меню в обидва боки, а також програмна реалізація «липких» меж, що дозволяє не випускати покажчик курсору з фокусу елементу меню чи кнопки навіть тоді, коли він відходить на деяку відстань.

Під час конструювання екранного інтерфейсу слід пам'ятати, що при зосередженій роботі за комп'ютером користувач досить швидко стомлюється, а це негативно відбивається на засвоєнні навчального матеріалу. Тому в педагогічних програмних продуктах корисно поточні об'єкти, з якими безпосередньо працює користувач, робити великого розміру, основну ідею абзацу розміщувати з самого початку (у першому рядку) абзацу; всі об'єкти, з якими ведеться одночасна робота, потрібно розміщувати в полі зору користувача, при цьому слід раціонально сполучати всі технології представлення матеріалу — текст, графіку, аудіо, відео, анімацію; слід уникати нагромадження інформації, в усьому дотримуватись принципу структурності, використовувати короткі та "ємні" заголовки, маркіровані та нумеровані переліки, окремі семантично зв'язані інформаційні елементи слід об'єднувати у групи, що цілісно сприймаються; текст повинен легко проглядатись, а вся найбільш важлива інформація міститися в лівому верхньому куті екрана та бути доступною без скролювання; обов'язково повинна бути правильно підібрана колірна гама інтерфейсу із врахуванням психологічних аспектів людського кольоросприйняття, колірних асоціацій, сполучуваності кольорів; не допускати можливості створення сторонніх, непередбачених ілюзій засобами графічних чи анімаційних зображень та ін.

При заповненні текстом вікна доцільно уникати постійної зміни шрифтів і стилів. Це, звісно, не значить, що потрібно все подавати в єдиному, стандартизованому вигляді. Але більше 3-х варіантів шрифтів, що відрізняються як за типом, так за розміром і жирністю використовувати не варто.

Інтерфейс не повинен бути перевантаженим словами. Мовні засоби слід застосовувати точно і в потрібних місцях. Думки потрібно висловлювати лаконічно: не більш двох рядків у заголовку й у пунктах списку, пунктів списку — не більш шести.

При виборі манери написання тексту слід пам’ятати, що читання інформації, написаної великими літерами може уповільнити процес сприйняття її читачем, курсивний текст може здаватись світлішим за оточуючий і марніти на його фоні, крім того, за найбільш популярних роздільних здатностей сучасних моніторів складні курсивні шрифти можуть здаватись дещо рваними у порівнянні з прямими того ж розміру і тієї ж гарнітури. Важливо також при веденні діалогу з користувачами уникати дрібних шрифтів. Крім цього, потрібно пам'ятати, що будь-який шрифт — як будь-яка форма і будь-який колір — має свою тональність, настрій [3].

За умови врахування всіх перерахованих рекомендацій усе-таки не всі користувачі будуть задоволені пропонованими розробниками варіантами шрифтів і стилів, тому доцільно надавати можливість користувачам самим вибирати гарнітуру, стиль і розмір літер, що найбільш подобатимуться.

По можливості слід реалізувати функцію автоматичного масштабування вікон повідомлень і діалогових вікон, які адаптуватимуться під мінливі розміри шрифтів. Програмування таких елементів може виявитися непростою справою, особливо для деяких мов і середовищ розробки. При цьому можна використовувати готові авторські компоненти, що допомагають здійснити таке масштабування.

Текст і графіку найкраще застосовувати з деякою надмірністю, подавати їх у вигляді паралельно використовуваних каналів передачі інформації, адже, як відомо, графіка покликана підсилювати і закріплювати враження, створюване словами, а текст, у свою чергу, деталізує і пояснює графічні зображення.

Не слід забувати, що користувачі також швидко стомлюються при тривалій роботі з різнобарвними інтерфейсами навчальних систем, у яких використовуються великі ділянки яскравих, інтенсивних кольорів. Деякі сполучення кольорів, такі як зелений на червоному або червоний на зеленому, як відомо, особливо негативно впливають на людину.

Незважаючи на те, що інформацію і різні деталі можна виділяти за допомогою кольору, колірне кодування саме по собі не варто використовувати для виділення якихось справді суттєвих для користувача компонентів, адже не всі люди здатні бачити всю повноту фарб світу. Відомо, що приблизно одна дванадцята частина всіх чоловіків і трохи менша частка жінок страждає тією чи іншою формою дальтонізму, колірною сліпотою. Розумніше використовувати колірне кодування для виділення другорядної інформації, такої, наприклад, як статус чи стан системи. Його завжди необхідно сполучати з якимись іншими типами виділення: шрифтовим, символьним і стильовим.

Слід також уникати сполучення тексту, графіки й фону з подібною насиченістю кольорів чи з однаковою яскравістю, уникати фонів, перевантажених графічними елементами. Варто дотримуватись відповідності колірної палітри, оптимальності сполучення кольорів і їх яскравості, а також підтримувати високий контраст всього екранного зображення [3]. Для кращого розуміння інтерфейсу користувачем слід дотримуватись також сталості кольорів при позначенні аналогічних об'єктів, відповідності кольорів стійким зоровим асоціаціям, оптимальності вибору кольорів для значеннєвого протиставлення об'єктів.

Анімаційні елементи інтерфейсу повинні мати інформативну функцію, причому такі динамічні зображення мають бути ненав'язливими. Користувачу доцільно надавати можливість забирати з екрану рухливі компоненти інтерфейсів в разі потреби, адже вони, як відомо, привертають до себе значну увагу і можуть спричинити гальмування процесу розв'язування поставлених задач. Здебільшого слід використовувати таке динамічне оздоблення екранних кадрів для привертання уваги користувача виключно у потрібних випадках.

Як відомо, надмірний, нав'язливий, непродуманий звуковий супровід дій у програмах дуже стомлює. Але, якщо все-таки вирішено використовувати в педагогічних програмних засобах звуки, то важливо пам'ятати, що для різних цілей варто застосовувати різні звуки, їх слід вибирати також відповідно до додатків, у яких вони застосовуються. Звуки необхідно співвідносити із оточенням, у якому вони будуть звучати. Смисл усіх звуків має розуміти навіть недосвідчений користувач. При цьому користувачам слід надавати повний контроль над звуками: можливість зміни гучності і, за потреби, повної їх відміни.

Інколи з метою зняття напруги, яка виникає у користувачів під час тривалої навчальної діяльності, в програмні продукти вмонтовуються так звані модулі для відпочинку, що реалізовані як посилання на відеофрагменти. Для цього можна використовувати й інші засоби, які викликатимуть задоволення у користувача і частково сприятимуть релаксації. Але обов'язково вони повинні відповідати пропонованій тематиці, відображати реалістичну картину дійсності чи нести якусь додаткову цікаву інформацію з предмету. Щоправда зловживати подібними заохочуючими елементами не слід — суб'єкта навчання потрібно привчати до того, що навчання не завжди має бути цікавим, захоплюючим.

Звичайно, основне завдання розробника полягає у створенні практичного дизайну. Естетична привабливість — це другорядна мета, для досягнення якої часом буває досить лише довести до досконалості вже існуючі нариси.

Останнім часом розробники програмних продуктів навчального призначення працюють у напрямку уніфікації інтерфейсів. Універсальні, шаблонні інтерфейси, з одного боку, зручні для роботи, оскільки при їх використанні користувачам не доводиться приділяти багато уваги вивченню особливостей роботи з навчальними програмними продуктами, з іншого боку, одноманітність дизайну швидко може призвести до втрати зацікавленості освітнім електронним ресурсом, і, як наслідок, суб'єкт навчання може не досягнути очікуваних результатів, не здобути потрібних знань та навичок.

Ще більш привабливою вбачається ідея "мульти-дизайності" освітніх електронних ресурсів, тобто використання дизайнів різного ступеня складності з можливістю зміни дизайну безпосередньо під час роботи з тим чи іншим програмним модулем. Мова йде не лише про зміну колірної гами інтерфейсу, а про можливість вибору зовсім іншого, нового дизайну, що повністю змінює вигляд робочого вікна [3]. Це може частково вирішити проблему вибору того дизайну, який найбільше подобається користувачу, найкраще підходить до обстановки, відповідає настрою і т.ін.

Зручною є реалізована в деяких навчальних комп'ютерних ресурсах можливість переглядати пропоновані матеріали в браузері, зокрема в Microsoft

Internet Explorer. Але все ж таки непогано було б забезпечити можливість роботи в усіх поширених у даний час браузерах (із запрограмованою можливістю настроювання екранного інтерфейсу під дизайн відповідного браузера). Щоправда при цьому розробникам доведеться враховувати ще деякі особливості при конструюванні інтерфейсу, адже вікно браузера займає певний екранний простір і це може приховати від користувача частину корисної інформації чи зображень.

Звичайно, сучасний педагогічний програмний засіб має бути відкритою системою, яку можна змінювати, доповнювати, вдосконалювати. Добре було б, якби розробники поширювали свої програмні продукти навчального призначення з відкритим кодом, надаючи їм статусу "вільного" програмного забезпечення і тим самим розширюючи фонд FSF (Free Software Foundation).

Однією з прогресивних тенденцій розвитку ринку освітніх програмних засобів є його наповнення електронним навчальним контентом, інструментальними середовищами, призначеними для створення мультимедійних навчальних ресурсів та для заповнення існуючих програмних оболонок тематично підібраним навчальним контентом, а також програмами-шаблонами, призначеними для автоматизації процесу розробки навчальних програм та методичного забезпечення навчальних занять.

Звичайно, створення електронних видань, ресурсів і програм навчального призначення — це творчий процес, який вимагає не лише аналітичного, логічного, емпіричного мислення, але й застосування інтуїтивних та евристичних проявів під час проектування і розробки. Цей процес ще довго буде вивчатись фахівцями з різних наукових галузей і, напевне, ще не скоро набуде повного довершеного опису. Розробники педагогічних програмних засобі обов'язково повинні дотримуватись рекомендацій, стандартів та специфікацій, завдяки реалізації яких процес роботи користувачів з програмним продуктом, а отже і процес навчання, стане набагато ефективнішим.

Список використаних джерел

1. Интернет-обучение: технологии педагогического дизайна / Под ред. Моисеевой М.В. — М.: Академия, 2004. — 216 с.
2. Константайн Л., Локвуд Л. Разработка программного обеспечения / Перевод с англ. В.Шрага. — СПб.: Питер, 2004. — С. 60-236.
3. Кравцов Д.Г. Аналіз і реалізація модуля для обробки множинних дизайнів для сайтів та електронних підручників // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. — К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова. — №2 (9). — 2005. — С.287-294.
4. Осин А.В. Мультимедиа в образовании: контекст информатизации. – М.: Издательский сервис, 2004. – 320 с.
5. Рудинский И.Д. Основы формально-структурного моделирования систем обучения и автоматизации педагогического тестирования знаний. — М.: Горячая линия-Телеком, 2004. – 204 с.
6. http://www.rsvpu.ru/student/mikl/html/

The subject matter of this article are questions about features of creation of modern educational software, about descriptions of basic tendencies of development of electronic educational resources and recommendations concerning their creation and design.

Key words: pedagogical software, applied programs of educational assignment, design of electronic educational resources.

ВІСНИК

КАМ'ЯНЕЦЬ-ПОДІЛЬСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Фізико-математичні науки

Випуск 1

Здано в набір 29.09.2008. Підписано до друку 01.10.2008.
Формат 60х84/16. Гарнітура Times. Обл. вид. арк. 8,075.
Папір офсетний. Тираж 100 прим.

32300, Хмельницька обл., м. Кам'янець-Подільський,
вул. Кн. Коріатовичів, 9; а/с 71; тел. (03849) 3-06-20
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
від 22.04.2008 р. серія КВ № 13850-2824Р