Міністерство освіти і науки України

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: **«Задача найкращої зваженої рівномірної раціональної апроксимації кількох неперервних на компакті функцій, в якій чисельники апроксимуючих функцій змінюються у заданому діапазоні»**

Виконала: студентка 2 курсу М1-М18 групи

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Салямон Вікторія Вікторівна

Керівник: Гнатюк В. О., доцент кафедри математики , кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Щирба В. С., професор кафедри інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам'янець-Подільський – 2019 року

Зміст

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню задачі найкращої зваженої рівномірної раціональної апроксимації кількох неперервних на компакті функцій, в якій чисельники апроксимуючих функцій змінюються у заданому діапазоні.

Актуальність теми. Теорія апроксимації є розділом математики, який вивчає закономірності, пов’язані з наближеним поданням функцій більш простими функціями (многочленами, раціональними дробами, сплайнами тощо). Результати такого вивчення застосовуються для знаходження серед простіших функцій тієї, яка є найкращим (оптимальним) у тому чи іншому розумінні поданням складніших функцій.

Важливе місце в теорії апроксимації займає розділ, який стосується найкащого рівномірного наближення функцій.

Однією з перших задач, які відносяться до цього розділу є задача про відшукання многочлена степеня, що не перевищує n, який найменше відхиляється від нуля, тобто задача відшукання

$$\min_{(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_{n-1})} \max_{-1\le t\le 1} |\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 t + \mathcal{L}_2 t^2 + \dots + \mathcal{L}_{n-1} t^{n-1} + t^n|, \qquad (0.1)$$

яка була поставлена і розв’язана П.Л.Чебишовим у 1853 році.

Більш загальною є задача про рівномірне наближення неперервної на компакті S функції α множиною V інших неперервних на цьому компакті функцій, тобто задача відшукання

$$\inf_{g\in V} \max_{s\in S} |g(s) - \alpha(s)|, \qquad (0.2)$$

яка досліджувалась згодом.

Якщо для кожного $h \in C(S)$, де $C(S) -$ лінійний простір всіх неперервних на компакті S функцій, покласти $\|h\| = \max_{s\in S} |g(s)|$, то $C(S)$ стане лінійним нормованим простором, а задачу (0.2) можна тоді подати у такому вигляді

$$\inf_{g\in V} \|g - \alpha\|. \qquad (0.3)$$

Зрозуміло, що всі розглянуті вище випадки охоплює задача відшукання

$$\inf_{a\in V} \|g - \alpha\|, \qquad (0.4)$$

де α є фіксованим елементом деякого лінійного нормованого простору X, а $V \subset X$.

Основні результати дослідження задач (0.1) – (0.4) підсумовано у працях Н.І.Ахієзера [1], В.К.Дзядика [2], М.П.Корнєйчука [3], П.-Ж.Лорана [4], О.І.Степанця [5,6], В.М.Тихомирова [7] та інших.

Елемент $g^* \in V$, на якому реалізується інфімум в (0.4), називається елементом найкращого наближення для α у V або екстремальним елементом для величини (0.4).

Для подання складних функцій, які описують різні реальні фізичні, хімічні та інші процеси досить часто здійснюється апроксимація з допомогою нелінійних класів функцій.

Одним із важливих нелінійних класів є клас дробово-раціональних функцій загального виду.

Виявляється, що в багатьох випадках використання замість многочленів у якості апроксимант раціональних функцій дає можливість досягнути заданої точності наближень з допомогою значно меншого обсягу обчислень.

Однак на відміну від наближення поліномами дослідження задач наближення нелінійними класами функцій, в тому числі дробово-раціональними функціями, пов'язано зі значними труднощами.

Задача про найкраще наближення неперервних на компакті функцій класами дробово-раціональних функцій розглядалася у багатьох працях (див., наприклад, $[1,2], [8-12]$).

Актуальними також є задачі найкращого рівномірного наближення, в яких апроксиманти функцій, що наближаються, повинні задовольняти додатковим обмеженням (змінюються у заданому діапазоні) (див., наприклад, $[4], [13-17]$).

Відомо, що для надання деяким відстаням, що фігурують у задачах наближення більшої ваги використовується вагова функція (див., наприклад, $[18-20]$).

В багатьох задачах науки і техніки досліджувані процеси описуються не однією, а кількома функціональними залежностями. Задачі про найкраще компактне зберігання інформації про ці функціональні залежності приводить до необхідності досліджувати і розв'язувати задачі одночасної рівномірної апроксимації кількох неперервних функцій множинами інших (простіших) неперервних функцій.

З єдиних позицій задачі найкращої одночасної апроксимації розглядалися у працях $[21-24]$.

Представляє інтерес розгляд такої задачі апроксимації, яка б охоплювала (певною мірою) задачі, про які йшла мова вище. Дослідження такої задачі дало б змогу отримані результати використовувати для розв'язування цих та інших задач, які є її частинними випадками.

Одна з таких задач розглядається у дипломній роботі і полягає у наступному.

Нехай S – компакт, C(S) – лінійний нормований простір дійснозначних функцій g, неперервних на S, причому

$$\|g\| = \max_{s\in S}|g(s)|;$$

$$\mathrm{C}^{+}(\mathrm{S}) = \{g \in \mathrm{C}(s): g(s) > 0, s \in S\},$$

$$\mathrm{C}^{+}_{|\cdot|}(\mathrm{S}) = \{g \in \mathrm{C}(S): |g(s)| > 0, s \in S\},$$

$$U \subset C(S), V \subset C^{+}_{|\cdot|}(S)\big(V \subset C^{+}(S)\big), \omega_i \in C^{+}(S)$$

(ω_i – вагові функції), $f_i \in C(S), i = \overline{1, m}$,

$$c_1, c_2 \in C(S), c_1(s) \le c_2(s), s \in S,$$

$$A = \{u \in C(S); c_1(s) \le u(s) \le c_2(s), s \in S\}.$$

Ставиться задача відшукання

$$\mathcal{L}^{*}_{\{\omega_i\}_{i=1}^{m}}(\{f_i\}_{i=1}^{m}; U \cap A; V) = \inf_{\substack{u\in U\cap A,\\ v\in V}} \sup_{s\in S} \max_{1\le i\le m}\left(\omega_i(s)\left|\frac{u(s)}{v(s)} - f_i(s)\right|\right). \tag{0.5}$$

Якщо для $u^{*} \in U \cap A, v^{*} \in V$

$$\max_{s\in S} \max_{1\le i\le m}\left(\omega_i(s)\left|\frac{u^{*}(s)}{v^{*}(s)} - f_i(s)\right|\right) = \mathcal{L}^{*}_{\{\omega_i\}_{i=1}^{m}}(\{f_i\}_{i=1}^{m}; U \cap A; V),$$

то елемент $\frac{u^{*}}{v^{*}}$ $\big((u^{*}, v^{*})\big)$ називається екстремальним елементом для величини (0.5).

Задачу відшукання величини (1.5) і її екстремального елемента назвемо задачею найкращої зваженої рівномірної раціональної апроксимації кількох неперервних на компакті функцій, в якій чисельники апроксимантів змінюються у заданому діапазоні.

Основна складність дослідження задачі (0.5) полягає в тому, що множина апроксимуючих функцій (апроксимант) не є, взагалі кажучи, опуклою множиною та їх чисельники можуть змінюватися лише в заданому діапазоні.

Метою дослідження задачі відшукання величини (0.5) є встановлення еквівалентних форм подання цієї задачі; розв'язання задачі відшукання величини (0.5) та її екстремального елемента у випадку, коли $U \cap A = C(S)$, а $V = C^{+}_{|\cdot|}$; доведення деяких теорем існування екстремального елемента для величини (0.5); доведення критерію екстремальності елемента $(u^{*}, v^{*}) \in (U \cap A) \times V$ для задачі відшукання величини (0.5) шляхом дослідження деякої приєднаної екстремальної задачі з опуклою цільовою функцією; отримання подання похідної за напрямком кількох опуклих функцій через похідні за напрямком цих функцій та подання похідної за напрямком цільової функції приєднаної екстремальної задачі; характеризація конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції приєднаної задачі; встановлення необхідної умови та критеріїв екстремальності елемента $(u^{*}, v^{*}) \in (U \cap A) \times V$ для величини (0.5), основаних на теорії конусів допустимих напрямків, в тому числі критерію колмогоровського типу.

Об'єктом дослідження є задача найкращої зваженої рівномірної раціональної апроксимації кількох неперервних на компакті функцій, в яких чисельники апроксимуючих функцій змінюються у заданому діапазоні.

Предметом дослідження є проблеми теорії апроксимації, що стосуються задачі найкращої зваженої рівномірної раціональної апроксимації кількох неперервних на компакті функцій, в яких чисельники апроксимуючих функцій змінюються у заданому діапазоні.

Задачами дослідження є:

- встановлення еквівалентних форм подання задачі відшукання величини (0.5);
- визначення величини (0.5) та її екстремального елемента у випадку, коли $U \cap A = C(S)$, а $V = C_{|\cdot|}^{+}$;
- доведення теорем існування екстремального елемента для величини (0.5);
- доведення критерію екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) шляхом дослідження деякої приєднаної екстремальної задачі з опуклою цільовою функцією;
- подання похідної за напрямком кількох опуклих функцій через похідні за напрямком цих функцій;
- подання похідної за напрямком цільової функції приєднаної екстремальної задачі;
- характеризація конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції приєднаної задачі;
- встановлення необхідної умови та критеріїв екстремальності елемента для величини (0.5), основаних на теорії конусів допустимих напрямків, в тому числі критерію колмогоровського типу.

При розв'язувані поставлених задач у магістерській роботі використовувались методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорії екстремальних задач, теорії апроксимації, широко використовувалися методи, основані на теорії конусів допустимих напрямків.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено еквівалентні форми подання задачі відшукання величини (0.5);
2. Визначено величину (0.5) та її екстремальний елемент у випадку, коли $U \cap A = C(S)$, а $V = C_{|\cdot|}^{+}$;
3. Доведено теорему існування екстремального елемента для величини (0.5);

4. Доведено критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) шляхом дослідження деякої приєднаної екстремальної задачі з опуклою цільовою функцією;

5. Отримано подання похідної за напрямком кількох опуклих функцій через похідні за напрямком цих функцій;

6. Отримано подання похідної за напрямком цільової функції приєднаної екстремальної задачі;

7. Охарактеризовано конус внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції приєднаної задачі;

8. Встановлено необхідну умову та критерії екстремальності елемента для величини (0.5), основані на теорії конусів допустимих напрямків, в тому числі критерій колмогоровського типу.

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи можуть бути використані для подальшого розвитку теорії найкращої зваженої рівномірної раціональної апроксимації кількох неперервних на компакті функцій, а також при побудові чисельних методів розв'язування задач найкращої зваженої рівномірної раціональної апроксимації.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на звітній конференції студентів проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує на кафедрі математики.

Окремі з них доповідались на науковій конференції студентів та магістрантів фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка за підсумками науково-дослідної роботи у 2018-2019 навчальному році.

Структура роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі роботи розглянуто постановку задачі відшукання величини (0.5); встановлено кілька еквівалентних форм її подання; розв'язано задачу відшукання величини (0.5) та її екстремального елемента у випадку коли $U \cap A = C(S)$, а $V = C_{|\cdot|}^{+}$.

У другому розділі роботи розглянуто деякі допоміжні твердження, встановлено локальну компактність і замкненість скінченновимірного підпростору лінійного нормованого простору; доведено деякі теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.5).

У третьому розділі доведено критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) шляхом дослідження деякої приєднаної до задачі (0.5) задачі з опуклою цільовою функцією; отримано подання похідної за напрямком максимуму кількох опуклих функцій через похідні за напрямком цих функцій, отримано подання похідної за напрямком цільової функції екстремальної задачі, приєднаної до задачі (0.5); охарактеризовано конус внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільвої функції приєднаної задачі: встановлено (на основі отриманих раніше результатів) необхідні умови та критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.5), в тому числі критерій колмогоровського типу.

ВИСНОВКИ

В магістерській роботі:

1. Встановлено еквівалентні форми подання задачі відшукання величини (0.5);

2. Визначено величину (0.5) та її екстремальний елемент у випадку, коли $U \cap A = C(S)$, а $V = C_{|\cdot|}^{+}$;

3. Доведено теорему існування екстремального елемента для величини (0.5);

4. Доведено критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) шляхом дослідження деякої приєднаної екстремальної задачі з опуклою цільовою функцією;

5. Отримано подання похідної за напрямком кількох опуклих функцій через похідні за напрямком цих функцій;

6. Отримано подання похідної за напрямком цільової функції приєднаної екстремальної задачі;

7. Охарактеризовано конус внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції приєднаної задачі;

8. Встановлено необхідну умову та критерії екстремальності елемента для величини (0.5), основані на теорії конусів допустимих напрямків, в тому числі критерій колмогоровського типу.

9. Доведено низку допоміжних тверджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории апроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 407 с.

2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 510 с.

3. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.

5. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.

6. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. – 468 с.

7. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во Моск. унт-та, 1976. – 307 с.

8. Бердышев В.И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения / В.И. Бердышев, Л.В. Петрак. - Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 296 с.

9. Коллац Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения / Л. Коллатц, В. Крабс. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

10. Гудима У.В. Найкраща рівномірна раціональна апроксимація неперервного компактнозначного відображення відношенням опуклих скінченновимірних множин однозначних відображень / У.В. Гудима, Ю.В. Гнатюк, В.О. Гнатюк // Проблеми теорії наближення та суміжні питання: зб. наук. пр.. Ін-ту математики НАН України. – К.: Ін-т математики НАН України, 2007. – Т. 4, № 1. – С. 73-92.

11. Гнатюк Ю.В. Питання існування екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної раціональної апроксимації компактнозначного відображення / Ю.В. Гнатюк, В.О. Гнатюк, У.В. Гудима // Проблеми теорії

наближення функцій та суміжні питання: зб. наук. пр. Ін-ту математики НАН України. – К.: Ін-т математики НАН України, 2007. – Т. 4, № 1. – С. 49-65.

12. Гнатюк Ю.В. Апроксимація компактнозначного відображення відношеннями елементів двох множин однозначних відображень / Ю.В. Гнатюк, У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та компютерне моделювання.: зб. наук. пр. Серія фізико-математичні науки. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т, 2008. – Вип. 1. – С. 61-70.

13. Taylor G.D. Approximation by polynomials having restricted ranges / G.D. Taylor // I. SIAM J. Numer. Anal. – 1968. – Vol. 5. – P. 258-268.

14. Taylor G.D. On approximation by functions having restricted ranges / G.D. Taylor // J. Math. Anal. Appl. – 1969. – Vol. 27.- P. 241-248.

15. Shi Y.G. The limits of a Chebyshev-type theory of restricted range approximation / Y.G. Shi // J. Approxim. Theory. – 1988. – Vol. – 53, № 1. – P. 41-53.

16. Smirnov G.S. Best uniform restricted ranges approximation of complexvalued functions / G.S. Smirnov, R.G. Smirnov // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1997. - Vol. 19, № 2. – P. 58-63.

17. Гудима У.В. Задача найкращої у розумінні сім’ї опуклих функцій рівномірної апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2014. – Вип. 11. – С. 30-46.

18. Вакал Л.П. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації / Л.П. Вакал, А.О. Каленчук-Порханова // Математичні машини і системи. – 2006. – № 2. – С. 15-24.

19. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації / Л.П. Вакал // Комп’ютерні засоби, мережі та системи. – 2013. – № 12. – С. 20-26.

20. Гудима У.В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Сер.: Фізико-математичні науки: зб.

наук. праць. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 37-55.

21. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

22. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращої за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю.В. Гнатюк // Доп. НАН України. – 1995. – № 6. – С. 23-26.

23. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 9. - С. 1183-1193.

24. Гнатюк В.О. Теореми двоїстості для задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів лінійних нормованих просторів опуклими множинами / В.О. Гнатюк, Ю.В. Гнатюк // Сучасні проблеми математики: Матеріали Міжнародної наук. конференції. Ч.І. – Київ; Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 134-137.

25. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Анилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.

26. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: ВШ, 1981. – Том 1. – 687 с.

27. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : ВШ, 1982. – 271 с.

28. Гудима У.В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.

29. Иоффе А.Д. Теория экстремальних задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 479 с.