Міністерство освіти і науки України

Кам’янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико – математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми : **«Задача найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності заданої неточно кількома абстрактними функціями, елементами множини інших абстрактних функцій з додатковим обмеженням, що задається системою куль, які неперервно змінюються»**

Виконала: студентка ІІ курсу М1 – М19 групи
Спеціальності : 014 Середня освіта(Математика)
Герман Тетяна Володимирівна
Керівник: Гнатюк В. О., доцент
кафедри математики,
кандидат фізико – математичних наук,
доцент
Рецензент: Щирба В. С., професор
кафедри інформатики
кандидат фізико – математичних наук,
доцент

Кам’янець – Подільський - 2020

Зміст

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню задачі найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно кількома абстрактними функціями, елементами множини інших абстрактних функцій з додатковим обмеженням, що задається системою куль, які неперервно змінюються.

Актуальність теми. Відомо, що ідея найкращого наближення складних математичних об'єктів простішими і зручнішими у користуванні пронизує всі галузі математики.

Особливого розвитку ця ідея набула в теорії наближення функцій, що започатковано у працях П. Л. Чебишова, який ще у 50-х роках XIX століття поставив задачу про найкраще рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на сегменті дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів заданого степеня та довів відому теорему про чебишовський альтернанс, у якій встановлено критерій екстремального елемента для вищезгаданої задачі наближення.

Ідеї П. Л. Чебишова розвивались у працях багатьох вчених, які розглядали задачі найкращого у розумінні різних метрик наближення функцій різними апроксимуючими множинами.

Узагальнюючи результати цих досліджень, математики прийшли до висновку, що низка задач найкращого наближення функцій є частковими випадками, так званих, задач найкращого у розумінні норми наближення фіксованого елемента лінійного нормованого простору фіксованою множиною цього простору, яка полягає в наступному:

Задано лінійний нормований простір X , фіксований елемент a цього простору та його фіксовану площину V.

Потрібно знайти величину

$$inf_{x\in V}\|x-a\|. \qquad \mathbf{(0.1)}$$

Якщо існує елемент $x^* \in V$, для якого $\|x^* - a\| = inf_{x \in V}\|x - a\|$, то цей елемент називають елементом найкращого наближення елемента $a \in X$ фіксовано множиною $V \subset X$ або екстремальним елементом для величини (0.1).

Задачі дослідження величини (0.1) присвячена велика кількість робіт. Основні результати цих досліджень підсумовано у монографіях Н. І. Ахієзера [1], В. К. Дзядика [2], М. П. Корнєйчука [3], П.-Ж. Лорана [4], О. І. Степанця [5,6], В. М. Тихомирова [7] та ін.

Однак , у багатьох практичних задачах функціональні залежності, які характеризують досліджувані процеси, задаються неточно.

Про них лиш відомо, що вони знаходяться в деякому діапазоні можливих значень деякого багатозначного відображення, тобто їх значення належить відповідним значенням цього багатозначного відображення.

У зв'язку з цим виникає проблема найкращого в деякому розумінні відновлення функціональних залежностей, заданих деякими багатозначними відображеннями, елементами множини однозначних відображень, тобто задача найкращої у розумінні гаусдорфової відстані апроксимації деякого багатозначного відображення елементами множини однозначних відображень.

Задачі відновлення функціональних залежностей, заданих неточно багатозначним відображенням, множиною однозначних відображень у різних аспеках розглядались, зокрема, у працях [8-11].

У праці [8] розглядається наступна задача.

Нехай $S -$ компакт, $X -$ лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S, X)$- лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компату S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max_{s \in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ - сукупність непорожніх компактів простору X, $C\big(S, K(X)\big)$ - множина неперервних на S багатозначних відображень S в $K(X)$, $V \subset C(S, X)$.

Ставиться задача відшукання величини

$$\mathcal{L}_a^*(V)=\inf_{g\in V}\sup_{s\in S}\sup_{y\in a(s)}\|g(s)-y\|, \qquad \textbf{(0.2)}$$

Яка називається задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a\in\ C(S,K(X))$ множиною V неперервних однозначних відображень.

Якщо існує відображення $g^*\in V$ таке, що

$$\mathcal{L}_a^*(V)=\sup_{s\in S}\sup_{y\in a(s)}\|\,g^*(s)-y\|,$$

То його називають екстремальним елементом величини (0.2).

Задачу (0.2) можна розглядати як задачу найкращого рівномірного відновлення.

У багатьох практично важливих задачах найкращого наближення появляються додаткові обмеження на функції апарату наближення.

Ця обставина зумовлює необхідність узагальнювати результати, отримані при дослідженні задач апроксимації з додатковими обмеженнями. Початок цій проблематиці покладено вищезгаданими роботами П. Л. Чебишова, в яких, зокрема, розглядалась задача найкращого рівномірного наближення нуль-функції алгебраїчними поліномами степеня, що не перевищує n , з додатковим обмеженням: стандартний їх коефіцієнт повинен дорівнювати 1. Задачі найкращої апроксимації неперервних на компакті дійснозначних та компактнозначних функцій елементами скінченновимірних підпросторів, які задовольняють додатковому обмеженню, розглядались, зокрема, у працях[4, 12-16], а задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактно значного відображення множиною однозначних неперервних відображень з додатковими обмеженнями у працях [17-23].

У працях [17-23] та інших працях, що стосуються найкращого рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою компактнозначного відображення, розглядаються абстрактні відображення загального вигляду.

У практичних задачах ці відображення, насправді, є конкретними, що спонукає до необхідності дослідження цих задач з урахуванням їх специфіки, базуючись на результатах, отриманих при дослідженні задач загального вигляду.

В роботі розглядається задача найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно кількома абстрактними функціями, елементами множини інших абстрактних функцій з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль, які неперервно змінюються.

Вона полягає в наступному.

Нехай, як і вище, $S -$ компакт, $X -$ лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(S,X)$- лінійний над полем дійсих чисел простір однозначних відображень g компату S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ – множина всіх компактів простору X, h – метрика Гаусдорфа, задана на $K(X)$, $g_i \in C(S,X)$, $i = \overline{1,m}$, $a(s) = \{g_1(s), g_2(s), \dots, g_m(s)\}$,

де $s \in S$, задане на S скінченною кількостю абстрактних функцій g_i, $i = \overline{1,m}$, компактнозначне відображення S в X, $V \subset C(S,X)$, u $\in C(S,X)$,

$r \in C(S,R)$, $r(s) > 0$, $b(s) = \{x \in X: \|x - u(s)\|\} \leq r(s)$, $s \in S$, - система замкнених куль з центром у точці u(s) радіуса $r(s)$,

$$\mathcal{D} = \{g \in C(S,X): g(s) \in b(s), s \in S\},$$

Існує $g_0 \in V$, для якого $\|g_0(s) - u(s)\| < r(s)$, $s \in S$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\mathcal{L}^*_{\{g_i\}_{i=1}^m}(V \cap \mathcal{D}) = \inf_{g\in V\cap\mathcal{D}} \sup_{s\in S} \mathrm{h}\big(g(s), a(s)\big) \qquad \textbf{(0.3)}$$

Якщо існує елемент $g^* \in V \cap \mathcal{D}$ такий, що

$$\mathcal{L}_{\{g_i\}_{i=1}^m}(V \cap \mathcal{D}) = \sup \mathrm{h}\big(g^*(s), a(s)\big),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (0.3) або найкращим методом відновлення.

МЕТА, ОБ’ЄКТ, ПРЕДМЕТ, ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ.

Метою дослідження є отримання інших форм постановки задачі найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності заданої неточно кількома абстрактними функціями, еквівалентних задачі (0.3), встановлення неперервності функціонала найкращого рівномірного відновлення та властивостей цільової функції цієї задачі, теорем існування її екстремального елемента; отримання двоїстого подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та конуса внутрішніх напрямків деякої лебегової множини цієї функції; доведення необхідних умов і критеріїв екстремальності елемента для досліджуваної задачі, встановлення низки допоміжних тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

Обєктом дослідження є задача найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно кількома абстрактними функціями, елементами множини інших абстрактних функцій з додатковим обмеженням, що задається системою куль, які неперервно змінюються.

Предметом дослідження є проблеми теорії найкращого у розумінні гаусдорфової відстані апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль, що неперервно змінються.

Задачами дослідження є:

- Отримання різних еквівалентних форм постановки задачі найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності , заданої неточно кількома абстрактними функціями (задачі 0.3).
- Дослідження функціонала найкращого рівномірного відновлення задачі відшукання величини (0.3).
- Встановлення деяких властивостей цільової функції задачі відшукання величини (0.3) (її опуклість та неперервність).
- Встановлення властивостей множини $\mathcal{D}$ (опуклість, обмеженість та замкненість).

- Доведення теорем існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3) (найкращого методу відновлення).

- Отримання подання похідної за напрямком функції, що є максимумом кількох опуклих неперервних функцій, через похідні цих функцій.

- Отримання двоїстого подання цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цієї функції.

- Отримання двоїстого подання конуса внутрішніх напрямків для множини $\mathcal{D}$ для точки $g^* \in \mathcal{D}$.

- Доведення необхідної умови екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3).

- Доведення критерію екстремального елемента для величини (0.3), його конкретизації на випадок, коли V є підпростором простору $C(S, X)$.

- Встановлення низки інших тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

При вирішенні постановлених задач у магістерській роботі використовуються ***методи*** математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорії багатозначних відображень, оптимізації та апроксимації, теорії конусів дотичних напрямків.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Отримано різні форми постановки задачі найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно кількома абстрактними функціями, функціонал найкращого рівномірного відновлення та його неперервність, властивості цільової функції. Задачі та теореми існування її екстремального елемента.
2. Досліджено різні еквівалентні форми постановки задачі найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності , заданої неточно кількома абстрактними функціями (задачі 0.3),

функціонал найкращого рівномірного відновлення задачі відшукання величини (0.3).

3. Встановлено деякі властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.3) (її опуклість та неперервність).
4. Встановлено властивості множини $\mathcal{D}$ (опуклість, обмеженість та замкненість).
5. Доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3) (найкращого методу відновлення).
6. Отримано подання похідної за напрямком функції, що є максимумом кількох опуклих неперервних функцій, через похідні цих функцій.
7. Отримано двоїсте подання цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цієї функції.
8. Отримано двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для множини $\mathcal{D}$ для точки $g^* \in \mathcal{D}$.
9. Доведено необхідні умови екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3).
10. Доведено критерій екстремального елемента для величини (0.3), його конкретизації на випадок, коли V є підпростором простору $C(S, X)$.
11. Встановлено низку інших тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

Практичне значення отриманих результатів.

Магістерська робота має теоретичний інтерес. Її результати можуть бути використані для найкращого відновлення функціональних залежностей заданих неточно, подальшого розвитку теорії апроксимації багатозначних відображень, дослідження та розв’язування задач оптимізації, теорії оптимального керування та в інших галузях , де використовуються результати теорії багатозначних відображень.

Результати роботи можуть бути використані при проведенні навчальних занять з навчальних дисциплін « Опуклий аналіз», «Теорія багатозначних відображень», «Теорія екстримальних задач», « Методи оптимізації».

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики.

Структура роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Перший розділ присвячено постановці задачі відшукання величини (0.3) у різних еквівалентних формах, встановленню властивостей функціонала найкращого рівномірного відновлення, властивостей цільової функції цієї задачі, теорем існування її екстремального елемента.

Другий розділ присвячено отриманню подання похідної за напрямком функції, що є максимумом кількох опуклих неперервних функцій, через похідні за напрямком цих функцій, двоїстого подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та двоїстого подання конуса внутрішніх напрямків деякої її лебегової множини.

Третій розділ присвячено встановленню необхідних умов та критеріїв екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3).

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі «Задача найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно кількома абстрактними функціями, елементами множини інших абстрактних функцій з додатковим обмеженням, що задається системою куль, які неперервно змінюються»:

1. Отримано різні еквівалентні форми постановки задачі найкращого у розумінні гаусдорфової відстані рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно кількома абстрактними функціями.
2. Встановлено неперервність функціонала найкращого рівномірного відновлення.
3. Встановлено деякі властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.3) (її опуклість та неперервність).
4. Встановлено властивості множини $\mathcal{D}$ (опуклість, обмеженість та замкненість).
5. Доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3) (найкращого методу відновлення).
6. Отримано подання похідної за напрямком функції, що є максимумом кількох опуклих неперервних функцій, через похідні цих функцій.
7. Отримано двоїсте подання цільової функції задачі відшукання величини (0.3) та конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цієї функції.
8. Отримано двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для множини $\mathcal{D}$ для точки $g^* \in \mathcal{D}$.
9. Доведено необхідні умови екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.3).
10. Доведено критерій екстремального елемента для величини (0.3), його конкретизації на випадок, коли V є підпростором простору $C(S,X)$.
11. Встановлено низку інших тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

Список використаних джерел:

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории апроксимации / Н. И. Ахиезер. - М.:Наука, 1965. – 407с.
2. Дзядик В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К. Дзядик. - М.:Наука, 1977. – 510с.
3. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. - М.:Наука, 1976. - 320с.
4. Лоран П.–Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.–Ж. Лоран . - М. :Мир, 1975. – 496 с.
5. Степанец А. И. Методы теории приближения / А. И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427с.
6. Степанец А. И. Методы теории приближения / А. И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. II. – 468с.
7. Тихомиров В. М. Некоторые вопроси теории приближений / В. М. Тихомиров. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307с.
8. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень /У. В. Гудима//Укр. мат. журн. – 2005. – Вип. 57, №12. – С. 1601-1619.
9. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Доп. НАН України. – 2005. - № 6. – С. 19-23.
10. Гнатюк В. О. Модифікація методу Ремеза на випадок апроксимація компактнозначного відображення / В. О. Гнатюк, Ю.В. Гнатюк, У. В. Гудима У. В. – Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. - №3. – С. 239-244.
11. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом / И. Ю.

Выгодчикова // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. - №2. – С. 13-15.

12. Taylor G. D. Approximation by polynomials having restricted ranges / G. D. Taylor // I. SIAM J. Numer. Anal. - 1968.- Vol.5. – P. 258-268.
13. Taylor G. D. On approximation by functions having restricted ranges / G. D. Taylor // J. Math. Anal. Appl. – 1969. Vol. 27.- P. 241-248.
14. Shi Y. G. The limits of a Chebyshev-type theory of restricted range approximation // J. Approxim. Theory. – 1988. Vol. 53, №1 – P. 41-53
15. Smirnov G. S., Smirnov R. G. Best uniform restricted range approximation of complex-valued functions /G. S . Smirnov // C. R. Math. Rep. Acad.Sci. Canada. – 1997. – 19, №2. – P. 58-63.
16. Smirnov G. S., Smirnov R. G. Best uniform restricted range approximation of complex-valued functions by generalized polynomials having restricted ranges / G. S. Smirnov // J. Approximation theory. – 1999. – 100, №2. – P. 284-303.
17. Гнатюк В. О. Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням / В. О. Гнатюк, Ю.В. Гнатюк, У. В. Гудима // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико - математичні науки : зб. наук. праць. – Кам’янець – Подільський: Кам’янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2008. – Вип. 1. - С. 51-60.
18. Гудима У. В. Апроксимація неперервного компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням / У. В. Гудима // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико - математичні науки : зб. наук. праць. – Кам’янець – Подільський: Кам’янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2008. – Вип. 1. С. 88-96.
19. Гнатюк В. О. Найкраща рівномірна апроксимація компактнозначного відображення елементами множини однозначних відображень, які є секторами опуклозначного відображення / В. О. Гнатюк // Математичне та

комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико - математичні науки : зб. наук. праць. – Кам’янець – Подільський: Кам’янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. – Вип. 2. - С.23-36.

20. Гнатюк Ю.В. Модифікація методу Ремеза для апроксимація компактнозначного відображення чебешовським підпростором з обмеженням, що задається системою замкнутих куль / Ю. В. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія:Фізико - математичні науки : зб. наук. праць. – Кам’янець – Подільський: Кам’янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. – Вип. 2.- С. 37-53.
21. Гудима У. В. Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором з додатковим обмеженням, що задається системою замкнутих куль / У. В. Гудима// Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико - математичні науки : зб. наук. праць. – Кам’янець – Подільський: Кам’янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. – Вип. 2.- С.72-83.
22. Гудима У. В. Задача найкращої у розумінні сім’ї опуклих функцій рівномірної апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнутих куль./ У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико - математичні науки : зб. наук. праць. – Кам’янець – Подільський: Кам’янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 11. - С.30-46.
23. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Изд-во « Высшая школа», 1982. - 271 с.
24. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Анилов.- М.: Наука, 1984. – 752 с.

25. Борисович Ю. Г. Многозначные отображения / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховський // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. Мат. анализ. – 1982. – 19. – С. 127-231.
26. Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу : учебное пособие / А.В. Арутюнов. – М.: Физмат. лит., 2014. -184с.
27. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
28. Гудима У. В. Опуклий аналіз : навчальний посібник / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк. - Кам’янець – Подільський: Кам’янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.
29. Гудима У. В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк.// Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – Вип. 12. – С. 127-231.