Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: **«Задача про відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точок множини лінійного нормованого простору до кількох опуклих компактів цього простору»**

Виконала:
студентка II курсу М1-М19 групи
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Вальчишин Олеся Степанівна
Керівник:
Гнатюк В.О., доцент кафедри математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Рецензент:
Щирба В.С., професор кафедри інформатики, кандидат
фізико-математичних наук, доцент

Кам'янець-Подільський – 2020

Зміст

Вступ

Робота присвячена задачі відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точок множини лінійного нормованого простору до кількох опуклих компактів цього простору.

Актуальність теми. Задачі на максимум і мінімум, тобто, так звані, екстремальні задачі, завжди були в центрі уваги вчених. Дослідження цих задач приводило до виникнення і розвитку нових теорій, а інколи цілих напрямів математики.

Одною з причин такого інтересу до цих задач є те, що ці задачі тісно пов'язані з практикою, є математичними моделями тих чи інших практичних задач.

З екстремальними задачами людина починає знайомство вже зі школи.

Так, наприклад, нехай маємо площину. Відстань між точками x, A, B … цієї площини будемо позначати через H(x,A), H(x,B), H(A, B) … .

Припустимо, що V – задана пряма площини, A_1, A_2 – фіксовані точки площини, які розміщені по один бік від прямої V.

Потрібно на прямій V знайти точку x^* таку, що

$H(x^*,A_1) + H(x^*,A_2) \le H(x,A_1) + H(x,A_2)$,

тобто потрібно розв'язати таку екстремальну задачу

$$\inf_{x\in V} (H(x,A_1) + H(x,A_2)). \qquad (0.1)$$

(див. наприклад, [1])

Для розв'язання задачі (0.1) побудуємо точку $A_2^\backslash$, симетричну точці A_2 відносно прямої V (див. рис.1).

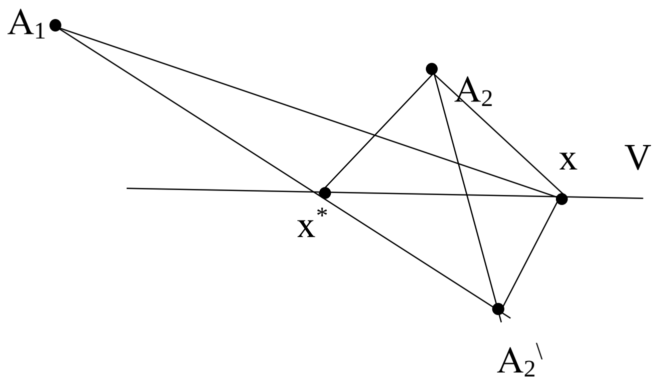

Рис.1

Позначимо через x^* точку перетину відрізка A_1 $A_2^{\backslash}$ з прямою V, а через x довільну іншу точку цієї прямої. Зрозуміло, що

$H(x^*,A_2) = H(x^*,A_2)$, $H(x, A_2^{\backslash}) = H(x, A_2^{\backslash})$.

Тому,

$H(A_1,A_2^{\backslash}) = H(x^*,A_1) + H(x^*,A_2^{\backslash}) = H(x^*,A_1) + H(x^*,A_2) \leq H(x,A_1) + H(x,A_2^{\backslash}) =$

$= H(x,A_1) + H(x,A_2)$.

Звідси випливає, що

$H(x^*,A_1) + H(x^*,A_2) \leq H(x,A_1) + H(x,A_2)$, $x \in V$.

Отже,

$\min\limits_{x \in V} (H(x,A_1) + H(x,A_2)) = H(x^*,A_1) + H(x^*,A_2)$.

Це означає, що точка $x^* \in V$ є оптимальним розв'язком задачі (0.1).

Її ще називають екстремальним елементом для величини (0.1).

Задачу (0.1) можна інтерпретувати як чисто практичну задачу: де на прямій дорозі V потрібно поставити автобусну зупинку, що сумарний шлях до неї від сіл A_1, A_2 був найменшим?

Виникає питання як досліджувати та розв'язувати задачу, коли, наприклад, таких сіл буде більше двох, коли V не є прямою, а якоюсь іншою множиною, коли A_1, A_2, … A_m не є точками множини, а кругами, еліпсоїдами, чи іншими фігурами, коли ці фігури і точки розглядаються в просторі R^n, в довільному нормованому, метричному просторах, тощо.

У праці [2] встановлено критерії оптимальності допустимого розв'язку такої екстремальної задачі.

В лінійному нормованому просторі X задані опукла множина V і точки

A_1, A_2, … , A_m. Потрібно знайти точку x^*є V, в якій досягається мінімум функції

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \|x - A_i\|,$$

де c_1, c_2, … , c_m- фіксовані дійсні числа, тобто потрібно розв'язати таку екстремальну задачу:

$$\inf_{x \in V} \sum_{i=1}^{m} c_i \|x-A_i\|. \qquad (0.2)$$

При $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 1$ задача (0.2) набере вигляду

$$\inf_{x \in V} \sum_{i=1}^{m} \|x-A_i\|, \qquad (0.3)$$

яка називається задачею Штейнера в лінійному нормованому просторі X(див., наприклад, [3, ст.517]).

Якщо враховувати, що в лінійному нормованому просторі X

для x, A є X: $H(x, A) = \|x - A\|$,

то задачу (0.3) можна подати у такому вигляді

$$\inf_{x\in V} \quad \sum_{i=1}^{m} H(x, A_i) \ . \qquad (0.4)$$

Зрозуміло, що задача (0.4) ((0.3)) є узагальненням задачі (0.1) на випадок лінійного нормованого простору та $m \geq 2$.

Вище зазначалось, що представляють інтерес задачі типу задачі (0.1), в яких замість точок $A_1, A_2, \dots A_m$, де $m \geq 2$, фігурують деякі множини (круги, кулі, села, стадіони, тощо).

У дипломній роботі розглядається задача типу задачі Штейнера (0.3), в якій $A_1, A_2, \dots A_m$ не є точками, а опуклими компактами лінійного нормованого простору X.

Вона полягає в наступному.

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $K_0(X)$ – сукупність всіх опуклих компактів простору X, A, B є $K_0(X)$. будемо позначати через H(A,B) гаусдорфову відстань між A та B, тобто

$$H(A,B) = \max\{\max_{x\in A}\min_{y\in B}\|x-y\|, \max_{y\in B}\min_{x\in A}\|x-y\|\}.$$

Задачею відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точок множини $V \subset X$ до опуклих компактів $A_1, A_2, \dots A_m$ простору X будемо називати задачу відшукання

$$\alpha_V^*(A_1, A_2, \dots, A_m) = \inf_{x\in V} \sum_{i=1}^{m} H(\{x\}, A_i). \qquad (0.5)$$

Задачу відшукання величини (0.5) можна розглядати як узагальнення задачі Штейнера (0.4) на випадок метричного простору опуклих компактів лінійного нормованого простору X. Складність дослідження задачі відшукання величини (0.5) полягає в тому, що метричний простір опуклих компактів лінійного нормованого простору X не є лінійним нормованим простором.

Зрозуміло, що коли в задачі (0.5) A_i, $i=\overline{1,m}$, є точками простору X, то задача (0.5) стає задачею Штейнера (0.4) .

Зрозуміло також, що при $m = 1$ та $A_1 = a \in X$ задача (0.5) набере вигляду

$$\inf_{x \in V} \|x - a\|, \qquad (0.6)$$

тобто стає задачею найкращого наближення елемента a лінійного нормованого простору X множиною V цього простору, яка досліджувалась багатьма авторами і частковим випадком якої є задача про найкраще рівномірне наближення неперервної на компакті дійснозначної функції A_1 множиною інших неперервних на цьому компакті функцій.

Основні результати досліджень задачі (0.6) підсумовано у працях Н.І. Ахієзера [4], В.К. Дзядика [5], М.П. Корнійчука [6], П.-Ж. Лорана [7], О.І. Степанця [8,9], В.М. Тихомирова [10] та ін.

У випадку, коли $m = 1$, задача відшукання величини (0.5) набере вигляду

$$\inf_{x \in V} H(\{x\}, A) = \inf_{x \in V} \max_{y \in B} \|x - y\|,$$

де A – опуклий компакт простору X, і, отже, стає задачею про відшукання відносного чебишовського центру опуклого компакта лінійного нормованого простору X.

Задача відшукання відносного чебишовського центру досліджувалася у багатьох працях, зокрема у працях [11-14].

У зв'язку зі сказаним задачу відшукання величини (0.5) можна розглядати як узагальнення задач (0.1), (0.3), (0.6).

Оскільки задача (0.5) представляє практичний інтерес, узагальнює низку відомих задач теорії апроксимації, отже отримані при її дослідженні результати загального характеру слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для задач, які є її частковими випадками, то є всі підстави вважати тему дипломної робота актуальною.

Мета, об’єкт, предмет і задачі дослідження

Метою роботи є отримання задач, еквівалентних до задачі про відшукання найменших гаусдорфових відстаней від точок множини лінійного нормованого простору до кількох опуклих компактів цього простору, тобто до задачі відшукання величини (0.5); доведення теорем існування екстремального елемента для цих еквівалентних задач; встановлення двоїстого подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.5) та цільових функцій еквівалентних їй задач; отримання двоїстих подань конусів внутрішніх напрямків для деяких лебегових множин вищезазначених функцій; встановлення необхідних, достатніх умов і критерію екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.

Об’єктом дослідження є задача про відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точки множини лінійного нормованого простору до кількох компактів цього простору.

Предметом дослідження є проблеми, що стосуються задачі відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точки множини лінійного нормованого простору до кількох компактів цього простору.

Задачами дослідження є:

1. Отримання задач еквівалентних до задачі про відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точки множини лінійного нормованого простору до кількох опуклих компактів цього простору, тобто до задачі відшукання величини (0.5).
2. Доведення теорем існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.
3. Встановлення двоїстого подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.5) та цільових функцій еквівалентних їй задач.

4. Отримання двоїстих подань конусів внутрішніх напрямків для деяких лебегових множин функцій, зазначених у п.3.
5. Встановлення необхідних, достатніх умов і критеріїв екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.
6. Доведення низки допоміжних тверджень, які мають і самостійний інтерес.

При дослідженні задач, які розглядаються в роботі, використовувалися методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорії екстремальних задач, теорії оптимізації, теорії конусів допустимих напрямків.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Отримано задачі еквівалентні до задачі про відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точки множини лінійного нормованого простору до кількох опуклих компактів цього простору, тобто до задачі відшукання величини (0.5).
2. Доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.
3. Встановлено двоїсте подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.5) та цільових функцій еквівалентних їй задач.
4. Отримано двоїсті подання конусів конусів внутрішніх напрямків для деяких лебегових множин функцій зазначених у п.3.
5. Встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.
6. Доведено низку допоміжних тверджень, які мають і самостійний інтерес.

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи можуть бути використаними для подальшого розвитку екстремальних задач, теорій апроксимації, оптимізації та в інших галузях, при розв'язанні задач практичного характеру, математичні моделі яких використовуються у схемах постановки узагальненої задачі Штейнера, тобто у схему постановки задачі (0.5).

Апробація результатів роботи. Результати роботи досліджувались на засіданні проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі отримано задачі еквівалентні до задачі про відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точки множини лінійного нормованого простору до кількох опуклих компактів цього простору, тобто до задачі відшукання величини (0.5). Доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.

У другому розділі встановлено двоїсте подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.5) та цільових функцій еквівалентних їй задач. Отримано двоїсті подання конусів внутрішніх напрямків для деяких лебегових множин функцій зазначених у п.3.

У третьому розділі встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.

У роботі доведено низку допоміжних тверджень, які мають також самостійний інтерес.

Висновки

У дипломній роботі:

1. Отримано задачі еквівалентні до задачі про відшукання найменшої суми гаусдорфових відстаней від точки множини лінійного нормованого простору до кількох опуклих компактів цього простору, тобто до задачі відшукання величини (0.5).
2. Доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.
3. Встановлено двоїсте подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.5) та цільових функцій еквівалентних їй задач.
4. Отримано двоїсті подання конусів конусів внутрішніх напрямків для деяких лебегових множин функцій зазначених у п.3.
5. Встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.5) та еквівалентних їй задач.
6. Доведено низку допоміжних тверджень, які мають і самостійний інтерес.

Список використаних джерел

1. Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии / В.Ю. Протасов. – М.: Изд-во МЦНО, 2005. – 56 с.
2. Рубинштейн Т. Ш. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированом пространстве/ Т. Ш. Рубинштейн// Сиб. Мат. Журн. – 1965. – 6, №3. – С. 711-714.
3. Крейн М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации/ Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
5. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 510 с.
6. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения/ Н.П. Корнейчук. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
7. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. — М.: Мир, 1975. — 496 с.
8. Степанец А. И. Методы теории приближений/ А.И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.I. — 427 с.
9. Степанец А. И. Методы теории приближений/ А.И. Степанец. — Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.II. — 468 с.
10. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений/ В.М. Тихомиров. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.
11. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества / Успехи мат. наук. – 1964. – 19, №6. – с.139-145.
12. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения/ Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1971. – 352с.
13. Гудима У.В. Задача про чебишевський центр компакту нормованого простору відносно його скінченновимірного чебишевського

підпростору // Сучасні проблеми моделювання, прогнозування та оптимізації : зб. наук. праць. (за матеріалами Всеукраїнської наукової конференції). – Київ - Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2004. – С. 41-48.

14. Гудима У.В. Критерій узагальненого чебишевського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – Вип.17 – С. 33-48.
15. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. 520 с.
16. Арутюнов А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу / А.В. Арутюнов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 184 С.
17. Гудима У. В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.
18. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: ВШ, 1981. – 687 с.
19. Половинкин Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. М: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 416 с.
20. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 742 с.
21. Иосида К. Функциональный анализ/ К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624с.
22. Гудима У. В. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення/ У. В. Гудима, Ю.В. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання.

Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип.12 – С. 37–55.

23. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень/ У. В. Гудима// Укр. мат. журн. – 2005.-57, №12. – С.1601-1619.