Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми: **«Функція Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори злічених систем диференціальних рівнянь»**

Виконав: студент II курсу, групи М1-М19р
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Лобунько Владислав Андрійович

Науковий керівник: **Авдеюк П.І. ,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: **Кріль С.О. ,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Дослідженню тороїдальних многовидів, структури траєкторій на многовидах та в їх околах присвячено праці В.І. Арнольда [4], М.М. Боголюбова [5], Ю.О. Мітропольського [6], А.М. Самойленка[27-48], О.Б. Ликової [17], та багатьох інших математиків.

Асимптотичні методи Крилова-Боголюбова-Митропольського є ефективним апаратом для наближеної побудови умовно-періодичних рухів, що заповнюють інваріантні тори. Один із підходів до теорії збурення інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем, пов'язаний з використанням функції Гріна для лінеарізованої задачі, було запропоновано А.М. Самойленко [28]. Цей підхід дозволив з єдиної та загальної точки зору викласти теорію збурення як гладких так і недифференційовних інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем та дав теореми існування таких многовидів. У статті [30] було з'ясовано характер поведінки розв'язків, що починаються в околі тора, інваріантного відносно даної системи диференціальних рівнянь, у припущенні, що тор є експоненціально стійким. Тобто було вказано умови при яких довільна траєкторія з малого околу тора τ_m притягується до відповідної траєкторії на τ_m за експоненціальним законом. Отримані умови співпадають з умовами, вказаними в [28], що гарантують збереження при малих збуреннях експоненціально стійкого інваріантного тора. Очевидний зв'язок цих досліджень з дослідженнями стійкості інваріантних торів, проведених методом інтегральних многовидів [5,17]. Підхід, запропонований А.М. Самойленко, викликав низку досліджень в напрямку вивчення питань існування та властивостей гладкості функції Гріна задачі про інваріантні тори, звідність в околі інваріантних торів, експоненціальної стійкості, експоненціального розщеплення та ін. Серед праць вказаних напрямків необхідно відмітити роботи А.М. Самойленко

[27-38], Ю.О. Мітропольського [17-20], А.М. Самойленко та В.Л. Кулика [39-41], В.Л. Кулика [14]. В роботах Ю.В. Теплінського [49-54] розглянуті питання існування інваріантних торів лінійної і нелінійної зліченних систем диференціальних рівнянь.

Поштовхом до дослідження нескінчених систем диференціальних рівнянь послужила теорема про однозначність розв'язку задачі Коші для зліченної системи диференціальних рівнянь, яку довів А.Н. Тіхонов. К.П.Персідський [22,23] довів теореми існування та единості розв'язку зліченної системи диференціальних рівнянь, дослідив стійкість розв'язків нескінченої систем диференціальних рівнянь у повному лінійному нормованому просторі. Згодом визначились декілька напрямків у дослідженнях зліченних систем диференціальних рівнянь: загальна теорія зліченних систем, стійкість розв'язків, теорія характеристичних чисел зліченних систем, зліченні системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, диференціальні рівняння в нормованих просторах, інваріантні многовиди зліченних систем диференціальних рівнянь. Систематизація результатів, отриманих в теорії нескінченних систем диференціальних рівнянь була проведена в монографії К.Г.Валеева та О.А.Жаутикова [8]. Слід також відмітити збірник праць К.П. Персідського [24].

Для зліченних систем диференціальних рівнянь в роботах А.М.Самойленко і Ю.В. Теплінського [44-48], були доведені теореми існування інваріантних тороїдальних многовидів. На основі цих результатів в роботах Ю.В. Теплінського та П.І. Авдеюка [53-56] досліджувалися питання існування інваріантних тороїдальних многовидів зліченних систем диференціальних рівнянь, залежність функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантний тор від параметра, умови диференційованості функції Гріна-Самойленка, розглянуті умови, при яких будь-яка траєкторія з малого околу тора притягується до відповідної траєкторії на торі у випадку нелінійної та квазілінійної систем диференціальних рівнянь.

Мета роботи. Стосується вказаних вище досліджень, зокрема дослідити умови існування, найпростіші властивості функції Гріна-Самойленко задачі про інваріантні тори.

Актуальність теми. Багато задач науки та техніки направлено на дослідження поведінки фізико-механічних об’єктів, функція стану яких визначається системами алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь. Із зрозумілих причин розвинуті методи дослідження систем з простою математичною моделлю, та ще й з прямою постановкою задачі, коли визначається функція стану системи, що перебуває в заданому зовнішньо-динамічному середовищі. Задачі керування, спостереження, дослідження динаміки систем за неповної інформації про них вивчені менше. Особливо це стосується динаміки систем з розподіленими параметрами. Проблеми тут починаються з вибору, побудови та ідентифікації параметрів моделі і зростають при розв’язанні початково-крайових задач таких систем.

Об'єктом дослідження. Є необхідні та достатні критерії існування нетривіальних обмежених на всій осі розв’язків неоднорідних лінійних розширень та функції Гріна-Самойленка.

Матеріалом дослідження є функція Гріна – Самойленка $G_0(\tau, \varphi)$ задачі про інваріантний тор.

Апробація роботи. Основні спостереження та результати дослідження викладені в наукових доповідях та повідомленнях на студентській науковій конференції за підсумками НДР у Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка.

Структура роботи. Робота складається із вступу, трьох частин, висновку та списку використаної літератури.

У вступі обґрунтовується вибір теми та актуальність обраної для дослідження проблеми, мета та завдання роботи, вказана наукова новизна отриманих результатів дослідження, їх теоретичне і практичне значення, описана апробація наукової роботи.

У першій частині «Загальні питання теорії систем диференціальних рівнянь» розглянуто загальні питання теорії нескінчених систем диференціальних рівнянь, зокрема, поняття матриканта.

Розглядається система диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X,$$

де — неперервна матрична функція в деякому інтервалі (a, b) зміни аргументу t, з'ясовано властивості функції Гріна задачі про обмежені розв'язки, наведено умови існування та єдиності таких функцій.

З'ясували, що матрицант можна представити у вигляді ряду

$$\Omega_{t_0}^t = E + \int_{t_0}^t P(t)dt + \int_{t_0}^t P(t)dt \int_{t_0}^t P(t_1)dt_1 + ...,$$

який збігається абсолютно й рівномірно в будь-якому замкненому інтервалі, в якому функція $P(t)$ неперервна.

Наведено деякі властивості матриканту.

1^0 $$\Omega_{t_0}^t = \Omega_{t_0}^t \Omega_{t_0}^{t_1} \quad (t_{0,} t_{1,} t \subset (a,b)).$$

2^0 $$\Omega_{t_0}^t (P+Q) = \Omega_{t_0}^t (P) \Omega_{t_0}^{t_1} (S) \ ,$$

де $S = [\Omega_{t_0}^t (P)]^{-1} Q \Omega_{t_0}^t (P)$.

$3°$ $$\ln \left| \Omega_{t_0}^t (P) \right| = \int_{t_0}^t S_p P dt$$

4^0 Якщо $A = \|a_{ik}\|_1^n = const$, то $\Omega_{t^0}^t (A) = e^{A(t-t_0)}$.

$5°$ Якщо $mod\, P(t) \leq Q(t)$, то $mod\, \Omega_{t_0}^t (P) \leq \Omega_{t_0}^t (Q)$ (t>t_0).

6^0 $\mathrm{mod}\, \Omega_{t_0}^t (P) \leq (\frac{1}{n} e^{nh(t)} + \frac{n-1}{n}) E \leq e^{nh(t)} E$ (t>t_0), де $h(t) = \int_{t_0}^t g(t)dt$,

$g(t) = \max_{1 \leq i,k \leq n} \{ |P_{ik}(t)| \}$.

Для системи рівнянь $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ існує функція Гріна задачі про обмежені на всій осі *R* розв'язки, якщо існує неперервна на всій осі *R* матрична функція *C(τ)* така, що функція

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(A)C(\tau), \tau < t, \\ \Omega_\tau^t(A)(C(\tau) - I_n)\tau > t; \end{cases}$$

задовольняє оцінці

$$\|G(t,\tau)\| \le K \exp\{-\gamma_1 |t-\tau|\}$$

де *K, γ – const*>0. При цьому функцію *G(t,τ)* будемо називати функцією Гріна-Самойленко задачі про обмежені розв'язки для системи рівнянь (або просто - ФГС).

Розглянута теорема

Теорема. *Для існування ФГС G(t, τ) необхідно й досить, щоб існувала матрична функція S(t) є* $C^1(R)$*, яка задовольняє умові (1.2.5). Причому у випадку, коли detS(t) ≠ 0, ФГС G(t, τ) буде єдиною і однозначною.*

Інваріантні тори злічених систем диференціальних рівнянь розглянуто у другій частині.

Фундаментальна матриця $\Omega_\tau^t(\varphi)$розв’язків системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P\left(\varphi_t(\varphi)\right)x,$$

де $\varphi = \varphi_t(\varphi)$ - єдиний розв'язок системи рівнянь $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ *m*-вимірний вектор, $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \ldots, a_m(\varphi)\}$. Причому $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, де φ - довільний сталий вектор з множини R^m.

Функцію

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0 \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - E], & \tau > 0 \end{cases}$$

називають $G_0(\tau,\varphi)$ функцією Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x \qquad (*)$$

Вкажемо найпростіші властивості ФГС:

$$G_0(0,\varphi) - G_0(+0,\varphi) = E.$$

Якщо $G_t(\tau,\varphi)$ – матриця, яка визначається співвідношенням

$$G_t(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & t \ge \tau, \\ -\Omega_\tau^t(\varphi)[E - C(\varphi_\tau(\varphi))], & t < \tau. \end{cases}$$

то

$$G_0(\tau,\varphi_t(\varphi)) = G_t(\tau + t,\varphi).$$

Із цієї рівності випливає, що матриця

$$G_0(-t,\varphi_t(\varphi)) = G_t(0,\varphi) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi), & t \ge 0, \\ -\Omega_0^t(\varphi)[E - C(\varphi)], & t < 0 \end{cases}$$

складається із розв'язків системи рівнянь, розглянутих відповідно при $t \ge 0$ та $t < 0$.

Покладемо

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau,$$

зрозуміло, що $u \in C(\tau_m)$.

Множина

$$x = u(\varphi) = Tf(\varphi), \quad \varphi \in \tau_m,$$

визначає інваріантний тор системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi). \qquad (**)$$

Отже, існування функції Гріна системи рівнянь (*) гарантує існування інваріантного тору системи рівнянь (**) для довільної функції $f \in C(\tau_m)$.

Розглянута теорема: *Нехай* $a \in C_{Lip}(\tau_m)$, $P \in C(\tau_m)$ *і система рівнянь (*) має ФГС* $G_0(\tau,\varphi)$. *Тор* $x = 0$ $\varphi \in \tau_m$ *є єдиним інваріантним тором системи(**) тоді і тільки тоді, коли ця система не має інших функцій Гріна, крім* $G_0(\tau,\varphi)$.

Надано доведення теореми існування єдиного інваріантного тору зліченної системи диференціальних рівнянь.

Крім того, наведена лема: *Нехай функція* $G_0(\tau,\varphi)$ *й тільки вона є ФГС системи рівнянь (2.1.5). Тоді матриця* $C(\varphi) = G_0(0,\varphi)$ *задовольняє рівностям*

$$C(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) \Omega_t^0(\varphi) \quad \forall t \in R, \quad \varphi \in \tau_m,$$

$$C^2(\varphi) = C(\varphi) \quad \forall \varphi \in \tau_m.$$

Третя частина містить дослідження залежності функції Гріна-Самойленко зліченної системи диференціальних рівнянь від параметра.

Розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, p), \quad \frac{dh}{dt} = P(\varphi, p)h, \qquad (!)$$

де $\varphi \in m$, $h \in m$, $a(\varphi,p)$, 2π-періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) вектор-функція, $P(\varphi,p)$ - 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) нескінчена матриця, $p \in [p_1, p_2]$ — параметр.

Та вкорочену систему рівнянь

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi_t^p(\varphi), p)h, \qquad (+)$$

Покладемо

$$\overset{(m)}{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, 0,0, \ldots), \quad \varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}) = \{\varphi_1^p(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ \ldots), \ldots\},$$

та розглянемо систему рівнянь виду

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi_t^p(\overset{(m)}{\varphi}), p)h, \qquad (++)$$

Матрицант системи рівнянь (+) позначимо $\Omega_\tau^t(p,\ \varphi)$, а матрицант системи (++) — $\Omega_\tau^t(p,\ \overset{(m)}{\varphi})$.

Наведено лема 1: *Нехай система рівнянь (!) така, що*

1. *$P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ з коефіцієнтами відповідно $\varepsilon(m)$, $\alpha(m)$.*
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi} |p_{sj}(\varphi, p)| \le p^o = const < \infty, \quad s = 1, 2, \ldots$
3. $\|\Omega_\tau^t(p,\varphi)\| \le N \exp\{-\gamma(t-\tau)\},\ N > 0,\ \gamma > 0,\ t > \tau$ *причому γ та N не залежать від h, φ, p.*
4. *$\gamma > \alpha(0) + 1$.*

Тоді рівномірно за нормою $\lim \Omega_\tau^o(p,\ \overset{(m)}{\varphi}) = \Omega_\tau^o(p,\ \varphi)$.

Та лема 2. *Нехай система рівнянь (!) така, що*

1. $\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi} |p_{sj}(\varphi, p)| \le p^o = const < \infty, \quad s = 1, 2, \ldots$
2. $$\|a(\varphi,p) - a(\overline{\varphi},\overline{p})\| \le \alpha_1\|\varphi - \overline{\varphi}\| + \alpha_2\omega(|p - \overline{p}|),$$
   $$\|P(\varphi,p) - P(\overline{\varphi},\overline{p})\| \le \beta_1\|\varphi - \overline{\varphi}\| + \beta_2\omega(|p - \overline{p}|),$$
   $$\text{для всіх} \quad \varphi, \overline{\varphi} \in m, \quad p, \overline{p} \in [p_1, p_2]$$
   тут $\omega(z)$ — неперервна не спадна скалярна функція, що визначена на $[0,\ p_2 - p_1]$, $\omega(0) = 0$.
3. *Існує функція Гріна задачі про інваріантні тори $G_o(\tau,\ p,\ \varphi)$, що задовольняє оцінку*
   $$\|G_o(\tau, p, \varphi)\| \le K\exp\{-\gamma/\tau/\}$$
   де K, γ — додатні сталі, що не залежать від τ, φ, $p \in [p_1, p_2]$.

Тоді функція Гріна $G_o(\tau,\ p,\ \overset{(m)}{\varphi})$ системи рівнянь (++) неперервна за сукупністю змінних p, $\overset{(m)}{\varphi}$ для будь-якого натурального m.

На основі лем 1 та 2 сформульована така теорема

Теорема 1. *Нехай система рівнянь (!) така, що при $p \in [p_1,p_2]$*

1. *$P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ з коефіцієнтами відповідно $\varepsilon(m)$, $\alpha(m)$.*

2. $\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{\varphi}\left|p_{sj}(\varphi,p)\right|\le p^{o}=const<\infty,\quad s=1,2,\dots$

3. $\left\|\Omega_{\tau}^{t}(p,\varphi)\right\|\le N\exp\{-\gamma(t-\tau)\},\ N>0,\gamma>0,t>\tau$ *причому γ та N не залежать від h, φ, p.*

4. $\gamma > \alpha(0) + 1$.

5. $$\|a(\varphi,p)-a(\overline{\varphi},\overline{p})\|\le\alpha_1\|\varphi-\overline{\varphi}\|+\alpha_2\omega(|p-\overline{p}|),$$
$$\|P(\varphi,p)-P(\overline{\varphi},\overline{p})\|\le\beta_1\|\varphi-\overline{\varphi}\|+\beta_2\omega(|p-\overline{p}|),$$
для всіх $\varphi,\overline{\varphi}\in m,\quad p,\overline{p}\in[p_1,p_2]$
де $\omega(z)$ — неперервна не спадна скалярна функція, що визначена на $[0, p_2 - p_1]$, $\omega(0) = 0$; $\varphi,\overline{\varphi}\in m,\quad p,\overline{p}\in[p_1,p_2]$.

Тоді ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (!) неперервна за параметром p.

Також, розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi,p),\quad \frac{dh}{dt}=P(\varphi,p)h\,, \tag{!!}$$

де $\varphi \in R^m$, $h \in m$, $a(\varphi,p)$, 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) вектор-функція, $P(\varphi,p)$ - 2π- періодична по φ_i, ($i = 1, 2, ...$) нескінчена матриця, $p \in [p_1, p_2]$ — параметр.

Теорема 2. *Нехай система рівнянь (!!) така, що при $p \in [p_1,p_2]$*

1. *$P(\varphi,p)$, $a(\varphi,p)$ неперервно диференційовані по φ_i, ($i = 1, 2, ..., m$), p.*

2. $\sum_{j=1}^{\infty}\max_{\varphi}\left|p_{sj}(\varphi,p)\right|\le p^{o}=const<\infty,\quad s=1,2,\dots$

3. *Існує ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (!!), що задовольняє нерівність.*

4. $$\sum_{j=1}^{\infty}\max_{\varphi,p}\left|\frac{\partial p_{sj}(\varphi,p)}{\partial\varphi_i}\right|\le p_s<\infty,\quad \sum_{s=1}^{\infty}p_s<\infty,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\max_{\varphi,p}\left|\frac{\partial p_{ki}(\varphi,p)}{\partial\varphi_i}\right|\le l_k<\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}l_k<\infty.$$

Тоді ФГС задачі про інваріантні тори системи диференціальних рівнянь (!!) диференційована по параметру p, якщо тільки $\gamma > \alpha$, *де* α *вибираємо за умовою*

$$\left|\left\langle \frac{\partial a(\varphi, p)}{\partial \varphi}\eta, \eta \right\rangle\right| \le \alpha |\eta|^2, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle$$ – евклідів добуток

$$|\eta| = |(\eta_1, \ldots, \eta_m)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2}.$$

ВИСНОВОК

У роботі провідним об’єктом розвідки є дослідження нескінчених систем диференціальних рівнянь, а саме теорія інваріантних многовидів зліченних систем диференціальних рівнянь, які розглядаються в просторі обмежених числових послідовностей. Приміром розглянуто один із підходів до теорії збурення інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем, пов’язаний з використанням функції Гріна-Самойленко для лінеарізованої задачі. Досліджено також найпростіші властивості функції Гріна-Самойленко задачі про інваріантні тори у випадку скінченновимірних систем диференціальних рівнянь. Аналізуються також умови існування та єдиності інваріантних торів у випадку існування єдиної функції Гріна-Самойленко.

Слід відмітити, що тема обрана мною для написання роботи виявилась одночасно і нелегкою, і привабливою. Нелегкою вона була тому, що в університеті замало часу виділено на опрацьовування теорії диференціальних рівнянь, без якої неможливо уявити дослідження даної тематики. А взагалі даний матеріал виявився суттєво цікавим, тому цю теорію варто вивчати.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авдеюк П.И. О поведении решений квазилинейной счетной системы в окрестности инвариантного тора /П.И. Авдеюк // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С.3-8.
2. Авдеюк П.И. О существовании инвариантных торов счетных систем дифференциальных уравнений /П.И. Авдеюк // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С.4-12.2.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // В. И.Арнольд УМН. 1962.2. - 18, вып. 6. - С. 91-192.1.
4. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. / В. И.Арнольд - М.: Наука, 1979. - 304 с.
5. Боголюбов Н.Н., Метод интегральных многообразий в нелинейной механике / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский // Труды междунар. симп. по нелинейным колебаниям.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1963.. - С. 93-154.
6. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов , Ю.А. Митропольский.- М.: Наука, 1974. - 504 с.
7. Боголюбов Н.Н. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко - Киев: Наук, думка, 1969. - 244 с.
8. Валеев К.Г., Бесконечные системы дифференцильных уравнений. / К.Г Валеев О.А. Жаутыков.- Алма-Ата: Наука, 1974. - 412 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер– М.: Наука,

1967.- 575 с.

10. ГДалецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве./ Ю.Л. Далецкий, М.Г Крейн.- М.: Наука, 1970. - 536 с.
11. Колмогоров А.Н. Общая теория динамических систем и классическая механика / А.Н. Колмогоров // Международный конгресс в Амстердаме. - М.: Физматгиз, 1961. - С. 187-208.
12. Крейн М.Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. / М.Г. Крейн - Киев, 1964. - 188 с.
13. Кулик В. Л. К вопросу о зависимости функции Грина задачи об инвариантном торе от параметра / В. Л. Кулик // УМЖ. - 1978. - 30, №4. - С. 544-551.
14. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения./ А.М. Ляпунов - ГИТТЛ, 1950. 471 с.
15. Митропольский Ю.А. Интегральные многообразия в нелинейной механике. / Ю.А.Митропольский, О.Б. Лыкова - М.: Наука, 1972.2. - 412 с.
16. Митропольский Ю.А. К вопросу о структуре траекторий на тороидальных многообразиях / Ю.А.Митропольский, А.М. Самойленко // Докл. АН УССР. - 1964. - 8. - С. 984-985.
17. Перестюк Н.А. Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем / Н.А. Перестюк // УМЖ. - 1984. - 36, №1. – С. 63-69.
18. Персидский К.П. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. / К. П. Персидский Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. - Алма-Ата: Наука, 1976. - 247 с.
19. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Л.С. Понтрягин - М.: Наука, 1970. - 332 с.

20. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. / А. Пуанкаре - М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947. – 390с.
21. Самойленко А.М. К вопросу о структуре траекторий на торе / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1964. - 16, №6 - С. 769-782.1.
22. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении / А.М. Самойленко // Изв. АН СССР. Сер. матем - 1970. - 34, ЛГ6.] С. 1219-1240.
23. Самойленко А.М. О приведении динамической системы в окрестности гладкого инвариантного тора к каноническому виду /А.М. Самойленко // Изв. АН СССР. Там же. 1972.1. 35, №1. С. 209 232.2.
24. Самойленко А.М. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы / А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. - 1975. - №5. - С. 820 - 834.
25. Самойленко А.М. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого интегрального многообразия / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1966. - 18, №6. - С. 41-64.
26. Самойленко А.М. Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории / А.М. Самойленко // - Киев, 1990. В 43 с- (Препр. /АН УССР. Ин-т математики, 90.35).
27. Самойленко А.М. Исследование динамической системы в окрестности инвариантного тороидального многообразия / А.М. Самойленко // УМЖ. - 1991. - 42, Л/Ч. - С. 530-537.
28. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. / А.М. Самойленко - М.: Наука, 1987. - 302 с.
29. Самойленко А.М., Кулик В.Л. О непрерывности функции Грина задачи об инвариантном торе / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик //

УМЖ. - 1978. - 30, №6. - С. 779-782.2.

30. Самойленко А.М. Множества инвариантных торов линейных расширений динамических систем / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1984. - №8. С. 15-19.

31. Самойленко А.М. Расщепляемость линейных расширений динамических систем на торе / А.М. Самойленко, В.Л. Кулик // Докл. АН УССР. Сер.А.- 1984. - №12.1.- С. 23-27.

32. Самойленко А.М. Функция Грина задачи об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1981. - №1 - С. 26-30.

33. Самойленко А.М. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений. / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский, Цыгановский И.С. - Киев, 1982.2. - 43 с. - (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 82.2.30).

34. Самойленко А.М., Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах дифференциальных систем с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский // Дифференц уравнения. - 1985. - 21, №8. - С. 1353-1361.

35. Самойленко А.М. Об устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1991. - №7. - С. 31-32.2.

36. Самойленко А.М. Счетные системы дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский – К.: Ин-т математики, 1993. – 308 с.

37. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах /Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. // праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. - 2008. –Т72. - 496 с.

38. Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Пасюк К.В. Про існування інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Нелінійні коливання. – 2009. – 12, №3. – С. 347-367.

39. Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Пасюк К.В. Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – 13, №2. – С. 253-271.

40. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах и приводимости счетных систем / Ю.В. Теплинский // Дифференц. уравнения. - 1979. - 15, N4. – С.759-761.

41. Теплинский Ю.В. К вопросу о приводимости счетных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами / Ю.В. Теплинский // УМЖ. - 1979. – 31, №4. - С. 463-465.

42. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений / Ю.В. Теплинский // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1978. - №9. - С. 796-800.

43. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах линейных систем дифференциальных уравнений в пространстве М / Ю.В. Теплинский // УМЖ. - 1982.2. - 35, №2.1.- С. 194-199.

44. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. О зависимости функции Грина задачи об инвариантном торе линейной дифференциальной системы уравнений в пространстве М от параметра / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. - С. 120-128.

45. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // УМЖ. - 1990. - 42, №2.2. - С. 401-405.

46. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. Редукция задачи о существовании инвариантного тора бесконечной дифференциальной системы к конечному случаю / Ю.В. Теплинский, П.И. Авдеюк // УМЖ. – 1991. - 43, №9, - С. 1251-1255.