Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

ДИПЛОМНА РОБОТА
магістра

НА ТЕМУ:
«ЗАДАЧА ВІДШУКАННЯ ВІДНОСНОЇ ЧЕБИШОВСЬКОЇ ТОЧКИ КІЛЬКОХ ТОЧОК МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ ОПУКЛИХ КОМПАКТІВ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ»

Виконав:
студент 2 курсу
М1-М18 групи спеціальності
014 Середня освіта (Математика)
Гнатенко Сергій Олександрович

Керівник:
Гнатюк В. О., доцент кафедри математики,
кандидат фізико-математичних
наук, доцент

Рецензент
Щирба В. С., професор кафедри інформатики,
кандидат фізико-математичних
наук, доцент

м. Кам’янець-Подільський — 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

У роботі розглянуто задачу відшукання відносної чебишовської точки кількох точок метричного простору опуклих компактів лінійного нормованого простору.

Актуальність теми. Відомо, що ідея наближення складних математичних об'єктів більш простими і зручними у користуванні пронизує усі галузі математики.

Однією з центральних галузей теорії наближення є теорія наближення функції. Задача найкращого наближення функції, як відомо, полягає в тому, щоб серед функцій деякого класу знайти ту, відхилення якої від заданої функції було б найменшим.

Така задача вперше була поставлена у 1853 році відомим математиком П. Л. Чебишовим, яка стосувалась найкращого наближення заданої на сегменті неперервної функції множиною алгебраїчних многочленів заданого степеня. В якості міри відхилення двох неперервних на сегменті функцій П. Л. Чебишов розглядав максимум модуля їх різниці.

Згодом вивчались інші подібні задачі наближення, які відрізнялися вибором міри відхилення функцій і множинами апроксимант.

До робіт у яких вивчались ці задачі слід віднести роботи А. А. Маркова, Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, Валле Пуссена, Хаара, А. М. Колмогорова, С. М. Нікольського та інших.

З розвитком теорії лінійних нормованих просторів стало зрозумілим, що багато задач, про які йшла мова вище, є частинними випадками задачі відшукання відстані від множини V лінійного нормованого простору X до фіксованого елемента D цього простору, тобто частковим випадком задачі відшукання величини

$$\inf_{A\in V}\left\|A-D\right\|. \tag{0.1}$$

Основні результати дослідження задачі (0.1) і тих задач найкращого наближення функцій, про які йшла мова вище, підсумовано у монографіях

Н. І. Ахієзера [1], В. К. Дзядика [2], М. П. Корнейчука [3], П.-Ж Лорана [4], О. І. Степанця [5, 6], В. М. Тихомирова [7] та інших.

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів.

До задач одночасного наближення кількох елементів можна віднести, зокрема, задачу відшукання чебишовської точки кількох точок лінійного нормованого простору, тобто задачу відшукання величини

$$\inf_{A\in V}\max_{1\le i\le m}\left\|A-D_i\right\|, \tag{0.2}$$

де D_i, $i=\overline{1,m}$ — фіксовані елементи лінійного нормованого простору X, а $V\in X$.

Задачами найкращого одночасного наближення кількох елементів є задача Штейнера, задача найкращого одночасного наближення функції та її похідної та інші.

Задачі найкращого одночасного наближення кількох точок лінійного нормованого простору із загальних позицій розглядалися, зокрема, у працях [8-11].

До задач найкращого одночасного наближення нескінченної кількості елементів можна віднести, зокрема, задачу про чебишовський центр компакта D лінійного нормованого простору X відносно множини V цього простору, тобто задачу відшукання

$$\inf_{A\in V}\max_{y\in D}\left\|A-D\right\| \tag{0.3}$$

(див. наприклад [12-17]).

У дипломній роботі розглядається задача відшукання відносної чебишовської точки кількох точок метричного простору опуклих компактів лінійного нормованого простору, яка полягає в наступному.

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $K_0\left(X\right)$ – сукупність непорожніх опуклих компактів простору X,

$H(A,B)=\max\left\{\max\limits_{x\in A}\min\limits_{y\in B}\|x-y\|,\max\limits_{y\in B}\min\limits_{x\in A}\|x-y\|\right\}$ – хаусдорфова відстань між множинами *A,B* із $K_0(X)$,

$D_i\in K_0(X), i=\overline{1,m}$, – фіксовані елементи множини $K_0(X)$, $V\subset K_0(X)$.

Задачею відшукання у множині $V\subset K_0(X)$ чебишовської точки опуклих компактів (точок) $D_i\in K_0(X), i=\overline{1,m}$, будемо називати задачу відшукання величини

$$E_V^*(D_1,...,D_m)=\inf_{A\in V}\max_{1\le i\le m}H(A,D_i)=\inf_{A\in V}\max_{1\le i\le m}\max\left\{\max_{x\in A}\min_{y\in D_i}\|x-y\|,\max_{y\in D_i}\min_{x\in A}\|x-y\|\right\} \quad (0.4)$$

Якщо існує елемент $A^*\in V$ такий, що

$$E_V^*(D_1,...,D_m)=\inf_{A\in V}\max_{1\le i\le m}H(A,D_i)=\max_{1\le i\le m}H\left(A^*,D\right),$$

то його будемо називати чебишовською точкою відносно множини V точок $D_i, i=\overline{1,m}$, або екстремальним елементом для величини (0.4).

Зрозуміло, що задачі (0.1)-(0.3) є частинними випадками задачі (0.4). Дійсно, якщо в задачі (0.4) покласти $D_1=D_2=...=D_m=D\in X, V\subset X$, то задача відшукання величини (0.4) набере вигляду

$$E_V^*(D)=\inf_{A\in V}\max\left\{\|A-D\|,\|A-D\|\right\}=\inf_{A\in V}\|A-D\|,$$

тобто є задачею відшукання величини (0.1).

Нехай в задачі відшукання величини (0.4) $D_i\in X, i=\overline{1,m},\ V\subset X$, то задача відшукання величини (0.4) набере вигляду

$$E_V^*(D_1,...,D_m)=\inf_{A\in V}\max\left\{\min_{1\le i\le m}\|A-D_i\|,\max_{1\le i\le m}\|A-D_i\|\right\}=\inf_{A\in V}\max_{1\le i\le m}\|A-D_i\|,$$

тобто є задачею (0.2) відшукання чебишовської точки точок $D_i, i=\overline{1,m}$, відносно множини $V\subset X$.

Нехай в задачі відшукання величини (0.4) $D_1=D_2=...=D_m=D\in K_0(X)$, $V\subset X$.

У цьому випадку задача відшукання величини (0.4) полягатиме у відшуканні

$$E_V^*(D)=\inf_{A\in V}\max\left\{\min_{y\in D}\|A-y\|,\max_{y\in D}\|A-y\|\right\}=\inf_{A\in V}\max_{y\in D}\|A-y\|,$$

тобто є задачею (0.3) про відшукання чебишовського центра компакта D лінійного нормованого простору X відносно множини V цього простору.

Отже, задача відшукання величини (0.4) та її екстремального елемента охоплює важливі класи спеціальних екстремальних задач. Тому її актуальність полягає, зокрема, в тому, що дослідження цієї задачі дозволить з єдиних позицій розглянути результати дослідження цих задач та використати отримані результати для дослідження інших задач, які вкладаються у схему постановки задачі відшукання величини (0.4).

Актуальність дослідження задачі відшукання величини (0.4) мотивується ще й тим, що вона відноситься до задач багатозначного аналізу, роль яких в таких галузях як апроксимація, оптимізація, теорія оптимального керування, техніка, економіка тощо зростає (див. наприклад [18-24]).

Основними складностями дослідження задачі відшукання відносної чебишовської точки кількох точок метричного простору опуклих компактів лінійного нормованого простору є те, що множина всіх опуклих компактів лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору не є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором, а хаусдорфова відстань (хаусдорфова метрика) не породжена нормою.

Об'єктом дослідження є задача відшукання відносної чебишовської точки кількох точок метричного простору опуклих компактів.

Предметом дослідження є зведення задачі відшукання відносної чебишовської точки кількох точок метричного простору опуклих компактів до деякої еквівалентної задачі відшукання відносної чебишовської точки кількох точок лінійного нормованого простору та встановлення необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремальності елемента $A^*\in V$ для задачі відшукання величини (0.4).

Мета і завдання дослідження полягає у побудові лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору класів еквівалентних пар опуклих компактів простору X, постановка в просторі цих класів задачі відшукання відносної чебишовської точки кількох точок еквівалентної задачі відшукання величини (0.4), встановлення на основі дослідження цієї еквівалентної задачі в термінах конусів допустимих напрямків та функціоналів простору X^*, необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремальності елемента $A^* \in V$ для задачі відшукання величини (0.4).

Методи дослідження. При дослідженні задачі відшукання величини (0.4) застосовувались методи математичного, функціонального та опуклого аналізів, також теорії екстремальних задач, теорії оптимізації та апроксимації.

Наукова новизна одержаних результатів. У дипломній роботі отримано наступні нові результати:

- побудовано лінійний над полем дійсних чисел простір класів еквівалентних пар елементів множини опуклих підмножин лінійного над полем дійсних чисел простору, в якій операція додавання має властивість скорочення;
- побудовано лінійний над полем дійсних чисел простір класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору;
- побудовано лінійний над полем дійсних чисел нормований простір $K_{(K_0(X))^2}$ класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору;
- постановлено в лінійному нормованому просторі класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного нормованого простору X задачі відшукання відносної чебишовської точки кількох точок, еквівалентної задачі відшукання величини (0.4);
- описано функціонали простору $\left(K_{(K_0(X))^2}\right)^*$, породжені функціоналами простору X^*;

- отримано подання через функціонали простору X^* похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини, еквівалентної задачі відшукання величини (0.4);
- отримано подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі, еквівалентної до задачі (0.4);
- в термінах конусів допустимих напрямків та лінійних неперервних функціоналів, заданих на X, встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента $A^* \in V$ для задачі відшукання величини (0.4).

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Результати, отримані в ній, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії наближень, побудови чисельних методів відшукання чебишовської точки, що є значимим при розв’язанні задач оптимального управління, математичної економіки тощо.

Апробація результатів дослідження. Проміжні результати роботи було представлено на науковій конференції студентів та магістрантів фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського університету імені Івана Огієнка за підсумками науково-дослідної роботи у 2018-2019 навчальному році (текст публікації подано до друку).

Публікації. За результатами дослідження було подано до друку статтю «Задача відшукання відносної чебишовської точки кількох опуклих компактів лінійного нормованого простору» (матеріали наукової конференції студентів та магістрантів фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського університету імені Івана Огієнка за підсумками науково-дослідної роботи у 2018-2019 навчальному році).

Структура роботи. Робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі побудовано лінійний над полем дійсних чисел простір класів еквівалентних пар елементів множини опуклих підмножин лінійного над полем дійсних чисел простору, в якій операція додавання має властивість скорочення та побудовано лінійний над полем дійсних чисел простір класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору.

У другому розділі побудовано лінійний над полем дійсних чисел нормований простір $K_{(K_0(X))^2}$ класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору. Виконано постановку в лінійному нормованому просторі класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного нормованого простору X задачі відшукання відносної чебишовської точки кількох точок, еквівалентної задачі відшукання величини (0.4).

У третьому розділі описано функціонали простору $\left(K_{(K_0(X))^2}\right)^*$, породжені функціоналами простору X^*, отримано подання через функціонали простору X^* похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини, еквівалентної задачі відшукання величини (0.4).

У четвертому розділі отримано подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі еквівалентної до задачі відшукання величини (0.4). В термінах конусів допустимих напрямків та лінійних неперервних функціоналів, заданих на X, встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента $A^* \in V$ для задачі відшукання величини (0.4).

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі:

1. Побудовано лінійний над полем дійсних чисел простір класів еквівалентних пар елементів множини опуклих підмножин лінійного над полем дійсних чисел простору, в якій операція додавання має властивість скорочення.
2. Побудовано лінійний над полем дійсних чисел простір класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору.
3. Побудовано лінійний над полем дійсних чисел нормований простір $K_{(K_0(X))^2}$ класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору.
4. Постановлено в лінійному нормованому просторі класів еквівалентних пар опуклих компактів лінійного нормованого простору X задачу відшукання відносної чебишовської точки кількох точок, еквівалентну задачі відшукання величини (0.4).
5. Описано функціонали простору $\left(K_{(K_0(X))^2}\right)^*$, породжені функціоналами простору X^*.
6. Отримано подання через функціонали простору X^* похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини, еквівалентної задачі відшукання величини (0.4).
7. Отримано подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі відшукання (2.11).
8. В термінах конусів допустимих напрямків та лінійних неперервних функціоналів, заданих на X, встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента $A^* \in V$ для задачі відшукання величини (0.4).
9. Доведено низку допоміжних тверджень, які мають самостійне значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К Дзядык. — М.: Наука, 1977. — 510 с.
3. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М.: Мир, 1975. — 496 с.
5. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.
6. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.II. — 468 с.
7. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.
8. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. — М.: Наука, 1971. — 351 с.
9. Гнатюк Ю. В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращої за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю. В. Гнатюк // Доп. НАН України. — 1995. — № 6. — С. 23–26.
10. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 9. — С. 1183–1193.
11. Гнатюк В. О. Теореми двоїстості для задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів лінійних нормованих просторів опуклими множинами / В. О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк // Сучасні проблеми математики: Матеріали Міжнародної наук. конференції. Ч.1. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 1998. — С. 134–137.

12. Гаркави А. Л. О чебышевском центре множества в нормированном пространстве / А. Л. Гаркави // Исслед. по соврем. пробл. конструктивн. теории функций. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 328–331.
13. Гаркави А. Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества / А. Л. Гаркави // Успехи мат. наук. — 1964. — Т. 19, № 6 — С. 139–145.
14. Белобров П. К. О чебышевской точке системы множеств / П. К. Белобров // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. — 1966. — № 6. — С. 28–24.
15. Гнатюк В. О. Модифікація методу Ремеза на випадок задачі відшукання чебишовського центра компакту нормованого простору відносно його скінченновимірного чебишовського підпростору / В. О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Сучасні проблеми моделювання, прогнозування та оптимізації: Збірник наукових праць (за матеріалами всеукраїнської науково-методичної конференції). — Київ — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний університет, інформаційно-видавничий відділ. — 2004. — С. 29–40.
16. Гудима У. В. Задача про чебишовський центр компакту нормованого простору відносно його скінченновимірного чебишовського підпростору / У. В. Гудима // Сучасні проблеми моделювання, прогнозування та оптимізації: Збірник наукових праць (за матеріалами всеукраїнської науково-методичної конференції). — Київ — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний університет, інформаційно-видавничий відділ. — 2004. — С. 41–48.
17. Гудима У. В. Критерій узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2018. — Вип. 17. — С. 33–48.

18.Борисович Ю. Г. Многозначные отображения / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский // Итоги науки и техн. — ВИНИТИ. Мат. анализ. — 1982. — № 19. — С. 127–231.

19.Сендов Б. Хаусдорфовы приближения / Б. Сендов. — София: БАН, 1979. — 372 с.

20.Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. С. Никольский // Доклады АН СССР. — 1989. — Т. 308, № 5. — С. 1047–1050.

21.Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями / М. С. Никольский // Вестник Московского ун-та. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 76–80.

22.Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 12. — С. 1601–1619.

23.Гнатюк Ю. В. Критерій екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В, Гудима // Доп. НАН України. — 2005. — № 6. — С. 19–23.

24.Гнатюк Ю. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного, опуклозначного відображення множинами інших неперервних компактнозначних, опуклозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, В. О. Гнатюк, У. В, Гудима. — Кам'янець-Подільський. — 2008. — 54 с. (Препринт / Кам'янець-Подільський державний університет ; № 2008.1).

25.Гнатюк Ю. В. Найкраща рівномірна апроксимація в метричному просторі неперервних відображень з компактними опуклими образами / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, № 12. — С. 1620–1633.

26. Гудима У. В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк. — Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. — 112 с.
27. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 494 с.
28. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акимов. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
29. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
30. Гудима У. В. Умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 11–18.
31. Гудима У. В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — 2015. — Випуск. 12. — С. 37–55.