Міністерство освіти і науки України

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: **«Задача найкращого у розумінні зваженої хаусдорфової метрики рівномірного відновлення числової функціональної залежності, заданої на сегменті неточно з допомогою багатозначного відображення.»**

Виконала:

студентка II курсу М1-М18 групи

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Олійник Ганна Сергіївна

Керівник:

Гнатюк В.О., доцент кафедри математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент:

Щирба В.С., професор кафедри інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам'янець-Подільський - 2019 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню задачі найкращого у розумінні зваженої хаусдорфової метрики рівномірного відновлення числової функціональної залежності, заданої на сегменті неточно з допомогою багатозначного відображення.

Актуальність теми. Часто в результаті експериментальних або теоретичних досліджень значення функціональних залежностей, які характеризують досліджувані процеси, не отримуються точно, а лише відомо, що вони знаходяться в деякому діапазоні, тобто належить значенням деякого багатозначного відображення.

Здійснення математичних операцій з багатозначними відображеннями пов’язано зі значними труднощами.

Тому виникає проблема відновлення числових функціональних залежностей, заданих з допомогою багатозначних відображень, найкращим у деякому розумінні чином однозначними функціональними залежностями (однозначними апроксимаціями) певного класу.

Зрозуміло, що задача відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення, включає в себе задачу найкращого наближення, складних функціональних залежностей більш простими і зручними в користуванні, тобто є узагальненням задачі апроксимації.

Початок теорії аппроксимації функцій було покладено відомим математиком П.Л. Чебишовим у 1853 році у праці «Теорія механізмів, відомих під назвою паралелограмів».

П.Л. Чебишов поставив задачу про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на відрізку $[c, d]$ дійснозначної функції а множиною V алгебраїчних поліномів g степеня, що не перевищує n, тобто задачу відшукання величини

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in [c,d]} |g(s) - a(s)|. \tag{0.1}$$

Згодом ця задача узагальнювалась на задачі найкращого наближення функцій, заданих на деякому компакті S, тригонометричними поліномами , раціональними дробами, експонентами тощо в метриках різних просторів.

Далі стало зрозумілим, що задачі наближення, про які ішла мова вище, є частковими випадками задачі найкращого наближення елемента a лінійного нормованого простору X множиною $V \subset X$, тобто задачі відшукання величини

$$\inf_{g \in V} \|g - a\|. \tag{0.2}$$

Основні результати дослідження задач, про які йшла мова вище, в тому числі задач (0.1), (0.2), підсумовано у працях Н.І.Ахієзера [1], В.І. Бердишева, Л.В. Петрак [2], В.К. Дзядика [3], М.П. Корнєйчука [4], П.-Ж. Лорана [5], О.І. Степанця [6,7], В. М. Тихомирова [8] та ін.

Ці результати узагальнювались на задачі найкращої рівномірної апроксимації абстрактної функції; задачі найкращого одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів (задача Штейнера, задача про відшукання чебишовського центра системи точок, задача одночасного наближення функцій і їх похідних та інші).

Природно виникла ідея розгляду таких задач, дослідження яких дозволило б з єдиних позицій отримувати результати дослідження вищеназваних та інших задач, які включаються у їх постановку як частинні випадки.

Однією з таких задач є задача найкращого у розумінні хаусдорфової метрики рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення, або задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень, яка розглядалася, зокрема, у працях [9-21].

З метою надання деяким елементам більшої ваги в результуючому значенні у порівнянні з іншими елементами, як відомо, використовується вагова функція (див., наприклад, [22]).

Зазначимо, що у вищезгаданих працях розглядаються в основному багатозначні та однозначні відображення деякого компакта у абстрактний лінійний нормований простір. Зрозуміло, що при розгляді задач найкращого відновлення функціональних залежностей, заданих неточно багатозначними відображеннями зі значеннями в конкретних лінійних нормованих просторах, в тому числі і у множині дійсних чисел, можуть бути отримані специфічні результати, зумовлені особливостями цих просторів.

З огляду на зазначене вище, актуальною є задача найкращого у розумінні зваженої хаусдорфової метрики рівномірного відновлення числової функціональної залежності, заданої на сегменті з допомогою багатозначного відображення, яка розглядається магістерській роботі.

Вона полягає в наступному.

Нехай $K(R)\big(K_0(R)\big)$ — сукупність всеможливих непорожніх компактів (опуклих компактів) множини дійсних чисел R, $C([a,b],R)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір числових функцій g, заданих і неперервних на сегменті $[a,b]$, з нормою

$$\|g\| = \max_{s\,\epsilon\,[a,b]} |g(s)|,\ \ C([a,b],R)$$

$\Big(C\big([a,b],K_0(R)\big)\Big)$ — множина багатозначних відображень φ сегмента $[a,b]$ в R таких, що для кожного $s\,\epsilon\,[a,b]$

$$\varphi(s) = K_s\,\epsilon\,K(R)\big(\varphi(s) = K_s\,\epsilon\,K_0(R)\big)$$

і які неперервні на $[a,b]$ у розумінні хаусдорфової метрики H на $K(R)\big(K_0(R)\big)$,

$$\varphi\,\epsilon\,C\big([a,b],K(R)\big)\ \Big(\varphi\,\epsilon\,C\big([a,b],K_0(R)\big)\Big), V \subset C([a,b],R),$$

ω — додатна неперервна на $[a,b]$ функція (вагова функція).

Ставиться задача відшукання величини

$$\alpha_V^*(\varphi,\omega) = \inf_{g\,\epsilon\,V}\max_{s\,\epsilon\,[a,b]}\Big(\omega(s)H\big(g(s),\varphi(s)\big)\Big), \tag{0.3}$$

яку й будемо називати задачею найкращого у розумінні зваженої хаусдорфової метрики рівномірного відновлення числової функціональної залежності, заданої на сегменті $[a, b]$ неточно з допомогою багатозначного відображення $\varphi(s), s \in [a, b]$, елементами множини V, які є неперервними на $[a, b]$ числовими функціями.

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\alpha_V^*(\varphi, \omega) = \inf_{g \in V} \max_{s \in [a,b]} \Big(\omega(s) H\big(g(s), \varphi(s)\big)\Big) = \max_{s \in [a,b]} \Big(\omega(s) H\big(g^*(s), \varphi(s)\big)\Big),$$

то його будемо називати оптимальним методом найкращого у розумінні зваженої хаусдорфової метрики рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно на $[a, b]$ за допомогою багатозначного відображення $\varphi(s), s \in [a, b]$, елементами множини V, або просто екстремальним елементом для величини (0.3).

Метою роботи є отримання різних еквівалентних форм подання задачі відшукання величини (0.3); зведення задачі відшукання величини (0.3) до задачі найкращої одночасної зваженої рівномірної апроксимації двох неперервних на сегменті функцій; доведення теореми про опуклість та неперервність цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та деяких теорем існування її екстремального елемента; відшукання величини (0.3) та її екстремального елемента у випадку, коли $V = C([a, b], R)$; отримання виразу для похідної за напрямком від цільової функції задачі відшукання величини (0.3); охарактеризувати конус внутрішніх напрямків для множини точок простору $C([a, b], R)$, в яких значення цільової функції задачі (0.3) менші від її значення у фіксованій точці; встановлення необхідних умов екстремальності елемента $g^* \in V$ для величини (0.3) у випадку довільної множини V, а також у випадку, коли $V \in \Gamma^*$— множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною; встановлення достатньої умови екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) для довільної множини V; формулювання та доведення критерію екстремальності елемента $g^* \in V$ для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \in \Gamma^*$ — множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^*, опуклою множиною, підпростором.

Об'єктом дослідження є задача найкращого у розумінні зваженої хаусдорфової метрики рівномірного відновлення числової функціональної залежності з допомогою багатозначного відображення .

Предметом дослідження є проблеми, що стосуються задачі найкращого у розумінні зваженої хаусдорфової метрики рівномірного відновлення числової функціональної залежності, заданої на сегменті неточно з допомогою багатозначного відображення, пов'язані зокрема з питаннями встановлення умов існування екстремального елемента для цієї задачі, отримання виразу для похідної за напрямком її цільової функції; встановлення необхідних, достатніх умов і критеріїв екстремальності елемента $g^* \epsilon V$ для задачі відшукання величини (0.3) тощо.

Задачами дослідження є:

1. Отримання різних еквівалентних форм подання задачі відшукання величини (0.3);
2. Зведення задачі відшукання величини (0.3) до задачі найкращої одночасної зваженої рівномірної апроксимації двох неперервних на сегменті функцій;
3. Доведення теореми про опуклість та неперервність цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та деяких теорем існування її екстремального елемента;
4. Відшукання величини (0.3) та її екстремального елемента у випадку, коли $V = C([a, b], R)$;
5. Отримання виразу для похідної за напрямком від цільової функції задачі відшукання величини (0.3);
6. Подання конуса внутрішніх напрямків для множини точок простору $C([a, b], R)$, в яких значення цільової функції задачі (0.3) менші від її значення у фіксованій точці;
7. Встановлення необхідних умов екстремальності елемента $g^* \epsilon V$ для величини (0.3) у випадку довільної множини V, а також у випадку, коли

$V \epsilon \Gamma^*$— множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною;

8. Встановлення достатньої умови екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) для довільної множини V;

9. Формулювання та доведення критерію екстремальності елемента $g^* \epsilon V$ для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \epsilon \Gamma^*$ — множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^*, опуклою множиною, підпростором.

При дослідженні розглядуваної у роботі задачі використовувалися методи математичного, функціонального та опуклого аналізів у поєднанні з методами теорії екстремальних задач, теорії оптимізації та теорії апроксимації.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Отримано різні еквівалентні форми подання задачі відшукання величини (0.3);

2. Зведено задачі відшукання величини (0.3) до задачі найкращої одночасної зваженої рівномірної апроксимації двох неперервних на сегменті функцій;

3. Доведено теореми про опуклість та неперервність цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та деяких теорем існування її екстремального елемента;

4. Знайдено величину (0.3) та її екстремальний елемент у випадку, коли $V = C([a,b],R)$;

5. Отримано вираз для похідної за напрямком від цільової функції задачі відшукання величини (0.3);

6. Охарактеризовано конус внутрішніх напрямків для множини точок простору $C([a,b],R)$, в яких значення цільової функції задачі (0.3) менші від її значення у фіксованій точці;

7. Встановлено необхідні умови екстремальності елемента $g^* \epsilon V$ для величини (0.3) у випадку довільної множини V, а також у випадку, коли

$V \epsilon \Gamma^*$— множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною;

8. Встановлено достатню умову екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) для довільної множини V;

9. Сформульовано та доведено критерій екстремальності елемента $g^* \epsilon V$ для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \epsilon \Gamma^*$ — множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^*, опуклою множиною, підпростором.

Практичне значення отриманих результатів. Результати магістерської роботи можуть бути використані для подальшого розвитку теорії найкращого відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення, теорії апроксимації багатозначних відображень, для побудови збіжних чисельних методів розв'язування задач найкращого відновлення функціональних залежностей, апроксимації багатозначних відображень.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданні студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики. Окремі з них доповідались на науковій конференції студентів та магістрантів фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка за підсумками науково-дослідної роботи у 2018-2019 навчальному році.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та опису використаних джерел.

У першому розділі роботи розглянуто метричний простір всеможливих непорожніх компактів множини дійсних чисел, постановку задачі, її еквівалентні форми подання, зокрема у формі задачі найкращої одночасної зваженої рівномірної апроксимації двох неперервних на сегменті функцій; встановлено опуклість і неперервність цільової функції задачі відшукання величини (0.3), доведено деякі теореми існування її екстремального елемента; знайдено величину (0.3) та її екстремальний елемент у випадку, коли $V = C([a, b], R)$.

У другому розділі доведено низку допоміжних тверджень, отримано вираз для похідної за напрямком від цільової функції задачі відшукання величини (0.3).

У третьому розділі охарактеризовано конус внутрішніх напрямків для множини точок простору $C([a, b], R)$, в яких значення цільової функції задачі (0.3) менші від її значення у фіксованій точці; встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента $g^* \epsilon V$ для величини (0.3).

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі:

1. Отримано різні еквівалентні форми подання задачі відшукання величини (0.3).

2. Зведено задачі відшукання величини (0.3) до задачі найкращої одночасної зваженої рівномірної апроксимації двох неперервних на сегменті функцій.

3. Доведено теорему про опуклість та неперервність цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та деякі теореми існування її екстремального елемента.

4. Знайдено величину (0.3) та її екстремальний елемент у випадку, коли $V = C([a,b],R)$.

5. Отримано вираз для похідної за напрямком від цільової функції задачі відшукання величини (0.3).

6. Охарактеризовано конус внутрішніх напрямків для множини точок простору $C([a,b],R)$, в яких значення цільової функції задачі (0.3) менші від її значення у фіксованій точці.

7. Встановлено необхідні умови екстремальності елемента $g^* \epsilon V$ для величини (0.3) у випадку довільної множини V, а також у випадку, коли $V \epsilon \Gamma^*$— множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^* або опуклою множиною.

8. Встановлено достатню умову екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3) для довільної множини V.

9. Сформульовано та доведено критерій екстремальності елемента $g^* \epsilon V$ для задачі відшукання величини (0.3) у випадку, коли $V \epsilon \Gamma^*$ — множиною відносно g^*, в тому числі зірковою відносно g^*, опуклою множиною, підпростором.

10. Доведено низку допоміжних тверджень, які мають самостійне значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 407 с.

2. Бердышев В.И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения / В.И. Бердышев, Л. В. Петрак. — Екатеринбург: УрО-РАН, 1999. — 297 с.

3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. — М.: Наука, 1977. — 510 с.

4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М.: Мир, 1975. — 496 с.

6. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.

7. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. — Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.II. — 468 с.

8. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.

9. Никольский М.С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М.С. Никольский // Докл. АН СССР. — 1989. — 308, №5. — С. 1047-1050.

10. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи / В. В. Арестов // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Вып. 189. — С. 3-20.

11. Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. — 1991. — Вып. 50, №6. — С. 85-93.

12. Магарил-Ильяев Г. Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 176 с.

13. Гудима У. В. Задача найкращої рівномірної апроксимації непере-

рвного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима. — Київ, 2004. — 32 с. — (Препр./ НАН України. Ін-т математики; 2004.5).

14. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. – 57, №12. — С. 1601-1619.

15. Гнатюк Ю. В. Необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Зб. наук. пр. Кам'янець-Подільського держ. ун-ту. Серія фізико-математична (математика) — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун-т., 2005. — Вип. 8. — С. 24-32.

16. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Доп. НАНУ. – 2005 — №6 — С. 19-23.

17. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором / У. В. Гудима // Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки. — 2005. — №3. — С. 262-267.

18. Гнатюк Ю. В. , Апроксимація компактнозначного відображення відношеннями елементів двох множин однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Кам'янець-Подільський національний університет. Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. — Вип. 1. — С. 61-71.

19. Гудима У. В. Апроксимація неперервного компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням / У. В. Гу-

дима // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Кам’янець-Подільський національний університет. Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України. — Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет, 2008. — Вип. 1. — С. 88-97.

20. Гнатюк В. О. Найкраща рівномірна апроксимація компактнозначного відображення елементами множини однозначних відображень, які є селекторами опуклозхначного відображення / В. О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. — Вип. 2. С. 23-37.

21. Гудима У. В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 37-55.

22. Вакал Л. П. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації / Л. П. Вакал, А. О. Каленчук-Порханова // Математичні машини і системи. — 2006. — №2. — С. 15-24.

23. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1984. — 752 с.

24. Половинкин Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. — М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2004. — 416 с.

25. Гудима У. В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк. — Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. — 112 с.

26. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.:

Наука, 1980. — 494 с.

27. Ильин В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. — М.: Изд-во МГУ,1985. — 662 с.

28. Иоффе А. Д. Теория екстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 479 с.