

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«Комбінаторні ігри на графах»**

Виконала:

студентка 2 курсу М1-М19 групи

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Щербань Крістіна Сергіївна

Керівник:

Зеленський О. В., кандидат фізико-математичних
наук, доцент кафедри математики

Рецензент:

Кріль С. О., кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики

м. Кам'янець-Подільський – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ТА ТЕОРІЇ ІГОР.....	6
1.1 Елементи теорії графів.....	6
1.2 Класифікація ігор.....	10
РОЗДІЛ 2 БАГАТОКРОКОВІ ІГРИ.....	14
2.1 Гра хрестики-хрестики.....	14
2.2. Гра Баше та її модифікації.....	22
2.3.Гра Баше з умовно виграшними позиціями.....	31
2.3.1 Застосування таблиць для гри «Баше».....	31
2.3.2Гра Баше з умовно виграшним позиціями для багатовимірного випадку.....	34
РОЗДІЛ 3 КОМБІНАТОРНІ ІГРИ НА ГРАФАХ.....	39
3.1 Двочасткові графи та графи без трикутників.....	39
3.2 Чарівна фішка.....	45
3.3 Ігри на впорядкованих множиннах.....	47
ВИСНОВКИ.....	53
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	55

ВСТУП

Теорія ігор розглядає завдання, типові до ринкової економіки, прийняття рішень в умовах жорсткої конкурентної боротьби [9].

Гра – це конфліктна ситуація, регламентована певними правилами, в яких мають бути вказані: порядок чергування дій учасників ходів; правила виконання кожного ходу; кількісний результат гри.

Комбінаторні ігри як предмет серйозного дослідження стали привертати увагу математиків тільки з початку ХХ століття. Початок їх вивчення було покладено статтею Чарльза Боутона в 1902 р «Нім, гра з повною математичною теорією» [1].

Комбінаторна теорія ігор – це математична теорія, що вивчає ігри двох осіб, де у кожен момент часу є позиція, яку гравці по чергово змінюють певним чином, щоб досягти певного виграшу[7]. Комбінаторні ігри можуть бути інтерпретовані, як ігри на графах.

Відмінність комбінаторних ігор від ігор, які зазвичай вивчаються в класичній («економічній») теорії ігор полягає в тому, що в них гравці виконують ходи по черзі, а не одночасно (класична теорія ігор висвітлюється в безлічі книг, в назві яких фігурують слова «теорія ігор» або «дослідження операцій») [8].

Означення та базові теореми теорії графів описані в[2-6]

Будь-яку комбінаторну гру можна інтерпретувати, як гру на графі.

Існує багато застосувань теорії ігор на графах в інших областях математики, а також у бізнесі, економіці, політиці, штучному інтелекті тощо. Наприклад, у бізнесі трапляються ситуації, схожі на математичні ігри, тому підприємці можуть використовувати знання теорії ігор для максимізації власного прибутку. Розглянуті у роботі ігри на графах мають різні інтерпретації та застосування, а саме: конкуренція двох провайдерів в одному місці; задача про визначення руху фанатів перед спортивною подією; конкуренцію двох засновників, що мають вплив в корпорації. Для кожної задачі знайдено стратегію та доведено її оптимальність.

Мета дипломної роботи – створити власні ігри на графах та розробити виграшні стратегії, та довести їх оптимальність використовуючи теорію графів, та комбінаторні методи доведення.

Завдання: винайти власні комбінаторні ігри на графах, розробити виграшні стратегії та довести їх оптимальність;

Актуальність проблеми визначається надзвичайно широким спектром використання комбінаторної теорії ігор та теорії графів у точних дисциплінах, підприємницькій діяльності, створенні комп'ютерних ігор.

Об'єктом дослідження наукової роботи є теорія ігор, а саме ігри на графах.

Предметом дослідження є створення власних ігор на графах, знаходження виграшної стратегії.

У роботі розглянуто ігри на графах, які мають різні інтерпретації та застосування, а саме: конкуренція двох провайдерів в одному місці; задача про визначення руху фанатів перед спортивною подією; конкуренцію двох засновників, що мають вплив в корпорації. Для кожної задачі знайдено стратегію та доведено її оптимальність.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. В першому розділі розглядаються елементи теорії графів та класифікація ігор. В другому розділі розглядаються власно створені багатокрокові ігри Хрестики-хрестики, гра Баше з модифікаціями та узагальненнями. В третьому розділі розглядаються власно створені комбінаторні ігри на графа та ігри на частково впорядкованих множинах. Для всіх ігор проведений детальний аналіз, знайдені виграшні стратегії та доведена їх оптимальність. .

Новизна роботи полягає у тому, що усі ігри та оптимальні стратегії для них є власною розробкою. В роботі створено метод визначення еквівалентності позицій з точки зору гри. Також узагальнено гру Баше для довільної кількості куп та розроблено модифікацію гри Баше з особливим ходом, який за гру можна зробити скінченну кількість разів. Для аналізу стратегій було розроблено метод фінальних графів та метод послідовного виключення конкурентів.

Практичне значення цієї роботи полягає в тому, що проведені в ній дослідження можуть використовувати учні, які готуються до різних математичних конкурсів, вчителі математики та науковці, які цікавляться теорією ігор та теорією графів.

ВИСНОВКИ

Робота присвячена створенню власних ігор на графах, які мають різні застосування та інтерпретації. При доведенні оптимальності стратегій використовується власно створений метод фінальних графів та метод послідовного виключення конкурентів.

У процесі роботи винайдено гру «Хрестики-хрестики» та доведено, що при правильній грі виграє перший гравець. Розроблено метод визначення еквівалентності позицій.

У роботі розглянуто гру Баше. Створено узагальнений варіант гри для більшої кількості куп, а також розроблено алгоритми знаходження виграшних, програшних та нічийних позицій для різних модифікацій гри Баше.

Розроблено принципово новий варіант гри Баше з «особливим» ходом, який за гру можна зробити обмежену кількість разів. Гра Баше з «особливим» ходом розглядає не два типи клітинок, а кожній клітинці відповідає квадратна матриця, елементами якої є значення функції Шпрага-Гранді. Наявність цього ходу значно ускладнює розв'язання задачі. Проте в реальному житті при конкуренції двох підприємств або в деяких задачах, пов'язаних зі штучним інтелектом, виникає ситуація, яка моделюється математичною грою, коли певні дії можна повторювати обмежену кількість разів. При цьому позиція в грі не є однозначно виграшною чи програшною, а тип позиції залежить від наявності «особливих» ходів у кожного з гравців. Такі позиції ми назвали умовно виграшними.

У роботі для гри Баше будується граф, кожену вершину якого визначають a_n сусідніх клітинок з таблиці. За допомогою цього графа доводиться періодичність таблиць гри Баше.

В роботі винайдено гру «Графи без трикутників» та доведено, що при правильній грі для $n=5$, $n=7$ виграє другий гравець, при $n=6$ виграє перший гравець.

Створено гру «Чарівна фішка» та доведено, що для гри, яка починається з порожнього графу виграє перший гравець. Розглянуто узагальнення цієї задачі для випадку, коли початковий граф гри містить дві ізольовані вершини та модифікацію цієї задачі, коли доповнення до початкового графу є дерево.

Розроблено задачу «Чемпіонат світу з футболу 2030», у якій двоє гравців намагаються не одержати цикл у графі. Ці ідеї можуть бути використані для створення схеми пересування фанатів перед спортивною подією, при конкуренції двох фірм-організаторів.

В грі «Ієрархія в корпорації» розглянуто ситуацію, в якій два засновника ведуть конкуренту боротьбу за ключову посаду в корпорації та доведено, що при правильній грі виграє перший гравець. При доведенні використовується метод послідовного виключення конкурентів.

Розглянуто гру "Блукання по ділянках", яка проходить на частково-впорядкованій множині ділянок числа та знайдено оптимальну стратегію. Доведено, що для чисел, які є квадратами натуральних чисел виграє перший гравець, а в протилежному випадку – другий.

Ця дипломна робота може бути корисною усім, хто цікавиться комбінаторною теорією ігор, теорією графів, а також для підготовки до математичних олімпіад та інших конкурсів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Charles L. Bouton. Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory / Charles L. Bouton // The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 3, No. 1/4. (1901 - 1902). - pp. 35-39;
2. Белов В. В. Теорія графів / Белов В. В., Воробйов Є. М., Шаталов В. Є. - М. : Вища школа, 1976. - 392с.;
3. Берж К. Теорія графів та її застосування / Берж К. - М.: ІЛ, 1962. - 320с.;
4. Кірсанов М. Н. Графи в Maple / Кірсанов М. Н. - М.: Физматлит, 2007. - 168с.;
5. Оре О. Теорія графів / Оре О. - М. : Наука, 1980. - 336с.;
6. Уїлсон Р. Введення в теорію графів. Пер з англ. / Уїлсон Р. - М.: Мир, 1977. - 208с.;
7. Деорнуа П. Комбинаторная теория игр / Деорнуа П. - М.: Издательство МЦНМО, 2017. – 40с.;
8. Бартіш М. Я. Теорія ігор / М.Я.Бартіш, Л.Л.Роман-Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2005. -120 с.;
9. Шиян А.А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті: Навч. посіб. / А.А. Шиян - Вінниця: ВНТУ, 2009. – 164 с;
10. Richard K. Guy. Combinatorial Games. / Richard K. Guy - American Mathematical Soc., 2000 - 233р;
11. Льюс Р. Игры и решения / Р. Льюс, Х.Райфа. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. - 642 с.;
12. John von Neumann. Theory of Games and Economic Behavior / John Von Neumann, Oskar Morgenstern. – Princeton University Press, 1944. – 625р.
13. John Von Neumann. Zur theorie der gesellschaftsspiele / John Von Neumann // Mathematische Annalen. – 1928. - p.100, pp.295-320.
14. Шиян А.А. Теоретико-ігровий аналіз раціональної поведінки людини та прийняття рішень в управлінні соціально-економічними системами. / А.А. Шиян. – Вінниця: Універсум, 2009. – 414 с.

15. Sylvia Nasar. *A Beautiful Mind: The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash* / Sylvia Nasar; Simon and Schuster, 2001. - 461p.
16. W. W. Rouse Ball. *Mathematical Recreations and Essays* / W. W. Rouse Ball, H. S. M. Coxeter. - Courier Corporation, 1987 - 428 p;
17. P.M. Grundy. *Mathematics and Games* / P.M. Grundy // *Eureca* №2. – 1939 – pp. 6-8; reprinted in *Eureca* №27. – 1964. – pp. 9 – 11.