Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота магістра

З теми :"Розв'язування диференціальних рівнянь і їх систем методами проекційно-ітеративного типу"

Виконала студентка II курсу магістратури
Групи М1-М18
Спеціальності 014 Середня освіта(Математика)
Гончарук Ольга Олександрівна

Керівник: Кріль С.О.
кандидат фізико-математичних наук,доцент

Рецензент: Авдеюк П.І.
кандидат фізико-математичних наук,доцент

Кам'янець-Подільський
2019р.

Зміст

Вступ..4

Розділ 1. Проекційно-ітеративний метод розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь....................12

§1. Проекційно-ітеративний метод. Загальна схема, умови збіжності та оцінки похибок..12

§2. Розв'язування крайової задачі для звичайного диференціального рівняння проекційно-ітеративним методом...18

§3. Зведення проекційно-ітеративного методу до відповідного алгоритму для розв'язування диференціального рівняння...21

§4. Застосування методу до лінійно-крайових задач.........23

§5. Модифіковані варіанти проекційно-ітеративного методу...28

§6. Крайова задача для диференціального рівняння із запізненням та її розв'язання проекційно-ітеративним методом..34

§7. Випадок змінного відхилення аргументу.....................46

§8. Побудова наближених розв'язків крайової задачі для диференціального рівняння нейтрального типу........................51

Розділ 2. Розв'язування систем диференціальних рівнянь проекційно-ітеративним методом.........................62

§9. Узагальнена крайова задача для системи диференціальних рівнянь з параметрами і розв'язування наближеними методами..62

§10. Зведення узагальненої крайової задачі для системи диференціальних рівнянь до системи інтегральних рівнянь..70

§11. Побудова наближених розв'язків системи при допомозі проекційного та ітераційного методів....................................72

§12. Проекційно-ітеративний метод..............................76

Висновки...80

Література..81

Вступ

Математичними моделями багатьох задач природознавства і техніки є різні класи диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем.

Сьогодні існують різні методи дослідження і побудови розв'язків таких рівнянь. Серед великої кількості наближених методів виділяють ітераційні (досліджені Л. В. Канторовичем, В. І. Криловим[6], Ю. В.Воробйовим [4], А. Б. Бакушинським, А. В. Гончарським [1], А. А. Самарським [20] та іншими відомими вченими), асимптотичні (яким присвячені роботи М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. А. Митропольського [6] та їх послідовників й учнів, а також Н. І. Шкіля і його учнів[21]) і прямі методи. До останніх відносяться різницеві методи, що широко використовуються в обчислювальній практиці (яким присвячені монографії А. А. Самарського, Ю. П. Попова, В. Б. Андрєєва, А. В. Гуліна, Є. С. Ніколаєва [20] та ін.), а також варіаційний (запропонований В. Рітцем [23]) і проекційні (містяться в роботах І. Г. Бубнова, та Б. Г. Гальоркіна [3]).

Одним з представників ітераційних методів є звичайний метод послідовних наближень. Ідея методу стосовно рівняння

$$u = f + Tu, \tag{1}$$

де T — лінійний обмежений оператор, що діє в гільбертовому просторі H, полягає в тому, що наближення визначаються за формулою:

$$u_k = f + Tu_{k-1}, k = 1,2,3,..., \tag{2}$$

причому, в ролі початкового наближення можна взяти будь-який елемент з простору *H*.

Другу групу наближених методів утворюють прямі методи, суть яких полягає в зведенні даного рівняння до системи алгебраїчних рівнянь — це досягається шляхом апроксимації операторів чи шуканих розв’язків, чи тим і іншим методом одночасно. До прямих методів відносяться проекційні методи, зокрема, метод Бубнова-Гальоркіна, метод моментів, та ряд інших методів.

Зокрема, ідея методу Бубнова-Гальоркіна стосовно рівняння (1) полягає в тому, що наближені розв’язки визначаються за формулою:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \ , \tag{3}$$

а невідомі коефіцієнти a_k знаходяться із:

$$\begin{gathered} (f - u_n + Tu_n, \varphi_i) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k - T\varphi_k, \varphi_i) a_k = (f, \varphi_i), i = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{4}$$

де $\{\varphi_k\}$ — лінійно-незалежні елементи з гільбертового простору *H*, *T* — лінійний обмежений оператор, що діє в цьому просторі.

На основі поєднання проекційних та ітераційних методів виникло ряд нових методів, зокрема, проекційно-ітеративний. Його частково досліджували відомі вчені, такі як Л. С. Возняк [4], С. А. Кріль[7, 17], Фам Ки Ань[22].

Суть цього методу полягає в тому, що наближені розв’язки рівняння (1)будуються за формулами:

$$u_k = f + Tz_k, \tag{5}$$

$$z_k = u_{k-1} + w_k, w_k = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j, \tag{6}$$

де $\{\varphi_j\}, j = \overline{1,n}$ — система лінійно-незалежних функцій, зокрема, як частковий випадок

Невідомі параметри $a_j^k = a_j(n)$ визначаються з умови:

$$(u_k - z_k, \psi_i) = 0, i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

в якій $\{\varphi_i\}$ — деяка система лінійно-незалежних функцій, зокрема, як частковий випадок: $\psi_i = \varphi_i, i = 1,2,...$.

Метою даної магістерської роботи є вивчення і розробка різних варіантів проекційно-ітеративного методу розв'язування диференціальних рівнянь (як звичайних, так і з відхиленням аргументу), а також скінченних систем диференціальних рівнянь.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь з постійним відхиленням аргументу найчастіше використовується метод послідовних наближень, проекційний та проекційно-ітеративний метод і їх модифікації (5), (6).

В першому розділі магістерської роботи розглядається випадок застосування проекційно-ітеративного методу та його різних модифікацій до диференціальних рівнянь із змінним відхиленням аргументу, а саме, до рівнянь із запізненням такого виду:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) + \\ + r(x)y'(h(x)) + s(x)y(h(x)) = f(x) \tag{8}$$

$h(x) = x - \Delta(x)$ — змінне відхилення. Шукана функція y_x задовільняє крайовим умовам:

$$\alpha y'(a) + \beta y(a) = 0, \\ \gamma y'(h(b)) + \delta y(h(b)) = 0, \tag{9} \\ y(h(x)) = \psi(x), x \notin (a,b)$$

При цьому функція $h(x)$ — диференційована на $[a,b]$ і

$$h'(x) \geq l > 0, x - h(x) \geq \sigma > 0.$$

Ідея проекційно-ітеративного методу стосовно цієї крайової задачі полягає в слідуючому:

розглянемо оператор L, що визначається формулою:

$$L[y] = y''(x) + p(x)y'(x) + \\ + \begin{cases} 0, x \in [a,c], \\ r(x)y'(x-\Delta) + s(x)y(x-\Delta), x \in [c,b] \end{cases}$$

і покладемо

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - r(x)\varphi'(x) - s(x)\varphi(x), x \in [a,c] \\ f(x), x \in [c,b] \end{cases}.$$

Далі крайову задачу (8) — (9) записуємо у вигляді:

$$L[y] = g(x), U_l[y] = 0, l = 1,2, \tag{10}$$

де

$$U_1[y] = \alpha y'(a) + \beta y(a), \\ U_2[y] = \gamma y'(b) + \delta y(b).$$

Ввівши в розгляд оператори

$$A[y]=y''+c(x)y'+d(x)y,$$
$$B[y]=A[y]-L[y],$$

крайову задачу (10) записуємо так:

$$A[y]=g(x)+B[y],$$
$$U_l[y]=0, l=1,2.$$

Тоді, використавши необхідні позначення, дану крайову задачу зводимо до інтегрального рівняння:

$$u(x)=g(x)+\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi,$$

а методи його розв’язування вже відомі.

В цьому ж розділі розглядаються крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу нейтрального типу:

$$\begin{aligned} &L[y]=y''(x)+c(x)y'(x)+d(x)y(x)+\\ &+p(x)y''(x-\Delta)+r(x)y(x-\Delta)+s(x)y(x-\Delta)=\\ &=f(x), x\in(a,b), \end{aligned} \tag{11}$$

при умовах:

$$u_1[y]=\alpha y'(a)+\beta y(a)=0,$$
$$u_2[y]=\gamma y'(b)+\delta y(b)=0,$$
$$y(x)=0, x\in(a-\Delta,a).$$

а також, метод зведення цієї крайової задачі до інтегро-різницевого рівняння і досліджується питання застосування до неї проекційно-ітеративного методу. Ідея цього методу полягає в тому, що за допомогою заміни

$$y''+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=u(x),$$
$$u_1[y]=u_2[y]=0$$

крайову задачу (11) зводимо до інтегро-різницевого рівняння

$$y'' + p(x)y'(x-\Delta) = f(x) +$$
$$+\int_a^b K(x,t)y(t)dt, x \in (a,b)$$
$$y(x) = 0, x \in (a-\Delta, a).$$

Наступним кроком є встановлення рівносильності крайової задачі (11) і вище згаданого інтегро-різницевого рівняння, методи розв'язування якого відомі.

Другий розділ роботи присвячений дослідженню узагальненої крайової задачі для систем диференціальних рівнянь з параметрами і їх розв'язування наближеними методами, зокрема, згаданим вище проекційно-ітеративним методом.

Об'єктом дослідження є задача: знайти вектор-функцію $x(t) = (x_1(t), x_2(t),..., x_m(t))$ і вектор $\lambda \in R^l$, які задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), 0 \le t \le T \qquad (12)$$

і додатковим умовам

$$\Phi(x) = \alpha, \alpha \in R^p, p = m + l \qquad (13)$$

Тут $f : [0,T] \times R^m \times R^l \to R^m$ — неперервне відображення;

$\Phi(x) = \{\Phi_1(x), \Phi_2(x),..., \Phi_\rho(x)\}$ — вектор, координати якого є лінійними обмеженими функціоналами на класі неперервних вектор-функцій. У випадку, коли

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} M_t x(t_i), 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T ,$$

де $M_i, i=\overline{1,n}$ — постійні $\rho\times m$ матриці, маємо багато точкову задачу для системи диференціальних рівнянь (12).

Поряд із задачею (12), (13) розглядали задачу:

$$\frac{dx}{dt}+A(t)x+B(t)\lambda=u(t),\Phi(x)=\alpha,$$

де $A(t)$ і $B(t)$ — неперервні матриці розміру $m\times m$ і $m\times l$ відповідно, а $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_m(t))$ — заданий вектор, до того ж $u_i\in L_2(0,T), i=\overline{1,m}$ і побудуємо її рівняння.

Лема 9.1. Нехай однорідна задача

$$\frac{dx}{dt}+A(t)x+B(t)\lambda=0,\Phi(x)=0, \tag{14}$$

має лише рішення $x(t)=0,\lambda=0$. Тоді існують матриці $G(t,s)$ і $\Gamma(s)$ розміру $m\times m$ і $l\times m$ відповідно, такі, що єдине рішення задачі (15) виражається формулами:

$$x(t)=h(t)+\int_0^T G(t,s)u(s)ds,\lambda=\sigma+\int_0^T \Gamma(s)u(s)ds,$$

де вектор-функція $h(t)$ і вектор σ — рішення задачі

$$\frac{dh}{dt}+A(t)h+B(t)\sigma=0,\Phi(h)=\alpha.$$

Для матриці $G(t,s)$ і $\Gamma(s)$ мають місце властивості:

$$\int_0^T G(t,s)B(s)ds=0,\int_0^T \Gamma(s)B(s)ds=\mathrm{I},$$

що задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial G}{\partial t} + A(t)G + B(t)\Gamma(s) = \delta(t-s), \Phi(G) = 0,$$

де I — одинична матриця в просторі R^l і $\delta(t-s)$ — вектор-функція Дірака.

В роботі також розглянуто умови збіжності методів, їх схеми, оцінки похибок наближень. В ряді випадків приведено ілюстративні приклади, які підтверджують ефективність методів.

Висновки

В магістерській роботі розглянуто питання розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем проекційно-ітеративним методом.

У вступі розглянуто загальні підходи в дослідженні даної теми, а також обґрунтовано доцільність вивчення проекційних, ітераційних, асимптотичних і прямих методів, зокрема проекційно-ітеративного методу для розв'язування диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем.

В першому розділі сформульовано ідею прекційно-ітеративного методу, а також його застосування для розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних, інтегральних рівнянь, диференціальних рівнянь із запізненням, і диференціальних рівнянь нейтрального типу. Крім того, опрацьовано і деякі модифіковані варіанти цього методу.

Другий розділ присвячено застосуванню проекційно-ітеративного методу для систем диференціальних рівнянь, а, разом з тим, і узагальненій крайовій задачі для системи диференціальних рівнянь з параметрами та критеріям зведення її до системи інтегральних рівнянь. Розглянуто для цієї задачі і можливість застосування проекційного та ітераційного методів.

В магістерській роботі сформульовані також і достатні умови збіжності вище перерахованих методів.

В роботі також розглянуто умови збіжності методів, їх схеми, оцінки похибок наближень. В ряді випадків приведено ілюстративні приклади, які підтверджують ефективність методів.

Література

1. Бакушинський А. Б., Гончарський А. В. Итерационные методы решения некоторых задач. — М.: Наука, 1989. — 128с

2. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач.— Киев: Наук. Думка, 1990.— 416с.

3. Бубнов И. Г. Отзыв о сочинениях проф. Тимошенко, удостоенных премии им. Д. И. Журавского // Сб. Ин-та путей сообщения. — 1913. — Вып. 81. — С. 1-5.

4. Возняк Л. С. Решение нелинейного сингулярного інтегрального уравнения с ядром Гильберта проекционно-итеративным методом // Диференциально-функциональные уравнения. — К.: 1895. — с.19-25.

5. Воробьев Ю. В. Метод моментов в прикладной математике. — М.: Физматгиз, 1958. — 188 с.

6. Канторович Л. В., Крилов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.; Физматгиз, 1962. — 708 с.

7. Криль С. А. Решение интегро-разностных уравнений с малой нелинейностью проекционно-итеративным методом. — К.: 1987. — 35 с. — (Препр./ АН УССР, ИН-т математики; 87.17).

8. Кучма М. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. — К.: 1977, с. 187-199.

9. Лучка А. Ю. О быстроте сходи мости некоторых проекционных методов для линейных операторных уравнений .// Укр.. мат. Журн. — 1971.— 23, №3. — с.307-317.

10. Лучка А. Ю. Застосування проекційно-ітеративних методів до нелінійних рівнянь з обмеженими операторами //

Проекційно-ітеративні методи розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. — К.:1974. — с.100-111.

11. Лучка А. Ю. О применении проекционно-итеративных методов к системам линейных алгебраичных уравнений // Докл. АН УССР. Сер А. — 1978. — №9. — с.785-789.

12. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения диференциальных и интегральных уравнений. — К.: Наук. Думка, 1980. — 264с.

13. Лучка А. Ю. О краевой задаче для линейных диференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Диференциально-функциональные и разностные уравнения. — К., 1981. с.35-56.

14. Лучка А. Ю. Краевая задача для диференциальных уравнений с параметрами и ее решение проекционных методом // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — №9. — с.12-15.

15. Лучка А. Ю. Применение итерационных поцессов к краевым задачам для диференциальных уравнений с параметрами // Докл. АН УССР. Сер.А.

16. Лучка А. Ю. Метод интегральных уравнений исследования краевой задачи для системі диференциальных уравнений с параметрами // Там же. — 1990. — №8. — с. 18-22.

17. Лучка А. Ю., Криль С. А. Построение приближенных решений интегро-разностных уравнений. — к.: 1987. — 36с.

18. Лучка А. Ю., Марусяк А.Г. Многоточечная задача для дифференциальных уравнений с параметрами и ее решения проекционно-итеративным методом // Динамические

системы и дифференциально-разностные уравнения. К.: 1986. — с. 53-68.

19. Марчук Г. И. Методы вычеслительной математики. — М.: Наука, 1980. — 536 с.

20. Самарский А. А. Теорія разностных схем. — М.: Наука,1977. — 656 с.

21. Шкиль Н. И., Вороной Н. А. , Лейфура В. И. Асимптотические методы в дифференциальных и интнгро-дифференциальных уравнения. — К.: Вища школа, 1985. — 248 с.

22. Фам Ки Ань. О проекционн-итеративных методах решения операторных уравнений // Журн. вычесл. математики и мат физики. — 1979. — 19, №3. — с.760-765.

23. Ritz W. Uber eine neue Methode zur Losung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // J.fur die reine und angew. Math. — 1908.— 135, H. 1. — S. 1. — 62.