Міністерство освіти і науки України

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: «**Наближені методи знаходження нетривіальних нулів дзета-функції Рімана**»

Виконала: студентка 2 курсу М1-М18 групи

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Гаврищук Марія Петрівна

Керівник: Кріль С. О., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики

Рецензент: Ковальська І. Б., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики

м. Кам'янець-Подільський – 2019 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Дзета-функція Рімана $\zeta(s)$ для комплексних чисел $s = \sigma + it,$ коли $\sigma > 1$ визначається таким чином:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

(тут p пробігає всі прості числа). Ріман довів, що цю функцію можна аналітично продовжити на всю комплексну площину, де вона є мероморфною і має єдиний полюс з лишком 1 в точці $s = 1$. Дзета-функція також має дійсні нулі в точках $s = -2n, n = 1, 2, \dots$ (тривіальні нулі) та комплексні нулі в критичній смузі $0 < \sigma < 1$ (нетривіальні нулі).

Вся складність дослідження нетривіальних нулів полягає в тому, що в багатьох випадках аналітична функція задається деяким своїм елементом – яким-небудь рядом, наприклад, рядом Тейлора чи рядом Діріхле. Такі ряди збігаються, як правило, лише в деякій частині області аналітичності, за межами якої з'являються області, в яких подання функції у вигляді ряду втрачає сенс Для дзета-функції такою областю є критична смуга. Одним з ефективних методів відшукання нетривіальних нулів є наближені функціональні рівняння.

Формула Рімана – Зігеля, яка використовується в аналітичній теорії чисел є асимптотичною формулою для похибки наближеного функціонального рівняння дзета - функції Рімана. Ця формула дає змогу здійснити апроксимацію дзета - функції у вигляді суми двох часткових сум рядів Діріхле. У 1932 році Карл Людвіг Зігель опублікував роботу зі звітом, пов'язаним із дзета-функцією щодо неопублікованих досліджень Рімана, які знайшов в приватних роботах Рімана, що знаходяться в архівах бібліотеки університету в Геттінгені.

Зігель вивів цю формулу з інтегральної формули Рімана, виразу для дзета-функції з використанням контурних інтегралів, які часто використовуються для обчислення значень дзета-функцій, іноді в поєднанні з алгоритмом Одлижко – Шенхаге, що значно його прискорює. При використанні інтегралів вздовж критичної лінії , часто буває корисно використовувати цю формулу у формі , в якій вона стала більш зручною для функції $Z(t)$.

Ця подія мала дуже важливе значення в історії вивчення дзета-функції не тільки через роботу та важливу інформацію що вона містила, але й тому, що Зігель показав глибину і технічну віртуозність досліджень Рімана. Кожен, хто читає цю статтю Зігеля навряд чи буде стверджувати, що, як писав Харді в 1915 році, що Ріман "не зміг довести" твердження, зроблені ним про дзета-функцію, або називати їх, так як назвав Ландау в 1908 році, "домислами". На восьми сторінках резюме «*Ueber die Anzahl...*», єдиної роботи яку Ріман опублікував на цю тему, схожої, як ряд евристичних чудових ідей, публікація Зігеля, ясно показує, що за ним стоїть великий кропіткий аналіз, який можливо важко оцінити, але на який не вистачає потужних методів, і який ймовірно, ґрунтувався на дуже впевненому розумінні величин залишкових членів, навіть якщо вони не були чітко оцінені.

Зусилля Зігеля важко переоцінити. Кілька талановитих математиків до нього намагалися розібратися в записах Рімана, але всі вони були збентежені, через повну відсутність будь-яких пояснень до формул, хаотичність і безсистемність в їх розташуванні, або на аналітичні навики, необхідні для їх розуміння.

Є дві теми, яким Зігель присвятив свою роботу. Однією з них є асимптотичні формули для обчислення $Z(t)$, а іншою – нове представлення $\zeta(s)$ з точки зору визначених інтегралів. Дипломна робота присвячена в основному асимптотичній формулі для $Z(t)$, яка в теорії чисел відома як формула Рімана-Зігеля.

Робота складається зі вступу, (двох розділів), висновків та списку використаних джерел. Пунктии 1-4 пов’язані, в основному, з виведенням згаданої формули. Так, виведення формули Рімана-Зігеля розглядається в пункті 1, оцінки інтегралів біля сідлових точок в пункті 2, перше наближення до головного інтегралу в пункті 3, та завершальним етапом виведення формули - наближення вищих порядків в пунктіі 4. Деякі розрахунки за формулою та оцінки похибок наведені в пункті 5, а відношення формули до гіпотези Рімана розглядається в пункті 6. В пункті 7, досліджується нове інтегральне представлення формули для $\zeta(s)$. В останніх двох пунктах обговорюються інші способи обчислення нетривіальних нулів, зокрема, формула Ейлера-Маклорена та один варіант ітераційного методу.

ВИСНОВОК

У магістерській роботі розглянуто різні методи знаходження нетривіальних нулів дзета-функції Рімана, досліджено та проаналізовано асимптотичну формулу для дзета-функції, яка відома в теорії чисел як формула Рімана-Зігеля. В роботі використовується оцінка контурних інтегралів поблизу сідлових точок. Для знаходження залишкового члена формули використовується, в основному, перше наближення, до головного інтеграла, хоча також аналізуються й наближення більш вищих порядків. Крім теоретичних міркувань наведено приклади щодо обчислень згідно формули значень дзета-функції в критичній смузі, досліджено оцінки похибок наближень. В роботі також розглянуто ще один варіант формули Рімана-Зігеля, - інтегральна формула. Завершується робота міркуваннями щодо походження гіпотези Рімана про те, що всі нетривіальні нулі дзета-функції мають дійсну частину рівну $\frac{1}{2}$ та розглядаються обчислення, які відносяться до нулів функції $\zeta(s)$. У двох останніх пунктах розглянуто інші методи знаходження нетривіальних нулів – формула Ейлера-Маклорена та ітераційний метод, які є ефективними засобами обчислення нулів при невеликих значеннях t.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Воронин С. М., Карацуба А. Л. Дзета-функции Римана. – М.: Физ-мат.1994. –376с.
2. Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел. – М.: Наука, 1971, 200 с.
3. Карацуба А. Л. Основы аналитической теории чисел 2-е над. – М.: Паука, 1983, 240 с.
4. Титчмарш Е. К. Теория дззета-функции Римана. – М.: ИЛ, 1953.
5. Aleksandar Ivic. The Riemann Zeta-Function: The Theory of the Riemann Zeta-Function wih Applications. John Wiley & Sons, 1985.
6. Booker A. R., “Turing and the Riemann Hypothesis,” Notices Amer.Math. Soc., vol. 53, no. 10, 2006, pp. 1208–1211.
7. Conrey J. B., “The Riemann Hypothesis,” Notices Amer. Math. Soc.,vol. 50, no. 3, 2003, pp. 341–353.
8. Edwards, H. M., Riemann’s Zeta Function, Academic Press, 1974
9. Ivic A., The Riemann Zeta-Function, Wiley and Sons, 1985.
10. Korolev M. A., “On small values of the Riemann zeta-function at Gram points”, Sb. Math., 205:1 (2014), 63–82
11. Littlewood J. E., “The Riemann Hypothesis,” in: A Scientist Speculates,I. J. Good, ed., Basic Books, 1962, New York, pp. 390–391.
12. Odlyzko A.M., On the distribution of spacings between zeros of the Zeta function, Math. Comp., Vol. 48, No. 177 (1987), 273-308.
13. Patterson S. J. An Introduction to the Theory of the Riemann ZetaFunction.Cambridge University Press, 1995.
14. Selberg A., “The zeta-function and the Riemann hypothesis,” in C. R. Dixi`eme Congr`es Math. Scandinaves, Copenhague 1946, pp. 187–200.