Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

Л. О. СМОРЖЕВСЬКИЙ
Ю. Л. СМОРЖЕВСЬКИЙ

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ
НА УРОКАХ АЛГЕБРИ І ГЕОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Навчальний посібник

*Рекомендовано Міністерством освіти
і науки України*

Кам'янець-Подільський
2010

УДК 373.5.016:51(075.8)
ББК 74.262я73
С51

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів (лист № 1/11-6717 від 21.07.2010 р.).

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 2 від 25 лютого 2010 р.).

Рецензенти:

М. І. Бурда, доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України (Президія НАПН України);

В. Г. Бевз, доктор педагогічних наук, професор (Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова);

П. С. Атаманчук, доктор педагогічних наук, професор (Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка).

С51 **Сморжевський Л. О.**

Методика використання наочності на уроках алгебри і геометрії в основній школі : навчальний посібник / Л. О. Сморжевський, Ю. Л. Сморжевський. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — 184 с. : іл. — Бібліограф.: с. 179–182.

ISBN 978-966-643-061-1

У посібнику розкрито роль і значення наочності при вивченні шкільного курсу математики, розглянуто види наочних посібників, комп'ютер як наочний посібник на уроках математики, викладено методику використання наочних посібників на уроках алгебри і геометрії в 7–9 класах середніх загальноосвітніх навчальних закладів.

Для вчителів математики середніх загальноосвітніх навчальних закладів, студентів педагогічних вищих навчальних закладів.

УДК 373.5.016:51(075.8)
ББК 74.262я73

ISBN 978-966-643-061-1

© Л. О. Сморжевський,
Ю. Л. Сморжевський, 2010

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В умовах реформування системи освіти, відтворення і зміцнення інтелектуального потенціалу нації, виходу вітчизняної науки і техніки, економіки і виробництва на освітній рівень, інтеграції в світову систему освіти, переходу до ринкових відносин і конкуренції будь-якої продукції, в тому числі й інтелектуальної, особливо актуальним стає забезпечення належного рівня математичної підготовки підростаючого покоління.

Аналіз сучасного стану системи освіти в Україні говорить про актуальність та необхідність створення єдиного простору для інформаційно-педагогічного забезпечення освітян всім необхідним для проведення занять з використанням ілюстративного і наочного матеріалу.

Використання наочності у процесі навчання сприяє розумовому розвитку учнів, допомагає виявити зв'язок між науковими знаннями і життєвою практикою, полегшує процес засвоєння і сприяє розвитку інтересу до знань, стимулює розвиток мотиваційної сфери учнів.

Застосування принципу наочності є однією з необхідних умов успішного навчання учнів. Унаочнення підвищує ефективність уроку, допомагає подолати формалізм у навчанні, пожвавлює навчальний процес, збуджує ініціативу та мислення учнів, привчає їх до аналізу та узагальнення.

Уміле використання різноманітної наочності у процесі навчання сприяє розвитку самостійності, активності, творчої пізнавальної діяльності учнів, що значною мірою забезпечує підготовку їх до самостійної практичної роботи.

Незважаючи на наявність досить значної кількості публікацій, методичних рекомендацій, в яких висвітлюється проблема використання наочності під час вивчення тієї чи іншої теми, необхідно зазначити, що на сьогоднішній день не існує посібника, який розкривав би методику використання різних видів наочності на уроках алгебри і геометрії в основній школі. Даний посібник має на меті усунути цю проблему.

Посібник орієнтований на програму з математики для 11-річної школи.

Розроблена методика допоможе вчителям ефективно використовувати різні види наочності на уроках алгебри і геометрії основної школи та створити необхідний комплект засобів наочності для впровадження у навчально-виховний процес.

Посібник складається з трьох розділів. У першому розділі розглянуто роль та значення наочності при вивченні шкільного курсу математики, виділено основні види наочних посібників, дано їм характеристику, розкрито роль комп'ютера і педагогічних програмних засобів до нього для інтенсифікації навчально-виховного процесу на уроках алгебри і геометрії основної школи.

У другому розділі розкрито методику використання наочності на уроках алгебри в 7–9 класах.

У третьому розділі дано методику використання наочності на уроках геометрії основної школи.

1. НАОЧНІСТЬ У НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ ЯК ПРИНЦИП ДИДАКТИКИ

1.1. Роль та значення наочності при вивченні шкільного курсу математики

Як відомо, перед вчителем математики стоїть завдання не лише дати учням міцні знання і навички з основних наук, а й розвинути їх мислення, зацікавити вивченням математики, активізувати їх пізнавальну діяльність, привчити працювати самостійно, щоб, закінчивши школу, вони могли самостійно підвищувати свою кваліфікацію в майбутній трудовій діяльності.

У зв'язку з цим сучасна педагогіка та психологія математики спрямовують свої зусилля на те, щоб виявити можливості учня, розширити і максимально використати їх для розвитку особистості.

Успіх у досягненні поставленої мети визначається не лише вдосконаленням змісту шкільного курсу математики, а й вдосконаленням форм, методів і засобів навчання, впровадженням таких методів навчання, які активізують пізнавальну активність учнів.

Тому не випадково в останні десятиріччя постійне вдосконалення методів, засобів і форм організації навчання математики, насамперед відшукання шляхів підвищення ефективності уроку з математики, стало предметом особливої уваги з боку школи, вчителя, педагогічної та психологічної науки.

Ефективним, на нашу думку, слід вважати такий урок математики, побудова і проведення якого максимально сприяють досягненню поставлених перед уроком цілей. Ефективно проведений урок дає можливість вчителю досягти оптимальних результатів навчання.

Завдання підвищення ефективності уроків з математики вимагає від учителя вміння володіти методами, засобами і формами навчання, як традиційними, виробленими віковим досвідом вчителів і методистів, так і тими, які виникли і ввійшли в шкільну практику відносно недавно. Уміле володіння арсеналом педагогічного досвіду дасть можливість творчо використовувати існуючі шляхи підвищення ефективності уроків з математики, принципи дидактики, зокрема, принцип наочності.

Зауважимо, що наочність є важливим компонентом активізації пізнавальної і навчальної діяльності учнів. Ще античні греки зазначали, що наочність сприяє кращому запам'ятовуванню інформації і швидшому її відтворенню. Наочність допомагає сконцентрувати увагу учнів на головному, конкретному, що дає позитивні результати при перевірці знань. Також, говорячи про увагу, можна сказати, що використання наочності на уроках в школі сприяє виробленню в людини звички відшукувати головне в матеріалі, сприяє більш точній концентрації уваги на конкретній інформації.

Принцип наочності випливає із суті процесу сприймання, осмислення і узагальнення учнями матеріалу, що вивчається. Цей принцип означає, що в навчанні необхідно, приймаючи до уваги логіку процесу засвоєння знань, на кожному етапі навчання знайти його вихідний початок у фактах і спостереженнях одиничного або в аксіомах, наукових поняттях і теоріях, після чого визначити закономірний підхід від сприймання одиничного, конкретного предмета до загального, абстрактного або навпаки — від загального, абстрактного до одиничного, конкретного [18, с. 28].

Коріння принципу наочності знаходимо в народній педагогіці [15, с. 97–98], підтвердженням чого є такі вислови: «Краще раз побачити, ніж сто разів почути», «Приклад кращий за правило» та ін.

Однак, наукове обґрунтування принципу наочності, а точніше, спроба його формулювання належить основоположнику наукової педагогіки, великому чеському педагогу Я. А. Коменському. Цей принцип він сформулював у вигляді правила, яке ним же було назване золотим, а пізніше стало відоме як «золоте правило дидактики»:

«Тому нехай буде для учнів золотим правилом: усе, що тільки можна, пропонувати для сприймання відчуттями, а саме: видиме — для сприймання зором, чутне — слухом, запахи — нюхом, що підлягає смаку — смаком, доступне дотику — дотиком. Якщо які-небудь предмети відразу можна сприйняти декількома відчуттями, нехай вони відразу охоплюються декількома відчуттями» [12, с. 303].

Я. А. Коменський міркував так: у навчанні необхідно, наскільки це можливо, предмети, що вивчаються, представляти безпосередньому спостереженню учнів, учити учнів за самими предметами, а не з книжок про ці предмети. Саме цю думку він заклав у «золоте правило» дидактики. Він вимагав, щоб вправи для відчуттів були визнані необхідними для вправ розумових. Крім того, «потрібно у навчанні справу поставити так, щоб не ми говорили учням, а самі предмети, щоб учні могли торкатися їх або їх замінників, розглядати, слухати» [12, с. 247].

Певний внесок у проблему наочності зробив Ж. Ж. Руссо [23, с. 401]. На його думку, перший розум дитини — це чуттевий розум, відсутність власного спостереження й досвіду спричиняють дуже велику шкоду розумовому розвиткові дитини.

Однак, корінні зміни у трактуванні принципу наочності, в утвердженні його як власне принципу, належить саме Й. Г. Песталоцці.

Він у свій час зазначав: «... я утвердив вищу основу навчання у визнанні наочності як абсолютного фундаменту всякого пізнання» [11, с. 525], на що видатний російський педагог П. Ф. Каптєрєв зробив таке зауваження: «Напевне, дивно, як це Песталоцці приписує собі заслуги утвердження такого принципу, про який вже давно йшла мова в педагогіці, який розроблявся вже не одне століття і мав свою літературу. Проте слова Песталоцці справедливі» [11, с. 525].

З усього видно, що найбільша заслуга в утвердженні в педагогіці принципу наочності належить саме Й. Г. Песталоцці.

Й. Г. Песталоцці вважав, що характерна риса людської природи полягає у самодіяльності, у вільному розкритті всіх сил за власними внутрішніми законами, а не під тиском зовнішніх причин, а тому «...всі освітні засоби, як більш чи менш штучні, не повинні відхилятися від природного ходу розвитку людських здібностей чи протидіяти йому, а бути узгоджені з образом дій, якого дотримується сама природа» [24]. Усе навчання, на його думку, є не що інше, як мистецтво допомагати природному прагненню людини до розвитку, що засновується на гармонії вражень, засвоюваних дитиною, зі ступенем розвитку її сил. Саме тому будь-яке знання повинно виходити зі спостережень і до них повертатися.

Й. Г. Песталоцці рішуче заявляв, що визнає «наочність абсолютною основою пізнання», що «наочність є безумовна основа всякого знання» [24, с. 69].

«Немає живого, істинного пізнання, яке б не виходило із безпосередньо чуттєвого сприйняття або не зводилося б до нього. Тому будь-яке елементарне навчання повинно не тільки на кінець бути пов'язаним з чуттєвими сприйманнями, а починатися з них і виходити з них» [24, с. 56].

Отже, наочність у розумінні Й. Г. Песталоцці — це не тільки і не стільки забезпечення чуттєвого сприйняття предмета вивчення, це коли людина володіє певними чуттєвими елементами знань і використовує ці елементи для обстеження, для орієнтування, тобто зводить складне до сукупності простих елементів. Він пише: «Утвердження в дитини простого спостереження як необхідної основи будь-якого досвідного знання і піднесення згодом спостереження до ступеня мистецтва, тобто до ступеня засобу, являє собою предмет спостереження як об'єкта критичної здібності і штучно виробленої вправності та становить завдання й суть наочності» [241, с. 368].

Й. Г. Песталоцці підкреслював, що необхідно розрізняти спостереження як вихідний пункт навчання (власне відчуття) і мистецтво спостереження як вчення про відношення всіх форм. Очевидно, справу він розумів так, що навчання має йти в тому напрямі, в якому розвиток дитячої спостережливості йде від простого спостереження до ступеня мистецтва спостереження, тобто до оцінки відношення всіх форм спостережуваного об'єкта.

Вагомий внесок у розвиток його положень, їх пропаганду зробив видатний німецький педагог А. Дістервег [3].

А. Дістервег не тільки пропагував, упроваджував у шкільну практику принципи навчання Й. Г. Песталоцці, а й сам розвинув і поглибив ідеї Й. Г. Песталоцці в теорії педагогіки взагалі і в розумінні принципу наочності зокрема. Наочність він вважав основою природовідповідного навчання, надаючи великого значення ознайомленню дітей з предметами, безпосередньо доступними їх органам чуття. А. Дістервег, однак, не обмежувався тільки предметною наочністю, а допускав різноманітні її форми. У тих випадках, де неможливе безпосереднє ознайомлення з самим предметом, він пропонував звертатися до зображень на картинах, до спогадів про пережите дітьми за межами школи, до порівняння, аналогій та інших засобів [3, с. 24].

Наочність він розглядав як найважливішу умову елементарної освіти, за якою у предметі, що вивчається, виділяються найбільш зрозумілі і конкретні для дитини елементи, доступні її спостереженню або пов'язані з її попередніми знаннями [3, с. 310].

Принцип наочності знаходить, як вважає А. Дістервег [3, с. 47], своє конкретне вираження у правилах: 1) від близького до далекого; 2) від простого до складного; 3) від відомого до невідомого.

У літературі зустрічається твердження, що наочний — це такий, якому можна дати геометричний чи механічний образ. Це правильно, але частково. Річ у тому, що слово «наочний» у звичайному, побутовому значенні означає такий, якого можна побачити, тобто одержати зорове сприймання. Однак, слово «наочний» вживається у педагогіці не тільки у цьому значенні. Ми, згідно з Й. Г. Песталоцці, наочним розуміємо такий образ, коли у складному об'єкті можемо виокремити, виділити прості елементи, кожен з яких для нас є певним первинним чуттєвим образом. Тоді предмет ми розглядаємо як певну сукупність цих чуттєвих елементів.

Зробити процес навчання наочним (отже і зрозумілим) означає підвести невідоме під відоме.

Зрозуміло, що при істинному, наочному навчанні, тобто коли воно відбувається на основі вивчення реального предмета, учень сам або спільно з учителем формулює запитання ніби до предмета, бо тільки предмет може дати відповідь на це запитання, до того ж таких запитань, як правило, декілька. Але відомо, що кожен предмет виявляє свої властивості тільки у взаємодії з іншими предметами. Тому учень реально розглядає взаємодію об'єктів вивчення з іншими об'єктами і, одержуючи відповіді на поставлені запитання, синтезує їх і створює уявлення про даний об'єкт.

У ході такої взаємодії, руху, механічної і розумової дії учень бачить предмет у прямому і переносному значеннях з різних точок зору, у динаміці, переміщує, змінює його положення у просторі, рухається сам і т.д. Тому навчання за участю реальних предметів вивчення не тільки багатше з погляду отриманої інформації, а й багатше на почуття, емоції, на відчуття часу і простору.

На посиленні наочності у навчанні математики наполягав і видатний математик і педагог М. В. Остроградський [22]. Про це свідчать спогади його учнів і колег, а також аналіз його педагогічних творів. У роботі «Міркування про викладання» М. В. Остроградський наголошує: «Одних очей мало для того, щоб зберегти предмети в пам'яті, необхідно ще, якщо це можливо, використати дотик. Коли дитина виліпить букви з горщикової глини, хай вона дасть їм підсохнути і потім повторить те, що вона зробила два-три рази за допомогою моделі або за своїми першими спробами, і тоді можна бути впевненим, що спогад про ці предмети збережеться назавжди в її пам'яті. Тільки цим єдиним способом можна спростити вивчення геометричних фігур, вивчення географії і космографії, описової геометрії, фізики і механіки» [22, с. 147].

Російський педагог К. Д. Ушинський зазначав, що наочність відповідає психологічним особливостям дітей, які мислять формами, звуками, фарбами, відчуттями. Наочне навчання, за словами К. Д. Ушинського, будується не на абстрагованих уявленнях і словах, а на конкретних образах, безпосередньо сприйнятих дитиною. Наочність збагачує коло уявлень дитини, робить навчання доступнішим, конкретним і цікавим, розвиває спостережливість і мислення [32].

Визначний український педагог В. О. Сухомлинський говорив: «Образотворчий засіб наочності, навіть якщо він точно передає форму, колір та інші особливості засобу натурального, завжди є узагальненням. І завдання педагога полягає в тому, щоб поступово переходити до все складніших узагальнень при застосуванні образотворчих засобів наочності. Особливо важливо навчити дітей розуміти символічні зображення — замальовки, схеми. Вони відіграють дуже велику роль у розвитку абстрактного мислення. В зв'язку з цим я хотів би висловити побажання відносно використання класної дошки.

Класна дошка існує не тільки для того, щоб писати на ній, але й для того, щоб учитель робив замальовки, схеми, креслення — в процесі розповіді, пояснення, лекції. Викладаючи історію, ботаніку, зоологію, фізику, географію, математику, я майже на всіх уроках (приблизно на 80 уроках історії, на 90 уроках ботаніки, зоології і географії, на 100 уроках фізики і математики) використовував дошку і кольорову крейду. Без цього, на мій погляд, неможливо уявити процес розвитку абстрактного мислення. Образотворчу наочність я розглядаю не тільки як засіб конкретизації уявлень і понять, але і як засіб виходу із світу уявлень у світ абстрактної думки» [29, с. 113–114].

Про роль наочності в навчанні математики говорить і відомий методист М. В. Метельський: «В навчанні, як і в науковому пізнанні, головну роль відіграє мислення, однак не можна обійтись і без чуттєвого пізнання. Дидактичний принцип наочності в навчанні математики особливо важливий вже хоча б тому, що тут приходиться мати справу з просторовими формами і кількісними відношеннями реального світу. Крім того, високий рівень математичних абстракцій успішніше засвоюється учнем, якщо він при цьому користується їх матеріальними інтерпретаціями, реальними моделями. На основі відчуттів в учнів утворюється сприймання реальних об'єктів, формуються образні уявлення, абстрактні математичні поняття, краще засвоюються абстрактні математичні відношення і залежності» [17, с. 237].

Найбільша потреба в наочності — на початковому етапі навчання, і по мірі переходу в старші класи ця потреба зменшується, та й сама наочність стає більш складною, приймає нові форми.

Які види наочності, на яких етапах уроку їх доцільно застосовувати, щоб це було раціонально і природно, щоб вивчення математики як науки, яка спирається на логіку висловлень, не відштовхувало учня, а сприяло свідомому засвоєнню навчального матеріалу та розвитку логічного та абстрактного видів мислення, хвилює багатьох методистів, педагогів.

Так, наприклад, Л. Красуля [14] описує один із основних шляхів підвищення ефективності уроків математики, а саме використання наочності. Щоб учні правильно зрозуміли та засвоїли нове математичне поняття, його треба, по можливості, проілюструвати.

Наприклад, автор вважає, що дітям важко уявити пряму лінію, яка не має ширини, точку, яка не має розмірів. Для усвідомлення цих понять рекомендується підготувати відповідні наочні посібники:

1) аркуш паперу, пофарбований у два кольори з чіткої межею. Учням пропонується виміряти довжину, а потім ширину межі. Школярі переконуються в неможливості другого вимірювання, хоч чітко бачать лінію;

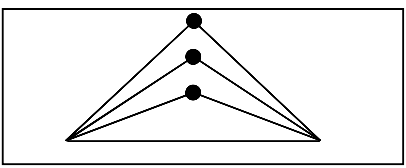
2) аркуш паперу, пофарбований у чотири кольори, тоді чітко видно точку перетину двох ліній [14, с. 7].

У роботі [14] також зазначено про те, що результати вивчення математики будуть кращими, якщо учні не лише бачитимуть моделі, братимуть їх у руки, а й виготовлятимуть деякі з них. Автор вважає, що наочність допомагає закріпити в пам'яті учнів певні математичні факти та об'єкти, бо чим краще початкове зорове сприймання, тим надовше воно запам'ятовується. Безпосереднє ознайомлення з різними геометричними образами, що зустрічаються в задачах, допомагає учням надалі правильно відтворювати їх в уяві, творчо використовуючи запам'ятовані деталі. Саме тому розв'язування задач із застосуваннями наочності активно розвиває просторову уяву учнів і створює реальні передумови для швидкого переходу до розв'язування задач без використання наочності.

Перехід до розв'язування задач з використанням малюнка, як основного виду наочності під час вивчення геометрії, повинен здійснюватися поступово. Робити це потрібно, за рекомендаціями Л. Красулі, тоді, коли основна маса учнів починає розв'язувати задачі, що супроводжуються як малюнком, так і моделлю.

У процесі вивчення математики потрібно частіше користуватися моделями, які не тільки підводять учнів до самостійного формулювання ними означень, теорем, а й допомагають спростувати неправильні уявлення, довести деякі твердження [13].

Так, у 7-му класі, коли учні починають вивчати геометрію, часто виникають проблеми із «впізнанням» відповідного об'єкта, тому варто застосовувати таку модель. Це планшет із цупкого картону, на який набито кілька невеличких цвяхів. Натягуючи на цвяхи різнокольорові гумові нитки, можна моделювати різні рівнобедрені трикутники — з гострими, прямими та тупими кутами при вершині (*мал. 1*).



Мал. 1

Вітчизняний психолог П. Л. М'ясоїд [20] наголошує, що, використовуючи наочність протягом уроку, вчитель тим самим покращує пам'ять учнів.

Осмисленість і міцність запам'ятовування підвищується, якщо логічна робота над матеріалом спирається на образні зв'язки. Так, при складанні плану матеріалу, який треба запам'ятати, дуже корисним є використання чуттєвої опори у вигляді просторових зорових схем, графічних моделей, що відображають структуру запам'ятовуваної системи понять [25, с. 49].

Схема може мати різну наочну форму, але чим більший обсяг матеріалу вона охоплює і чим простіша за своєю побудовою, тим ефективніша вона як спосіб запам'ятовування [25, с. 51].

Отже, використання наочності в навчальному процесі допомагає розвивати такі психічні явища як увагу, пам'ять, сприймання тощо.

Проблемі використання наочних посібників у процесі розв'язання задач узагалі та навчальних математичних, зокрема, присвячені роботи таких науковців, як П. М. Ерднієва [5], З. І. Слєпкань [27, 28], Г. П. Бевз [31], Н. А. Тарасенкової [30] та ін.

П. М. Ерднієв [5] наголошує на використанні граф-схем при доведенні теорем, за допомогою яких можна добитися короткого і чіткого доведення, коли кожна стрілка (перехід від рядка до рядка) характеризує силогізм [5, с. 61]; використання граф-схем в записі робить виведення формули зримим, а тому більш наочним і переконливим [5, с. 62].

Уміле використання комплексу графічних образів в ролі єдиного завдання збільшує певним чином пропускну здатність мозку, збільшує протікання на цій основі складних логічних міркувань. Пояснення цьому можна знайти хоча б в тому, що зорові канали переробки інформації в 100 разів сильніші слухових. Працюючи над системою задач, розташованих в таблиці, учень усвідомлює динаміку явищ і повноту уявлень [5, с. 163].

З. І. Слєпкань [28] говорить, що реалізація дидактичного принципу наочності при формуванні понять — необхідна умова, яка забезпечує ефективність навчання. Психологічний аналіз ролі наочності в навчанні підкреслює, що «при розумінні процесу учіння як аналітико-синтетичної діяльності під наочністю слід розуміти діяльність учня по відношенню до конкретних предметів і явищ. Це той практичний, реальний аналіз, який зображає перший ступінь пізнавальної діяльності і в цьому розумінні передує розумовому аналізу і синтезу, здійснюваному в словесному плані» [28, с. 47].

Наочність сприяє утворенню чітких і точних образів сприймання і представлення, полегшує учням перехід від сприймання конкретних предметів до сприймання абстрактних понять шляхом виділення і словесного закріплення схожих загальних суттєвих ознак предметів.

Для ефективного використання наочності важливо детально відбирати її, враховувати, який вид наочності найбільш оптимальний, яку функцію він повинен виконувати. Зокрема, треба визначити, чи буде використана наочність при введенні нового поняття, при розв'язуванні задач чи при проведенні практичної роботи. Важливо навчити учнів сприймати засоби наочності (вказуючи на те, що в даному матеріалі треба виділити, порівняти, уявно перетворити). Це сприяє усвідомленню сприймання, активізує мислення, підвищує пізнавальний інтерес учнів [28, с. 48].

Г. П. Бевз [31] вважає, що у підвищенні ефективності уроків з математики провідне місце займає раціональне використання наочних посібників та технічних засобів навчання. Проаналізувавши дане твердження, можна сказати, що справжнього успіху досягають ті вчителі, які використовують наочні посібники та технічні засоби навчання в комплексі і лише тоді, коли вони справді сприяють розумінню учнями програмного матеріалу, коли заощаджують час та полегшують роботу [31, с. 47].

Н. А. Тарасенкова досліджує знаково-символічні засоби (таблиці, схеми, діаграми, графіки, малюнки, реальні предмети, макети, конструкції) як способи унаочнення, які спроможні вивести учнів на досить високий рівень самостійності у процесі навчання математики в основній школі [30].

Правильне використання принципу наочності в навчанні математики повинно забезпечити своєчасний перехід від живого споглядання до абстрактного мислення. Не можна обминути перший етап, етап живого споглядання, оскільки без нього неможливий розвиток абстрактного мислення; але разом з тим неправильним, навіть шкідливим, було б надто довго затримуватись на цьому етапі, бо без своєчасного розвитку елементів абстрактного мислення неможливе глибоке і міцне оволодіння основами будь-якої науки, а особливо — математики [2, с. 5–6].

Під час наочного вивчення математичних понять легко розкриваються їх суттєві (основні) властивості, відкидаються випадкові. Основні властивості понять узагальнюються і звідси вже робляться висновки, розкриваються закони дійсності.

Узагальнююче усвідомлення математичних об'єктів формується в результаті розкриття в них суттєвих зв'язків і відношень в процесі використання наочності. Тобто, якщо відповідним чином добиратимуться об'єкти для їх наочного вивчення, то це створюватиме винятково сприятливі умови для утворення системи понять.

Отже, мислення формується в учнів на основі наочних уявлень реальних об'єктів. Зримий цілісний образ є гарантією правильного аналізу і наступного синтезу.

Від аналізу об'єктів, що знаходяться перед очима, дитина легко переходить до аналізу уявлень.

Тільки за умови зв'язку наших розумових процесів і їх джерел, в їх найбільш простих і елементарних формах з наочністю (сприйманням реальної дійсності) наше мислення дійсно відображає закономірності зовнішнього світу.

Наочність є основою судження, а значить, і цілого ряду більш складних форм мислення: умовисновків, індукції, дедукції, які також випливають із наочного сприймання зовнішнього світу.

Всі колосальні можливості корекції, які закладені в наочності, можуть бути розкритими тільки грамотним педагогом, тільки педагогом, який свідомо йде до поставленої ним мети — формування мислення своїх учнів на базі математики. Педагог має знати систему предмета, тобто знати факти, мати їх значний запас, знати систему потрібних узагальнень і висновків, знати психологію мислення учнів, розуміти окремі форми, причому педагог весь час повинен пам'ятати, що наочність не самоціль, а засіб розвитку учнів.

Велику роль відіграє унаочнення в процесі формування в учнів математичних понять. Наприклад, вивчаючи в курсі геометрії 8 класу чотирикутники і їх види (паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапецію), вчитель демонструє учням моделі цих чотирикутників. В результаті споглядання їх в учнів створюються певні образи, які потім за допомогою аналізу і синтезу переростають у відповідні поняття і стають надалі об'єктом розумової діяльності учнів, спрямованої на розкриття тих або інших закономірностей реальної дійсності.

Важлива роль належить унаочненню при підведенні учнів до «перевідкриття» того чи іншого математичного твердження, яке має бути доведене. Роботу вчитель направляє так, що в учня виникає певна догадка відносно закономірності, яка має бути встановлена; так виникає своєрідна гіпотеза, яка потім за допомогою міркувань або буде остаточно встановлена і перетворена в реальний факт, або буде спростована, якщо вона не відповідає реальній дійсності. При такому підході значно підвищується активність учнів, їх інтерес до навчання, а набуті знання стають більш свідомими, міцними і глибокими.

Наприклад, вивчаючи в курсі алгебри 8 класу теорему Вієта, вчитель спочатку вивішує на дошці таблицю або проектує кодоплівку, на яких записано 3–4 зведених квадратних рівняння, їх корені, сума і добуток коренів. Порівнюючи суму і добуток коренів з другим коефіцієнтом і вільним членом даних рівнянь, учні помічають, що сума коренів дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток — вільному члену. Тепер учні формулюють гіпотезу (теорему Вієта), яку доводять з допомогою вчителя.

Наочні посібники часто допомагають підвести учнів до самостійного формулювання ними означень. Наприклад, вчитель демонструє на дошку кодоплівку, на якій побудовано гострокутний і тупокутний трикутники і в кожному проведена висота. Аналізуючи дані малюнки, учні помічають, що в першому випадку висота — це перпендикуляр, проведений з вершини трикутника на протилежну сторону, а в другому — це перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону. Узагальнюючи ці випадки, учні самостійно формулюють означення висоти трикутника.

Наочні посібники використовують також для створення проблемних ситуацій. Вчитель показує учням три набори, кожен з яких складається з трьох планок (у першому наборі сума довжин двох планок більша за довжину третьої планки, у другому — рівна, у третьому — менша) і пропонує з цих планок скласти три трикутники. Учні переконуються, що в другому і третьому випадках цього зробити не можна. Виникає проблемна ситуація. Проаналізувавши залежності між довжинами планок, учні приходять до нерівності трикутника.

Наочні посібники корисно використовувати для закріплення набутих знань. Після того, як була сформульована і доведена теорема синусів, вчитель вивішує таблицю «Теорема синусів» і пропонує учням відтворити формулювання і доведення теореми. На наступному уроці цю ж таблицю можна використати для перевірки засвоєння учнями даної теореми.

Наочні посібники використовують також для спростування неправильних уявлень. При вивченні квадратичної функції учні часто уявляють, що вітки параболи завжди направлені вгору. Продемонструвавши учням таблицю з графіками квадратичних функцій, вчитель показує їм, що вітки можуть бути направлені і вниз.

Розв'язування задач з використанням наочних посібників активно розвиває просторову уяву учнів і створює реальні передумови для швидкого переходу до розв'язання задач без використання наочності. Такою наочністю частіше є малюнки, особливо це стосується геометричних задач.

Є. М. Кабанова-Меллер [10] досліджувала роль малюнка в процесі вивчення геометрії. Вона прийшла до висновку, що засвоєння поняття за єдиним малюнком може привести до деякої «зв'язаності». Коли учень в образі не розчленував істотні і неістотні ознаки, то образ перестає бути носієм поняття. Щоб образ став носієм поняття, треба, щоб учень вичленив у ньому істотні ознаки. Велике значення має варіювання істотних ознак з неістотними при користуванні образом. Автор у посібнику обґрунтовує доцільність вироблення методики створення опорних образів, на які учні зможуть опиратися в процесі застосування понять і теорем.

Очевидно, що значення і особливості використання наочних посібників на різних ступенях навчання математики не можуть залишатися незмінними. З підвищенням рівня загального розумового розвитку учнів легше і швидше відбувається перехід від живого споглядання до абстрактного мислення.

Чим молодший вік дитини, тим конкретніше її мислення, тим більше воно потребує опори в конкретних наочних образах. Так, наприклад, дитина дошкільного і молодшого шкільного віку легко уявляє собі три яблука, три кубики або грибки, але уявити число три без речей, яких воно стосується, для неї дуже важко.

При використанні наочних посібників ефективність буде тим вищою, чим більше число органів чуття буде залучено до їх «споглядання». Учень повинен не лише споглядати в справжньому розумінні цього слова, а й безпосередньо діяти: вирізувати, міряти, клеїти, ліпити тощо. Лише тоді він матиме можливість розкрити всі сторони і залежності спостережуваного об’єкта [2, с. 7–8].

Починаючи навчати того чи іншого питання курсу математики, вчитель насамперед повинен з’ясувати, чи є в уяві учнів потрібні чіткі і яскраві наочні образи. Якщо таких немає, то їх спочатку треба створити, бо інакше знання, набуті учнями, будуть формальними, а отже і безплідними.

У міру розвитку просторової уяви учнів зменшується роль унаочнення за допомогою моделей. Учень дедалі більше звертається до малюнка. Цей перехід від моделі до малюнка також не настає раптово, а деякий час іде паралельно [2, с. 8].

Наочні посібники сприяють утворенню найбільш яскравої і правильної уяви предметів та явищ. Використання комп’ютерів підвищує інтерес учнів до знань і робить процес засвоєння знань більш легким. Заняття, на яких демонструються мультимедійні картинки, ілюстрації, фотографії, колекції, виконані у віртуальному вигляді комп’ютерних програм, як правило, проходять при підвищеній зацікавленості й увазі всіх учнів. Багато положень, на перший погляд важких, при вдалому використанні засобів комп’ютерної техніки стають доступними і зрозумілими. Однак, щоб не перевантажувати заняття демонстраційними матеріалами, вчитель у кожному окремому випадку повинен самостійно вирішувати, коли і скільки використовувати засоби комп’ютерної наочності у процесі навчання.

Комп'ютер надає цікаві можливості на уроках з математики. Кожен етап у процесі навчання — подання нового матеріалу, формування, закріплення та перевірка знань, умінь, навичок учнів — може бути здійснений досить ефективно завдяки раціональному застосуванню технічних засобів.

М. І. Жалдак [7] переконливо демонструє можливості комп'ютерної підтримки процесів навчання різних навчальних предметів та перетворення на основі комп'ютерних програм розглянутого типу такого предмета, як математика, який традиційно вважається важкодоступним і складним, в «математику для всіх», а розв'язування задач настільки ж доступним і привабливим, як і «просте розглядання малюнків і графічних зображень».

У роботі В. П. Дьяконова [4] описано новий науковий і прикладний напрямок, який виник на межі математики та інформатики — комп'ютерна математика. В цій книзі приводиться опис теорії і застосування ряду найновіших масових систем комп'ютерної математики Excel, Derive, MuPAD, Mathcad, Mathematica, Maple V и MATLAB. Це полегшує оптимальний вибір систем і їх інтеграцію з метою ефективного розв'язання різних задач. Тисячі простих і зрозумілих прикладів роблять цю книгу цінним практичним посібником і самоучителем з систем комп'ютерної математики.

Отже, принцип наочності є одним із важливих у навчальному процесі. Багато педагогів відзначають високу ефективність застосування засобів наочності для поглиблення інтересу учнів до навчальної, пізнавальної діяльності, для формування в них відповідних знань, умінь, навичок у сприйнятті й осмисленні оточуючого світу.

На думку досвідчених психологів ([8], [9], [25], [26]) вища форма пізнання людиною дійсності — це абстрактне пізнання, що відбувається за участю процесів мислення та уваги. Тому дуже важливо розвивати механізми психічного відображення. Унаочнюючи навчальний матеріал, мимовільно ми створюємо середовище для діяльності пізнавальної функції психіки учня.

Наочність застосовується і як засіб пізнання нового, і для ілюстрації думок, і для розвитку спостережливості, і для кращого усвідомлення та запам'ятовування матеріалу.

Стосовно значення принципу наочності і його ролі в процесі навчального пізнання дидактика стверджує, що наочність є вихідним моментом навчання.

1.2. Види наочних посібників, їх характеристика

Відомо, що вихідним моментом у пізнанні є споглядання. Від живого споглядання до абстрактного мислення, а від нього до практики — такий діалектичних шлях пізнання реальної дійсності. Отже, для здійснення живого споглядання вчитель повинен потурбуватись про наочні посібники.

Наочними посібниками називають ті речі, моделі, малюнки, таблиці, схеми, які показують учням у процесі навчання для того, щоб вони успішно засвоїли навчальний матеріал.

У процесі навчання математики найчастіше використовують такі наочні посібники: 1) натуральну наочність, яка представляє собою реальні предмети, що зустрічаються в природі, побуті, техніці; 2) моделі, прилади та інструменти; 3) схематичні малюнки, графіки, таблиці, діаграми [19].

Часто найкращим наочним посібником є справжня річ. Наприклад, розглядаючи в курсі геометрії 7 класу трикутник як жорстку фігуру, слід показати учням під час екскурсії використання жорсткості трикутника на практиці: при побудові підйомних кранів, різних архітектурних споруд, мостів. Вивчаючи тему «Прямокутник» у курсі геометрії 8 класу, доцільно наводити приклади прямокутників з оточуючого середовища: стіни, стеля і підлога класної кімнати, кришка стола, вікно, аркуш зошита, підручника тощо.

Використання натуральної наочності на уроках математики переконує учнів у тому, що математика вивчає просторові форми і кількісні відношення реального світу.

Але іноді модель реального предмета краща, ніж сам предмет. Наприклад, для порівняння раціональних чисел, вивчення дій над ними зручно використовувати модель термометра з рухомою стрічкою, а справжній термометр для цього не придатний.

Моделями називають виготовлені з дерева, картону, дроту, скла предмети, які є об'єктами певного математичного поняття. Наприклад, переносну координатну дошку зручно використовувати при вивченні функцій і побудові їх графіків. На уроках геометрії доцільно використовувати набори шарнірних моделей кута, трикутника і чотирикутника, моделі різноманітних трикутників і чотирикутників, виготовлених з картону, дроту.

Наочними посібниками є також різні прилади і інструменти. Якщо вчитель вперше показує транспортир і пояснює, як ним вимірювати кути, то він у цьому випадку є наочним посібником, а пізніше учні ним користуються як вимірювальним приладом. Такими приладами і інструментами на уроках геометрії є: лінійка, складний метр, рулетка, польовий циркуль, штангенциркуль, мікрометр (для вимірювання довжин відрізків), транспортир, астролябія, теодоліт (для вимірювання кутів, побудови кіл і дуг), палетка (для вимірювання площ). При вивченні відповідного матеріалу слід демонструвати і пояснювати, як ними користуватися.

На уроках математики серед усіх наочних посібників найчастіше використовуються малюнки. При виведенні формул, доведенні теорем, розв'язуванні задач доводиться будувати графіки, схеми, діаграми, різні геометричні фігури. До малюнка ставляться певні вимоги. Він повинен бути правильним, наочним і простим у виконанні [1].

Правильним вважається малюнок, який є однією з проекцій зображуваної фігури, відповідає розглядуваній задачі чи теоремі. Малюнок вважається наочним, якщо він викликає таке ж сприймання форми фігури, як і при безпосередньому розгляді її моделі.

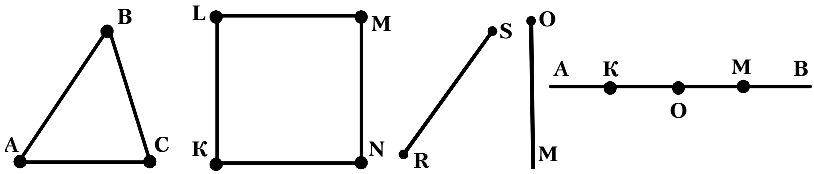
Третя вимога зводиться до того, щоб малюнок, по можливості, виконувався безпосередньо, при мінімальній кількості допоміжних побудов.

На дошці малюнки краще виконувати кольоровою крейдою, рівні відрізки позначати однаковим числом невеликих рисочок, прямі кути позначати маленькими квадратиками.

За готовим малюнком учень може розпізнати певне поняття, сформулювати теорему чи задачу, висунути гіпотезу.

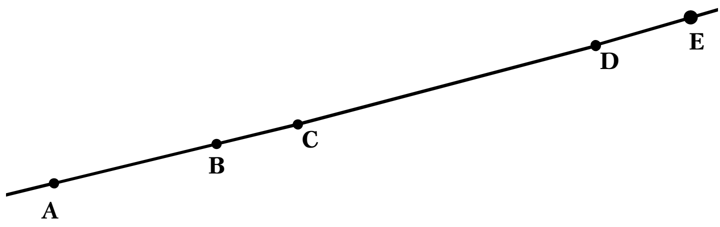
Наведемо приклади таких завдань за готовими малюнками.

1. Назвіть відрізки та промені, що зображені на *малюнку 2*.



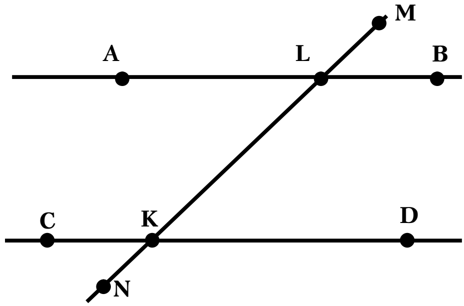
Мал. 2

2. Запишіть відрізки, зображені на *малюнку 3*.



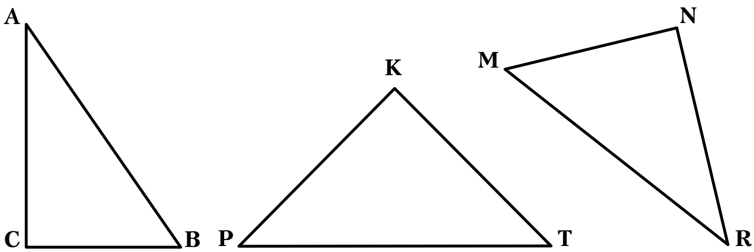
Мал. 3

3. Скільки кутів зображено на *малюнку 4*? Назвіть їх.



Мал. 4

4. Які трикутники, зображені на *малюнку 5*, є прямокутними? Як це перевірити?



Мал. 5

Корисно учням пропонувати і самостійно виконати малюнок до теореми чи задачі. Наведемо приклади таких завдань.

1. Побудуйте три різні відрізки.
2. Побудуйте геометричну фігуру, яка складається з точок прямої, але не є відрізком.

При вивченні учнями поняття «суміжні кути» доцільно запропонувати побудувати кути, в яких:

а) одна сторона спільна, а дві інші не є доповняльними променями;

б) дві сторони — доповняльні промені, а дві інші є різними;

в) одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

Одним із видів наочності при навчанні алгебри є графіки функцій. Графічне зображення функцій в курсі алгебри основної школи служить основою для встановлення їх властивостей, які потім обґрунтовуються аналітично. Знаючи графік функції $y = f\left(x\right)$, учні за допомогою геометричних перетворень будують графіки функцій $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x+n)$, $y = f(x+n) + m$.

Діаграми як вид наочності доцільно використовувати на уроках математики з метою узагальнення і систематизації знань, усвідомлення учнями взаємозв'язків між математичними поняттями. З метою ефективного використання діаграм учнів потрібно вчити розуміти суть взаємозв'язків, відображених на діаграмах. Для цього роботу з діаграмами доцільно починати з найпростіших прикладів, коли поняття, що розглядаються, добре засвоєні учнями. Поступово слід збільшувати кількість понять, що розглядаються в діаграмі, і підвищувати рівень самостійності виконання учнями завдань. При роботі з діаграмами активізується мислительна діяльність учнів.

Ефективним видом наочності при засвоєнні системи понять є класифікаційні схеми — схеми з пропущеними рядками, схеми з недостатньою або зайвою інформацією. Зацікавленість учнів викликають завдання типу:

1. Де помилка в схемі класифікації? Чому?

Трикутники

Прямокутні ← **Трикутники** → **Тупокутні**

Рівносторонні

2. Яке поняття пропущено:

Чотирикутник ⟶ **.....** ⟶ **Прямокутник?**

3. Складіть схему "Види чотирикутників".

Одним із видів наочності є таблиці. Особливостями таблиць є велика інформативність, наочність і статичність поданої інформації, що дає можливість узагальнювати знання учнів, засвоювати поняття в системі. До кожної таблиці вчитель може запропонувати систему питань, що сприяють усвідомленню учнями взаємозв'язків між поняттями.

Таблиці поділяють на: 1) довідкові; 2) ілюстративні; 3) робочі (таблиці-завдання).

Існують також комбіновані таблиці, в яких поєднуються ілюстративна і робоча таблиці.

Довідкові таблиці використовують протягом тривалого часу. Такі таблиці на уроці забезпечують економію часу під час розв'язування задач, систематизації і узагальнення вивченого матеріалу.

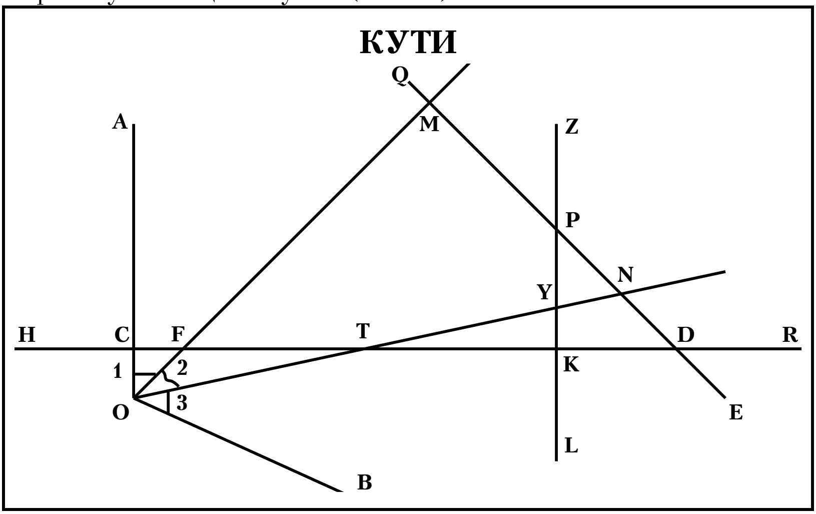
Довідкові таблиці можуть бути двох видів: таблиці, що містять матеріал, який учні повинні запам'ятати (наприклад, формули площ трикутників і чотирикутників, формули скороченого множення), і таблиці, що містять матеріал, який не призначений для запам'ятовування, але необхідний в класі при розв'язуванні задач (наприклад, прості числа першої тисячі, квадрати і куби чисел першої сотні).

Учнів потрібно навчити користуватися довідковими таблицями.

Ілюстративні таблиці використовуються вчителем під час пояснення нового матеріалу, а також для фронтальної перевірки знань учнів (наприклад, взаємне розміщення двох кіл, функціональні залежності між елементами двох множин).

Робочі таблиці — це такі таблиці, які дозволяють організовувати активну математичну діяльність учнів по засвоєнню нового теоретичного матеріалу і по його закріпленню. За допомогою робочих таблиць можна розв'язувати багато вправ по формуванню в учнів певних навичок, можна проводити опитування учнів.

Наприклад, на уроках геометрії у 7 класі можна використати робочу таблицю «Кути» (*мал. 6*).



Мал. 6

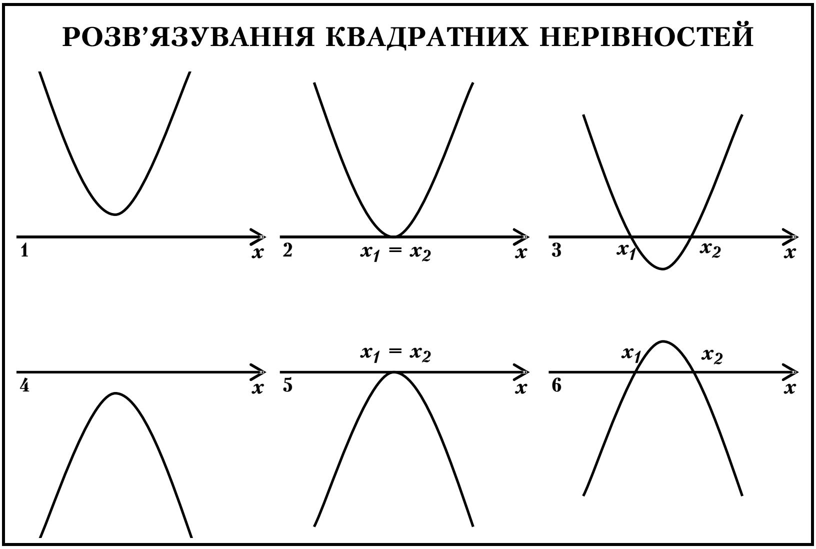
Цю робочу таблицю вчитель може використовувати і при поясненні нового матеріалу, і при опитуванні, і при закріпленні.

Наведемо деякі типи задач, які можуть бути розв'язані за допомогою цієї таблиці.

1. Знайдіть на таблиці кут **1**. Як його можна позначити трьома буквами?
2. Знайдіть на таблиці кут **MPK**. Чи можна його позначити **QPL**? **PMK**?

3. Чи перетинаються сторони кута **AOB** з прямими **QE** і **ZL**?
4. Знайдіть на таблиці гострі, прямі, тупі, розгорнуті кути.
5. Кути **1, 2** і **3** рівні. Для яких кутів на таблиці проведені бісектриси?
6. Знайдіть на таблиці перпендикулярні прямі.
7. Знайдіть на таблиці суміжні і вертикальні кути.
8. Вкажіть відстань від точки **F** до прямої **OA** і до прямої **QE**.

На уроках алгебри у 9 класі при вивченні квадратних нерівностей доцільно використати робочу таблицю «Розв'язування квадратних нерівностей» (*мал. 7*) [21, с. 19].



Мал. 7

На цій таблиці показано випадки розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис. Така таблиця дозволяє ефективно навчати учнів розв'язуванню квадратних нерівностей. Наприклад, вчитель пропонує учням розв'язати нерівність $-x^2 + x + 6 \le 0$. Запитує учнів, чи схоже розміщення параболи $y = -x^2 + x + 6$ на одне із шести, вказаних на таблиці. Оскільки $a < 0$, то учні говорять, що треба шукати серед парабол 4–6. Але оскільки $D > 0$, то тричлен $-x^2 + x + 6$ має два різних дійсних корені і тому слід вибрати параболу 6, з якої видно, що тричлен набуває недодатних значень при x, що належать об'єднанню проміжків $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$. Знайшовши корені тричлена, учні записують відповідь: $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Використання цієї таблиці створює чітке уявлення про алгоритм розв'язування квадратних нерівностей.

Можливість розв'язування багатьох задач за допомогою робочих таблиць економить час на уроці, концентрує увагу учнів, сприяє підвищенню знань з математики.

Серед технічних засобів навчання в даний час досить широко використовується кодоскоп (класна оптична дошка). За допомогою кодоскопа можна будь-який навчальний матеріал (малюнок, графік, схему, текст), нанесений на прозору плівку, спроектувати на класну дошку. Цю прозору плівку з нанесеним матеріалом називають кодопозитивом або кодоплівкою.

Кодоскоп на уроках математики дає досить чітке і відносно великих розмірів зображення, що дозволяє проектувати кодопозитив на дошку, на якому можна виконувати добудови, доповнення, записувати відповідь. Вчитель може на виготовленому кодопозитиві виконувати записи прямо на уроці. Суттєвим є те, що вчитель під час демонстрації кодопозитива весь час стоїть обличчям до класу і спостерігає за учнями, керує їх роботою.

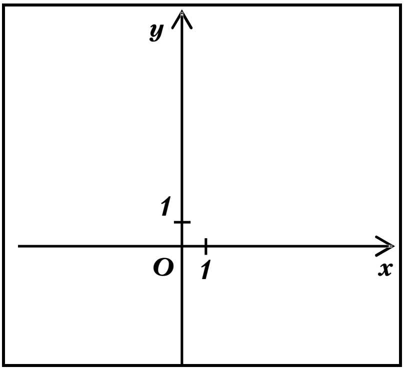
При використанні кодоскопа вчитель може накладати один кодопозитив на інший, що ілюструє динаміку у побудові геометричних фігур, графічному розв'язуванні рівнянь і систем рівнянь. Зміщення кодопозитивів доцільно використовувати при вивченні геометричних перетворень. Кодопозитиви можна використовувати на різних етапах уроку: перевірка домашнього завдання, актуалізація опорних знань учнів, пояснення і закріплення нового матеріалу.

Наприклад, пояснення нового матеріалу на уроці часто зв'язане з доведенням теореми. Для кращого засвоєння умови, доведення теореми вчителю варто заготовити кілька кодопозитивів. На першому кодопозитиві зробити запис формулювання теореми, на другому — малюнок до теореми, на третьому — допоміжні побудови на малюнку, на четвертому — запис початку доведення, на п'ятому — запис решти доведення теореми. Використовуючи ці кодопозитиви, вчитель спочатку демонструє перший кодопозитив, обговорює з учнями умову і вимогу теореми, накладає зверху другий кодопозитив і на дошці поряд із записом умови теореми з'являється малюнок до неї. Обговоривши різні можливі способи доведення теореми, вчитель пропонує виконати допоміжні побудови і накладає третій кодопозитив з нанесеними допоміжними побудовами.

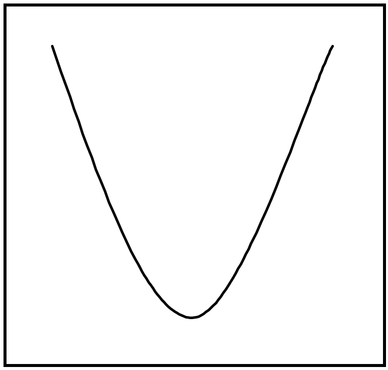
Після того, як учні запишуть в зошити умову теореми і малюнок до неї, вчитель накладає четвертий кодопозитив з початком доведення. Після обговорення цієї частини доведення теореми і перенесення її в зошити учнів, вчитель накладає п'ятий кодопозитив і обговорює з учнями другу частину доведення теореми. При необхідності вчитель може повторити все доведення, накладаючи ще раз послідовно кодопозитиви.

Розглянемо ще одну форму роботи з кодоскопом — зміщення двох чи декількох кодопозитивів відносно один одного при їх одночасному показі. Наприклад, вчитель має два кодопозитиви, на одному з яких зображена координатна площина (*кодоплівка 1*), на другому — графік функції $y = x^2$, але без осей координат (*кодоплівка 2*).

Кодоплівка 1

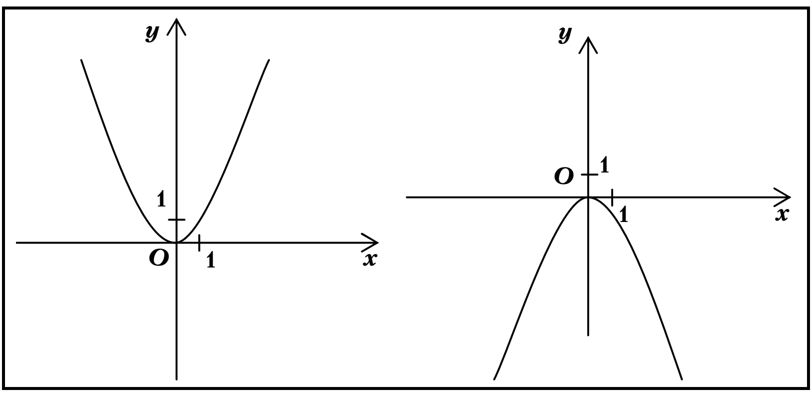


Кодоплівка 2



За допомогою цих кодопозитивів вчитель може, по-різному накладаючи один на другий (кодоплівка 3), запитувати учнів про знаки коефіцієнтів a, b і c графіка функції $y = ax^2 + bx + c$, про знак дискримінанта, про характер коренів, про координати вершини.

Кодоплівка 3



Вчитель може також ілюструвати зсуви графіків, тобто перехід від графіка функції $y = f(x)$ до графіка функції $y = f(x+n)+m$ на прикладі функції $y = x^2$. Можна також ставити учням питання типу «Як виглядає графік функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо $a < 0$, а обидва корені від'ємні?» і пропонувати їм відповісти на ці питання, рухаючи кодопозитив з параболою на предметному столику кодоскопа, а також ілюструвати розв'язання квадратних нерівностей.

Крім того, маючи ще один кодопозитив, на якому нанесена пряма, можна, по-різному накладаючи кодопозитиви з прямою і параболою на координатну сітку, ілюструвати графічне розв'язання системи рівнянь виду:

$$\begin{cases} y = x^2 + px + q, \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

Можливість зсуву кодопозитивів важлива не тільки для алгебри, але і для геометрії, розглядаючи осьову і центральну симетрію, поворот, паралельне перенесення, вимірювання площ, вектори.

При розгляді площ фігур зручно мати кодопозитив з квадратною сіткою (палетку). Побудувавши на дошці фігуру довільної форми і наклавши на неї за допомогою кодоскопа палетку, можна розповісти учням про наближене обчислення площі фігури. При цьому палетку можна зсувати, повертати, накладаючи її на фігуру в різних положеннях. Обчисливши площу даної фігури в цих положеннях, учні приходять до висновку, що площа фігури в різних випадках одна і та ж.

Отже, кодоскоп можна використовувати як наочний динамічний засіб навчання.

Знання видів наочних посібників дає змогу вчителю правильно їх добирати і ефективно використовувати під час навчання математики.

1.3. Комп’ютер як наочний засіб на уроках математики

Традиційні методи навчання передбачають активне використання принципу наочності, але відомо, наскільки він трудомісткий в реалізації, обмежений в можливостях при вивченні теоретичного матеріалу. Принципово нові можливості дають в цьому плані нові інформаційні технології (НІТ), що дозволяють наочно представляти приховані від безпосереднього сприймання закони і закономірності пізнання. Тому сьогодні можна доповнити «золоте правило» Я. А. Коменського: наочно представляти не тільки те, що можливе для безпосереднього сприймання відчуттями, але і те, що виражається абстрактними законами.

Широке впровадження в навчальний процес НІТ навчання, що базуються на комп’ютерній підтримці навчально-пізнавальної діяльності, відкриває перспективи щодо гуманізації навчального процесу, розширення та поглиблення теоретичних знань і надання результатам навчання практичного значення, посилення спілкування учнів і вчителя та учнів між собою і збільшення питомої ваги самостійної навчальної діяльності дослідницького характеру, розкриття творчого потенціалу учнів [7].

НІТ навчання надають потужні й універсальні засоби отримання, опрацювання, зберігання, подання різноманітної інформації, розкривають широкі можливості щодо істотного зменшення навчального навантаження і водночас інтенсифікації навчального процесу, надання навчально-пізнавальній діяльності творчого, дослідницького спрямування, яка природно приваблює учня, результати якої приносять йому задоволення, стимулюють бажання працювати, набувати нових знань.

Необхідність використання НІТ навчання математики пов’язана перш за все зі значно ширшими (порівняно з традиційними технологіями навчання) можливостями розкриття загальноосвітніх функцій математики.

Ефективність використання НІТ навчання під час вивчення математики значною мірою залежить від педагогічних програмних засобів (ППЗ), які дають змогу поєднати високі обчислювальні можливості з графічним поданням результатів опрацювання інформації; дають можливість економити навчальний час за рахунок виключення механічних нетворчих обчислень, здебільшого розрахункового характеру, озброюють учнів ефективними наочними методами розв’язування широкого класу задач.

Використання ППЗ дозволяє учневі розв’язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил тотожних перетворень виразів тощо. Наприклад, учень може розв'язувати рівняння і нерівності та їх системи, не знаючи формул для знаходження коренів, методу виключення змінних, методу інтервалів. Завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі учень легко розв'язуватиме задачі, впевнено володітиме відповідною системою понять і правил. Використання цих програм дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язування доступним. Відповідні програми перетворюють окремі розділи і методи математики в «математику для всіх», що робить їх доступними, зрозумілими, легкими і зручними для використання [6].

Комп'ютер дає можливість використовувати ППЗ, які формують знання, уміння і навички до оволодіння уміннями самостійно «відкривати» знання, здійснюючи експериментально-дослідницьку діяльність. Такі ППЗ стимулюють продуктивну пізнавальну діяльність учнів, формують уміння застосовувати знання в нових ситуаціях, мобілізують і розвивають розумові операції, зближують мислительну діяльність з науковим пошуком, ознайомлюють з етапами, методами та прийомами дослідження, сприяють формуванню та розвитку продуктивного мислення учнів.

Використання ППЗ на уроках математики може значно полегшити розуміння багатьох фактів і допомогти в усвідомленні різноманітних закономірностей. Вони можуть бути використані на всіх етапах уроку і при вивченні будь-якого матеріалу як алгебри, так і геометрії. При доведенні теорем, як правило, виникає потреба розглядати послідовність зображень фігур чи їх елементів, яка визначається сукупністю висновків, що необхідно зробити для доведення даного твердження. Саме ППЗ дають можливість досить швидко і точно виконати такі зображення.

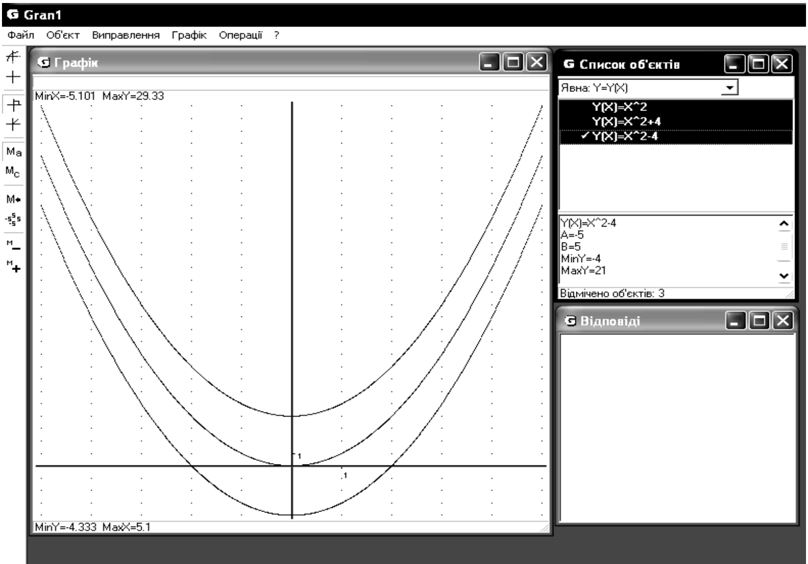
В сучасній школі унаочненню доведення теорем часто не приділяється належна увага. Вчитель обмежується, як правило, одним малюнком з підручника та стислим викладом доведення у синтетичній формі. Учням важко передбачити наступний етап доведення. Це призводить до формального засвоєння теорем, заучування доведення, знижує інтерес до вивчення математики.

Для унаочнення абстрактних понять і створення наочної опори при доведенні теорем варто використовувати комп'ютерну графіку. Послідовність динамічних зображень, які демонструються за допомогою спеціально створених ППЗ, допомагає вчителю реалізувати можливий етап вивчення теореми.

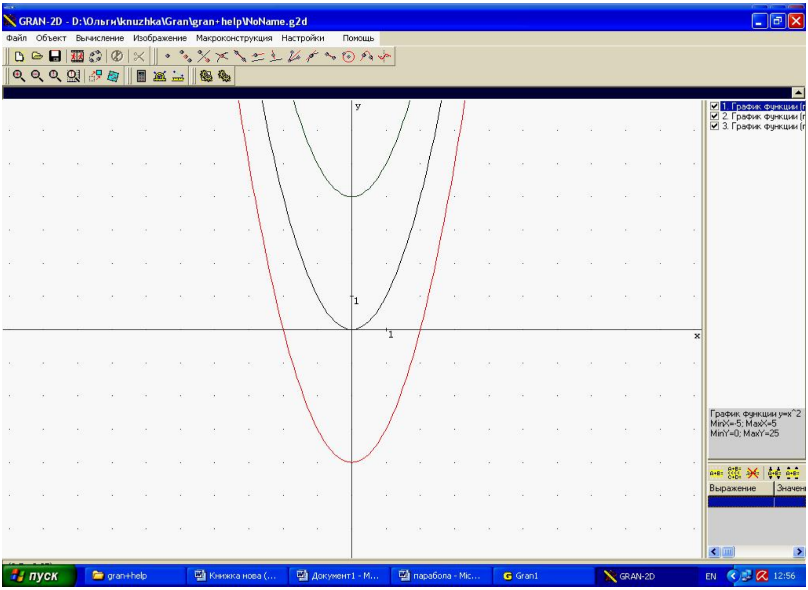
Для забезпечення комп'ютерного супроводу навчання математики існують програмно-методичні комплекси на базі ППЗ GRAN–1, GRAN–2D, GRAN–3D, розроблені на кафедрі інформатики НПУ ім. М. П. Драгоманова, які є інструментом, що дає змогу під час розв'язування математичних задач отримати чисельні результати без знання розрахункових методів та побудувати графіки функції без проведення попередніх досліджень.

Програми GRAN−1 і GRAN−2D доцільно використовувати на уроках алгебри і геометрії основної школи як засоби унаочнення при вивченні нового матеріалу і при його закріпленні.

Покажемо, як можна використати програми GRAN−1 і GRAN−2D під час уроку на тему «Перетворення графіків функцій» в курсі алгебри 9 класу. В діючих підручниках [6], [19], [21] стисло обґрунтовано побудову, наприклад, графіка функції $y = f(x) + n$ за відомим графіком функції $y = f(x)$. Для пояснення цього алгоритму слід використати наочність, але спочатку треба підготувати учнів до самостійного висунення гіпотези про метод побудови цього графіка. Вчитель будує за допомогою програм GRAN−1 або GRAN−2D графіки функцій $y = x^2$; $y = x^2 + 4$; $y = x^2 - 4$ на одній системі координат (*мал. 8, мал. 9*). Учні мають можливість висловити припущення про алгоритм побудови, перевірити це припущення на додаткових прикладах, після чого вчитель аналітично обґрунтовує даний алгоритм. Таке пояснення не викликає труднощів в учнів.



Мал. 8. Побудова графіків у програмі GRAN−1



Мал. 9. Побудова графіків у програмі GRAN–2D.

Аналогічно можна розглянути побудову графіків функції $y = -f(x)$, $y = kf(x)$, $y = f(x - m)$.

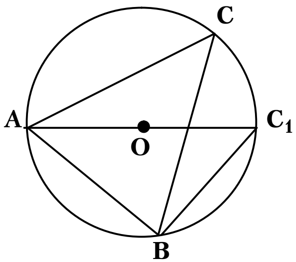
Отже, використання програм GRAN–1 і GRAN–2D при вивченні теми «Перетворення графіків функцій» дозволяє, ознайомлюючи учнів з новим матеріалом, забезпечити унаочнення процесу побудови графіків функцій, що дає можливість швидко виконувати побудови, які підтверджують робочі гіпотези учнів. Такий підхід до засвоєння алгоритмів побудов графіків функцій за допомогою геометричних перетворень даних графіків дозволяє це засвоєння зробити результативнішим, яке ґрунтується на власних дослідженнях учнів.

Програми GRAN–1 і GRAN–2D дають можливість швидко та якісно демонструвати побудови за допомогою наперед підготовлених матеріалів та зберігати ці побудови, завдяки чому економиться час. Через те, що вчитель не вимушений виконувати побудови сам, покращується якість наочних матеріалів.

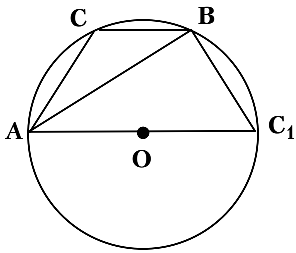
Використання комп’ютерної програми динамічної геометрії GRAN–2D може значно полегшити розуміння багатьох фактів і допомогти в усвідомленні різноманітних закономірностей. Побудови, отримані учнями в результаті застосування інструментів цієї програми, будуть точними, а не наближеними. Учень зможе зосередитись на проблемі, яку має вирішити, а не на тому, чи вірно побудував коло, описане навколо трикутника.

Використання під час проведення уроку програмного засобу GRAN–2D полегшить розуміння учнями матеріалу і перетворить навчання математики в цікавий, захоплюючий і ефективний процес. Використання цієї програми також дає учням можливість перевіряти правильність тверджень у теоремах, процес доведення, брати активну участь у самостійному доведенні теорем.

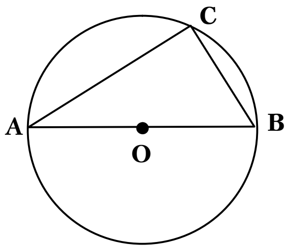
Наприклад, розглядаючи в курсі геометрії 9 класу теорему синусів, корисно використати програмний засіб GRAN–2D. Відомо, що основним етапом доведення даної теореми є доведення рівності $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Але тут треба розглянути три випадки: $\angle C$ — гострий, $\angle C$ — тупий, $\angle C$ — прямий. Побудова малюнків, як правило, займає у вчителя багато часу, а, скориставшись програмою GRAN–2D, вчитель швидко на екрані монітора створює наочні, раніше обумовлені, *малюнки 10–12*.



Мал. 10

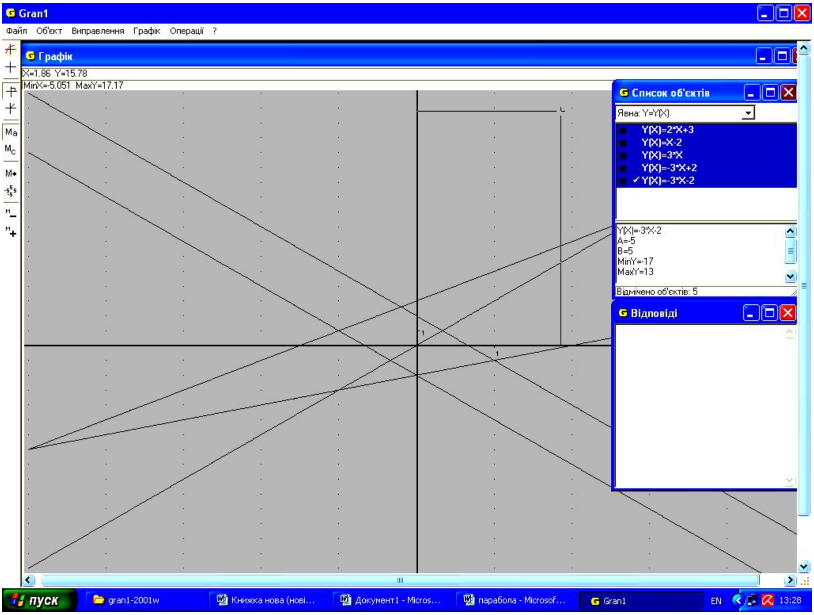


Мал. 11



Мал. 12

Зручно використовувати ППЗ GRAN і для розв'язування задач. Наприклад, розглянувши в курсі алгебри 7 класу лінійну функцію і її графік, пропонуємо учням дослідити, як змінюється графік функції $y = kx + b$ у залежності від коефіцієнтів k і b. Використовуючи програму GRAN–1, будуємо на одній системі координат графіки конкретних лінійних функцій: $y = 2x + 3$; $y = x - 2$; $y = 3x$; $y = -3x + 2$; $y = -3x - 2$ на відрізку $[-6; 6]$ (*мал. 13*). Проаналізувавши ці графіки, учні самостійно формулюють залежність графіка лінійної функції від параметрів k і b.



Мал. 13

Отже, використання комп'ютера у ролі ефективного засобу для наочної ілюстрації понять, демонстрації графіків, малюнків та ППЗ GRAN–1, GRAN–2D на уроках алгебри і геометрії основної школи сприятиме глибшому засвоєнню знань, формуванню в учнів навичок евристичної діяльності, розвитку логічного і творчого мислення, математичних здібностей учнів, підвищенню мотивації та інтересу до вивчення математики, реалізації принципів диференціації та гуманізації навчання.

2. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНИХ ПОСІБНИКІВ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ

2.1. Наочні посібники на уроках алгебри 7 класу

Розкриємо методику використання різних видів наочності при вивченні тем курсу алгебри 7 класу відповідно до діючої програми з математики [16].

Розглядаючи тему «Загальні відомості про рівняння», доцільно з учнями згадати з курсу математики 5-6 класів такі питання: Що називається рівнянням? Що таке корінь або розв'язок рівняння? Що означає розв'язати рівняння? Властивості рівнянь (про додавання (віднімання) до обох частин рівняння одного і того самого числа, про перенесення доданка з однієї частини рівняння до іншої з протилежним знаком, про множення (ділення) обох частин рівняння на одне й те саме відмінне від нуля число). Вчитель пропонує учням назвати компоненти арифметичних дій і дати відповіді на питання *кодоплівки 1*.

Кодоплівка 1

Дайте відповіді на питання:

1. Як знайти невідомий доданок?
2. Як знайти невідоме зменшуване?
3. Як знайти невідомий від'ємник?
4. Як знайти невідомий множник?
5. Як знайти невідоме ділене?
6. Як знайти невідомий дільник?

Після цього учні розв'язують рівняння на *кодоплівці 2* і пояснюють, за яким правилом вони розв'язали кожне з цих рівнянь.

Кодоплівка 2

Розв'яжіть рівняння і поясніть розв'язання:

а) $x + 2,3 = 4;$	д) $4 + x = 2\dfrac{3}{8};$	и) $x + 2\dfrac{3}{7} = 6;$
б) $x - 2\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6};$	е) $6 - x = 2\dfrac{4}{7};$	к) $x - 12 = 6,5;$
в) $x \cdot 1\dfrac{2}{9} = 3\dfrac{2}{9};$	ж) $\dfrac{1}{5}x = 1\dfrac{1}{2};$	л) $-7x = -14;$
г) $x \div (-3) = \dfrac{5}{18};$	з) $15,3 \div x = 5,1;$	м) $x \div 2\dfrac{1}{5} = 1\dfrac{2}{3}.$

Ввівши поняття рівносильних рівнянь, вчитель, залучаючи учнів, формулює властивості рівнянь і демонструє *таблицю 1*, яку доцільно використовувати в кабінеті математики впродовж кількох уроків, щоб учні мали можливість запам'ятати ці властивості і навчилися ними користуватися при розв'язуванні рівнянь.

Таблиця 1

ВЛАСТИВОСТІ РІВНЯНЬ

1. Якщо у будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.
2. Якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.
3. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Тепер вчитель пропонує класу завдання на *кодоплівці 3*.

Кодоплівка 3

1. Чи рівносильні рівняння:

а) $2x + 5x = 14$ і $7x = 14$;
б) $4x - 16 = 0$ і $4x - 1 = 15$;
в) $5x + 7 = 2x - 2$ і $7x = -35$;
г) $0x = 0$ і $0x = 8$?

2. Складіть рівняння, які рівносильні рівнянню:

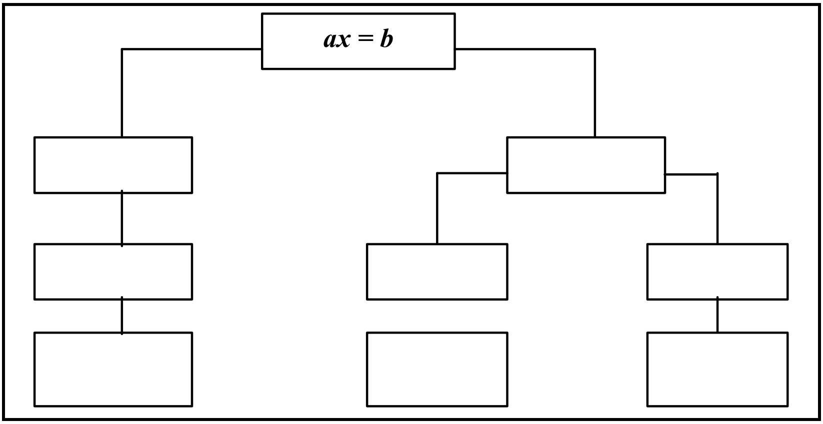
$5x = -7$.

На другому уроці, ввівши поняття лінійного рівняння з однією змінною, його коефіцієнтів і розв'язавши його, вчитель разом з учнями заповнюють *таблицю 2*, якою учні мають користуватися протягом наступних 2-3 уроків під час розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною.

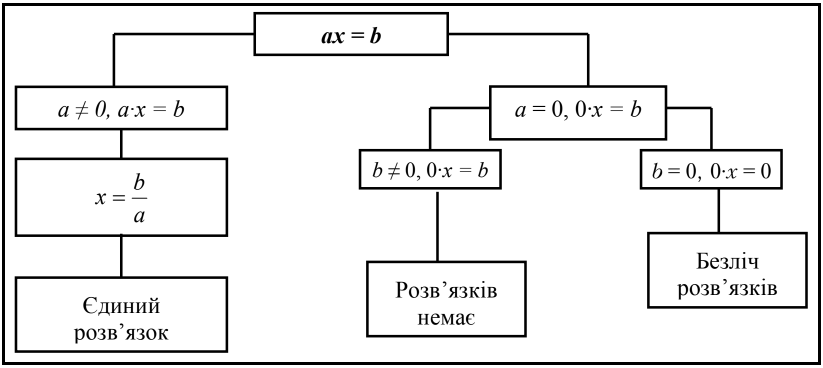
На цих уроках слід сформувати в учнів навички розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною. З цією метою вчитель разом з учнями складають алгоритми розв'язування лінійних рівнянь різних видів. Після цього вчитель демонструє *таблиці 3-5*, якими учні користуються при розв'язуванні рівнянь.

Таблиця 2

Початковий вигляд



Кінцевий вигляд



Таблиця 3

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

1. Перенести доданки, які містять невідоме, у ліву частину, а відомі — у праву, змінивши їхній знак на протилежний.
2. Виконати зведення подібних доданків.
3. Поділити ліву та праву частини рівняння на коефіцієнт при невідомому, якщо він не дорівнює нулю.
4. Записати відповідь.

Приклад. Розв'язати рівняння $3x - 18 - 6 = 11 - 2x$.

<u>1 крок.</u> $3x + 2x = 11 + 18 + 6$.
<u>2 крок.</u> $5x = 35$.
<u>3 крок.</u> $x = 35 : 5$; $x = 7$.
<u>4 крок.</u> *Відповідь*: 7.

Таблиця 4

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДИТЬСЯ ДО ЛІНІЙНОГО

1. Розкрити дужки.
2. Перенести невідомі доданки у ліву частину, відомі — у праву, змінивши їхній знак на протилежний.
3. Виконати зведення подібних доданків.
4. Поділити ліву та праву частини рівняння на коефіцієнт при невідомому, якщо він не дорівнює нулю.
5. Записати відповідь.

Приклад. Розв'язати рівняння $4(5x - 3\frac{1}{5}) + 6(2,3 - 3x) = 2$.

1 крок.	$20x - 12,8 + 13,8 - 18x = 2$.
2 крок.	$20x - 18x = 2 + 12,8 - 13,8$.
3 крок.	$2x = 1$.
4 крок.	$x = \frac{1}{2} = 0,5$.
5 крок.	*Відповідь*: 0,5.

Таблиця 5

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ, ЩО МІСТИТЬ ДРІБ

1. Знайти найменший спільний знаменник всіх дробів.
2. Домножити кожний член рівняння на найменший спільний знаменник та скоротити дріб.
3. Розкрити дужки, якщо вони є.
4. Перенести доданки, які містять невідоме, у ліву частину, а відомі — у праву, змінивши їхній знак на протилежний.
5. Виконати зведення подібних доданків.
6. Поділити ліву та праву частини рівняння на коефіцієнт при невідомому, якщо він не дорівнює нулю.
7. Записати відповідь.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{2x+1}{2} - \frac{3x+2}{3} = \frac{5x+4}{6}$.

1 крок.	Найменший спільний знаменник дробів — число 6.
2 крок.	$\frac{6(2x+1)}{2} - \frac{6(3x+2)}{3} = \frac{6(5x+4)}{6}$;
	$3(2x + 1) - 2(3x + 2) = 5x + 4$.
3 крок.	$6x + 3 - 6x - 4 = 5x + 4$.
4 крок.	$6x - 6x - 5x = 4 - 3 + 4$.
5 крок.	$-5x = 5$.
6 крок.	$x = 5 : (-5)$; $x = -1$.
7 крок.	*Відповідь*: -1.

Розв'язуючи рівняння, що містить змінну під знаком модуля, слід повторити з учнями означення модуля, яке вони вивчали в курсі математики 6 класу, і продемонструвати *таблицю 6*, яка дасть можливість краще повторити це поняття.

Таблиця 6

МОДУЛЬ ЧИСЛА

Модуль числа a є відстань від початку відліку до точки, яка зображує це число на координатній прямій.

Модуль додатного числа і нуля — саме це число.

Модуль від'ємного числа — протилежне йому додатне число.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Приклади: $|2| = 2$, $|-5| = 5$, $\left|4\frac{2}{3}\right| = 4\frac{2}{3}$, $\left|-2\frac{1}{7}\right| = 2\frac{1}{7}$.

На останньому уроці цієї теми варто запропонувати учням рівневу самостійну роботу на картках. Зразок такої самостійної роботи наведено на *картці 1*.

Картка 1

І варіант

1. Розв'яжіть рівняння:
   а) $11x - 6 = 5x + 12$; (1 б.)
   б) $2x - 9 + 7x = 9x - 3 - 3x$; (2 б.)
   в) $-6{,}4x + 4{,}2 + 8x - 3{,}4 = 5{,}6$; (2 б.)
   г) $3\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$; (2 б.)
   д) $14\frac{2}{7} - 3{,}5x = 7\frac{2}{7}$. (2 б.)

2*. При яких значеннях a рівняння не має розв'язку? Має один розв'язок?
   $5ax + 8 = ax - 10$. (3 б.)

Розглядаючи з учнями розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь, вчитель має пам'ятати, що унаочнення задач треба розглядати як один із засобів активізації мислення учнів і виховання їх самостійності при розв'язуванні задач, а також як засіб розвитку абстрактного мислення. Наочна ілюстрація допомагає учневі краще зрозуміти умову задачі та залежність між величинами. Але, унаочнюючи аналіз і хід розв'язання задачі, треба лише допомагати учневі логічно мислити, а не розв'язувати задачу за нього. Вчитель має уважно продумати, якою мірою і як найдоцільніше можна використати той чи інший наочний посібник.

При розв'язуванні перших задач за допомогою лінійних рівнянь вчителю доцільно виготовити таку кодоплівку, в якій би містилась умова задачі, її схематичний запис. Наприклад:

Кодоплівка 4

Задача

В одній бочці було в 3 рази більше олії, ніж у другій. Коли з першої бочки продали 150 л олії, а в другу долили 30 л, то в обох бочках стало порівну. Скільки олії було в кожній бочці спочатку?

	Було, л	Стало, л	Рівняння
I бочка			
II бочка			

Аналізуючи дану задачу, учні при допомозі вчителя заповнюють таблицю *кодоплівки 4*, яка набере вигляду:

	Було, л	Стало, л	Рівняння
I бочка	$3x$	$3x - 150$	$3x - 150 = x + 30$
II бочка	x	$x + 30$	

Під час розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь для зображення умови задачі і для відтворення ходу міркувань при складанні порівнюваних виразів часто доцільно застосовувати схематичні записи. Наприклад, для задачі «Маса трьох кавунів рівна 14 кг. Відомо, що перший кавун легший від другого на 2 кг, а третій важчий від першого у 2 рази. Знайти масу кожного кавуна» варто зробити такий схематичний запис:

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline x & x + 2 & 2x \\ \hline \end{array}}_{14}$$

Цей запис дає можливість зразу ж скласти рівняння: $x + x + 2 + 2x = 14$; $4x = 12$; $x = 3$. Отже, маса першого кавуна 3 кг, другого — 5 кг, третього — 6 кг.

Досить зручними є схематичні записи при розв'язуванні задач на рух. Наприклад, розв'язуючи задачу «З пункту A до пункту B виїхав велосипедист із швидкістю 12 км/год. Через 3 год. з пункту B до пункту A виїхав мотоцикліст із швидкістю 45 км/год. Скільки годин до зустрічі із мотоциклістом їхав велосипедист, якщо відстань від A до B становить 235,5 км?», корисним для учнів є схематичний запис залежностей між даними і шуканими величинами, який можна подати у вигляді таблиці на *кодоплвці 5*. Учні, розв'язуючи задачу, заповнюють дану таблицю.

Кодоплівка 5

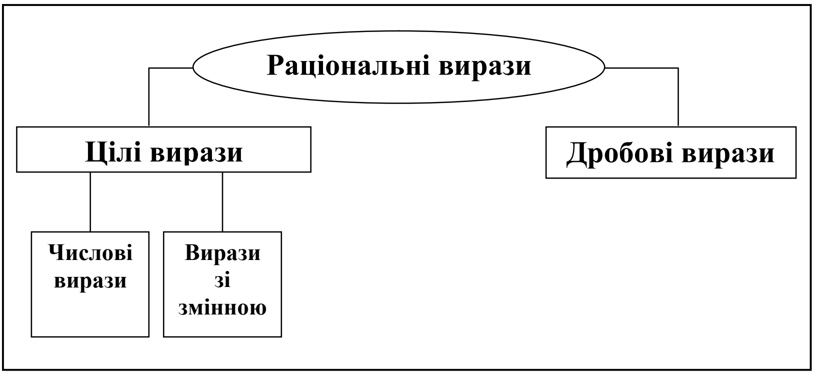
Учасники руху	V, км/год.	t, год.	S, км	
Велосипедист	12	x	$12x$	235,5 км
Мотоцикліст	45	$x - 3$	$45(x - 3)$	

З цього запису легко скласти рівняння $12x + 45(x - 3) = 235{,}5$.

Наведені зразки схематичних записів є орієнтовними. При підготовці до уроків з розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь вчитель має продумувати різні форми записів умов задач, складання порівнюваних виразів, додаткових розрахунків. Варто заохочувати учнів до вдосконалення цих записів, виявлення творчості та ініціативи.

Розглянувши тему «Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу» розділу II «Цілі вирази», для систематизації і узагальнення вивчених понять варто запропонувати учням *таблицю 7*. Використовуючи дану таблицю, учні повторюють поняття числового виразу, виразу зі змінною, раціонального, цілого і дробового виразів, що дасть можливість систематизувати учням знання про раціональні вирази.

Таблиця 7



Оскільки при виконанні тотожних перетворень виразів зі змінними використовуються закони арифметичних дій над раціональними числами, то під час розв'язування вправ доцільно розмістити в кабінеті математики, де проходитимуть уроки учнів 7 класу, *таблицю 8*.

Таблиця 8

ЗАКОНИ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ НАД ЧИСЛАМИ
Для будь-яких раціональних чисел a, b і c справедливі рівності:
$a + b = b + a$ — переставний закон додавання,
$(a + b) + c = a + (b + c)$ — сполучний закон додавання,
$ab = ba$ — переставний закон множення,
$(ab)c = a(bc)$ — сполучний закон множення,
$a(b + c) = ab + bc$ — розподільний закон множення відносно додавання.

Дана таблиця дасть можливість учням повторити всі ці закони і успішно їх використовувати при тотожних перетвореннях виразів зі змінними.

Після розгляду способів доведення тотожностей варто продемонструвати *таблицю 9*, якою учні мають користуватися протягом кількох уроків, розв'язуючи вправи на доведення тотожностей, що сприятиме більш свідомому засвоєнню цього матеріалу.

Таблиця 9

СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

1. Ліву частину тотожності тотожними перетвореннями звести до правої частини.
2. Праву частину тотожності тотожними перетвореннями звести до лівої частини.
3. Обидві частини тотожності тотожними перетвореннями звести до одного й того самого виразу.
4. Праву частину тотожності перенести в ліву з протилежним знаком і тотожними перетвореннями одержаний вираз звести до нуля.

Розглядаючи степінь з натуральним показником і його властивості, доцільно підготувати *таблицю 10*, яка сприятиме кращому засвоєнню властивостей степеня.

Таблиця 10

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ
З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Якщо $m \in N$, $n \in N$, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n\ разів},\quad a^1 = a;$$

$$a^m a^n = a^{m+n};\quad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn};\quad a^n b^n = (ab)^n.$$

Також бажано, щоб в кабінеті математики під час вивчення даної теми знаходилась *таблиця 11*, яку можна використовувати під час розв'язування багатьох задач.

Таблиця 11

СТЕПЕНІ ЧИСЕЛ 2 і 3										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Під час вивчення одночлена, стандартного вигляду і степеня одночлена корисно вчителю мати *кодоплівки 6-8* з одночленами, демонстрація яких сприятиме кращому їх засвоєнню.

Кодоплівка 6

Одночленом називається добуток числових і буквених множників. Одночленом вважають також числа, змінні і їхні степені.

Наприклад: $-\frac{2}{3}$; $x \cdot x \cdot x$; y^4; $0,325 \cdot a^2b^3c^4$; 9; m.

Кодоплівка 7

Якщо одночлен містить один числовий множник, який стоїть на першому місці, і кожна змінна входить тільки до одного множника, то такий одночлен називається ***одночленом стандартного вигляду.***

Наприклад: 3, m, y^4, $0,325a^2b^3c^4$, $-2\frac{1}{4}x^2y^3$.

Кодоплівка 8

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, які входять в одночлен.

Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то його степінь вважається нулем.

Наприклад: степінь одночлена $-2\frac{1}{4}x^2y^3$ дорівнює 5, бо 2 + 3 = 5.

Степінь одночлена ac дорівнює 2, бо 1 + 1 = 2.

Степінь одночлена 0,95 дорівнює нулю.

Розглядаючи множення і піднесення одночленів до степеня на конкретних прикладах, вчитель, залучаючи учнів, має вивести алгоритми цих операцій і формулювання їх разом з прикладами розмістити на *таблицях 12* та *13*.

Таблиця 12

АЛГОРИТМ МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ

1. Знайти добуток коефіцієнтів.
2. Показники степенів однакових змінних додати.
3. Якщо змінна входить лише в один з співмножників, то дописати її у добуток.

Приклад. $\frac{2}{5}xy^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}x^3\right) \cdot 3y^5 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3x^{1+3}y^{2+5} = -x^4y^7$.

Таблиця 13

АЛГОРИТМ ПІДНЕСЕННЯ ОДНОЧЛЕНА ДО СТЕПЕНЯ

1. Піднести до степеня коефіцієнт одночлена.
2. Показник степеня кожної змінної одночлена помножити на показник степеня, до якого підноситься одночлен.

Приклад. $\left(-0,3x^2y^3\right)^4 = \left(-0,3\right)^4 \left(x^2\right)^4 \left(y^3\right)^4 = -0,0081 \cdot x^8 \cdot y^{12}$.

Використання цих таблиць допоможе учням активніше розв'язувати відповідні вправи.

Аналогічно, при вивченні дій над многочленами слід використати *таблиці 14-17*.

Таблиця 14

АЛГОРИТМ ДОДАВАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

1. Записати послідовно у вигляді алгебраїчної суми всі члени многочленів.
2. Звести подібні доданки.

Приклад. $(2x^2 - 3x + 5) + (3x^2 + x) =$
$= 2x^2 - 3x + 5 + 3x^2 + x = 5x^2 - 2x + 5.$

Таблиця 15

АЛГОРИТМ ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

1. Скласти різницю многочленів, беручи другий многочлен у дужки зі знаком мінус перед ним.
2. Розкрити дужки, змінюючи знаки перед членами, що стоять у дужках, на протилежні.
3. Звести подібні доданки.

Приклад. $(5x^2 - 2xy + y^2) - (4x^2 + xy - y^2) =$
$= 5x^2 - 2xy + y^2 - 4x^2 - xy + y^2 = x^2 - 3xy + 2y^2.$

Таблиця 16

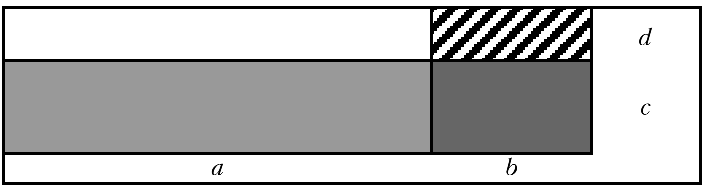
АЛГОРИТМ МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН
1. Помножити одночлен на кожний член многочлена. 2. Додати одержані добутки. 3. Виконати зведення подібних доданків.
Приклад. $2ab(5a - 2b) = 2ab \cdot 5a - 2ab \cdot 2b = 10a^2b - 4ab^2$.

Таблиця 17

АЛГОРИТМ МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН
1. Помножити кожний член першого многочлена на кожен член другого многочлена. 2. Додати одержані добутки. 3. Звести подібні доданки.
Приклад. $(3x - 4) \cdot (x^2 - 5x + 4) = 3x \cdot x^2 + 3x \cdot (-5x) + 3x \cdot 4 - 4x^2 - 4 \cdot (-5x) - 4 \cdot 4 = 3x^3 - 15x^2 + 12x - 4x^2 + 20x - 16 = 3x^3 - 19x^2 + 32x - 16$.

Після встановлення алгоритму множення многочлена на многочлен доцільно дати і геометричну ілюстрацію цього правила за допомогою *кодоплівки 9*.

Кодоплівка 9



$(a + b)\cdot(c + d) = ac + bc + ad + bd$

Вчитель на конкретних прикладах показує розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки. Тут доцільно продемонструвати *кодоплівку 10*.

Кодоплівка 10

Розкласти многочлен на множники означає подати його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену.

Приклад. Розкласти многочлен $8x^2y - 8xy$ на множники способом винесення спільного множника за дужки.

Розв'язання.

Крок 1. Виділяємо спільний множник: $8xy \cdot x - 8xy \cdot 1$.
Крок 2. Застосовуємо розподільний закон: $8xy(x - 1)$.
Крок 3. Записуємо відповідь: $8x^2y - 8xy = 8xy(x - 1)$.

Після цього слід сформулювати алгоритм виконання розглянутого тотожного перетворення і помістити його в *таблицю 18*, якою учні будуть користуватися при розв'язуванні відповідних вправ.

Таблиця 18

АЛГОРИТМ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ

1. Встановити спільний множник членів многочлена. Коефіцієнтом його є найбільший спільний дільник модулів коефіцієнтів членів многочлена, взятий із знаком плюс або мінус. Змінні, що входять у всі члени, включити у спільний множник з найменшим показником, який вони мають у даному многочлені.
2. Кожний член многочлена подати у вигляді добутку двох множників, один з яких є знайдений спільний множник.
3. Спільний множник винести за дужки на основі твердження, оберненого до розподільного закону множення.

Приклад. $4a^5b + 8a^4b + 4a^3b = 4a^3ba^2 + 4a^3b \cdot 2a + 4a^3b \cdot 1 =$
$= 4a^3b(a^2 + 2a + 1) = 4a^3b(a + 1)^2 = 4a^3b(a + 1)(a + 1).$

Аналогічно розглядається розкладання многочленна на множники способом групування, демонструючи *кодоплівку 11* і використовуючи *таблицю 19*.

Кодоплівка 11

Приклад. Розкладіть на множники многочлен $12x^2 + 12xy + 6x + 6y$ способом розкладання на множники.

Розв'язання.

<u>Крок 1.</u> Об'єднуємо члени многочлена в такі групи, які мають спільний множник:

$$12x^2 + 12xy + 6x + 6y = (12x^2 + 12xy) + (6x + 6y).$$

<u>Крок 2.</u> Виносимо спільний множник за дужки в кожній групі:

$$(12x^2 + 12xy) + (6x + 6y) = 12x(x + y) + 6(x + y).$$

<u>Крок 3.</u> Виносимо за дужки спільний множник виразу:

$$12x(x + y) + 6(x + y) = (x + y)(12x + 6) = 6(x + y)(2x + 1).$$

Отже, $12x^2 + 12xy + 6x + 6y = 6(x + y)(2x + 1).$

Таблиця 19

АЛГОРИТМ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ГРУПУВАННЯ

1. Утворити групи членів, що мають спільний множник.
2. Винести за дужки спільний множник у кожній групі.
3. Винести за дужки спільний для всіх груп множник.

Приклад. $ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10) =$
$= a\,(b - 5) + 2\,(b - 5) = (b - 5)\,(a + 2).$

Вивчаючи кожну з формул скороченого множення, доцільно спроектувати на дошку *кодоплівки 12, 13, 14* відповідно.

Кодоплівка 12

КВАДРАТ ДВОЧЛЕНА

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, плюс подвоєний добуток першого і другого виразів, плюс квадрат другого виразу.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, мінус подвоєний добуток першого і другого виразів, плюс квадрат другого виразу.

Кодоплівка 13

РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ ДВОХ ВИРАЗІВ

Добуток різниці двох виразів і їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і їх суми:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Кодоплівка 14

СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці:

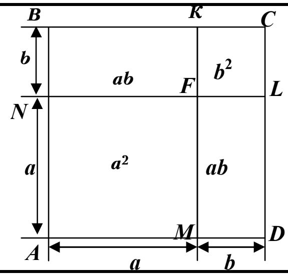
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

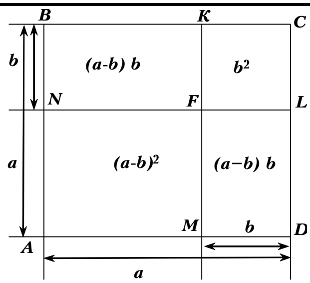
Крім того, варто дати геометричну ілюстрацію цих формул за допомогою *таблиць 20-22*, які переконують учнів у справедливості тотожностей скороченого множення.

Таблиця 20



$$S_{ABCD} = S_{ANFM} + S_{NBKF} + S_{MDLF} + S_{FKCL},$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

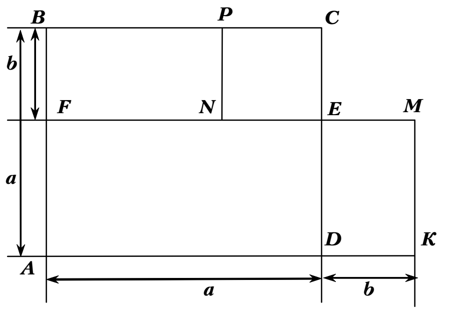
Таблиця 21



$$S_{ANFM} = S_{ABCD} - S_{NBKF} - S_{MFLD} - S_{FKCL},$$
$$(a-b)^2 = a^2 - (a-b)b - (a-b)b - b^2 =$$
$$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отже, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Таблиця 22



$$S_{AFMK} = (a-b)(a+b).$$

Оскільки $S_{DEMK} = \mathrm{S}_{\mathrm{BPNF}} = (a - b)b,$ то

$$S_{AFMK} = S_{ABPNED} = S_{ABCD} - S_{PCEN} = a^2 - b^2.$$

Тому, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$

Розв’язуючи вправи на закріплення формул скороченого множення, а також вправи на розкладання многочленів на множники з використанням цих формул, корисно продемонструвати в кабінеті математики *таблицю 23*.

Таблиця 23

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Для формування умінь і навичок застосовувати формули скороченого множення варто пропонувати учням вправи на *кодоплівці 15*, наприклад:

Кодоплівка 15

Заповніть пусті клітинки так, щоб виконувалась рівність:

а) $(\square - \square)(\square + 2y^2) = 100x^6 - \square$;

б) $(1{,}2a^3 - \square)(1{,}2a^3 + \square) = \square - 0{,}01\,b^4$;

в) $64x^8 - 25y^6 = (8\,x^4 + \square)(\square - 5y^3)$;

г) $(\square - 3c)^2 = 16a^4 - 24a^2c + \square$;

д) $\square + 48ac + 36c^2 = (\square + \square)^2$.

Учні по черзі виходять до дошки і розв'язують вправи з поясненнями. Далі вчитель на кодоплівці показує правильні відповіді і учні звіряють правильність розв'язання завдань. Така наочність дає можливість економити час і більш ефективно працювати учням на уроці.

Слід також показати учням використання формул скороченого множення для розв'язання текстових задач на складання рівнянь. Наприклад, пропонуючи класу задачу «Кожну сторону квадрата збільшили на 0,4 дм, тому його площа збільшилась на 80 см^2. Знайдіть площу більшого квадрата», проектуємо на дошку *кодоплівку 16*, на якій подано форму схематичного запису задачі.

Кодоплівка 16

	Була	Стала	Рівняння
Сторона квадрата			
Площа квадрата			

Проаналізувавши задачу, вибравши невідому і встановивши залежності між даними і шуканими величинами, учні заповнюють цю таблицю. Схематичний запис набере вигляду:

	Була	Стала	Рівняння
Сторона квадрата	x	$x + 4$	$(x + 4)^2 = x^2 + 80$
Площа квадрата	x^2	$(x + 4)^2$	

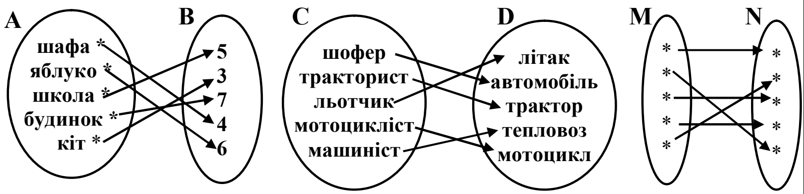
Розв'язуючи дане рівняння, учні одержують відповідь: 144 см^2.

Дана наочність теж дає можливість економити час і розвивати інтерес учнів до математики.

Перед введенням поняття функції учням доцільно продемонструвати таблицю, на якій зображено відповідності між елементами двох множин, наприклад, *таблицю 24*.

Таблиця 24

ВІДПОВІДНОСТІ МІЖ ЕЛЕМЕНТАМИ ДВОХ МНОЖИН



A — множина слів.	**C** — множина професій.	**M** — учні класу.
B — множина кількості букв у словах.	**D** — множина видів транспорту.	**N** — імена учнів.

Учні, аналізуючи зображені відповідності, приходять до поняття функції. Для засвоєння учнями термінології, пов'язаної з поняттям функції: x — незалежна змінна, або аргумент; y — залежна змінна; y є функцією від x, значення функції, доцільно використати *кодоплівку 17*:

Кодоплівка 17

Функція $y = 2x + 5$,

де x — незалежна змінна, або аргумент,
y — залежна змінна,
y — функція від x.
При $x = 3$ значення функції y дорівнює 11.

Ввівши поняття області визначення і області значень функції, вчителю слід підготувати різноманітні вправи для визначення аргумента і функції, області визначення і області значень функції. Наприклад:

Кодоплівка 18

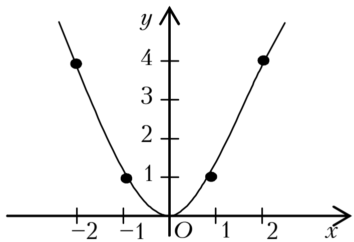
1. Дано відповідність $y = \dfrac{-5x}{x-2}$. Вкажіть аргумент і функцію.
2. Запишіть відповідність між стороною *a* квадрата та його площею S. Вкажіть аргумент і функцію.
3. Запишіть відповідність між стороною квадрата *a* та його периметром P. Вкажіть аргумент і функцію.
4. Дано функцію $y = 2x + 5$. Вкажіть область визначення і область значень даної функції.
5. Функція $y = \dfrac{2}{x+5}$ має зміст при …
6. Функція $y = \dfrac{-4,5x}{x-2}$ не має змісту при …

Для систематизації і узагальнення способів задання функції доцільно підготувати *таблицю 25*.

Таблиця 25

СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

1. Аналітичний: $y = x^2$, $x \in R$, $y \in [0; +\infty)$.
2. Графічний:



3. Табличний:

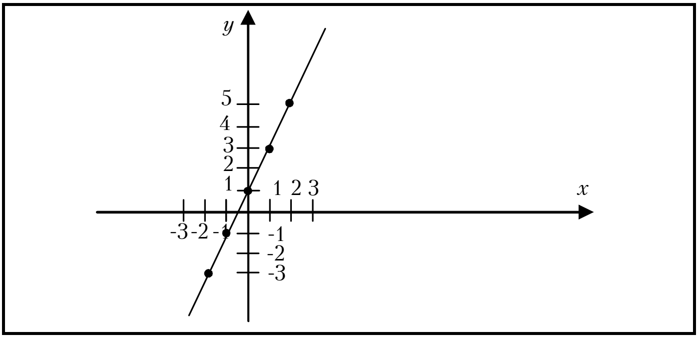
x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Після розгляду прикладів і введення поняття лінійної функції вчитель на *кодоплівці 19* разом з учнями заповнює таблицю значень аргумента та функції $y = 2x + 1$ і на іншій *кодоплівці 20* учень будує точки графіка цієї функції.

Кодоплівка 19

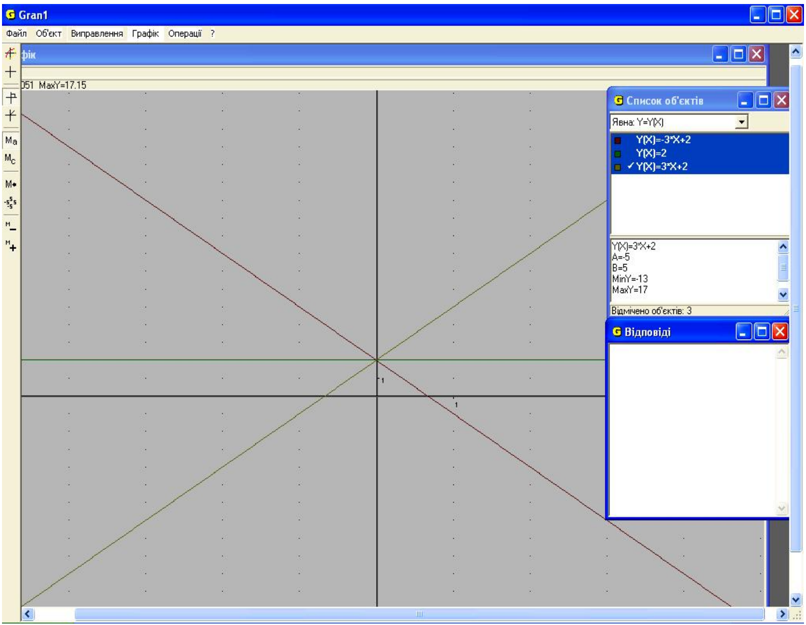
ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ДЛЯ ФУНКЦІЇ $y = 2x + 1$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−5	−3	−1	1	3	5	7



Учні виконують побудову графіка в зошитах. Приклавши лінійку до побудованих точок, вони переконуються, що всі точки лежать на одній прямій. Отже, графіком лінійної функції є пряма.

Далі на комп'ютері вчитель за допомогою програми GRAN−1 будує графіки функцій $y = -3x + 2$; $y = 2$ та $y = 3x + 2$ (*мал. 1*).

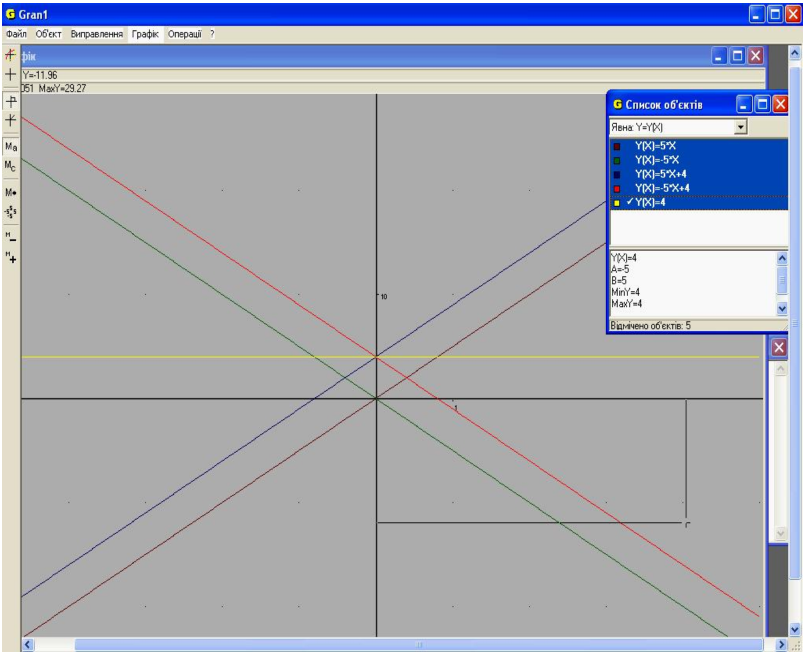


Мал. 1

Вчитель просить учнів побудувати графіки таких функцій: $y = 5x$; $y = -5x$; $y = 5x + 4$; $y = -5x + 4$; $y = 4$ (*мал. 2*).

Вчитель. У вас на робочому столі відкрита програма GRAN−1. У вікні «Список об'єктів» виберіть функцію «Явна:

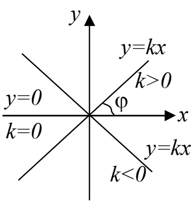
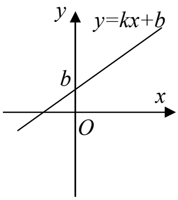
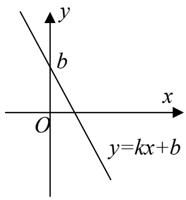
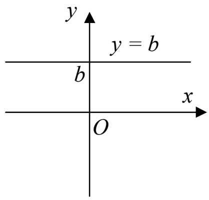
$У = У(Х)$». У рядку меню виберіть пункт «Об'єкт» → «Створити» та введіть функцію. Виконавши це, із рядка меню виберіть пункт «Графік» → «Побудувати».



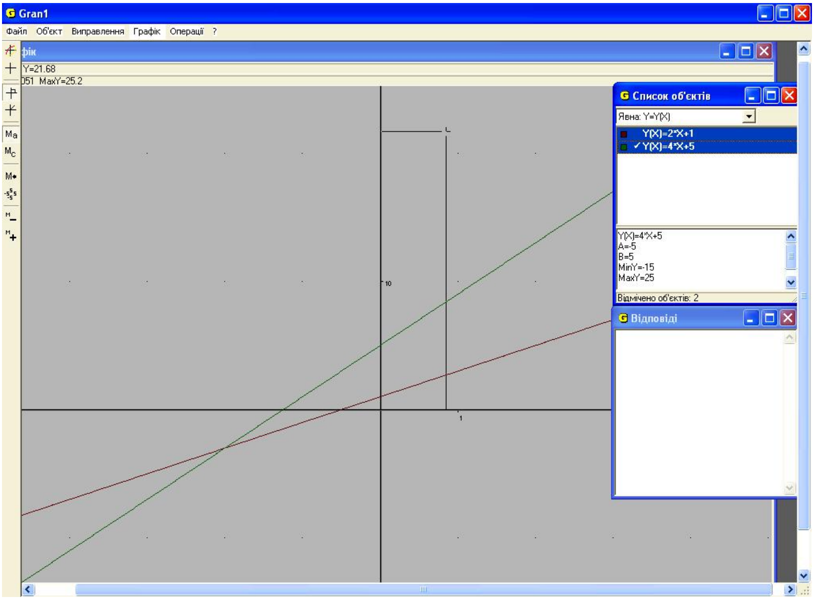
Мал. 2

Після побудови вчитель робить узагальнення за *таблицею 26*.

Таблиця 26

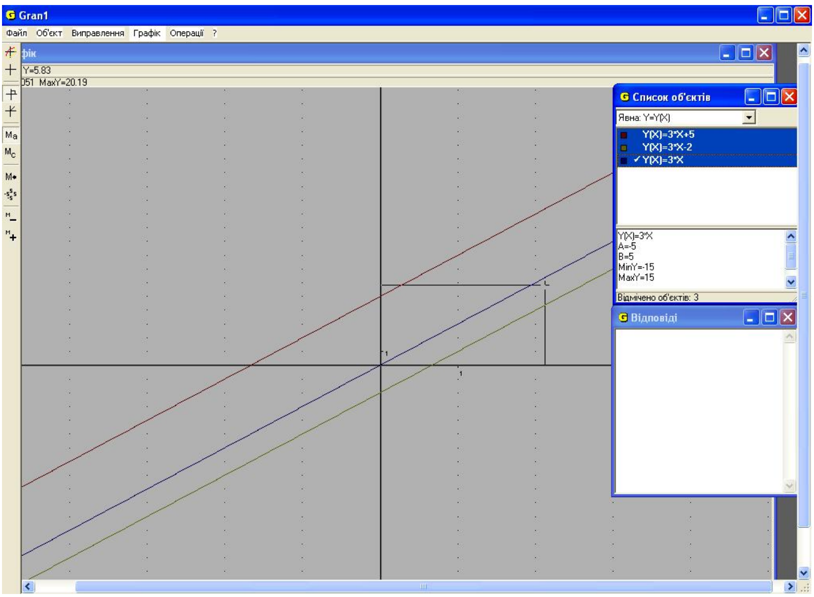
ГРАФІКИ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ			
$b = 0,\ y = kx$	$b \neq 0,\ y = kx + b$		
	*k>0* 	*k<0* 	*k = 0* 

Тепер вчитель просить побудувати графіки таких функцій: $y = 2x + 1$ і $y = 4x + 5$ (*мал. 3*). Учні бачать, що прямі перетинаються в одній точці.



Мал. 3

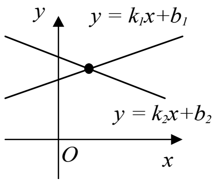
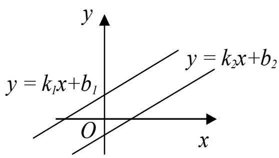
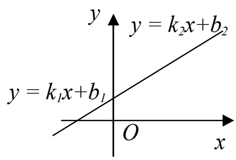
Будують графіки функцій: $y = 3x + 5$; $y = 3x - 2$; $y = 3x$ (*мал. 4*). Учні бачать, що графіки цих функцій паралельні.



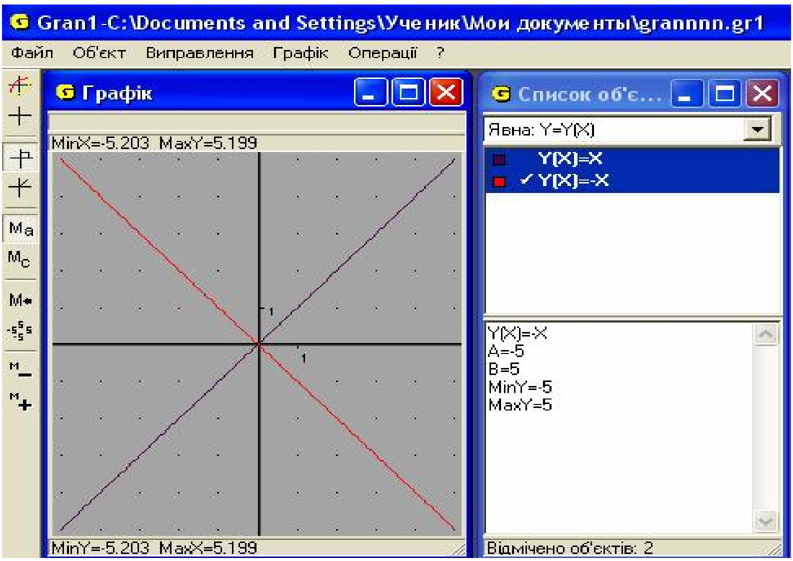
Мал. 4

Для систематизації взаємного розташування графіків лінійних функцій можна використати *таблицю 27*.

Таблиця 27

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ГРАФІКІВ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ		
Якщо $k_1 \neq k_2$, графіки функцій $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ перетинаються в одній точці. 	Якщо $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графіки функцій $y = k_1x+ b_1$ та $y = k_2x + b_2$ паралельні. 	Якщо $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$, графіки функцій $y = k_1x+ b_1$ та $y = k_2x + b_2$ співпадають. 

Побудувавши на комп'ютері графіки $y = x$ і $y = -x$, вчитель звертає увагу учнів, що графіки цих функцій є бісектрисами координатних кутів (*мал. 5*).



Мал. 5

Розглянувши пряму пропорційність, для закріплення знань доцільно використати *таблицю 28*.

Таблиця 28

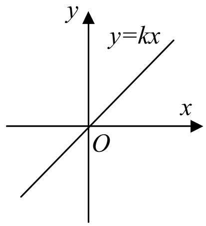
ПРЯМА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

Означення. Функція $y = kx$ при $k \neq 0$ називається ***прямою пропорційністю***, k — кутовий коефіцієнт. Ця функція є окремим випадком лінійної функції $y = kx + b$ при $b = 0$. Тому її графіком є пряма, яка проходить через початок координат.

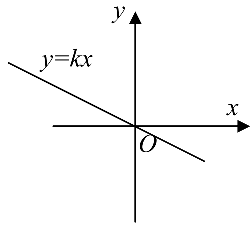
1. Якщо $k > 0$, то графік функції $y = kx$ розташований в I і III координатних кутах.	2. При $k < 0$ графік функції розташований в II і IV координатних кутах.

Характерна точка (0; 0)

k>0



k<0



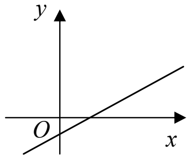
Учням пропонується відповісти на запитання, записані на *кодоплівці 21*.

Кодоплівка 21

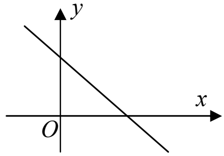
Картка 1. Яка з цих функцій лінійна?

$$y = x^2,\quad y = x - 2,\quad y = -2x,\quad y = \frac{3}{x}.$$

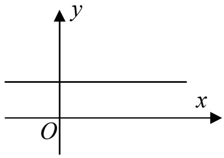
Картка 2. Який з графіків є графіком лінійної функції?



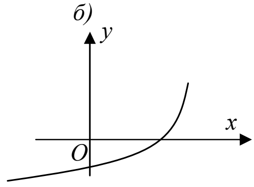
а)



б)



в)



г)

Картка 3. В якій точці графік лінійної функції перетинає вісь Oy?

Систематизацію і узагальнення теми «Функції» доцільно проводити у формі фронтального опитування за питаннями, записаними на *кодоплівці 22*.

Кодоплівка 22

1. Що таке функція? Наведіть приклади.
2. Що таке область визначення і область значень функції?
3. Які є способи задання функції?
4. Що таке графік функції?
5. Що таке нуль функції? Як його знайти?
6. Яка функція називається лінійною?
7. Що є графіком лінійної функції?
8. Що таке пряма пропорційність?
9. Що є графіком прямої пропорційності?
10. Які властивості має лінійна функція?

Вивчаючи системи лінійних рівнянь з двома змінними, на першому уроці, коли вчитель дав означення лінійного рівняння з двома змінними, для кращого розуміння і засвоєння йому корисно запропонувати учням таке завдання:

Кодоплівка 23

Дано рівняння:

1) $x^2 + 2xy = 24$;	4) $2x + y = 6$;
2) $\frac{m+n}{5} = 6$;	5) $3x - 0 \cdot y = 9$;
3) $0 \cdot x + 5y = 8$;	6) $2x \cdot y - 4y \cdot z = 26$.

Вкажіть:

а) рівняння з двома змінними;
б) лінійні рівняння з двома змінними;
в) рівняння з двома змінними першого степеня.

Розглядаючи тему «Графік лінійного рівняння з двома змінними», корисно учням дати алгоритм побудови графіка лінійного рівняння з двома змінними, викладений на *таблиці 29*:

Таблиця 29

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ГРАФІКА ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

1. Знайти значення y, якщо $x = 0$.
2. Знайти значення x, якщо $y = 0$.
3. Позначити на координатній площині точки А$(0; y)$ і В$(x; 0)$.
4. Провести пряму через дві точки.

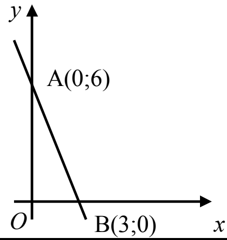
На *кодоплівці 24* варто показати приклад побудови графіка лінійного рівняння з двома змінними.

Кодоплівка 24

Побудуйте графік рівняння
$2x + y = 6$.

Розв'язання.

1. При $x = 0$, $y = 6$, A(0; 6).
2. При $y = 0$, $x = 3$, B(3; 0).
3. Будуємо точки A(0; 6) і B(3; 0).
4. Проводимо пряму AB.

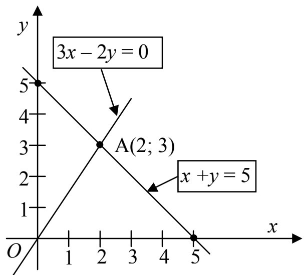


Першим розглядається графічний спосіб розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними. Вчитель на конкретних прикладах розглядає три випадки: 1) система рівнянь має один розв'язок, 2) система рівнянь не має розв'язку, 3) система рівнянь має безліч розв'язків. Для закріплення цих випадків варто виготовити *таблицю 30*.

Таблиця 30

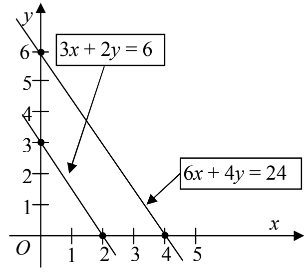
ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ x + y = 5. \end{cases}$



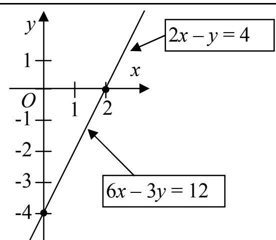
Один розв'язок (2; 3).

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 6x + 4y = 24. \end{cases}$



Немає розв'язків.

3. $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$



Безліч розв'язків.

Розглядаючи різні способи розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними, учителю корисно мати такі таблиці: «Алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом» (*таблиця 31*), «Алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки» (*таблиця 32*), «Алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними способом алгебраїчного додавання» (*таблиця 33*).

Таблиця 31

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ ГРАФІЧНИМ СПОСОБОМ

1. Побудувати графіки рівнянь на одній координатній площині.
2. Знайти координати точки перетину графіків або впевнитись в тому, що графіки рівнянь не перетинаються (є паралельними) або збігаються.
3. Якщо координати точки перетину — цілі числа, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язок системи визначити наближено.
4. Записати відповідь.

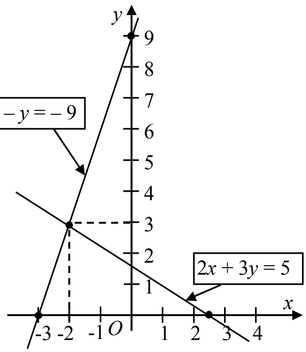
Приклад.

$$\begin{cases}2x+3y=5,\\3x-y=-9.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(-2)+3(3)=-4+9=5,\\3(-2)-3=-6-3=-9.\end{cases}$$

$$\begin{cases}5=5,\\-9=-9.\end{cases}$$

Відповідь: (−2; 3).



Таблиця 32

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ПІДСТАНОВКИ

1. Виразити в одному з рівнянь одну змінну через іншу (y через x або x через y).
2. Підставити її значення в друге рівняння.
3. Розв'язати рівняння з однією змінною.
4. Знайти значення другої змінної.
5. Записати відповідь.

Приклад. $\begin{cases}x+y=7,\\2x+y=9;\end{cases}$ $\begin{cases}y=7-x,\\2x+(7-x)=9;\end{cases}$ $\begin{cases}y=7-x,\\2x+7-x=9;\end{cases}$

$\begin{cases}y=7-x,\\x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}y=7-2,\\x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=5.\end{cases}$

Відповідь: (2; 5).

Таблиця 33

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ АЛГЕБРАЇЧНОГО ДОДАВАННЯ

1. Зрівняти коефіцієнти при змінній x або y так, щоб вони стали протилежними числами.
2. Скласти почленно ліві та праві частини одержаних рівнянь.
3. Розв'язати рівняння з однією змінною.
4. Знайдене значення змінної підставити в будь-яке рівняння системи.
5. Знайти значення другої змінної.
6. Записати відповідь.

Приклад. $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 2; \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right. \quad \begin{cases} 6x + 9y = 3, \\ -6x - 10y = -4; \end{cases} \quad \begin{matrix} -y = -1; \\ y = 1; \end{matrix}$

$\begin{cases} 2x + 3 \cdot 1 = 1, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 1 - 3, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = -2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$

Відповідь: $(-1;\ 1)$.

Ці таблиці можна використовувати і під час опитування учнів. Наведемо питання, які можуть бути задані учням.

1. Що означає розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними?
2. Що називається розв'язком системи лінійних рівнянь з двома змінними?
3. Скільки способів розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними ви знаєте? Які?
4. В чому полягає графічний спосіб?
5. Що можна сказати про розв'язок системи лінійних рівнянь, якщо графіки рівнянь не перетинаються?
6. Що можна сказати про розв'язок системи лінійних рівнянь, якщо графіки рівнянь співпадають?
7. В чому суть способу підстановки?
8. В чому суть способу додавання?
9. Коли два рівняння системи можна додавати?
10. Коли два рівняння системи можна віднімати?
11. В чому полягає незручність графічного способу розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними?
12. Коли зручно застосовувати спосіб додавання?

Для розв'язування задач на складання системи рівнянь варто використати таку наочність, як таблиці, записані на кодоплівках.

Наприклад, пропонуючи учням задачу «Якщо чисельник дробу збільшити на 7, то дріб дорівнюватиме $\frac{2}{3}$. Якщо ж знаменник початкового дробу збільшити на 2, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{4}$. Знайдіть цей дріб», вчитель після вивчення ними умови пропонує заповнити праву частину таблиці, зображеної на *кодоплівці 25*.

Кодоплівка 25

Позначте чисельник дробу через .... x.
Позначте знаменник дробу через ....y.
Запишіть чисельник дробу, збільшений на 7 ....$x + 7$.
Запишіть одержаний дріб .... $\frac{x+7}{y}$.
Складіть перше рівняння .... $\frac{x+7}{y} = \frac{2}{3}$.
Запишіть знаменник дробу, збільшений на 2 ....$y + 2$.
Запишіть одержаний дріб .... $\frac{x}{y+2}$.
Складіть друге рівняння .... $\frac{x}{y+2} = \frac{1}{4}$.
Розв'яжіть систему .... $\begin{cases} \frac{x+7}{y} = \frac{2}{3}, \\ \frac{x}{y+2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Для розв'язування задач, пов'язаних із швидкістю течії, зручно використати такий алгоритм розв'язування:

Таблиця 34

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ, ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ ШВИДКІСТЮ ТЕЧІЇ

1. Позначити власну швидкість човна.
2. Позначити швидкість течії.
3. Виразити швидкість човна за течією (проти течії).
4. Виразити швидкість човна проти течії (за течією).
5. Скласти систему рівнянь з двома змінними.
6. Розв'язати одержану систему рівнянь.
7. Перевірити, чи одержані розв'язки задовольняють умову задачі.

Розв'язуючи задачі, зручно виконувати їх схематичний запис. Наприклад, для задачі «На одному складі вугілля на 800 т більше, ніж на другому. Після того як з першого забрали 60% вугілля, а з другого 50%, на першому залишилось на 200 т більше, ніж на другому. Скільки вугілля залишилось на кожному складі?» корисно скласти такий схематичний запис на *кодоплівці 26*.

Кодоплівка 26

Схематичний запис задачі

I ситуація

I склад ______$\underline{x}$______ на 800 т більше, ніж

II склад ______$\underline{y}$______

Перше рівняння: $\underline{x - y = 800}$

II ситуація

	Було	Стало
I склад	− 60%	40% на 200 т більше, ніж
II склад	− 50%	50%

Друге рівняння: $\underline{0{,}4x - 0{,}5y = 200}$

Система рівнянь $\begin{cases} x - y = 800, \\ 0,4x - 0,5y = 200. \end{cases}$

При повторенні вивченого матеріалу вчитель повинен максимально встигнути охопити усі теми, а для цього йому допоможе така наочність як таблиці, картки із завданнями, кодоплівки, готові таблиці до задач. Таблиці та кодоплівки з алгоритмами різних дій вчитель може використати і на повторення, а ось таблиці до розв'язання задач та картки із завданнями повинен приготувати нові, щоб завдання не повторювались.

2.2. Наочні посібники на уроках алгебри 8 класу

Розглянемо методику використання різних видів наочності на уроках алгебри 8 класу.

При вивченні теми «Ділення степенів і одночленів» доцільно використати *кодоплівку 1*.

Кодоплівка 1

АЛГОРИТМ ДІЛЕННЯ СТЕПЕНІВ З ОДНАКОВИМИ ОСНОВАМИ

Щоб поділити степені з однаковими основами, треба:
а) основу залишити без зміни;
б) від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ де } m > n.$$

Приклад. $x^{10} : x^4 = x^{10-4} = x^6$.

Після пояснення ділення одночленів варто продемонструвати учням *кодоплівку 2*, на якій розмістити алгоритм ділення одночлена на одночлен і приклад.

Кодоплівка 2

АЛГОРИТМ ДІЛЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

$$24a^9b^7c^3 : 8a^6b^4c^2$$

№ з/п	Послідовність дій	Результат дій
1.	Виконати ділення коефіцієнта діленого на коефіцієнт дільника.	$24 : 8 = 3$
2.	Виконати ділення степенів з однаковими основами.	$a^9 : a^6 = a^3$ $b^7 : b^4 = b^3$ $c^3 : c^2 = c$
3.	До одержаного коефіцієнта дописати множники, одержані при діленні степенів.	$3a^3b^3c$
4.	Відповідь.	$3a^3b^3c$

Дана кодоплівка сприятиме засвоєнню цього алгоритма і успішному розв’язанню відповідних вправ.

На закріплення вивченого матеріалу вчитель пропонує учням дати відповіді на питання, записані на *кодоплівці 3*.

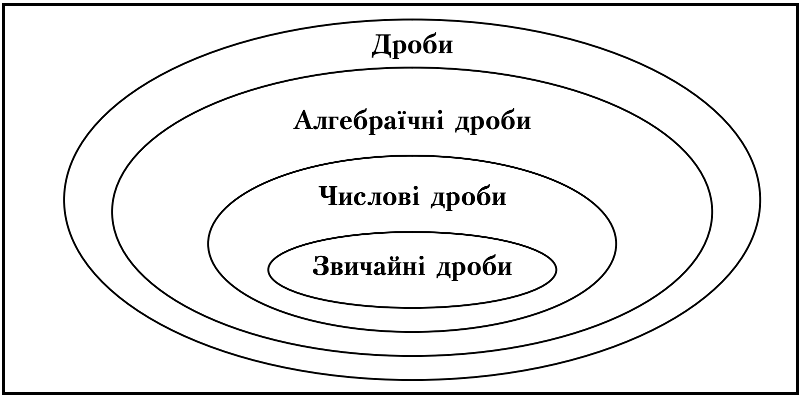
Після введення понять: дріб, алгебраїчний дріб, числовий дріб, звичайний дріб слід учням запропонувати *діаграму 1*, яка покаже співвідношення між цими видами дробів.

Кодоплівка 3

1. Сформулюйте основну властивість степеня.
2. Що означає дія ділення числа А на число В?
3. Сформулюйте правило ділення степенів.
4. Які з виразів: $(-2{,}5)^0$; 0^0; 1^0; $\left(\frac{3}{8}\right)^0$ мають зміст?
5. Для яких значень x вираз x^0 не має змісту? Має зміст?
6. Як виконується ділення одночлена на одночлен? Поясніть на прикладі:

$$12a^4b^3c : (-4)a^3b^3.$$

Діаграма 1



В кінці уроку варто провести фронтальне опитування учнів з вивченого матеріалу за допомогою *кодоплівки 4*.

Кодоплівка 4

1. Що таке дріб?
2. Як називаються члени дробу?
3. Який дріб називається звичайним? Наведіть приклади.
4. Який дріб називається алгебраїчним? Наведіть приклади.
5. Що таке допустимі значення змінних? Наведіть приклади.
6. Які вирази називаються тотожними? Наведіть приклади.
7. Що таке тотожність?
8. Що таке тотожне перетворення даного виразу?

Розглянувши основну властивість дробу і скорочення дробу, доцільно виділити алгоритм скорочення дробу, який разом з прикладом розмістити в *таблиці 1*, що дасть можливість учням успішно розв’язувати відповідні вправи.

Таблиця 1

СКОРОЧЕННЯ ДРОБІВ	
Алгоритм	***Приклад***
Скоротити дріб — це означає поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник. Ця дія обумовлена основною властивістю дробу. Для того, щоб скоротити дріб, треба: 1) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники; 2) виділити спільний множник в чисельнику і знаменнику дробу; 3) поділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник.	Скоротити дріб $\frac{6x-18x^3}{30x^2-90x^4}$: 1) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, винесемо за дужки спільний множник: $\frac{6x\left(1-3x^2\right)}{30x^2\left(1-3x^2\right)}$; 2) виберемо спільний множник в чисельнику і знаменнику — це $6x(1-3x^2)$; 3) скоротимо дріб на $6x(1-3x^2)$. *Відповідь*: $\frac{1}{5x}$.

На закріплення цього матеріалу можна запропонувати учням усні вправи на *кодоплівці 5*.

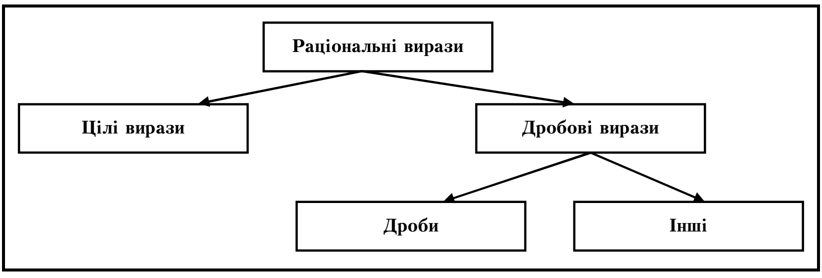
Кодоплівка 5

Виберіть тотожні вирази:

$$\frac{a}{b};\ \frac{-a}{-b};\ \frac{3a}{3b};\ \frac{8a}{9b};\ \frac{10a}{-10b};\ \frac{b}{a};\ \frac{3b}{3a};\ \frac{-12a}{12b};\ -\frac{4xa}{-4xb};\ \frac{45ya}{-45yb}.$$

Ввівши поняття раціонального виразу і видів раціональних виразів, слід запропонувати учням схему, яка ілюструє зв'язок між різними видами раціональних виразів.

Схема 1



Перед поясненням теми «Додавання і віднімання дробів» доцільно з учнями повторити правила додавання і віднімання звичайних дробів з рівними і різними знаменниками та запропонувати їм розв'язати вправи на *кодоплівці 6*.

Кодоплівка 6

Виконати дії:		
а) $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}$;	б) $\frac{7}{4}+\frac{10}{16}$;	в) $\frac{5}{8}+\frac{3}{5}$;
г) $\frac{10}{16}-\frac{5}{16}$;	д) $\frac{8}{11}-\frac{3}{33}$;	е) $\frac{6}{15}-\frac{3}{5}$.

Пояснивши дану тему, слід продемонструвати *таблицю 2*, якою учні мають користуватися протягом кількох уроків, поки не засвоять дані правила.

Таблиця 2

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ	
Сума (різниця) двох дробів з однаковими знаменниками дорівнює дробу з тим самим знаменником і чисельником, який дорівнює сумі (різниці) чисельників вихідних дробів.	$\frac{5x-2}{x+1}+\frac{4-2x}{x+1}=\frac{5x-2+4-2x}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}$; $\frac{5x-2}{x+1}-\frac{4-2x}{x+1}=\frac{5x-2-(4-2x)}{x+1}=$ $=\frac{5x-2-4+2x}{x+1}=\frac{7x-6}{x+1}$.
При додаванні (відніманні) двох раціональних дробів з різними знаменниками треба звести дроби до спільного знаменника та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.	$\frac{8}{x+2}+\frac{6}{x-2}=\frac{8(x-2)+6(x+2)}{(x+2)(x-2)}=$ $=\frac{8x-16+6x+12}{x^2-4}=\frac{14x-4}{x^2-4}$; $\frac{6}{4x-5y}-\frac{3}{2x}=\frac{6\cdot 2x-3(4x-5y)}{2x(4x-5y)}=$ $=\frac{12x-12x+15y}{8x^2-10xy}=\frac{15y}{8x^2-10xy}$.

Для перевірки рівня засвоєння учнями додавання і віднімання дробів можна запропонувати самостійну роботу на *кодоплівці 7*.

Розглянувши множення дробів, вчитель демонструє учням *кодоплівку 8*, після чого клас розв'язує вправи на множення дробів, користуючись цим правилом.

Кодоплівка 7

Самостійна робота	
І варіант	*ІІ варіант*
1. Знайдіть суму і різницю дробів:	1. Знайдіть суму і різницю дробів:
а) $\dfrac{4ax^2}{2m}$ і $\dfrac{3ax^2}{2m}$;	а) $\dfrac{n^2x}{18c}$ і $\dfrac{5n^2x}{18c}$;
б) $\dfrac{n+4}{n(n-5)}$ і $\dfrac{1}{n-5}$;	б) $\dfrac{a-4}{a(a-5)}$ і $\dfrac{1}{a-5}$;
в) 8 і $\dfrac{2x^2}{a-x^2}$.	в) 6 і $\dfrac{6x^2}{x^2-a}$.
2. Спростіть вираз:	2. Спростіть вираз:
а) 6 і $\dfrac{6x^2}{x^2-a}$;	а) $\dfrac{m}{m^2-4}+\dfrac{2}{m^2-4}$;
б) $\dfrac{a+3}{a^2-3a}+\dfrac{a-3}{3a+9}+\dfrac{12}{9-a^2}$.	б) $\dfrac{a+3}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{3}{1-a^2}$.

Кодоплівка 8

ПРАВИЛО МНОЖЕННЯ ДРОБІВ

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо їх чисельники і окремо знаменники: перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником дробу: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$.

Приклад. $\dfrac{x^4}{3y^2}\cdot\dfrac{15y}{x^2}=\dfrac{x^4\cdot 15y}{3y^2\cdot x^2}=\dfrac{5x^2}{y}$.

Далі вчитель пояснює піднесення дробу до степеня і проектує на дошку правило за допомогою *кодоплівки 9*, яке пропонує учням переписати в зошити.

Кодоплівка 9

ПРАВИЛО ПІДНЕСЕННЯ ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат записати у чисельнику, а другий — у знаменнику дробу: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.

Приклад. $\left(\dfrac{2x^5y^2}{3t^3}\right)^3=\dfrac{\left(2x^5y^2\right)^3}{\left(3t^3\right)^3}=\dfrac{2^3\left(x^5\right)^3\left(y^2\right)^3}{3^3\left(t^3\right)^3}=\dfrac{8x^{15}y^6}{27t^9}$.

Далі учні розв'язують вправи на піднесення дробу до степеня, користуючись цим правилом.

Пригадавши з учнями, що дія ділення обернена до дії множення, вчитель підводить їх до правила, яке проектує на дошку за допомогою *кодоплівки 10* і пропонує записати в зошити.

Кодоплівка 10

ПРАВИЛО ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

Щоб поділити один дріб на другий, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Приклад. $\frac{25x^3}{14y^2}:\frac{10x^2}{21y^3}=\frac{25x^3}{14y^2}\cdot\frac{21y^3}{10x^2}=\frac{25x^3\cdot 21y^3}{14y^2\cdot 10x^2}=\frac{5x\cdot 3y}{2\cdot 2}=\frac{15}{4}xy$.

При розгляді теми «Тотожні перетворення раціональних виразів» доцільно учням запропонувати *таблицю 3* послідовності виконання дій різних ступенів при перетворенні раціональних виразів.

Таблиця 3

ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИКОНАННЯ ДІЙ РІЗНИХ СТУПЕНІВ ПРИ ПЕРЕТВОРЕННІ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

1. Дії в дужках.
2. Дії третього ступеня (піднесення до степеня).
3. Дії другого ступеня (множення, ділення).
4. Дії першого ступеня (додавання, віднімання).

Приклад. Спростити вираз: $\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}$.

1. $\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}$.

2. $\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=$

$=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2}$.

3. $\frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=\frac{a(a-2)}{a-2}=a$.

Відповідь: a.

Бажано, щоб учні цю таблицю перенесли в зошити і користувалися нею при перетвореннях раціональних виразів як в класі, так і дома.

Перед розглядом методів розв'язування дробових раціональних рівнянь вчитель проводить актуалізацію опорних знань учнів у вигляді фронтального опитування, питання до якого проектуються на дошку з *кодоплівки 11*.

Кодоплівка 11

1. Що називається рівнянням?
2. Дайте означення кореня рівняння. Чи є число -4 коренем рівняння $3(x + 2) = -5 + x$? Як це визначити?
3. Що означає «розв'язати рівняння»?
4. Наведіть приклад рівняння, яке немає коренів. Доведіть.
5. Які рівняння називаються рівносильними? Сформулюйте властивості рівнянь.
6. Наведіть приклад рівняння, рівносильного рівнянню $-4x + 8 = 16$.
7. Дайте означення лінійного рівняння з однією змінною.
8. Скільки коренів має рівняння: а) $0 \cdot x = 5$; б) $x^2 - 9 = 0$?

Розглянувши методи розв'язування дробових раціональних рівнянь, доцільно запропонувати учням *таблицю 4*, на якій висвітлено три методи і алгоритми їх використання. Ця таблиця буде корисною учням під час розв'язування дробових рівнянь.

Таблиця 4

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДРОБОВИХ РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЇХ АЛГОРИТМИ		
1. Використання умови рівності дробу нулю: дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $a = 0$ і $b \neq 0$. *Алгоритм* 1. За допомогою тотожних перетворень звести рівняння до виду $\frac{a}{b} = 0$. 2. Прирівняти чисельник a до нуля і розв'язати утворене ціле рівняння. 3. Виключити з його коренів ті, при яких знаменник дробу b дорівнює нулю.	2. Використання основної властивості пропорції: якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(b \neq 0,\ d \neq 0)$, то $ad = bc$. *Алгоритм* 1. За допомогою тотожних перетворень звести рівняння до виду $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. 2. Використовуючи основну властивість пропорції, дістати ціле рівняння $ad = bc$ та розв'язати його. 3. Виключити з його коренів ті, при яких знаменники дробу b або d дорівнюють нулю.	3. Метод множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробів. *Алгоритм* 1. Розкласти на множники знаменники дробів, якщо це можливо. 2. Знайти найменший спільний знаменник дробів, що входять в рівняння. 3. Помножити обидві частини рівняння на цей спільний знаменник. 4. Розв'язати утворене ціле рівняння. 5. Виключити з його коренів ті, при яких спільний знаменник дробів перетворюється на нуль.

Вивчаючи степінь з цілим показником, варто учням запропонувати *таблицю 5*, яка допоможе їм успішніше засвоїти це поняття.

Таблиця 5

СТЕПІНЬ З ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aaaa...a}_{n \text{ раз}}, \text{ якщо натуральне число } n > 1; \\ a, \text{ якщо } n = 1; \\ 1, \text{ якщо } n = 0,\ a \neq 0; \\ \dfrac{1}{a^{-n}}, \text{ якщо } n \text{ – ціле від'ємне і } a \neq 0. \end{cases}$$

Повідомивши учням, що властивості степеня з цілими показниками такі самі, як і степенів з натуральними показниками, вчитель демонструє ці властивості на дошку з *кодоплівки 12*, які учні переносять в зошити.

Кодоплівка 12

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

Для будь-якого $a \neq 0$ і цілих m і n:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $a^n b^n = (ab)^n$;

6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

7) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Ввівши поняття стандартного вигляду числа, вчитель проводить закріплення цього поняття за допомогою *кодоплівки 13*, зміст якої учні переносять в зошити.

Кодоплівка 13

СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

$$x = a \cdot 10^n,$$

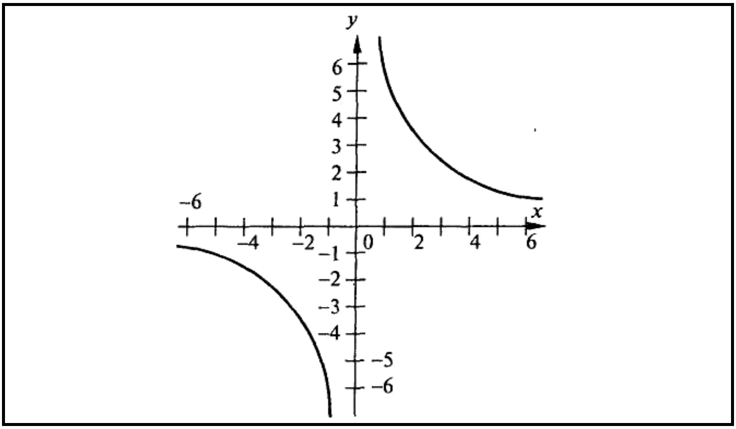
де $x > 0$, $1 \le a < 10$, n – ціле число, n – порядок числа x.

Приклади: $254 = 2{,}54 \cdot 10^2$; $6{,}38 = 6{,}38 \cdot 10^0$;

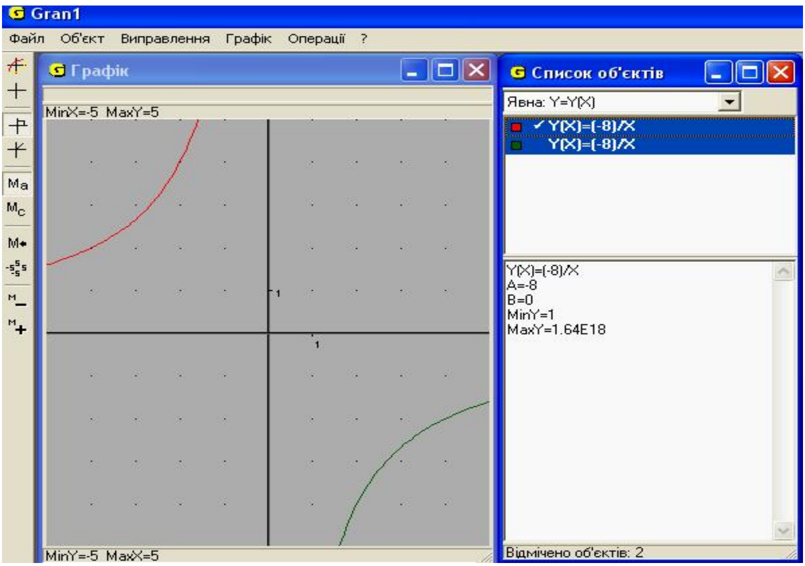
$0{,}15 = 1{,}5 \cdot 10^{-1}$; $100 = 10^2$; $0{,}001 = 10^{-3}$.

Навівши приклади оберненої пропорційності, вчитель пропонує розглянути функцію $y = \frac{6}{x}$. Учні складають таблицю значень аргументу і значень даної функції. Вчитель на *кодоплівці 14* будує відповідні точки і сполучає їх плавною лінією.

Кодоплівка 14

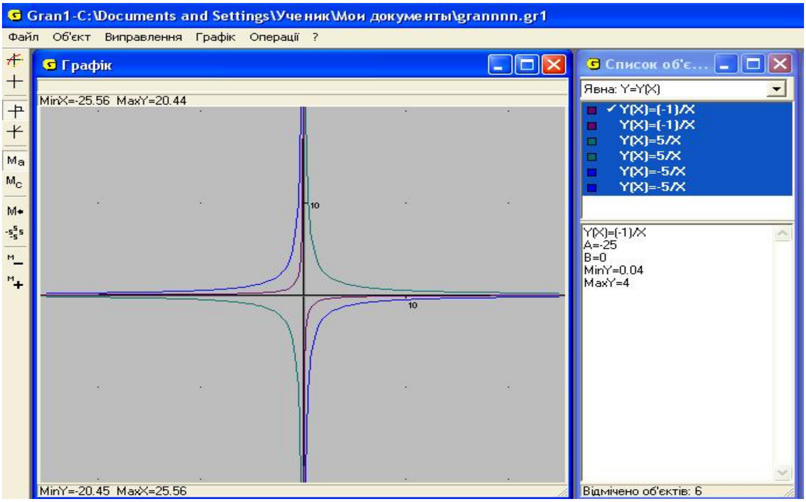


Тепер учні за допомогою програми GRAN–1 будують графік функції $y = \frac{-8}{x}$ (*мал. 1*).



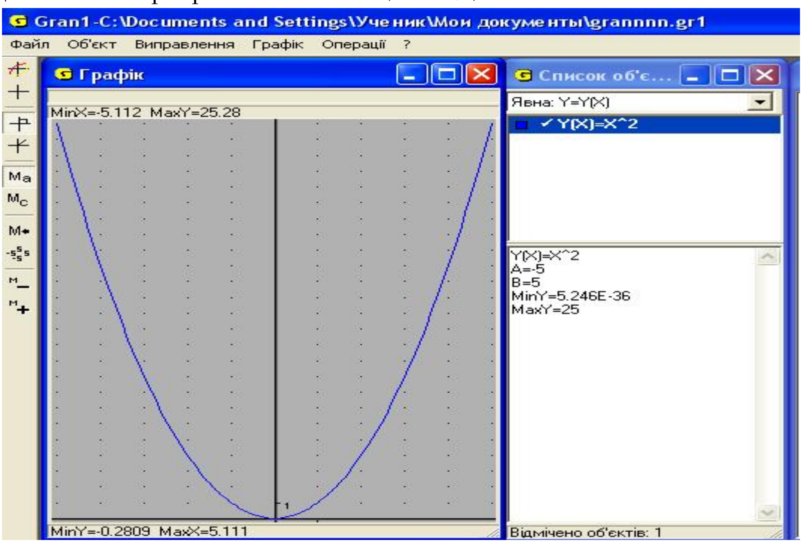
Мал. 1

Взявши різні значення k, учні будують за допомогою програми GRAN–1 графіки функцій $y = \frac{5}{x}$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{5}{x}$ (*мал. 2*).



Мал. 2

Аналізуючи ці графіки, учні встановлюють властивості функції $y = \frac{k}{x}$. Графік функції $y = x^2$ теж зручно побудувати за допомогою програми GRAN–1 (*мал. 3*).



Мал. 3

Такі поняття: квадратний корінь з числа *a*, арифметичне значення квадратного кореня, добування квадратного кореня варто вводити учням, використовуючи *таблицю 6*.

Таблиця 6

КВАДРАТНІ КОРЕНІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ	
Означення	***Приклади***
Квадратним коренем з числа *a* називають число, квадрат якого дорівнює *a*.	$x^2 = 16$, $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ — квадратні корені.
Арифметичним квадратним коренем з числа *a* називається невід'ємне число, квадрат якого дорівнює *a*. Арифметичний квадратний корінь з числа *a* позначається знаком $\sqrt{a}$; *a* називається ***підкореневим виразом***. Дія, за допомогою якої знаходиться арифметичний квадратний корінь, називається ***добуванням квадратного кореня.*** Рівність $\sqrt{a} = b$ є правильною, якщо 1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.	$\sqrt{16} = 4$; 4 — арифметичний квадратний корінь; $\sqrt{64} = 8$.
При $a<0$ $\sqrt{a}$ не має змісту, бо квадрат будь-якого числа невід'ємний.	$\sqrt{-36}$ не має змісту.
При будь-якому *a*, якщо $\sqrt{a}$ має зміст, правильна рівність: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.	$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$; $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

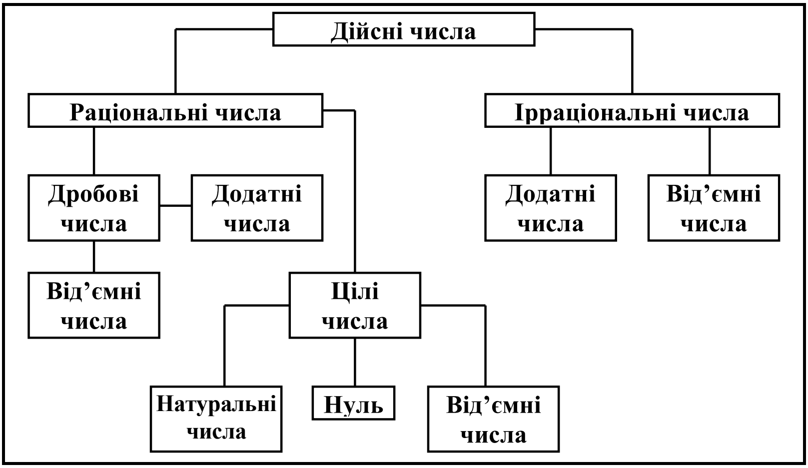
Закріплення цього матеріалу можна провести у вигляді фронтального опитування за допомогою питань, сформульованих на *кодоплівці 15*.

Кодоплівка 15

1. Що називають квадратним коренем числа *a*?
2. Скільки існує різних квадратних коренів з додатного числа *a*? З числа 0?
3. Що називають арифметичним квадратним коренем з числа *a*?
4. Скільки існує арифметичних значень квадратних коренів з додатного числа *a*? З числа 0?
5. При яких значеннях числа *a* вираз $\sqrt{a}$ не має змісту?
6. Чи має розв'язки рівняння $\sqrt{x} = m$, якщо $m \geq 0$, $m < 0$, і якщо має, то які?

Вивчаючи тему «Дійсні числа», слід підготувати *таблицю 7*, яка дасть можливість учням розглянути підмножини чисел, які входять в множину дійсних чисел.

Таблиця 7



На закріплення цієї теми корисно використати *кодоплівку 16.*

Кодоплівка 16

1. Які числа називаються дійсними?
2. Які числа утворюють множину раціональних чисел?
3. Які числа називаються ірраціональними числами?
4. Як можна подати кожне ірраціональне число?
5. Наведіть приклади ірраціональних чисел.
6. Чи є число 0 цілим, раціональним, дійсним?
7. Які дії можна виконувати над дійсними числами?
8. Чи завжди сума, різниця, добуток або частка двох ірраціональних чисел є числом ірраціональним?

Щоб підвести учнів до теорем про квадратний корінь з добутку, дробу і степеня, вчителю доцільно використати *кодоплівки 17, 18* і *19* відповідно.

Кодоплівка 17

Порівняйте вирази:

а) $\sqrt{36\cdot 4}$ і $\sqrt{36}\cdot\sqrt{4}$; в) $\sqrt{49\cdot 25}$ і $\sqrt{49}\cdot\sqrt{25}$;

б) $\sqrt{125\cdot 25}$ і $\sqrt{125}\cdot\sqrt{25}$; г) $\sqrt{9\cdot 4}$ і $\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}$.

Кодоплівка 18

Порівняйте вирази:

а) $\sqrt{\dfrac{64}{81}}$ і $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}}$; в) $\sqrt{\dfrac{49}{4}}$ і $\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{9}{4}}$ і $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$; г) $\sqrt{\dfrac{256}{25}}$ і $\dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt{25}}$.

Кодоплівка 19

Порівняйте вирази:
а) $\sqrt{3^4}$ і 3^2; в) $\sqrt{2^8}$ і 2^4;
б) $\sqrt{0,2^6}$ і $0,2^3$; г) $\sqrt{0,1^4}$ і $0,1^2$.

Довівши дані теореми і закріпивши їх, слід продемонструвати *таблицю 8*, якою учні можуть користуватися під час розв'язування вправ.

Таблиця 8

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ	
1. Якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. 2. Якщо $a \ge 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. 3. Якщо $a \ge 0$, $k \in N$, то $\sqrt{a^{2k}} = a^k$. 4. Для будь-якого значення a правильна рівність $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$. $\sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}$. $\sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44$. $\sqrt{(-2)^2} = \lvert -2 \rvert = 2$.

Для перевірки засвоєння властивостей арифметичного квадратного кореня можна використати такий математичний диктант на *кодоплівці 20*.

Кодоплівка 20

1. Корінь з добутку $\sqrt{0,64 \cdot 100} = \ldots$.
2. Добуток коренів $\sqrt{121} \cdot \sqrt{36} = \ldots$.
3. Значення виразу $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ дорівнює ….
4. Корінь з дробу $\sqrt{2\frac{14}{25}} = \ldots$.
5. Частка коренів $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} = \ldots$.
6. Значення виразу $\left(\sqrt{0,18}\right)^2 = \ldots$.
7. Значення виразу $\sqrt{36x^6} = \ldots$.

Способи тотожних перетворень виразів, що містять квадратні корені, доцільно пояснити, користуючись *кодоплівкою 21*.

1. Винесіть множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{x^9} = \sqrt{x^8 \cdot x} = \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{\left(x^4\right)^2} \cdot \sqrt{x} = x^4 \cdot \sqrt{x}$.

2. Внесіть множник під знак кореня:

а) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$;

б) $x\sqrt{2} = \begin{cases} \text{якщо } x \geq 0, \text{ то } x\sqrt{2} = |x|\sqrt{2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2x^2} \\ \text{якщо } x < 0, \text{ то } x\sqrt{2} = -|x|\sqrt{2} = -\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2x^2} \end{cases}$.

3. Спростіть вирази:

а) $2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(2 + 4\right) = 6\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{6}$;

в) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 = (-2)^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

г) $\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 4 - 3 = 1$; д) $\dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \dfrac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = x + \sqrt{2}$.

4. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\dfrac{15}{\sqrt{6} - 1} = \dfrac{15\left(\sqrt{6} + 1\right)}{\left(\sqrt{6} - 1\right)\left(\sqrt{6} + 1\right)} = \dfrac{15\left(\sqrt{6} + 1\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - 1} = \dfrac{15\left(\sqrt{6} + 1\right)}{6 - 1} = 3\left(\sqrt{6} + 1\right)$;

б) $\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

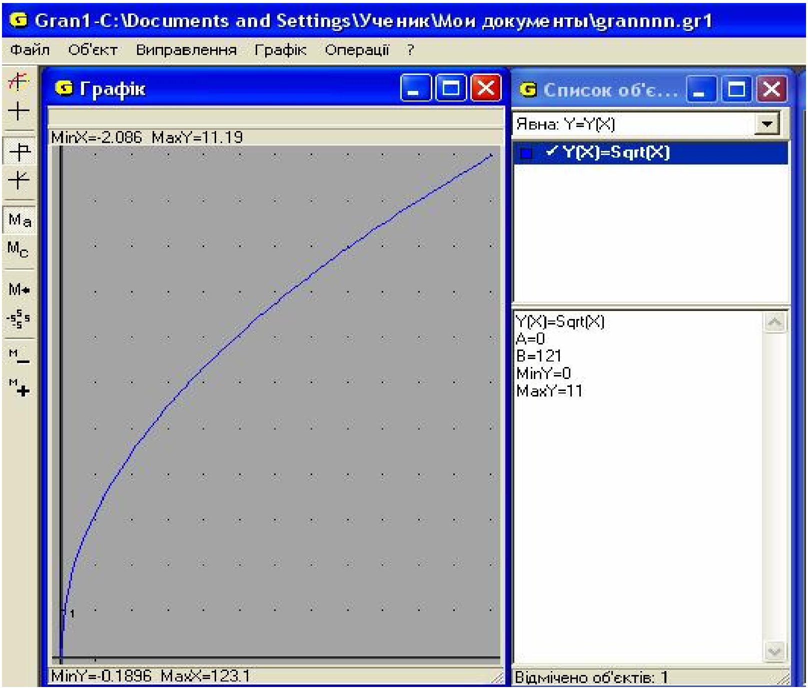
Для виконання тотожних перетворень виразів, що містять квадратні корені, різними способами зручно користуватися *таблицею 9*.

Таблиця 9

СПОСОБИ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНІ КОРЕНІ

1. Винесення множника з-під знака кореня.
2. Внесення множника під знак кореня.
3. Додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня виразів, що містять квадратні корені.
4. Скорочення дробів.
5. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу.

Розглядаючи функцію $y = \sqrt{x}$, варто за допомогою програми GRAN–1 побудувати її графік (*мал. 4*).



Мал. 4

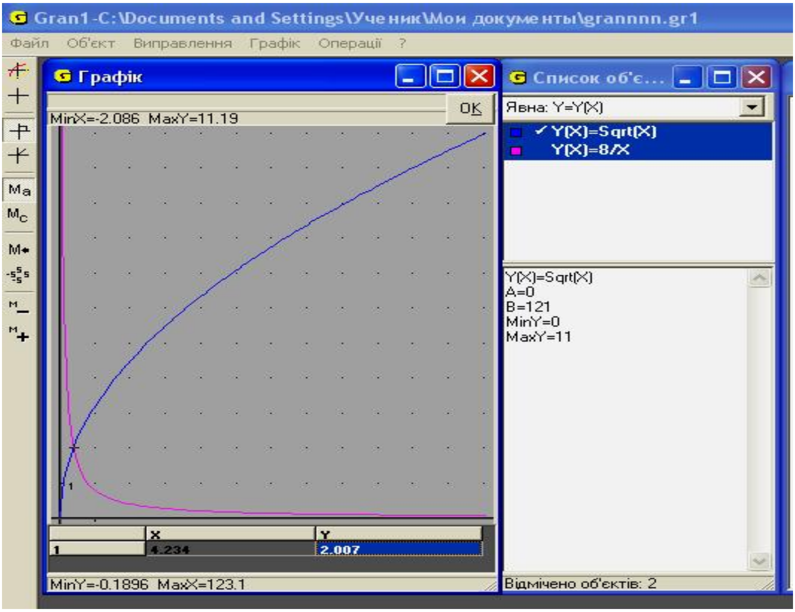
Використовуючи графік функції $y=\sqrt{x}$, учні з допомогою вчителя виділяють властивості цієї функції, які слід записати на *кодоплівці 22* і які учні мають переписати у свої зошити.

Кодоплівка 22

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y=\sqrt{x}$

1. Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел: $x \geq 0$.
2. Областю значень функції є множина всіх невід'ємних чисел: $y \geq 0$.
3. Графік функції — вітка параболи. Графік функції проходить через точку (0; 0). Всі інші точки графіка розміщені в першій координатній чверті.
4. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Після цього, використовуючи комп'ютер, можна пояснити учням графічний спосіб розв'язування, наприклад, рівняння $\frac{8}{x}-\sqrt{x}=0$ (*мал. 5*).



Мал. 5

Означення квадратного і неповного квадратного рівнянь, видів неповного квадратного рівняння зручно розглядати, користуючись *таблицею 10*.

Таблиця 10

<table>
<tr><th colspan="2">КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td>Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратним рівнянням; a — перший коефіцієнт, b — другий, c — вільний член.</td><td>$4x^2 - 4x - 3 = 0$;
$x^2 + 3x - 4 = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо в цьому рівнянні хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то дане рівняння називають неповним квадратним рівнянням. Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:
1) $ax^2 = 0$; 2) $ax^2 + bx = 0$; 3) $ax^2 + c = 0$.</td></tr>
<tr><td>1. $ax^2 = 0$ при $b = 0$, $c = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$; рівняння має тільки один розв'язок.</td><td>$4x^2 = 0$; $x = 0$.
Відповідь: 0.</td></tr>
<tr><td>2. При $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$; $x(ax + b) = 0$;
$x_1 = 0$ або $(ax + b) = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$;
рівняння завжди має два розв'язки.</td><td>$2x^2 + 3x = 0$; $x(2x + 3) = 0$;
$x = 0$ або $2x + 3 = 0$; $x = -\frac{3}{2}$.
Відповідь: 0; $-\frac{3}{2}$.</td></tr>
</table>

3. При $b = 0$ $ax^2 + c = 0$; $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то $-\frac{c}{a} \neq 0$, тоді: а) якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то рівняння має два розв'язки: $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$; б) якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то рівняння не має розв'язків.	$4x^2 - 25 = 0$; $x^2 = \frac{25}{4}$; $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = -\frac{5}{2}$. *Відповідь*: $\frac{5}{2}$; $-\frac{5}{2}$. $16x^2 + 1 = 0$; $x^2 = -\frac{1}{16}$; немає розв'язків. *Відповідь*: немає розв'язків.
Якщо $a = 1$, то квадратне рівняння називають ***зведеним***.	$x^2 - 5x + 6 = 0$.

Для засвоєння алгоритмів розв'язування неповних квадратних рівнянь можна запропонувати вправи, записані на *кодоплівці 23*.

Кодоплівка 23

У правій колонці знайдіть відповіді до рівнянь, які розміщені у лівій колонці.		
Завдання:	*Відповіді:*	
а) $-x^2 = 0$; б) $3x = x$; в) $5x(x + 2) = 6x$; г) $-3x(x + 4) = 9x$; д) $x^2 - 16 = 0$; е) $3x^2 - 12 = 0$; є) $4x^2 = 18x$.	1) 0; $-\frac{2}{5}$; 2) 0; 4,5; 3) 0; −7; 4) 0; 5) 4; −4;	6) 2; −2;. 7) $\frac{2}{3}$; 8) 1; −2; 9) 0,5; 1; 10) −1; −1.

Проводячи підсумок уроку, вчитель проектує на дошку запитання *кодоплівки 24*.

Кодоплівка 24

1. Які рівняння називаються квадратними?
2. Які рівняння називаються неповними квадратними рівняннями?
3. Як розв'язуються неповні квадратні рівняння виду: $ax^2 = 0$; $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$?
4. Які з рівнянь не мають коренів:
   а) $2x^2 = -18$; б) $-4x^2 = -1$; в) $x^2 + 64 = 0$?
   Чому?

Вивівши формулу коренів квадратного рівняння, вчитель розглядає різні випадки для виразу D за допомогою *таблиці 11*.

Таблиця 11

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ	
Повні квадратні рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, розв'язують за формулою: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, де $D = b^2 - 4ac$ називають ***дискримінантом*** даного квадратного рівняння.	
Якщо $D < 0$, то рівняння не має дійсних розв'язків.	$2x^2 - 3x + 2 = 0$; $D = 9 - 16 = -7$; $D < 0$, отже, рівняння не має дійсних розв'язків.
Якщо $D = 0$, то рівняння має два однакові розв'язки: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.	$9x^2 + 6x + 1 = 0$; $D = 36 - 36 = 0$; $D = 0$, отже, рівняння має два однакові розв'язки: $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{3}$. *Відповідь*: $-\dfrac{1}{3}$.
Якщо $D > 0$, то рівняння має два різні розв'язки: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.	$2x^2 - 7x + 3 = 0$; $D = 49 - 24 = 25$; $x_1 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{7+5}{4} = 3$. *Відповідь*: $\dfrac{1}{2}$; 3.
Для квадратного рівняння $ax^2 + 2kx + c = 0$, другий коефіцієнт якого — парне число, формулу розв'язків зручно записати так: $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$, де $D_1 = k^2 - ac$.	$4x^2 - 4x - 3 = 0$; $D_1 = 16$; $x_1 = \dfrac{2-4}{4} = -\dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{2+4}{4} = \dfrac{3}{2}$. *Відповідь*: $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{2}$.

До теореми Вієта можна підвести учнів за завданнями, записаними на кодоплівці 25.

Кодоплівка 25

1. Знайдіть корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.
2. Знайдіть суму і добуток цих коренів.
3. Порівняйте одержані відповіді з коефіцієнтами рівняння.

Узагальнюючи відповіді учнів, вчитель формулює теорему. Для формування умінь і навичок розв'язувати квадратні рівняння варто проводити самостійні роботи, записані, наприклад, на *кодоплівці 26*.

Пояснення теми «Квадратний тричлен, його корені. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники» варто провести за допомогою *таблиці 12*.

Вправи для розв'язування

1. Знайдіть корені рівняння, користуючись теоремою Вієта:
$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$
2. Розв'яжіть рівняння за загальною формулою:
а) $2x^2 - 7x - 4 = 0$; б) $3x^2 + 5x + 2 = 0$.
3. Розв'яжіть рівняння:
а) $x^2 - 4x - 12 = 0$; б) $x^2 + 12x + 20 = 0$.
4. Складіть квадратне рівняння за його коренями:
$$x_1 = -\sqrt{8}; \quad x_2 = \sqrt{8}.$$

Таблиця 12

КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН ТА ЙОГО РОЗВ'ЯЗКИ	
Вираз $2x^2 - 5x + 3$ є многочленом другого степеня з однією змінною. Такі многочлени називають ***квадратними тричленами.***	
Означення	***Приклади***
Розв'язком квадратного тричлена називається значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю. Для того, щоб знайти розв'язки квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.	Знайти розв'язки тричлена: $4x^2 + 3x - 10$. Розв'яжемо рівняння: $4x^2 + 3x - 10 = 0$. $D = 9 + 160 = 169$. $x_1 = \frac{-3+13}{8}$; $x_2 = \frac{-3-13}{8}$; $x_1 = \frac{5}{4}$; $x_2 = -2$. Тобто, квадратний тричлен має два розв'язки: $\frac{5}{4}$ та -2.
Якщо x_1 і x_2 — розв'язки квадратного тричлена $ax^2 + bx + c,$ то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.	$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1) \cdot (x - 1{,}5) = (x - 1) \cdot (2x - 3)$, $-2x^2 + 5x + 7 = -2(x - 1) \cdot (x + 1) = (7 - 2x) \cdot (x + 1)$.

Введення поняття біквадратного рівняння і метод його розв'язування можна провести за допомогою *кодоплівки 27*.

Розв'язуючи задачі за допомогою рівнянь, які зводяться до квадратних, треба вчити учнів виконувати схематичний запис задачі, який часто полегшує розв'язання задачі.

Пропонуючи учням задачі на рух, слід дати їм загальну схему розв'язання таких задач у вигляді *таблиці 13*.

БІКВАДРАТНЕ РІВНЯННЯ

Означення. Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають ***біквадратним рівнянням***.

Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Такий метод розв'язування рівнянь називають ***методом заміни змінної.***

Приклад. $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$.

Нехай $x^2 = t$, тоді $x^4 = t^2$. Одержимо квадратне рівняння відносно t: $4t^2 - 9t + 5 = 0$.

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81 - 80 = 1,\ D > 0,$$

$$t_1 = \frac{9+1}{8} = \frac{5}{4};\ t_2 = \frac{9-1}{8} = 1.$$

Повернемось до змінної x:

$$x^2 = 1;\ x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x^2 = \frac{5}{4};\ x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2};\ x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2};\ x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Таблиця 13

Вид транспорту	S, км	V, км/год	t, год	Рівняння
Мотоцикл				
Автомобіль				

Наприклад, розв'язуючи задачу «З міста в село, відстань між якими 16 км, вийшов пішохід. Через 2 год. 40 хв. у тому самому напрямі виїхав велосипедист і прибув у село одночасно з пішоходом. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо вона на 8 км/год більша за швидкість пішохода», вчитель пропонує учням заповнити *таблицю 14*, аналогічну до *таблиці 13*.

Таблиця 14

Вид транспорту	S, км	V, км/год	t, год	Рівняння
Пішохід	16	$x - 8$	$\frac{16}{x-8}$	$\frac{16}{x-8} - \frac{16}{x} = 2\frac{40}{60}$
Велосипедист	16	x	$\frac{16}{x}$	

Схематичні записи у вигляді таких таблиць полегшують розв'язання текстових задач складанням квадратних рівнянь.

В учнів виникають труднощі при розв'язуванні текстових задач на рух за течією і проти течії. Для усунення цих труднощів варто запропонувати загальну схему розв'язання таких задач у вигляді *таблиці 15*.

Таблиця 15

	Рух		Рівняння
	За течією	Проти течії	
Шлях, км			
Швидкість, км/год			
Час, год			

Наприклад, пропонуючи учням задачу «Катер пройшов 45 км за течією і 7 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Яка власна швидкість катера, якщо швидкість течії 2 км/год?», вчитель наголошує, що, заповнивши *таблицю 15*, одержуємо *таблицю 16*, яка дає нам шукане рівняння.

Таблиця 16

	Рух		Рівняння
	За течією	Проти течії	
Шлях, км	45	7	$\frac{45}{x+2}+\frac{7}{x-2}=3$
Швидкість, км/год	$x + 2$	$x - 2$	
Час, год	$\frac{45}{x+2}$	$\frac{7}{x-2}$	

Розв'язуючи задачу на роботу, наприклад, «Бригада планувала засіяти 200 га до певного терміну, але засівала щодня на 5 га більше, ніж планувала, і тому завершила роботу на 2 дні раніше. За скільки днів бригада закінчила сівбу?», вчитель пропонує заповнити *таблицю 17*, яка набере вигляду:

Таблиця 17

Робота бригади	Об'єм роботи, га	Засівала щодня, га	Працювала днів	Рівняння
За планом	200	x	$\frac{200}{x}$	$\frac{200}{x}-\frac{200}{x+5}=2$
Фактично	200	$x + 5$	$\frac{200}{x+5}$	

Знайшовши $x = 20$ і поділивши $\frac{200}{20+5}$, одержимо шукану відповідь: 8 днів.

Значне місце при розв'язуванні текстових задач за допомогою рівнянь займають задачі на сплави і розчини. Так, наприклад, задачу «Сплав міді і цинку, що містить 1 кг міді, сплавили з 2 кг міді. Дістали сплав, у якому відсоток міді на 25% більший, ніж у попередньому. Якою була маса початкового сплаву?» варто розв'язувати, заповнивши *таблицю 18*.

Таблиця 18

	Початковий сплав	Одержаний сплав	Рівняння
Маса сплаву, кг	x	$x + 2$	$\frac{3}{x+2} \cdot 100\% - \frac{1}{x} \cdot 100\% = 25\%$
Маса міді, кг	1	3	
Відсоток міді, %	$\frac{1}{x} \cdot 100\%$	$\frac{3}{x+2} \cdot 100\%$	

Використання розглянутих видів наочності на уроках алгебри 8 класу сприятиме свідомому засвоєнню учнями навчального матеріалу, підвищенню інтересу до математики, розвитку їх логічного мислення.

2.3. Наочні посібники на уроках алгебри 9 класу

Розкриємо методику використання різних видів наочності при вивченні тем курсу алгебри 9 класу.

Вивчаючи тему «Нерівності», на початку першого уроку слід повторити з учнями означення додатних і від'ємних чисел та розв'язати вправи, подані на *кодоплівці 1.*

Кодоплівка 1

Використовуючи знак > або <, запишіть висловлення:

а) $-\sqrt{2}$ — від'ємне число,
б) 400 — додатне число,
в) x — додатне число,
г) y — від'ємне число,
д) $-a$ — додатне число,
е) $-b$ — від'ємне число.

Далі вчитель демонструє *таблицю 1*, в якій заповнена лише ліва колонка. Пропонує учням записати її в зошити, надавши конкретних значень a і b, переконатися у вірності даних властивостей, сформулювати їх словами і записати у правій частині таблиці.

Таблиця 1

ВЛАСТИВОСТІ НЕРІВНОСТЕЙ	
Символічний запис	***Словесний запис***
Якщо $a > 0,\ b > 0$, то $a + b > 0,\ ab > 0,\ \frac{a}{b} > 0$.	Сума, добуток і частка двох додатних чисел — додатні числа.
Якщо $a < 0,\ b < 0$, то $a + b < 0,\ ab > 0,\ \frac{a}{b} > 0$.	Сума від'ємних чисел — число від'ємне, а добуток і частка двох від'ємних чисел — число додатне.
Якщо $a > 0,\ b < 0$, то $ab < 0,\ \frac{a}{b} < 0$.	Добуток і частка додатного і від'ємного чисел — від'ємні числа.
Якщо $ab > 0$ ($\frac{a}{b} > 0$), то або $a > 0$ і $b > 0$, або $a < 0$ і $b < 0$.	Якщо добуток або частка двох чисел — додатне число, то ці числа мають однакові знаки (тобто, обидва числа додатні або обидва від'ємні).
Якщо $ab < 0$ ($\frac{a}{b} < 0$), то або $a > 0$ і $b < 0$, або $a < 0$ і $b > 0$.	Якщо добуток або части двох чисел — від'ємне число, то ці числа мають різні знаки (тобто, одне з них додатне, а друге від'ємне).
Якщо $a < 0$, то $a^{2n} > 0$, $a^{2n+1} < 0$.	Парний степінь від'ємного числа — число додатне, а непарний степінь від'ємного числа — число від'ємне.

Така робота дасть можливість засвоїти властивості, які будуть використовуватися при вивченні наступного матеріалу.

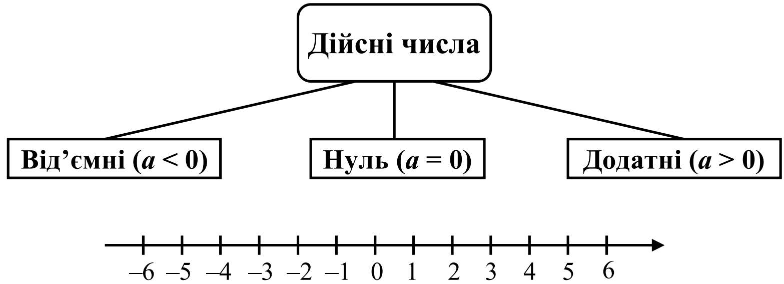
Для закріплення понять «більше», «менше» корисно запропонувати учням *таблицю 2*.

Розглядаючи нерівності і їх види, варто продемонструвати учням *кодоплівку 2*, зміст якої учні мають занести в зошити.

Основні властивості числових нерівностей теж можна пояснювати, використовуючи кодоплівки. Наприклад, розглядаючи першу властивість, запропонувати учням *кодоплівку 3*, у якій рядки доведення відкривати послідовно. За цією кодоплівкою зручно також провести закріплення цієї властивості. Аналогічно можна розглядати і інші властивості.

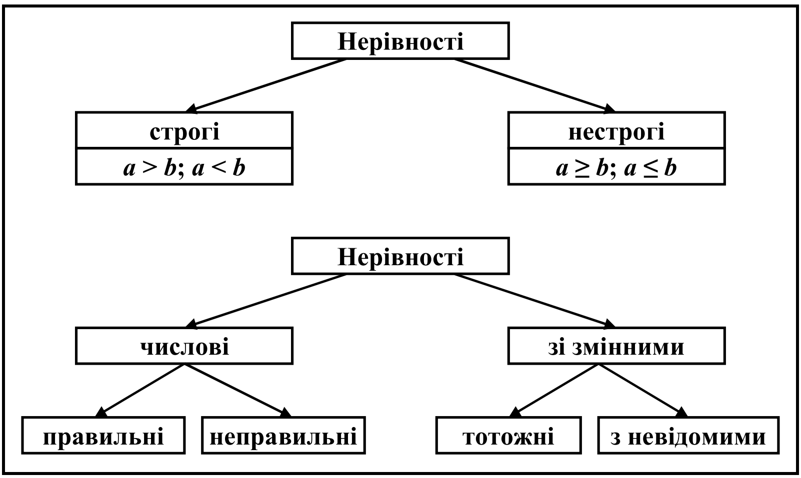
Таблиця 2

ДІЙСНІ ЧИСЛА ТА СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ НИМИ



Співвідношення	***Запис***	***Означає***	***Графічне зображення***
> (більше)	$a > b$	$a - b > 0$	b a (a праворуч від b)
< (менше)	$a < b$	$a - b < 0$	a b (a ліворуч від b)
= (дорівнює)	$a = b$	$a - b = 0$	a b (a співпадає з b)

Кодоплівка 2



Теорема 1. Якщо $a < b,\ b < c$, то $a < c$.

Доведення.

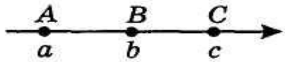
Якщо $a < b$, то $a - b < 0$.
Якщо $b < c$, то $b - c < 0$.
Додавши від'ємні числа $a - b$ і $b - c$, одержимо від'ємну суму

$$(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c < 0.$$

Отже, $a < c$.

Геометрично ця властивість означає:

якщо точка A (якій відповідає число a) лежить лівіше від точки B (якій відповідає число b), а точка B в свою чергу лежить лівіше від точки C (якій відповідає число c), тоді точка A тим більше буде лежати лівіше від точки C.



Аналогічно, якщо $a > b,\ b > c$, то $a > c$.

Для закріплення основних властивостей числових нерівностей, враховуючи аналогію між рівностями і нерівностями, варто використати *таблицю 3*.

Таблиця 3

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНОСТЕЙ ТА НЕРІВНОСТЕЙ	
Рівності	***Нерівності***
Якщо $a = b,\ b = c$, то $a = c$.	Якщо $a > b,\ b > c$, то $a > c$.
Якщо $a = b$, то $a + c = b + c$.	Якщо $a > b$, то $a + c > b + c$.
Якщо $a = b,\ c \neq 0$, то $ac = bc$.	Якщо $a > b,\ c > 0$, то $ac > bc$.
	Якщо $a > b,\ c < 0$, то $ac < bc$.
Якщо $a = b,\ c = d$, $a + c = b + d$.	Якщо $a > b,\ c > d,\ a + c > b + d$.
Якщо $a = b,\ c = d$, то $ac = bd$.	Якщо $a > b$ $(a > 0,\ b > 0)$ і $c > d$ $(c > 0,\ d > 0)$, то $ac > bd$.
Якщо $a = b$, то $a^n = b^n$.	Якщо $a > b$ $(a > 0,\ b \geq 0)$, то $a^n > b^n$.
Якщо $a = b$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$, то $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.	Якщо $a > b$ $(a > 0,\ b > 0)$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.
Якщо $a = b,\ a \neq 0,\ b \neq 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$.	Якщо $a > b$ $(a > 0,\ b > 0)$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Розглядаючи подвійні нерівності, варто показати учням їх властивості на *таблиці 4*.

Таблиця 4

ВЛАСТИВОСТІ ПОДВІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

1. Якщо до кожної частини правильної подвійної нерівності $a < b < c$ додати одне й те саме число d, то одержиться правильна подвійна нерівність:

$$a + d < b + d < c + d.$$

Приклад. $-2 < 1 < 4$. Додамо число $d = -1$.
$-2 - 1 < 1 - 1 < 4 - 1$; $-3 < 0 < 3$ — правильна нерівність.

2. Якщо кожну частину правильної подвійної нерівності $a < b < c$ помножити на будь-яке додатне число d, то одержиться правильна подвійна нерівність:

$$ad < bd < cd.$$

Приклад. $-5 < 4 < 6$. Помножимо на число $d = 2$.
$-5 \cdot 2 < 4 \cdot 2 < 6 \cdot 2$; $-10 < 8 < 12$ — правильна нерівність.

3. Якщо кожну частину правильної подвійної нерівності $a < b < c$ помножити на будь-яке від'ємне число n, помінявши при цьому знаки нерівності на протилежні, то одержиться правильна подвійна нерівність:

$$an > bn > cn.$$

Приклад. $-1 < 2 < 5$. Помножимо на число $n = -3$ і поміняємо знаки нерівності на протилежні.
$-1(-3) > 2(-3) > 5(-3)$; $3 > -6 > -15$ — правильна нерівність.

Застосування властивостей числових нерівностей для оцінювання значення виразу зручно пояснювати, використовуючи *кодоплівку 4*.

Кодоплівка 4

Відомо, що $4 < x < 8$, $1 < y < 3$. В яких межах знаходитиметься сума $x + y$?

Оцінимо суму $x + y$.

Оскільки $x < 8$, $y < 3$, то за теоремою про почленне додавання нерівностей маємо: $x + y < 11$.

Оскільки $4 < x$, $1 < y$, то $5 < x + y$.

Результат можна записати у вигляді подвійної нерівності $5 < x + y < 11$.

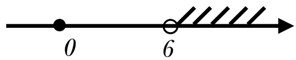
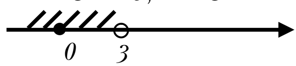
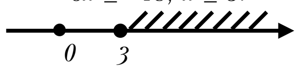
На закріплення цієї теми можна використати *таблицю 5*, яка дасть можливість повторити застосування властивостей числових нерівностей для оцінювання суми, різниці, добутку і частки двох чисел.

Розгляд нерівностей з однією змінною, їх властивостей варто супроводжувати демонстрацією *таблиці 6*.

Таблиця 5

ОЦІНКА СУМИ, РІЗНИЦІ, ДОБУТКУ, ЧАСТКИ		
1. $\begin{array}{c} a \le x \le b \\ \downarrow \quad \downarrow \\ c \le y \le d \\ \hline a + c \le x + y \le b + d \end{array}$	3. $\begin{array}{c} a \le x \le b \\ \downarrow \quad \downarrow \\ c \le y \le d \\ \hline ac \le x \cdot y \le bd \end{array}$	$(a > 0)$; $(c > 0)$.
2. $\begin{array}{c} a \le x \le b \\ \nwarrow \nearrow \\ \swarrow \searrow \\ c \le y \le d \\ \hline a - d \le x - y \le b - c \end{array}$	4. $\begin{array}{c} a \le x \le b \\ \nwarrow \nearrow \\ \swarrow \searrow \\ c \le y \le d \\ \hline \dfrac{a}{d} \le \dfrac{x}{y} \le \dfrac{b}{c} \end{array}$	$(a > 0)$; $(c > 0)$.

Таблиця 6

ВЛАСТИВОСТІ НЕРІВНОСТЕЙ ЗІ ЗМІННИМИ	
Властивості	***Приклади***
1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок з протилежним знаком, то одержиться нерівність, рівносильна даній.	$2x - 5 > x + 1$; $2x - x > 1 + 5$; $x > 6$.  $x \in (6; +\infty)$.
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержиться нерівність, рівносильна даній.	$5x - 8 < 2x + 1$; $5x - 2x < 1 + 8$; $3x < 9$; $x < 3$.  $x \in (-\infty; 3)$
3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то одержиться нерівність, рівносильна даній.	$-4x + 6 \le 2x - 12$; $-4x - 2x \le -12 - 6$; $-6x \le -18$; $x \ge 3$.  $x \in [3; +\infty)$

Ввівши поняття лінійної нерівності і розглянувши алгоритм її розв'язування, корисно запропонувати учням *таблицю 7*, якою вони будуть користуватися, розв'язуючи лінійні нерівності.

Також при цьому слід розглянути різні види числових проміжків. Для цього можна скористатися *таблицею 8* і проілюструвати всі ці числові проміжки на конкретних лінійних нерівностях.

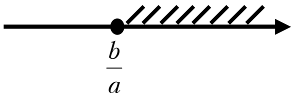
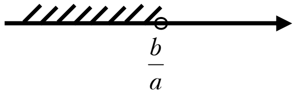
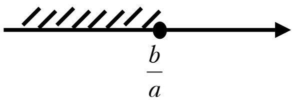
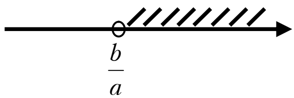
Таблиця 7

ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ

Означення. ***Лінійною нерівністю*** з однією змінною x називається нерівність виду $ax < b$, $ax > b$, $ax \le b$, $ax \ge b$, де a і b — дані числа, а x — невідома змінна.

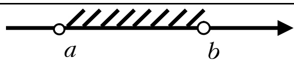
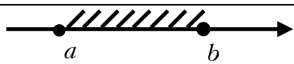
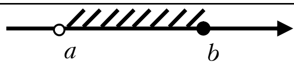
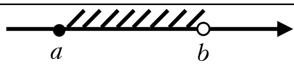
Розв'язком нерівності з однією змінною називається значення цієї змінної, яке перетворює її на правильну числову нерівність.

Залежність розв'язків лінійної нерівності від значення коефіцієнта при змінній і знака нерівності

$\boldsymbol{ax \ge b}$	$\boldsymbol{ax < b}$
1. Якщо $a > 0$, то $x \ge \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$. 	Якщо $a > 0$, то $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$. 
2. Якщо $a < 0$, то $x \le \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$. 	Якщо $a < 0$, то $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$. 
3. Якщо $a = 0$, то $x \in \varnothing$ при $b > 0$ і $x \in R$ при $b \le 0$.	Якщо $a = 0$, то $x \in R$ при $b > 0$ і $x \in \varnothing$ при $b \le 0$.

Таблиця 8

ЧИСЛОВІ ПРОМІЖКИ

Вид проміжку	Геометричне зображення	Позначення	Запис за допомогою нерівностей
Інтервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Відрізок		$[a; b]$	$a \le x \le b$
Півінтервал		$(a; b]$	$a < x \le b$
Півінтервал		$[a; b)$	$a \le x < b$

Продовження таблиці 8

Промінь		$[a; +\infty)$	$x \geq a$
Промінь		$(-\infty; b]$	$x \leq b$
Відкритий промінь		$(a; +\infty)$	$x > a$
Відкритий промінь		$(-\infty; b)$	$x < b$
На практиці не завжди використовують терміни «інтервал», «відрізок», «півінтервал», «промінь», а замінюють їх спільною назвою «числовий промінь».			

Підсумок даної теми можна провести у вигляді усного опитування за питаннями, наведеними на *кодоплівці 5*.

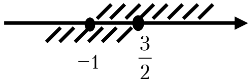
Кодоплівка 5

Серед наведених тверджень виберіть правильні:

1. Розв'язком нерівності $2x - 1 \geq 3$ є число 5.
2. Розв'язком нерівності $2x - 1 \geq 3$ є число 0.
3. Нерівність $4x \geq 12$ рівносильна нерівності $x \geq 3$.
4. Нерівність $-4x \geq 12$ рівносильна нерівності $x \geq -3$.
5. Розв'язком нерівності $3x + 3 < 15$ є проміжок $[-4; +\infty)$.
6. Вираз $\sqrt{2x-4}$ має зміст, якщо $x \in [2; +\infty)$.
7. Нерівність $0x > 4$ справедлива при будь якому значенні x.

Пояснюючи системи лінійних нерівностей з однією змінною, їх розв'язування, доцільно використати *таблицю 9*.

Таблиця 9

<table>
<tr><th colspan="2">РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>Якщо необхідно знайти спільні розв'язки двох чи більше нерівностей з однією змінною, це значить, що треба розв'язати систему двох чи більше нерівностей з однією змінною.</td><td rowspan="3">$\begin{cases} 2x + 2 \geq 0, \\ 3 - 2x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x \geq -2, \\ -2x \geq -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq \frac{3}{2}; \end{cases}$

Значення $x \in \left[-1; \frac{3}{2}\right]$ є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 2x + 2 \geq 0, \\ 3 - 2x \geq 0. \end{cases}$
Відповідь: $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$.</td></tr>
<tr><td>Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називається значення змінної, яке задовольняє кожну з нерівностей даної системи.</td></tr>
<tr><td>Розв'язати систему нерівностей з однією змінною означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.</td></tr>
</table>

Вчитель наголошує учням, що розв'язування будь-якої системи лінійних нерівностей з однією змінною зводиться до розв'язування однієї з чотирьох найпростіших систем: $\begin{cases} x > a, \\ x > b; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ x < b; \end{cases}$ $\begin{cases} x > a, \\ x < b; \end{cases}$ $\begin{cases} x < a, \\ x > b, \end{cases}$ і пропонує учням виконати геометричну ілюстрацію та заповнити другу і третю колонки *кодоплівки 6*.

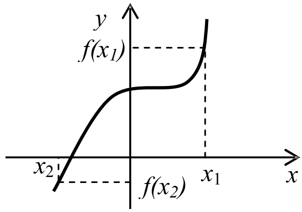
Кодоплівка 6

Система нерівностей ($a > b$)	**Геометрична ілюстрація**	**Розв'язок**
$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$		
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$		
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$		
$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$		

Тему «Квадратична функція» слід розпочати з повторення означення функції, області визначення і множини значень, графіка функції. Цьому допоможе *таблиця 10*.

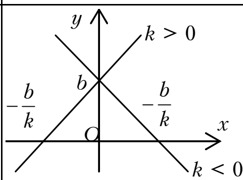
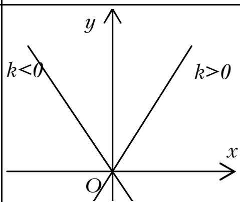
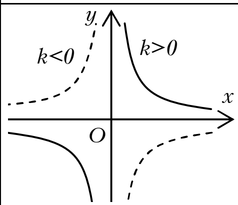
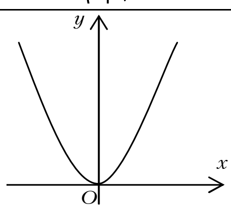
Таблиця 10

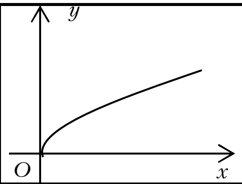
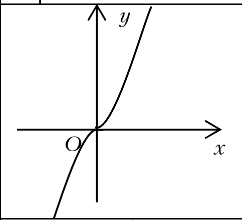
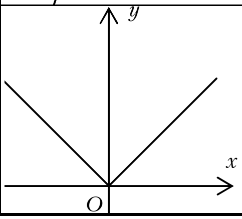
ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ
Означення. Відповідність між змінною y та змінною x називається ***функцією***, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.
Функція позначається або однією буквою f або $f(x)$, або рівністю $y = f(x)$, де x — незалежна змінна або аргумент, y — залежна змінна або функція, $f(x_0)$ — значення функції в точці x_0.
Область визначення і множина значень функції
Область визначення функції (D) — множина тих значень, які може набувати аргумент.
Множина значень функції (E) — це множина тих значень, які може набувати сама функція при всіх значеннях аргументу із області визначення. *Наприклад:* $f(x) = \dfrac{5}{x-1}$. Область визначення: $x - 1 \neq 0$; $x \neq 1$, x — будь-яке число, крім $x = 1$.

Графік функції	
Означення. ***Графіком функції*** $y = f(x)$ називається множина точок площини з координатами $(x; y)$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції $f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції в точці x.	

Повторення і узагальнення властивостей вивчених видів функцій можна провести у вигляді фронтальної бесіди, використовуючи *таблицю 11*, у якій *3, 4, 5, 6* стовпці заповнюються учнями.

Таблиця 11

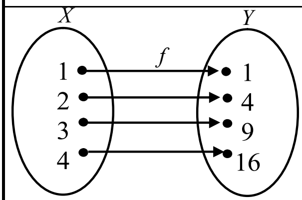
Функція	**Графік**	**Область визначення**	**Область значень**	**Нулі функції**	**Зростання, спадання функції**
Лінійна $y = kx + b$		$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x = -\frac{b}{k}$	$k > 0$ — зростає, $k < 0$ — спадає
Пряма пропорційність $y = kx$		$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x = 0$	$k > 0$ — зростає, $k < 0$ — спадає
Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$, $(k \neq 0)$		$(-\infty; 0) \cup \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup \cup (0; +\infty)$	—	$k > 0$ — спадає, $k < 0$ — зростає
$y = x^2$		$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$x = 0$	$(-\infty; 0)$ – спадає, $(0; +\infty)$ – зростає

$y=\sqrt{x}$		$[0;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$x=0$	зростає
$y=x^3$		$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$x=0$	зростає
$y=\lvert x\rvert$		$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$x=0$	$(-\infty;0)$ – спадає, $(0;+\infty)$ – зростає

Розглядаючи властивості функцій: парність, непарність, зростання, спадання, корисно використати *таблицю 12*.

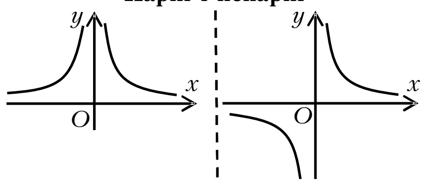
Таблиця 12

ФУНКЦІЇ



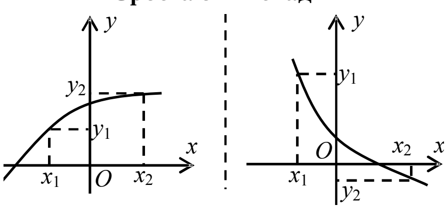
X – область визначення,
Y – область значень.

Парні і непарні



$f(-x)=f(x)$. $\quad f(-x)=-f(x)$.

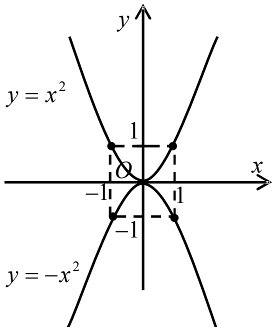
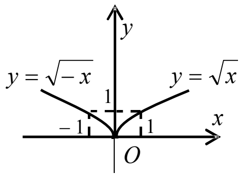
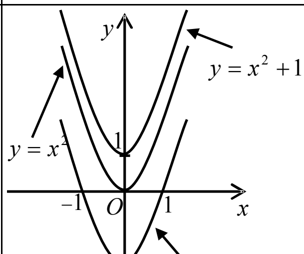
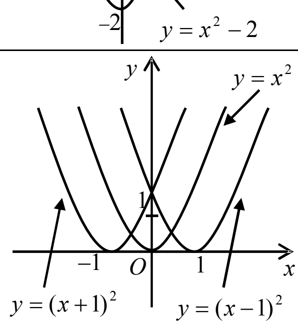
Зростаючі і спадні



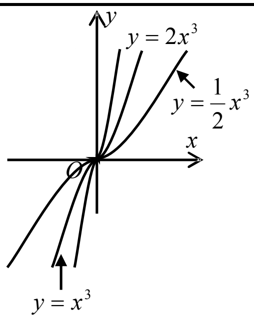
Якщо $x_1 < x_2$, то $y_1 < y_2$. Якщо $x_1 < x_2$, то $y_1 > y_2$.

Найпростіші перетворення графіків функцій доцільно пояснювати, використовуючи *таблицю 13*.

Таблиця 13

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ			
Функція виду	**Перетворення**	**Приклад**	**Алгоритм побудови**
$y=-f(x)$	Симетрія відносно осі x.		1. Побудувати графік $y=f(x)$. 2. Відобразити його симетрично осі x. Дістанемо графік $y=-f(x)$.
$y=f(-x)$	Симетрія відносно осі y.		1. Побудувати графік $y=f(x)$. 2. Відобразити його симетрично осі y. Дістанемо графік $y=f(-x)$.
$y=f(x)\pm n,$ $(n>0)$	Паралельне перенесення вздовж осі y на n одиниць.		1. Побудувати графік $y=f(x)$. 2. Паралельно перенести вгору на n одиниць, якщо $n>0$, або вниз на n одиниць, якщо $n<0$.
$y=f(x-m)$	Паралельне перенесення вздовж осі x на m одиниць.		1. Побудувати графік $y=f(x)$. 2. Паралельно перенести його на m одиниць праворуч, якщо $m>0$, і на m одиниць ліворуч, якщо $m<0$.

Продовження таблиці 13

$y = kf(x)$, $(k > 0)$	При $k > 1$ розтяг вздовж осі y в k разів, при $0 < k < 1$ стиск вздовж осі y в $\frac{1}{k}$ разів.		1. Побудувати графік $y = f(x)$. 2. Розтягнути цей графік вздовж осі y в k разів, якщо $k > 1$ і стиснути до осі x в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$.

Для пояснення квадратичної функції і її графіка корисно використати *таблицю 14*.

Таблиця 14

<table>
<tr><th colspan="2">КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ</th></tr>
<tr><td>Квадратичною функцією називається функція, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.</td><td>Приклади квадратичної функції:
$y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2 + 3$,
$y = (x - 2)^2$.
Графіки — рівні параболи, тільки по-різному розташовані на координатній площині.</td></tr>
<tr><td>Графіки функцій
$y = ax^2 + bx + c$
і $y = ax^2$ – параболи, їх можна сумістити паралельним перенесенням, оскільки функцію $y = ax^2 + bx + c$ можна представити у вигляді $y = a(x + m)^2 - n$.</td><td>Функцію $y = 3x^2 - 6x + 12$ можна записати так: $y = 3(x - 1)^2 + 9$.
$y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1 =$
$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 2\right) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Отже, графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, яку можна отримати із графіка функції $y = ax^2$ за допомогою двох паралельних перенесень — зсуву вздовж осі x і зсуву вздовж осі y.
Звідси отримуємо, що графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, вершиною якої є точка $(m;\ n)$, де $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.
Віссю симетрії параболи є пряма $x = m$, паралельна осі y. При $a > 0$ вітки параболи направлені вгору, а при $a < 0$ — вниз.</td></tr>
</table>

Алгоритм побудови графіка квадратичної функції варто продемонструвати на дошці за допомогою *кодоплівки 7*, зміст якої учні записують в зошити і використовують при розв’язуванні відповідних вправ.

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ГРАФІКА КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

1. Побудувати вершину параболи $(x_0; y_0)$, обчисливши x_0, y_0 за формулами:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

2. Провести через вершину параболи пряму, паралельну осі y, — вісь симетрії параболи.
3. Знайти нулі функції, якщо вони є (розв'язавши рівняння $ax^2 + bx + c = 0$), і побудувати на осі абсцис відповідні точки параболи.
4. Знайти, у якій точці вісь y перетинається з графіком функції (підставивши у формулу $y = ax^2 + bx + c$ значення $x = 0$), і побудувати на осі ординат відповідну точку параболи.
5. Побудувати дві які-небудь точки параболи, симетричні відносно її осі. Для цього треба взяти дві точки на осі x, симетричні відносно точки x_0, і обчислити відповідні значення функції (ці значення однакові).
6. Провести параболу через побудовані точки.

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу можна провести математичний диктант, записаний на *кодоплівці 8*.

Кодоплівка 8

Математичний диктант

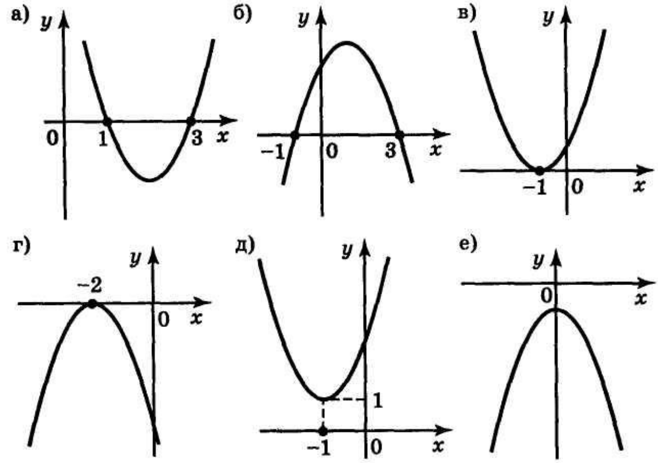
Закінчіть твердження:

- Квадратичною функцією називається функція, яку можна задати формулою ….
- Графіком квадратичної функції є ….
- Абсцису вершини параболи можна знайти за формулою ….
- Вітки параболи направлені вгору, якщо ….
- Значення x, при яких значення функції дорівнює нулю, називаються ….
- Графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ симетричний відносно прямої ….

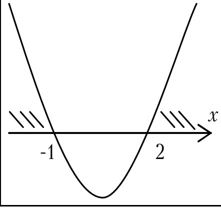
Під час вивчення теми «Квадратна нерівність. Розв'язування квадратних нерівностей» доцільно спочатку використати *кодоплівку 9*, а далі користуватися *таблицею 15*.

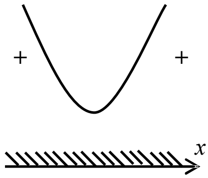
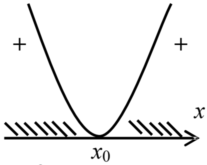
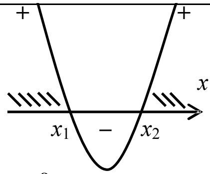
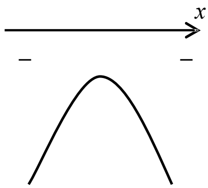
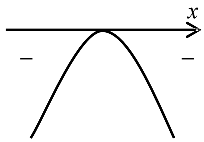
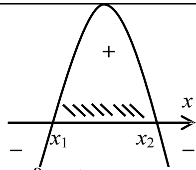
Користуючись графіками, наведеними нижче, вкажіть значення змінної x, при яких функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває:

а) додатних значень;
б) від'ємних значень;
в) значень, рівних нулю;
г) найбільших значень;
д) найменших значень.



Таблиця 15

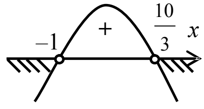
<table>
<tr><th colspan="3">РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ НЕРІВНОСТЕЙ</th></tr>
<tr><th colspan="2">Означення</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td colspan="2">Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, $a \neq 0$, називається квадратними.</td><td>а) $-4x^2 + 8x + 5 > 0$;
б) $x(x + 2) \leq 3$, або
$x^2 + 2x - 3 \leq 0$.</td></tr>
<tr><td>Для розв'язування квадратних нерівностей використовують ескіз графіка функції
$y = ax^2 + bx + c$,
тобто параболу.</td><td></td><td>$x^2 - x - 2 \geq 0$, $y = x^2 - x - 2$.
Графік — парабола, вітки направлені вгору, вісь Ox перетинає в точках $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.
$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Розв'язування будь-якої квадратної нерівності можна звести до одного з шести випадків</td></tr>
</table>

	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$a > 0$	 $ax^2 + bx + c > 0$: x — будь-яке число; ($ax^2 + bx + c < 0$: розв'язків немає).	 $ax^2 + bx + c > 0$: $x \in (-\infty; x_0) \cup$ $\cup (x_0; +\infty)$; ($ax^2 + bx + c < 0$: розв'язків немає).	 $ax^2 + bx + c > 0$: $x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$; ($ax^2 + bx + c < 0$: $x \in (x_1; x_2)$).
$a < 0$	 $ax^2 + bx + c > 0$: розв'язків немає; ($ax^2 + bx + c < 0$: x — будь-яке число).	 $ax^2 + bx + c > 0$: розв'язків немає; ($ax^2 + bx + c < 0$: $x \in (-\infty; x_0) \cup$ $\cup (x_0; +\infty)$).	 $ax^2 + bx + c > 0$: $x \in (x_1; x_2)$; ($ax^2 + bx + c < 0$: $x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$).

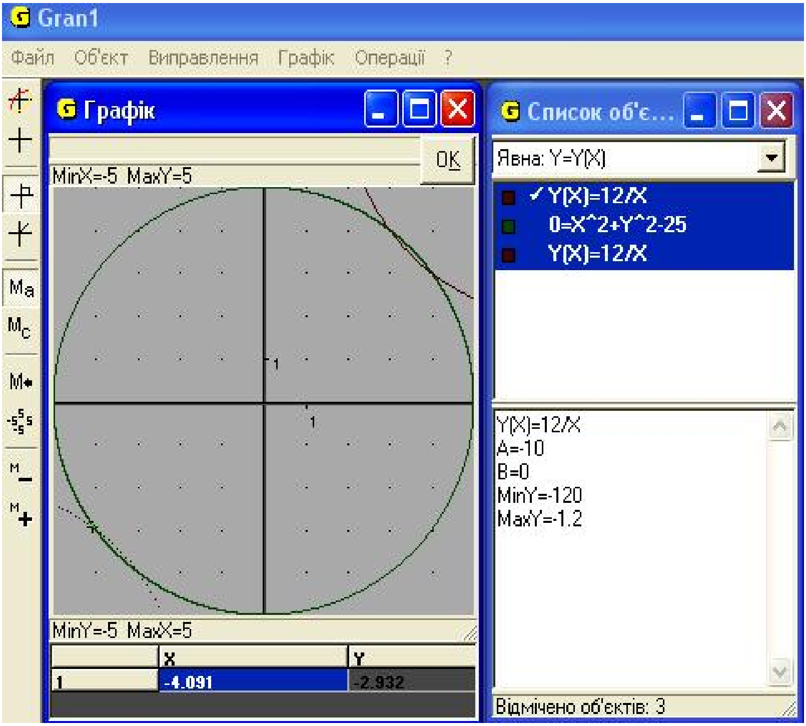
Розв'язками нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ є значення x, для яких точки параболи розташовані над віссю Ox.

Розв'язками нерівності $ax^2 + bx + c < 0$ є значення x, для яких точки параболи розташовані під віссю Ox.

Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей

1. Визначити напрямок віток параболи, яка відповідає функції $y = ax^2 + bx + c$.	$-3x^2 + 7x + 10 < 0$. 1) $a = -3$; вітки направлені вниз;
2. Знайти розв'язки квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (розв'язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$).	2) $3x^2 - 7x - 10 = 0$; $D = 169$; $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{10}{3}$;
3. Побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$.	3) 
4. Вибрати значення змінної, які відповідають розв'язкам нерівності.	4) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$;
5. Записати відповідь.	5) Відповідь: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

Розглядаючи з учнями графічне розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними, можна використати програму GRAN−1 для побудови графіків, наприклад, таких рівнянь системи: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = \dfrac{12}{x}. \end{cases}$ Учні за допомогою програми GRAN-1 будують графіки цих рівнянь і, пересуваючи курсор до точок перетину даних графіків, отримують шукані розв'язки системи рівнянь: $\begin{cases} x = -4, \\ y = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3, \\ y = -4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, \\ y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 4; \end{cases}$ (*мал. 1*).



Мал. 1

Пояснення способу підстановки для розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними варто провести, використовуючи *кодоплівку 10*.

Спосіб додавання для розв'язування таких систем можна пояснити, ілюструючи *кодоплівку 11*.

Кодоплівка 10

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Розв'язання.

Виразимо у другому рівнянні y через x:

$$y = x - 2.$$

Підставимо в перше рівняння замість y вираз $x - 2$, одержимо рівняння зі змінною x:

$$x^2 - (x - 2)^2 = 16.$$

Спростимо одержане рівняння:

$$x^2 - x^2 + 4x - 4 = 16;\ 4x = 20;\ x = 5.$$

Відповідне значення y знайдемо, підставивши знайдене значення x у формулу: $y = x - 2$; $y = 5 - 2 = 3$.

Отже, система рівнянь має єдиний розв'язок (5; 3).

Відповідь: (5; 3).

Кодоплівка 11

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20. \end{cases}$

Розв'язання.

Помножимо друге рівняння системи на 2. Отримаємо:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ 2xy = 40. \end{cases}$$

Додамо почленно ліві і праві частини рівнянь:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 81.$$

Звідси $(x + y)^2 = 81$; $x + y = 9$ або $x + y = -9$.

Отже, для розв'язування даної системи досить розв'язати дві простіші системи.

1) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 9 - x, \\ x(9 - x) = 20; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 9 - x, \\ x^2 - 9x + 20 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи друге рівняння цієї системи, отримуємо:

$$x_1 = 4;\ x_2 = 5.$$

Тоді $y_1 = 5$; $y_2 = 4$.

2) $\begin{cases} x + y = -9, \\ xy = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -9 - x, \\ x(-9 - x) = 20; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -9 - x, \\ x^2 + 9x + 20 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи друге рівняння цієї системи, отримуємо:

$$x_3 = -5;\ x_4 = -4.$$

Тоді $y_3 = -4$; $y_4 = -5$.

Відповідь: (4; 5), (5; 4); (–5; –4), (–4; –5).

Під час розв'язування текстових задач за допомогою систем рівнянь треба вчити учнів складати схематичні записи задач, які допоможуть знайти розв'язок. Наприклад, пропонуючи учням задачу «Будівництво тунелю велося у три зміни з однаковим планом проходження на кожну зміну. Швидкість проходження у другу зміну в 1,2 рази більша, ніж у першу, а в третю зміну — на 0,6 м/год. більша, ніж у другу. Друга зміна виконала план на 1 год. швидше, ніж перша, а третя зміна виконала половину плану на 3 год. швидше, ніж друга зміна весь план. Визначити швидкість проходження тунелю у першу зміну», проектуємо на дошку таблицю *кодоплівки 12*, яку учні після аналізу задачі заповнюють.

Кодоплівка 12

Величини	Зміна			Залежність між величинами різних змін
	I	II	III	
Обсяг роботи, Q, м	x	x	$\frac{x}{2}$	
Час t, год.	$\frac{x}{y} > \frac{x}{1,2y}$ $\frac{x}{1,2y} > \frac{x}{2,4y+1,2}$			на 1 на 3
Швидкість проходження, v, м/год.	y	1,2 y	1,2 y + 0,6	

З цього схематичного запису одержуємо систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{x}{1,2y} + 1; \\ \frac{x}{1+2y} = \frac{x}{2(1,2y+0,6)} + 3; \end{cases}$ розв'язуючи яку, одержуємо шуканий розв'язок: 2 м/год.

Розв'язуючи задачі на сплави, наприклад, задачу «Є три злитки. Перший має масу 5 кг, другий — 3 кг і кожний містить по 30% міді. Якщо перший злиток сплавити з третім, то отримаємо злиток, що містить 56% міді, а якщо другий злиток сплавити з третім, то одержимо злиток, що містить 60% міді. Знайти масу третього злитка і відсоток вмісту міді у ньому», вчитель проектує на дошку таблицю з *кодоплівки 13* і учні, проаналізувавши умову задачі, заповнюють дану таблицю.

Кодоплівка 13

Величини	Злитки			Сплави		Рівняння
	I	II	III	I і III	II і III	
Маса сплаву, кг	5	3	x	5 + x	3 + x	$\begin{cases} 0,56(5+x) = 1,5 + xy, \\ 0,6(3+x) = 0,9 + xy. \end{cases}$
Маса міді, кг	5·0,3	3·0,3	xy	0,56(5+x)	0,6(3+x)	
Частка міді у сплаві	0,3	0,3	y	0,56	0,6	

Задачу на рух, наприклад, «Два велосипедисти виїхали одночасно з пунктів A і B, відстань між якими 28 км, і зустрілись через годину. З якою швидкістю рухався кожний велосипедист, якщо один прибув у пункт B на 35 хв. пізніше, ніж другий в пункт A?» теж зручно розв'язувати, запропонувавши учням після вивчення умови задачі заповнити таблицю *кодоплівки 14*.

Кодоплівка 14

	Шлях, км	Швидкість, км/год.	Час, год.	Рівняння
I умова. Велосипедист 1. Велосипедист 2.	$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ 28	x y	$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ 1	$\frac{28}{x+y}=1$
II умова. Велосипедист 1.	28	x	$\frac{28}{x}$	$\frac{28}{x}-\frac{28}{y}=\frac{35}{60}$
Велосипедист 2.	28	y	$\frac{28}{y}$	

Такі схематичні записи полегшують учням розуміння умови задачі, усвідомлення залежностей між даними і шуканими величинами.

Щоб навчити учнів створювати математичні моделі до задач і розв'язувати ці задачі, корисно продемонструвати на дошку *кодоплівку 15*.

Кодоплівка 15

Задача. Катер за 4 год. пройшов 24 км за течією річки і 20 км — проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 12 км/год.

Розв'язання.

I етап. Створення математичної моделі.

Нехай x км/год. — швидкість течії, тоді $(12 + x)$ км/год. — швидкість катера за течією, а $(12 - x)$ км/год. — швидкість катера проти течії. $\frac{24}{12+x}$ — час руху катера за течією, $\frac{20}{12-x}$ — час руху катера проти течії. За умовою $\frac{24}{12+x}+\frac{20}{12-x}=4$.

Отже, математична модель — це рівняння $\frac{24}{12+x}+\frac{20}{12-x}=4$.

II етап. Розв'язування математичної задачі.

$\frac{24}{12+x}+\frac{20}{12-x}=4$; $24(12 - x) + 20(12 + x) = 4(12 + x)(12 - x)$;
$72 - 6x + 60 + 5x = 144 - x^2$; $x^2 - x - 12 = 0$; $x = 4$ або $x = -3$.

III етап. Інтерпретація відповіді. $x = -3$ не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може виражатися від'ємним числом. Отже, швидкість течії дорівнює 4 км/год.

Відповідь: 4 км/год.

При вивченні відсоткових розрахунків спочатку слід повторити основні задачі на відсотки, які учні вивчали в кінці 5 класу, використавши *кодоплівку 16*, а потім, ввівши поняття складних відсотків, використати *таблицю 16*.

Кодоплівка 16

ВІДСОТКИ
1 % — це $\frac{1}{100}$ частина
Основні задачі *1. Знаходження відсотка від числа.* p % від числа a дорівнює $\frac{p}{100} \cdot a$. *2. Знаходження числа за даним відсотком.* Якщо p % якогось числа дорівнює b, то це число дорівнює: $b : \frac{p}{100} = \frac{b \cdot 100}{p}$. *3. Знаходження відсоткового відношення*. Число a становить $\frac{a}{b} \cdot 100$ % від числа b.

Таблиця 16

ВІДСОТКОВІ РОЗРАХУНКИ	
Означення	**Приклади**
Відсоток — це одна сота частина цілого. 1% = 0,01; 35% = 0,35; 60% = 0,6; 100% = 1. Часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам і працівникам банків. Вкладений в Ощадбанк початковий капітал A_0 під p% річних через n років перетвориться в нарощений капітал $A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)n$. Ця формула складних відсотків застосовується не тільки у фінансових операціях, нею користуються для визначення кількості населення країни або міста, зростання поголів'я тварин та при вирішенні інших питань. Подібні до поняття відсотка проміле і проба. ***Проміле*** — це одна тисячна ($1‰$ − 0,001). ***Пробами*** характеризують сплави дорогоцінних металів. Так, золото 875-ї проби — це сплав, в 1000 г якого міститься 875 г чистого золота.	Руда містить 54% заліза. Скільки треба взяти руди, щоб виплавити 2700 т заліза? *Розв'язання.* 2700 : 0,54 = 5000 (т) або $\frac{2700}{54\,\%} \cdot 100\,\% = 5000$ (т). *Відповідь*: 5000 т. З 35 учнів 9 класу 21 юнак. Який відсоток юнаків у класі? *Розв'язання.* $21 : 35 \cdot 100\,\% = \frac{21 \cdot 100\,\%}{35} = 60\,\%$. *Відповідь*: 60%. Латунь — сплав 60% міді і 40% цинку. Скільки міді і цинку треба сплавити, щоб отримати 400 кг латуні? *Розв'язання.* 1) 400 · 0,6 = 240 (кг) — міді; 2) 400 · 0,4 = 160 (кг) — цинку.

Вивчаючи наближені обчислення, зручно користуватися *таблицею 17*.

Таблиця 17

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ	
Означення. Правила	**Приклади**
Абсолютною похибкою наближеного значення називають модуль різниці між наближеним і точним значенням.	$\|2,356 - 2,355\|$; $x = 2,356 \pm 0,001$.
Межею абсолютної похибки називається число, яке не перевищує абсолютна похибка.	0,001 — межа абсолютної похибки.
Відносною похибкою наближеного значення називають відношення абсолютної похибки до модуля наближеного значення.	$\frac{\|5,7 - 5,6\|}{5,7} = 0,0175 =$ $= 1,75\%$.
Правила підрахунку цифр	
Десятковими знаками числа називають усі його цифри, що стоять праворуч від десяткової коми.	0,00256. П'ять десяткових знаків: 0, 0, 2, 5, 6.
Значущими цифрами числа називають усі його цифри, крім нулів зліва, які стоять перед першою цифрою, відмінною від нуля, і нулів справа, що стоять на місцях цифр, замінених при округленні.	Три значущі цифри: 2, 5, 6. Діаметр Землі d = 12700 км, три значущі цифри: 1, 2, 7.
При додаванні і відніманні наближених значень у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх має компонент дії з найменшою кількістю десяткових знаків.	$x = 2,56$ і $y = 1,3$. $x + y = 2,56 + 1,3 = 3,8$. $x - y = 2,56 - 1,3 = 1,2$.
При множенні і діленні наближених значень у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має компонент з найменшою кількістю значущих цифр.	$xy = 2,56 \cdot 1,3 = 3,3$. $x : y = 2,56 : 1,3 = 1,9$.

Користуючись цією таблицею, учням легше буде виконувати наближені обчислення.

Розглянувши тему «Випадкові події. Ймовірність випадкових подій», слід провести фронтальне опитування учнів за допомогою *кодоплівки 17*.

Після розгляду теми «Відомості про статистику» фронтальне опитування можна провести з допомогою *кодоплівки 18*.

Розглянувши з учнями тему «Числові послідовності», вчитель проводить фронтальне опитування за допомогою *кодоплівки 19.*

Кодоплівка 17

1. Що називається подією?
2. Які події називаються неможливими, достовірними, випадковими? Наведіть приклади.
3. Наведіть приклади простору елементарних подій.
4. Яка подія називається елементарною? Наведіть приклади.
5. Що називається відносною частотою появи події?
6. Що називається ймовірністю випадкової події?
7. Як знайти ймовірність випадкової події?
8. Чому дорівнює ймовірність достовірної події?
9. Чому дорівнює ймовірність неможливої події?

Кодоплівка 18

1. Що таке математична статистика?
2. Що таке гістограма? Наведіть приклади.
3. Які явища називаються масовими?
4. Що таке вибірка і частота вибірки?
5. Якими є центральні тенденції вибірок?
6. Що таке мода і медіана вибірки?
7. Що таке середнє значення вибірки?

Кодоплівка 19

1. Наведіть приклади послідовностей.
2. Чим відрізняється послідовність чисел від множини чисел?
3. Які способи задання послідовностей ви знаєте?
4. Чи можна задати послідовність кількома її першими членами?
5. Які види послідовностей ви знаєте?
6. Наведіть приклади зростаючої, спадної і сталої послідовностей.
7. Побудуйте графік скінченної послідовності:
   а) 5; 3; 1; −1; −3; −5; б) −1; 3; 0; −2; 4.
8. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (x_n), заданої формулою:
   а) $x_n = 3n - 7$; б) $x_n = \frac{n+1}{n}$; в) $x_n = 2^{n-1}$; г) $x_n = \frac{1}{n}$;
   д) $x_n = 0,5 \cdot 3^n$.

В процесі вивчення арифметичної прогресії доцільно демонструвати учням *таблицю 18*.

Розглядаючи геометричну прогресію, корисною буде *таблиця 19*.

Таблиця 18

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ	
Числова послідовність (a_n), кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додане одне і те саме число, називається ***арифметичною прогресією***. Це число позначають буквою d і називають ***різницею арифметичної прогресії***.	1; 3; 5; 7; 9 — арифметична прогресія. $a_1 = 1$; $d = 2$. 40; 30; 20; 10; 0; −10; −20; … $a_1 = 40$; $d = -10$.
Першими членами арифметичної прогресії будуть: $a_1,\ a_1 + d;\ a_1 + 2d;\ a_1 + 3d;\ \dots$	−8; −6; −4; −2; 0; 2; 4; 6; … $a_1 = -8$; $d = 2$.
Формула n-го члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + d(n-1),\ n \in N$.	$a_5 = -8 + 2(5-1) = -8 + 2 \cdot 4 = 0$.
Для арифметичної прогресії кожний її член, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним членів, тобто: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, де $n \geq 2,\ n \in N$. Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів. Формула суми перших n членів арифметичної прогресії: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$, або $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n,\ n \in N$.	1;4;7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; … $a_1 = 1$; $d = 3$. $a_4 = \dfrac{a_3 + a_5}{2} = \dfrac{7+13}{2} = 10$; $a_4 = 10$. $S_6 = \dfrac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \dfrac{1+16}{2} \cdot 6 = 17 \cdot 3 = 51$ або $S_6 = \dfrac{2 \cdot 1 + 3(6-1)}{2} \cdot 6 = \dfrac{17}{2} \cdot 6 = 51$.

Таблиця 19

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ	
Числова послідовність (b_n), кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число, називається ***геометричною прогресією***. Це число позначають q і називають ***знаменником геометричної прогресії.***	$\dfrac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8; 16;…, $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $q = 2$. 1; 3; 9; 27; 81;…, $b_1 = 1$, $q = 3$. 1; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{1}{16}$; …, $b_1 = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$.
Першими членами геометричної прогресії будуть: $b_1;\ b_1q;\ b_1q^2;\ b_1q^3;\ \dots$ Формула n-го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1q^{n-1},\ n \in N$.	$\dfrac{1}{16}$; $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{2}$; 1; 2; 4; … $b_1 = \dfrac{1}{16}$; $q = 2$; $b_{10} = \dfrac{1}{16} \cdot 2^{10-1} = \dfrac{1}{16} \cdot 2^9 = 32$.

Послідовність (b_n) є геометричною прогресією тоді і тільки тоді, коли кожний її член, починаючи з другого, дорівнює середньому геометричному сусідніх з ним членів, тобто: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n \geq 2$, $n \in N$.	$\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27; 81;... $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$, тобто $3^2 = 1 \cdot 9$, $9 = 9$.
Формула суми n перших членів геометричної прогресії: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ або $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}$; $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$, $S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}$, $n \in N$, $q \neq 1$, $n \in N$, $q \neq 1$.	1) 3, 9, 27, 81, 243, ...; $q = 3$. $S_3 = \frac{27 \cdot 3 - 3}{3 - 1} = \frac{78}{2} = 39$. 2) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$;.... ; $q = \frac{1}{2}$. $S_4 = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.
Якщо (b_n) — нескінченно спадна геометрична прогресія $\left(\lvert q\rvert < 1\right)$, то її сума обчислюється за формулою: $S = \frac{b_1}{1 - q}$.	$\frac{1}{2}$;$\frac{1}{4}$;$\frac{1}{8}$;$\frac{1}{16}$;.... $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$. $S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

Використання розглянутих наочних посібників на уроках алгебри не тільки полегшує роботу вчителя, але й економить час та розвиває увагу і творче мислення учнів.

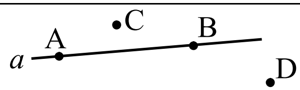
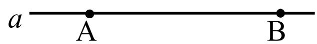
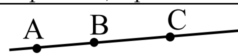
3. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНИХ ПОСІБНИКІВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ

3.1. Наочні посібники на уроках геометрії 7 класу

Розглянемо методику використання різних видів наочності при вивченні геометрії у 7 класі.

На першому уроці вчитель знайомить учнів з такими поняттями: геометрія, геометричні фігури, планіметрія, точка, пряма, промінь, основні властивості розміщення точок на прямій. Для повторення і закріплення цих властивостей корисною буде *таблиця 1*.

Таблиця 1

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК НА ПРЯМІЙ	
Формулювання властивості	**Геометричне зображення**
1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.	 $A \in a,\ B \in a,\ C \notin a,\ D \notin a$.
2. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну.	 Пряма a, пряма AB.
3. З трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.	

Спочатку можна праву частину таблиці закрити і запропонувати учням самостійно виконати геометричні зображення, після чого звірити їх з таблицею.

Закріплення вивченого матеріалу зручно проводити у формі фронтального опитування за питаннями, записаними на *кодоплівці 1*.

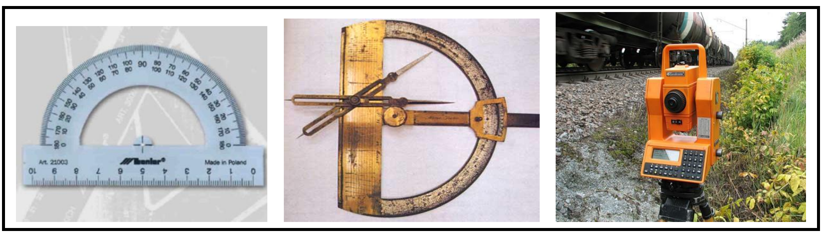
Кодоплівка 1

1. Що вивчає геометрія?
2. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що вивчає планіметрія?
4. Назвіть основні геометричні фігури на площині.
5. Як позначають точки і прямі?
6. Сформулюйте основні властивості розміщення точок на прямій.
7. Що таке промінь? Як позначають промені?
8. Які промені називають доповняльними?

Пояснюючи поняття відрізка і вимірювання відрізків, вчителю слід продемонструвати учням різні вимірювальні інструменти: масштабну лінійку, складний метр, клейончастий сантиметр, рулетку, штангенциркуль, мікрометр і пояснити, як ними користуватися при вимірюванні відрізків (*мал. 1*).

Мал. 1

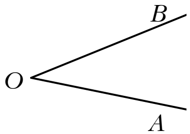
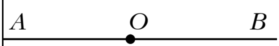
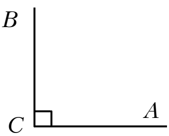
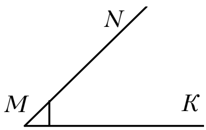
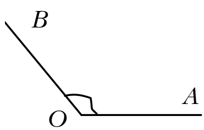
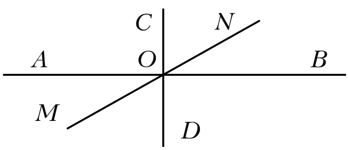
Розглядаючи кути і їх вимірювання, теж варто показати учням інструменти для вимірювання кутів: транспортир, астролябію, теодоліт (*мал. 2*).



Мал. 2

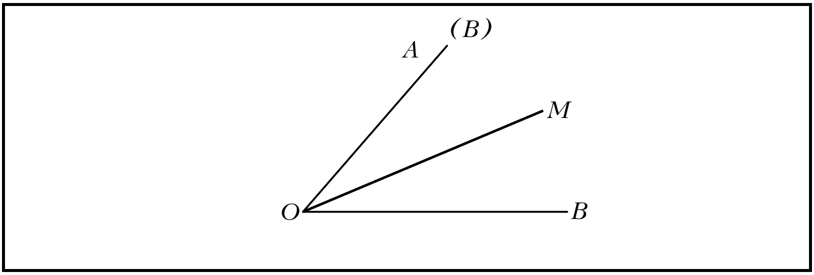
Корисно мати також моделі прямого, гострого і тупого кутів, вирізаних з картону. Для успішного засвоєння поняття кута і видів кутів слід використати *таблицю 2*.

Таблиця 2

<table>
<tr><th colspan="2">КУТИ ТА ЇХ ВИДИ</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Геометричне зображення</th></tr>
<tr><td>Кутом називається геометрична фігура, яка складається з точки і двох променів, що виходять з цієї точки.</td><td>
O — вершина кута,
OA, OB — сторони кута.
$\angle O$, $\angle AOB$.</td></tr>
<tr><td>Розгорнутим кутом називається кут, сторони якого є доповняльними променями.</td><td>
$\angle AOB = 180°$
$\angle AOB$ — розгорнутий.</td></tr>
<tr><td>Кут називається прямим, якщо його градусна міра дорівнює 90°.</td><td>
$\angle ACB = 90°$.
$\angle ACB$ — прямий.</td></tr>
<tr><td>Кут називається гострим, якщо він менший від прямого.</td><td>
$\angle KMN < 90°$.
$\angle KMN$ — гострий.</td></tr>
<tr><td>Кут називається тупим, якщо він більший від прямого, але менший від розгорнутого.</td><td>
$\angle AOB > 90°$,
$\angle AOB < 180°$,
$\angle AOB$ — тупий.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Назвіть кути і їх види, зображені на малюнку.
</td></tr>
</table>

Підведення учнів до поняття бісектриси кута вчитель здійснює з допомогою моделі кута AOB, вирізаної з листка паперу, перегнувши цей кут так, щоб промені OA і OB співпали (*мал. 3*).

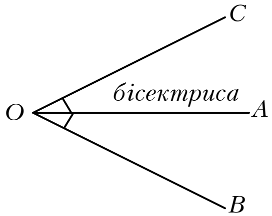
Учні переконуються, що в результаті перегинання кут AOB поділився променем OM на два рівних кути AOM і MOB.



Мал. 3

Вчитель вводить поняття бісектриси кута і демонструє *кодоплівку 2* на дошку.

Кодоплівка 2

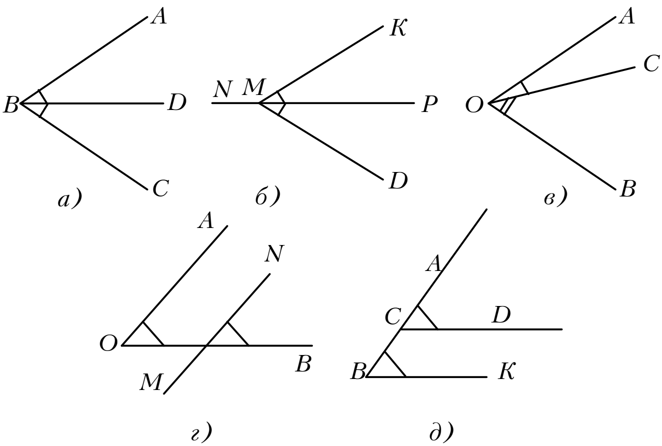


БІСЕКТРИСА КУТА

Бісектриса кута – це:
а) промінь *OA*,
б) його початок у вершині кута *O*,
в) він ділить кут на два рівні кути *COA* і *AOB*.

Означення. ***Бісектрисою кута*** називається промінь, який виходить з вершини кута і ділить його на два рівні кути.

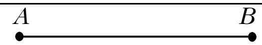
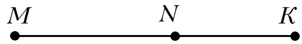
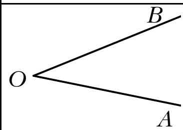
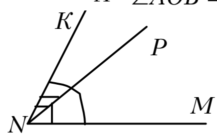
Знайдіть бісектриси кутів на малюнку.



Аналізуючи малюнок, зображений на кодоплівці, учні виділяють суттєві властивості бісектриси: а) промінь, б) початок променя співпадає з вершиною кута, в) промінь ділить кут на два рівних кути. Після цього неважко сформулювати означення бісектриси кута і закріпити його на вправах.

Для закріплення матеріалу першого розділу «Найпростіші геометричні фігури та їх властивості» вчитель може використати *таблицю 1* і *таблицю 3*.

Таблиця 3

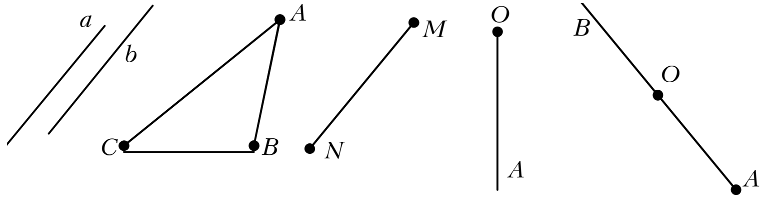
ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИМІРЮВАННЯ ВІДРІЗКІВ	
Формулювання властивості	**Геометричне зображення**
1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. 2. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.	 $AB = 3$ см.  $MN + NK = MK$.
ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ	
Формулювання властивості	**Геометричне зображення**
1. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. 2. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.	 $\angle AOB = 30^\circ$.  $\angle MNP + \angle PNK = \angle MNK$.

Також зручно продемонструвати *кодоплівку 3*, використання якої дасть можливість систематизувати і узагальнити вивчений у першому розділі матеріал.

Вивчення суміжних і вертикальних кутів та їх властивостей зручно проводити з використанням *таблиці 4*.

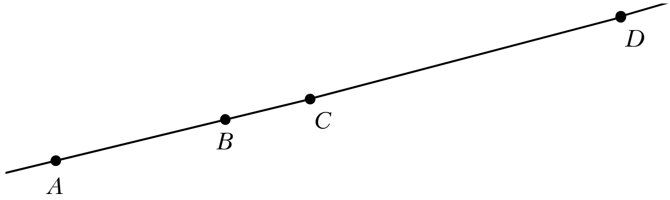
Кодоплівка 3

1. Назвіть відрізки та промені, що зображені на *малюнку 4*.



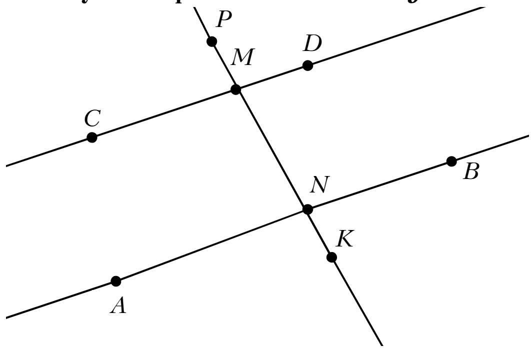
Мал. 4

2. Випишіть назви всіх відрізків, зображених на *малюнку 5*.



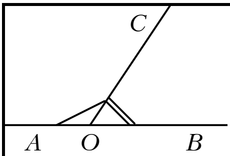
Мал. 5

3. Скільки кутів зображено на *малюнку 6*? Назвіть їх.



Мал. 6

Таблиця 4



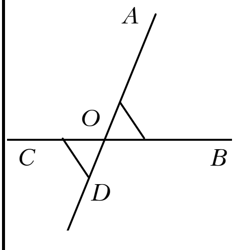
СУМІЖНІ КУТИ

Промінь OC ділить розгорнутий кут AOB на два кути.

Промінь OA доповняльний до променя OB.

Означення. Два кути, в яких одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями, називаються ***суміжними***: $\angle COB$ і $\angle COA$ — суміжні.

Чому дорівнює сума суміжних кутів? Відповідь поясніть.



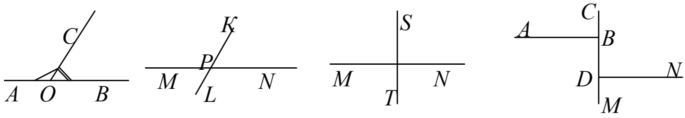
ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

Промінь OC доповняльний до променя OB.
Промінь OD доповняльний до променя OA.

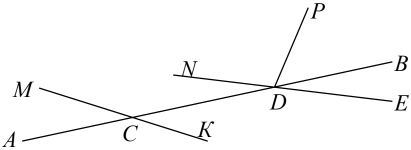
Означення. Два кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного кута є доповняльними променями другого: $\angle AOB$ і $\angle COD$ — вертикальні.

Порівняйте вертикальні кути. Чому вертикальні кути рівні? Відповідь поясніть.

Знайдіть суміжні і вертикальні кути



а) б) в) г)



д)

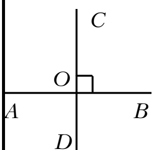
Відповіді обґрунтуйте.

Виконання завдань, вказаних на таблиці, дасть можливість учням засвоїти поняття суміжних і вертикальних кутів та їх властивостей.

Тему «Перпендикулярні прямі» зручно вивчати, використовуючи *таблицю 5*.

Таблиця 5

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

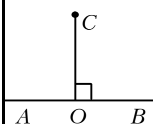


Означення. Дві прямі називаються ***перпендикулярними,*** якщо вони перетинаються під прямим кутом.

$AB \perp CD$.

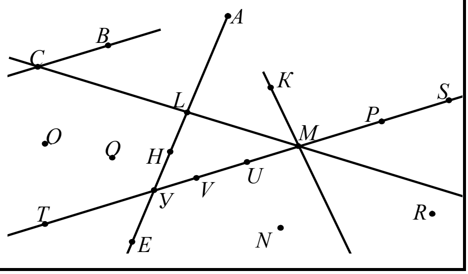
Теорема. Через будь-яку точку можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Означення. ***Перпендикуляром*** до прямої, проведеним із даної точки, називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним зі своїх кінців точку їх перетину. Ця точка називається ***основою перпендикуляра***. Довжину цього відрізка називають ***відстанню*** від точки до прямої.



CO — перпендикуляр до прямої *AB*. *O* — основа перпендикуляра *CO*. *CO* — відстань від точки до прямої *AB*.

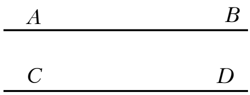
1. Назвіть на малюнку перпендикулярні прямі.
2. Опустіть перпендикуляр з точки *O* на пряму *BC*.
3. Знайдіть відстань від точки *N* до прямої *TM*.
4. Чи перпендикулярні прямі *BC* і *KM*?



Таблиця 6 сприятиме свідомому засвоєнню учнями паралельних прямих, кутів, утворених перетином січної двох паралельних прямих, ознак паралельності прямих і властивостей паралельних прямих. Також ця таблиця буде корисною при розв'язуванні вправ на дану тему.

Таблиця 6

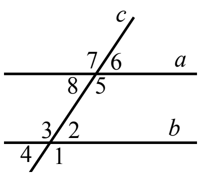
ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ



Означення. Дві прямі на площині називаються ***паралельними***, якщо вони не перетинаються.

AB ∥ CD.

Два відрізки або промені називаються ***паралельними***, якщо вони лежать на паралельних прямих.



$a \parallel b$, c — січна.

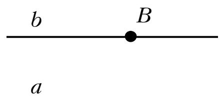
$\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$ — внутрішні односторонні кути;

$\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$ — внутрішні різносторонні кути;

$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$ — відповідні кути;

$\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$ — зовнішні односторонні кути;

$\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$ — зовнішні різносторонні кути.



Аксіома паралельних прямих. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Ознаки паралельності прямих

Дві прямі паралельні, якщо:

1) внутрішні різносторонні кути рівні;
2) відповідні кути рівні;
3) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

Властивості паралельних прямих

Якщо дві прямі паралельні, то:

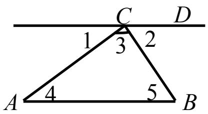
1) внутрішні різносторонні кути рівні;
2) відповідні кути рівні;
3) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

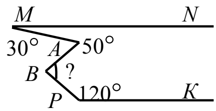
Проводячи підсумкове опитування учнів по даній темі, варто використати *кодоплівку 4*.

Пояснення теми «Трикутник і його елементи» доцільно супроводжувати ілюстрацією *таблиці 7*.

Кодоплівка 4

1. Які прямі називаються паралельними?
2. Які відрізки називаються паралельними?
3. Сформулюйте аксіому паралельних прямих.
4. Як називаються кути, утворені від перетину двох прямих січною?
5. Сформулюйте ознаки паралельності прямих.
6. Сформулюйте властивості паралельних прямих.
7. На малюнку $AB \parallel CD$ і $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 40°$. Знайдіть кути 3, 4, 5.

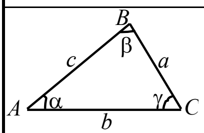




8. На малюнку $MN \parallel PK$. Знайдіть $\angle ABP$.

Таблиця 7

ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

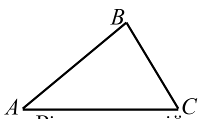


Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки. Позначають: ΔABC.

Точки *A, B, C* називають ***вершинами*** трикутника. Відрізки *AB, BC, AC* називають ***сторонами*** трикутника. Кути *BAC, ABC, ACB,* називають ***кутами*** трикутника. Позначають кути трикутника: $\angle ABC, \angle ACB, \angle BAC$, або $\angle A, \angle B, \angle C$. Суму довжин усіх сторін трикутника називають його ***периметром***.

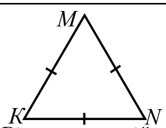
$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = a + b + c\ .$$

ВИДИ ТРИКУТНИКІВ ЗА СТОРОНАМИ



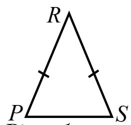
Різносторонній

$AB \neq BC \neq AC$



Рівносторонній

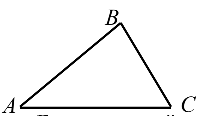
$KM = MN = KN$



Рівнобедрений

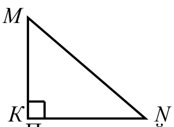
$PR = RS$

ВИДИ ТРИКУТНИКІВ ЗА КУТАМИ



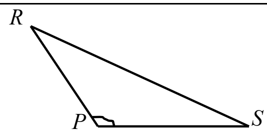
Гострокутний

$\angle A < 90^\circ, \angle B < 90^\circ, \angle C < 90^\circ.$



Прямокутний

$\angle K = 90°.$



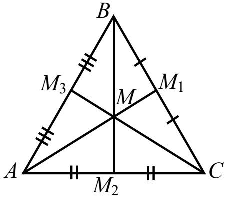
Тупокутний

$\angle P > 90°.$

Таблиця 8 допоможе учням краще зрозуміти важливі відрізки у трикутнику і побачити їх властивості.

Таблиця 8

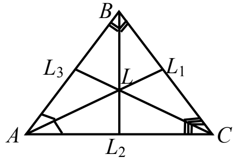
ВЛАСТИВОСТІ ВІДРІЗКІВ У ТРИКУТНИКУ



Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

Позначають медіани: m_a, m_b, m_c.

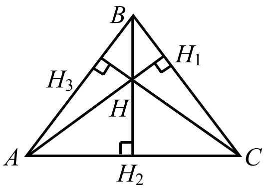
У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці.

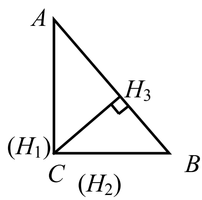


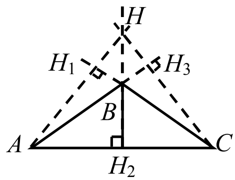
Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.

Позначають бісектриси: l_a, l_b, l_c.

У будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці.







Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

Позначають висоти: h_a, h_b, h_c.

У будь-якому трикутнику висоти або їх продовження перетинаються в одній точці.

У гострокутному трикутнику точка перетину висот лежить усередині трикутника, у прямокутному трикутнику — співпадає з вершиною прямого кута, у тупокутному трикутнику — зовні трикутника.

Вивчаючи рівність геометричних фігур, ознаки рівності трикутників і ознаки рівності прямокутних трикутників, варто використовувати *таблицю 9*.

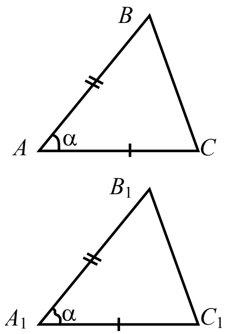
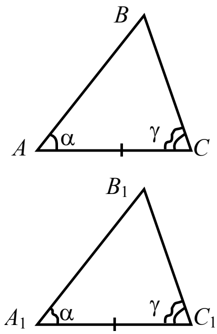
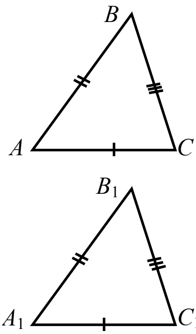
Для закріплення першої ознаки рівності трикутників зручно розв'язати вправу з *кодоплівки 5*.

Закріпити другу ознаку рівності трикутників допоможе розв'язання вправ на *кодоплівці 6*.

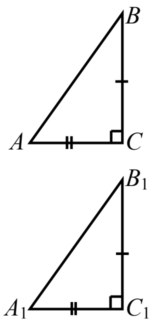
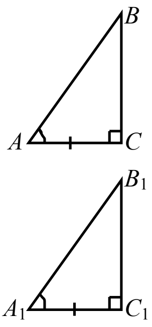
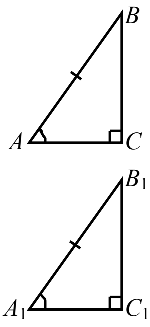
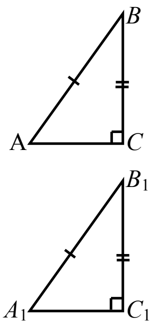
Таблиця 9

РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ
Дві геометричні фігури називаються ***рівними***, якщо при накладанні вони суміщаються. ***Два трикутники*** називаються ***рівними***, якщо при накладанні вони суміщаються.

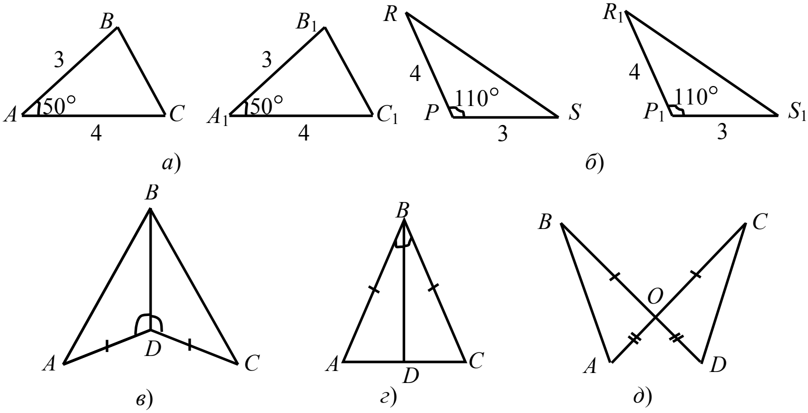
Ознаки рівності трикутників

За двома сторонами і кутом між ними	За стороною і двома прилеглими кутами	За трьома сторонами
		

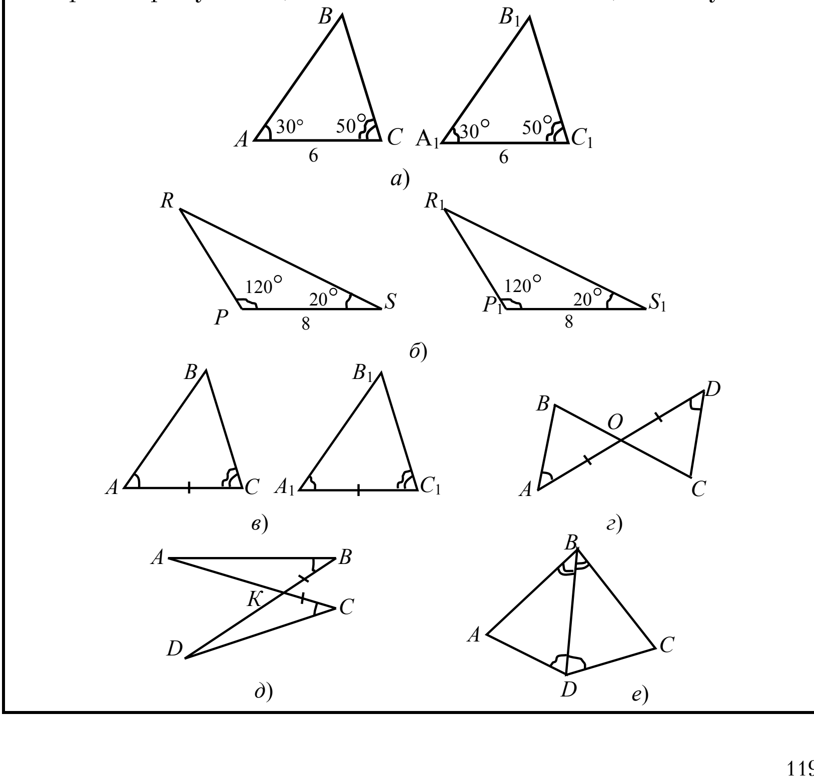
Ознаки рівності прямокутних трикутників

За двома катетами	За катетом і гострим кутом	За гіпотенузою і гострим кутом	За гіпотенузою і катетом
			

Чи рівні трикутники, подані нижче? Якщо так, то чому?

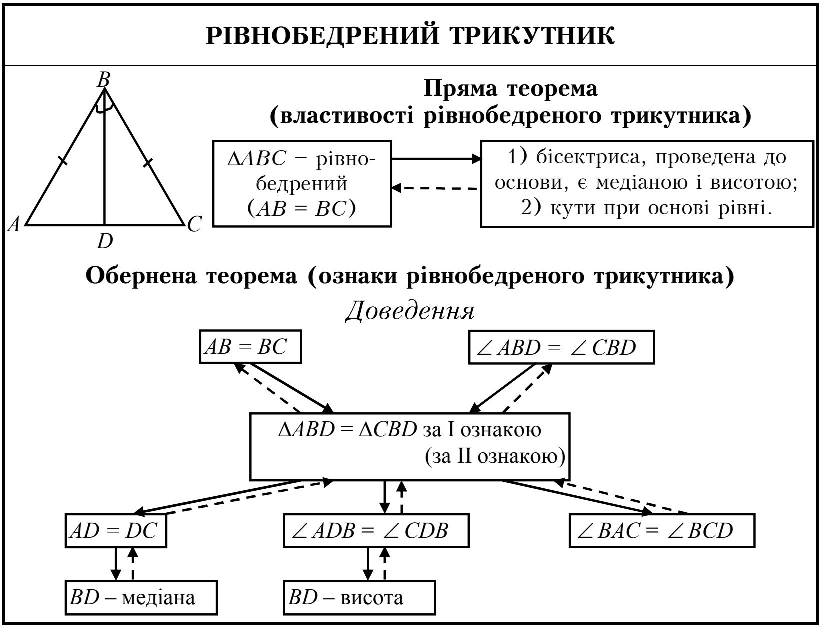


Чи рівні трикутники, подані нижче? Якщо так, то чому?



Успішному засвоєнню доведення прямої і оберненої теорем про рівнобедрений трикутник сприятиме *граф-схема*, на якій доведення прямої теореми зображено за допомогою суцільних стрілок, а доведення оберненої теореми — штрихових стрілок.

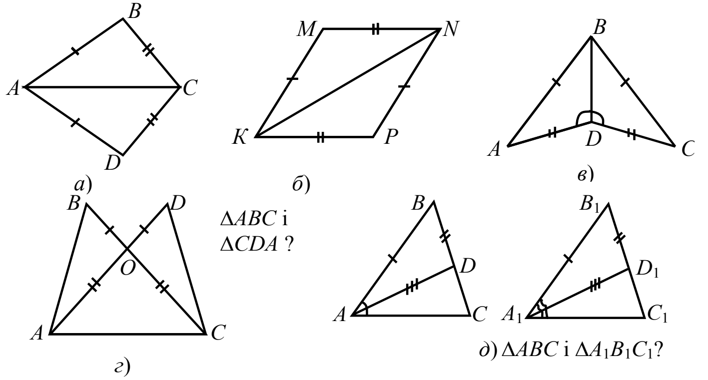
Граф-схема



Розв'язання завдань на *кодоплівці 7* допоможе закріпити третю ознаку рівності трикутників.

Кодоплівка 7

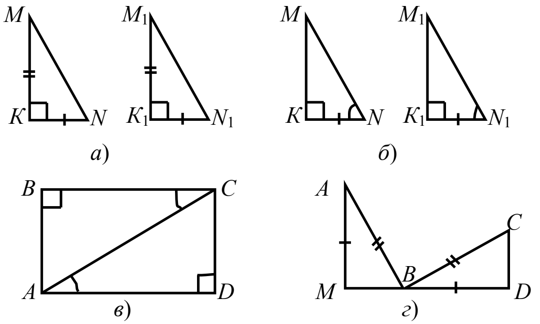
Доведіть рівність зображених трикутників.

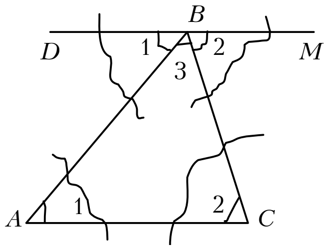


Для закріплення ознак рівності прямокутних трикутників пропонуємо на *кодоплівці 8* таку вправу:

Кодоплівка 8

Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою?





Перед розглядом теореми про суму кутів трикутника вчитель пропонує учням такий дослід. У довільному трикутнику, вирізаному з паперу, вчитель відриває два кути і прикладає до третього кута. Учні бачать, що три кути трикутника утворюють розгорнутий кут. Звідси випливає гіпотеза, що сума кутів трикутника рівна 180°.

Оскільки $\angle DBA = \angle BAC$ і ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих AC і DB та січній AB, то за ознакою паралельних прямих прямі AC і DB паралельні. Отже, дослід, проведений з моделлю трикутника, не лише дозволив сформулювати гіпотезу про суму кутів трикутника, але і підказав ідею доведення (через вершину B провести пряму DB паралельно до сторони AC трикутника).

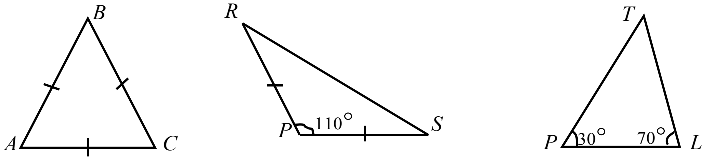
На закріплення даної теореми вчитель пропонує розв'язати вправу з *кодоплівки 9*.

Вивчення зовнішнього кута трикутника і його властивості доцільно супроводжувати демонстрацією *таблиці 10*.

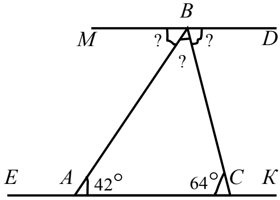
Розв'язання вправ з *кодоплівки 10* допоможе закріпити вивчений матеріал.

Кодоплівка 9

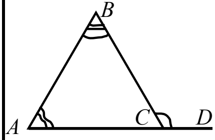
1. Знайдіть кути трикутників.

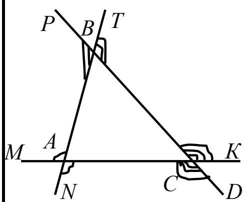


2. Знайдіть градусні міри невідомих кутів, якщо $EK \parallel MD$.



Таблиця 10





ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА

Зовнішнім кутом трикутника називається кут, суміжний з кутом цього трикутника.

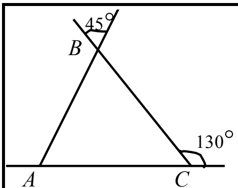
$\angle BCD$ – зовнішній кут ΔABC.

Властивість зовнішнього кута трикутника. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних з ним.

Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.

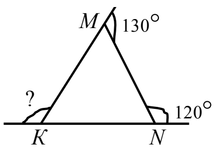
Для кожного трикутника ABC при кожній вершині існує два рівних зовнішніх кути: $\angle MAB = \angle NAC\ (A)$; $\angle ABP = \angle TBC\ (B)$; $\angle BCK = \angle ACD\ (C)$.

Кодоплівка 10



1. Знайдіть кути трикутника ABC.

2. Знайдіть третій зовнішній кут трикутника KMN.

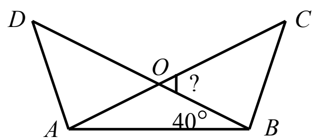


Для підведення учнів до нерівності трикутника слід запропонувати їм три комплекти планок, довжини яких відповідно рівні: 1) 20 см, 16 см, 14 см; 2) 20 см, 12 см, 8 см; 3) 20 см, 8 см, 6 см і скласти з них трикутники. Коли в другому і третьому випадках їм це не вдасться зробити, вчитель запитує: Чому? Відповідь приводить учнів до нерівності трикутника.

Закріплюючи матеріал розділу 3 «Трикутники», доцільно провести фронтальне опитування учнів за питаннями, записаними на *кодоплівці 11*.

Кодоплівка 11

1. Яку фігуру називають трикутником?
2. Назвіть елементи трикутника.
3. Які види трикутників розрізняють залежно від кутів?
4. Що таке бісектриса, медіана і висота трикутника?
5. Які трикутники називаються рівними?
6. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
7. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.
8. Який трикутник називається рівнобедреним?
9. Які види трикутників розрізняють залежно від сторін?
10. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.
11. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
12. Як називаються сторони прямокутного трикутника?
13. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.
14. Сформулюйте нерівність трикутника.
15. Знайдіть за малюнком $\angle COB$, якщо $BC = AD$, $AC = BD$, $\angle DBA = 40°$.



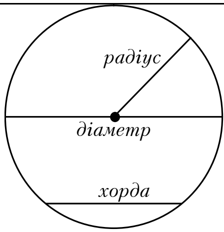
Вивчення кола і круга корисно здійснювати, використовуючи *таблицю 11*.

Таблиця 12 буде корисною при вивченні кола, описаного навколо трикутника, і кола, вписаного в трикутник.

Для засвоєння властивостей вписаних і описаних трикутників доцільно розв’язати задачі, розміщені на *кодоплівці 12*.

Таблиця 11

КОЛО І КРУГ

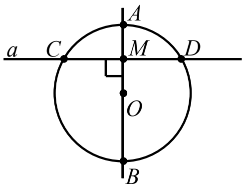


Колом називається геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається ***центром*** кола.

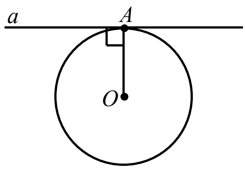
Радіус позначають R або r, діаметр — D або d.

Хордою називається відрізок, що сполучає дві довільні точки кола.

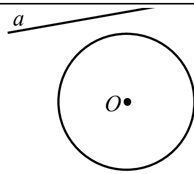
Взаємне розміщення прямої і кола



a – січна
$CM = MD$
$AB \perp CD$

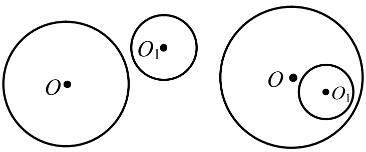


a – дотична
$a \perp OA$

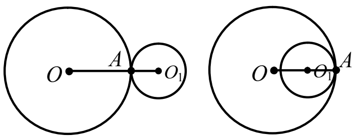


Пряма a і коло не мають спільних точок

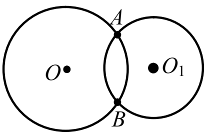
Взаємне розміщення двох кіл



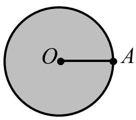
Кола не мають спільних точок



Кола мають одну спільну точку – дотичні кола. OO_1 – лінія центрів.



Кола перетинаються в двох точках A і B.

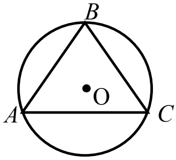


Частина площини, обмежена колом, називається ***кругом***.

Таблиця 12

ОПИСАНІ І ВПИСАНІ КОЛА

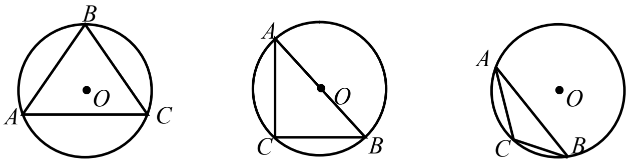
Коло, описане навколо трикутника



Коло називається ***описаним навколо трикутника***, якщо воно проходить через усі вершини трикутника.

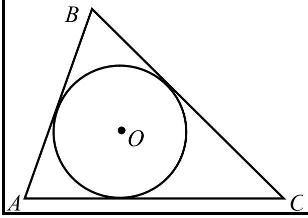
Теорема. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне.

Центр O описаного кола — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.



а) *б)* *в)*

Коло, вписане в трикутник



Коло називається ***вписаним у трикутник***, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Теорема. У будь-який трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне.

Центр O вписаного кола — точка перетину бісектрис кутів трикутника.

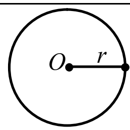
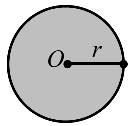
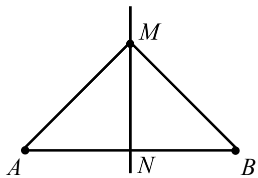
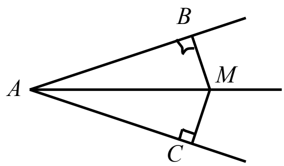
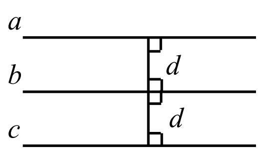
Кодоплівка 12

Розв'яжіть задачі:

1. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо точки дотику кола, вписаного в цей трикутник, ділять його сторони на відрізки, три з яких дорівнюють 2 см, 6 см, 8 см.
2. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 4 см і 5 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.
3. Точка перетину медіан ΔABC співпадає з точкою O — центром описаного навколо ΔABC кола. Запишіть пари рівних трикутників.
4. У даному колі проведено діаметр AC і рівні хорди AB і BC. Знайдіть кути трикутника ABC.
5. Навколо рівнобедреного трикутника з кутом при вершині 120° і бічною стороною, що дорівнює 5 дм, описано коло. Знайдіть його радіус.
6. Сторони ΔABC дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Знайдіть радіуси описаного і вписаного кіл.

Вивчення геометричного місця точок і видів геометричних місць точок варто супроводжувати ілюстрацією *таблиці 13*.

Таблиця 13

ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК (ГМТ)	
Геометричним місцем точок називають фігуру, яка складається з усіх точок, що мають певну властивість.	
Види ГМТ	**Геометричне зображення**
1. Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки на дану відстань, — коло, радіус якого дорівнює даній відстані.	
2. Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не перевищує даної відстані, — круг, радіус якого дорівнює даній відстані.	
3. Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка, — серединний перпендикуляр до даного відрізка.	
4. Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута, — бісектриса кута.	
5. Геометричне місце точок, що віддалені від даної прямої на дану відстань, — дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких знаходиться на даній відстані від прямої.	

Повторення і систематизацію матеріалу розділу 4 «Коло і круг. Геометричні побудови» можна провести у вигляді фронтального опитування за допомогою *кодоплівки 13.*

Кодоплівка 13

1. Що називають колом; центром кола; радіусом кола; діаметром кола; хордою кола?
2. Що називають кругом? Чим відрізняється круг від кола?
3. Яку пряму називають січною до кола?
4. Яку пряму називають дотичною до кола?
5. Яка властивість дотичної до кола?
6. Яка властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки?
7. Яке коло називається описаним навколо трикутника?
8. Яке коло називається вписаним в трикутник?
9. Де лежить центр кола, описаного навколо трикутника?
10. Де лежить центр кола, вписаного в трикутник?
11. Де лежить центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника?
12. Що називають геометричним місцем точок?
13. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?
14. Що є геометричним місцем точок кута, рівновіддалених від його сторін?
15. В чому суть методу геометричних місць?
16. Якими інструментами найчастіше виконують побудови в геометрії?

Використання розглянутих наочних посібників допоможе учням успішно засвоїти геометричний матеріал у 7 класі, підвищить їх інтерес до математики.

3.2. Наочні посібники на уроках геометрії 8 класу

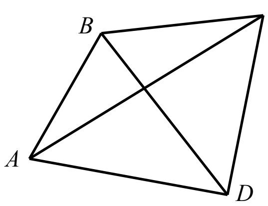
Розглянемо методику використання наочних посібників на уроках геометрії у 8 класі.

Вивчаючи матеріал розділу 1 «Чотирикутники», доцільно демонструвати учням моделі чотирикутників і їх видів, виготовлені з різних матеріалів.

Для пояснення і закріплення теми «Чотирикутник і його елементи» бажано використати *таблицю 1.*

Таблиця 1

ЧОТИРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ



Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, і чотирьох відрізків, що їх послідовно сполучають.

$ABCD$ — чотирикутник. A, B, C, D — ***вершини***, AB, BC, CD, AD — ***сторони*** чотирикутника.

A і B, B і C, C і D, D і A — ***сусідні*** вершини.
A і C, B і D — ***протилежні*** вершини.
AB і BC, BC і CD, CD і AD — ***сусідні*** сторони.
AB і CD, BC і AD — ***протилежні*** сторони.

Діагоналлю чотирикутника називається відрізок, що сполучає дві протилежні вершини. AC і BD — діагоналі.

Периметром чотирикутника називається сума довжин усіх його сторін.

$$P = AB + BC + CD + AD.$$

Чотирикутник називається ***опуклим***, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, що містить його сторону.

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ.$$

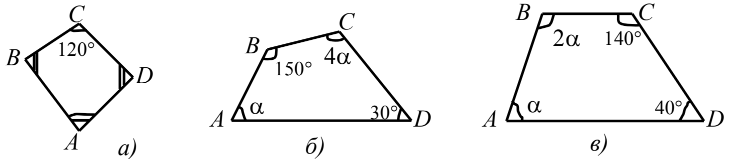
Задачі на *кодоплівці 1* допоможуть закріпити теорему про суму кутів чотирикутника.

Під час вивчення паралелограма, його властивостей і ознак корисною буде *таблиця 2*.

Кодоплівка 1

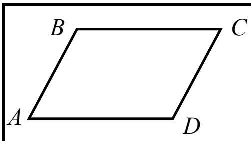
КУТИ ЧОТИРИКУТНИКА

Знайдіть кути чотирикутника *ABCD*.



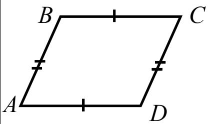
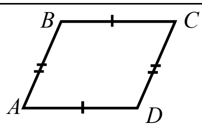
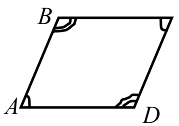
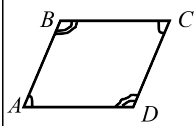
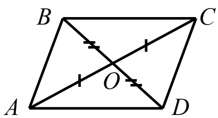
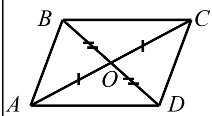
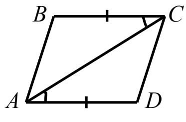
а) *б)* *в)*

Таблиця 2



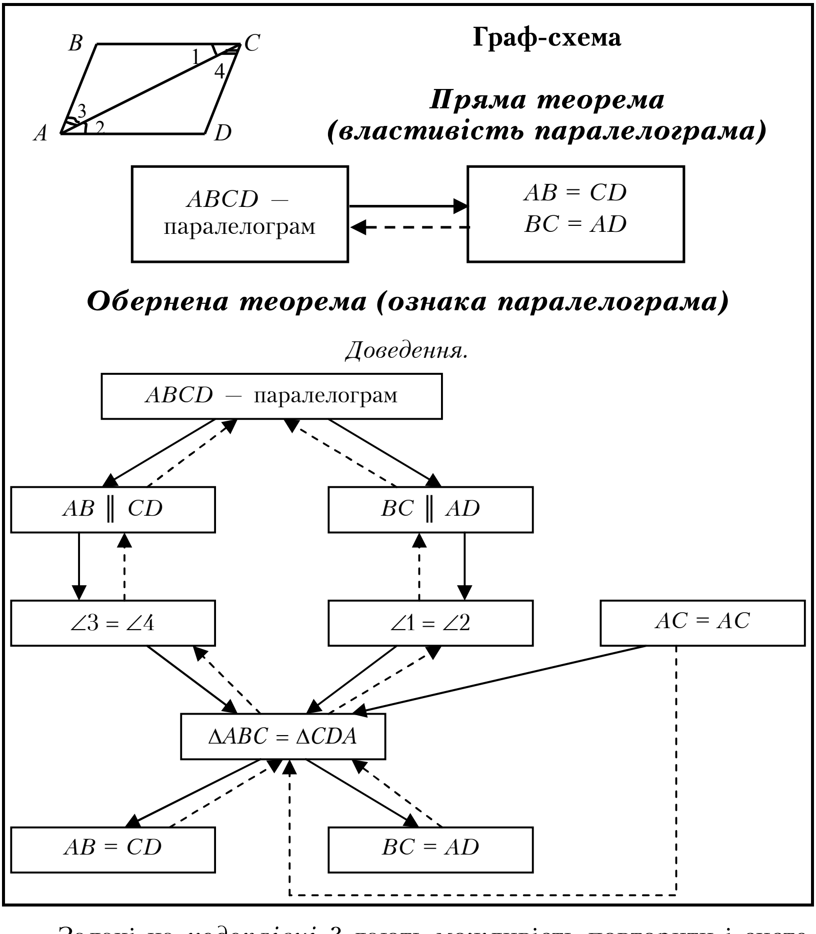
ПАРАЛЕЛОГРАМ

Паралелограмом називається чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні. $AB \parallel CD$ і $AD \parallel BC$.

Властивості паралелограма	**Ознаки паралелограма**
 Протилежні сторони паралелограма рівні.	 Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
 Протилежні кути паралелограма рівні.	 Якщо протилежні кути чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
 Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.	 Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.
	 Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні і рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Щоб показати зв’язок між властивостями і ознаками паралелограма і їх доведеннями, вчителю слід демонструвати за допомогою *кодоплівки 2* граф-схему, на якій показано послідовність міркувань при доведенні властивості паралелограма (суцільні стрілки) і ознаки паралелограма (штрихові стрілки). Така граф-схема дає можливість вчити учнів не лише логіці міркувань при доведенні прямих і обернених теорем, але і повторити та систематизувати раніше вивчений матеріал (ознаки рівності трикутників, властивість внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній та ознаку паралельності, властивість, що в рівних трикутниках проти рівних сторін лежать рівні кути і навпаки).

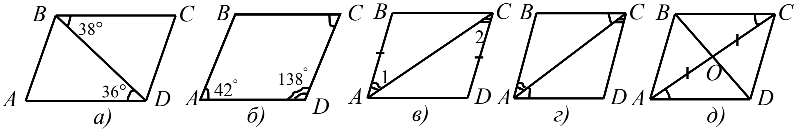
Кодоплівка 2



Задачі на *кодоплівці 3* дають можливість повторити і систематизувати властивості і ознаки паралелограма.

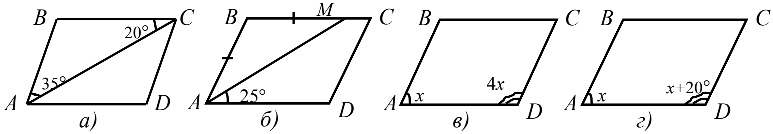
<table>
<tr><td>

1. Чи є чотирикутники паралелограмами?



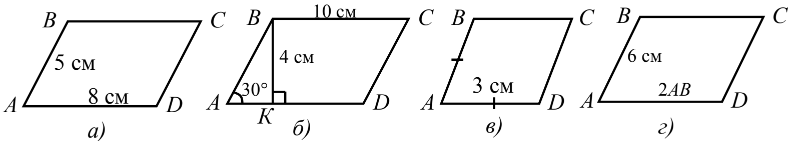
</td></tr>
<tr><td>

2. Знайдіть кути паралелограмів.



</td></tr>
<tr><td>

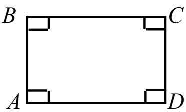
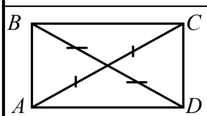
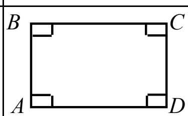
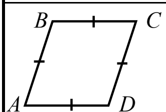
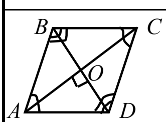
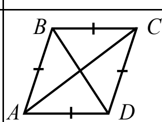
3. Знайдіть периметр паралелограмів.

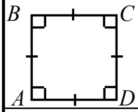


</td></tr>
</table>

При вивченні прямокутника, ромба, квадрата корисною буде *таблиця 3*.

Таблиця 3

<table>
<tr><th colspan="2">ВИДИ ПАРАЛЕЛОГРАМІВ</th></tr>
<tr><td colspan="2">
Прямокутник
Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути рівні.</td></tr>
<tr><th>Властивість прямокутника</th><th>Ознака прямокутника</th></tr>
<tr><td> Діагоналі прямокутника рівні.</td><td> Якщо всі кути чотирикутника рівні, то цей чотирикутник є прямокутником.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Ромб
Ромбом називається паралелограм, у якого всі сторони рівні.</td></tr>
<tr><th>Властивості ромба</th><th>Ознака ромба</th></tr>
<tr><td> Діагоналі ромба перпендикулярні і ділять його кути навпіл.</td><td> Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник є ромбом.</td></tr>
</table>



Квадрат

Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.

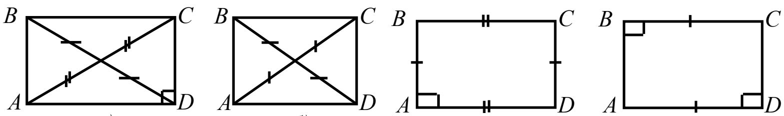
Властивості квадрата

1. Усі сторони квадрата рівні, а протилежні сторони паралельні.
2. Усі кути квадрата прямі.
3. Діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні, ділять кути квадрата навпіл і точкою перетину діляться навпіл.

Закріпленню властивостей прямокутника допоможуть вправи на *кодоплівці 4*.

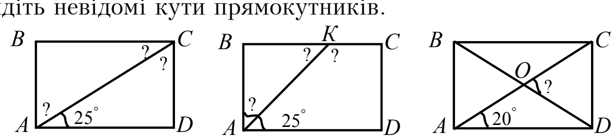
Кодоплівка 4

1. Чи є дані чотирикутники прямокутниками? Чому?



а) *б)* *в)* *г)*

2. Знайдіть невідомі кути прямокутників.

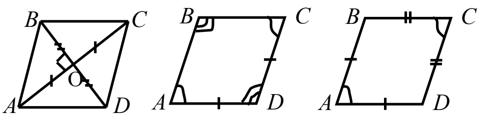


а) *б)* *в)*

Задачі на *кодоплівці 5* сприятимуть повторенню і систематизації властивостей ромба.

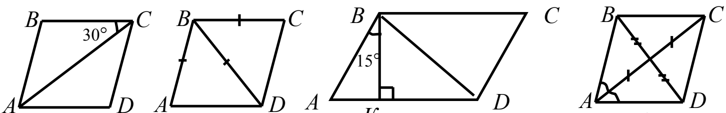
Кодоплівка 5

1. Чи є дані чотирикутники ромбами? Чому?



а) *б)* *в)*

2. Знайдіть кути ромбів.

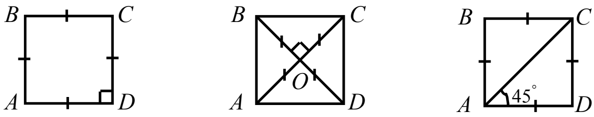


а) *б)* *в)* *г)*

Розв'язуючи задачі з *кодоплівки 6*, учні матимуть можливість повторити властивості квадрата.

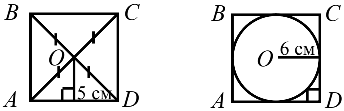
Кодоплівка 6

1. Доведіть, що дані чотирикутники — квадрати.



а) *б)* *в)*

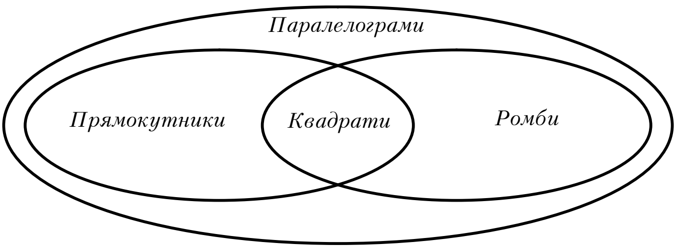
2. Доведіть, що дані чотирикутники — квадрати і знайдіть їх периметр.



а) *б)*

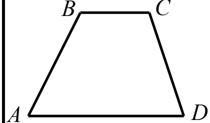
Щоб полегшити учням розуміння класифікації різних видів паралелограмів, варто запропонувати їм таку *діаграму*.

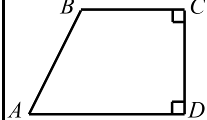
Діаграма



Вивчення трапеції, її видів, властивості і ознаки трапеції слід супроводжувати демонстрацією *таблиці 4*.

Таблиця 4





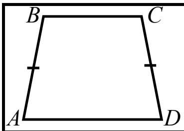
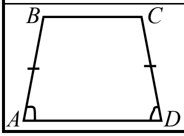
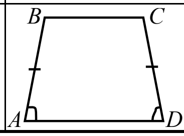
ТРАПЕЦІЯ

Трапецією називається чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні.

Паралельні сторони трапеції називаються її ***основами***, дві інші — ***бічні сторони***.
AD і *BC* — основи, *AB* і *CD* — бічні сторони.

Прямокутною трапецією називається трапеція, яка має прямий кут.

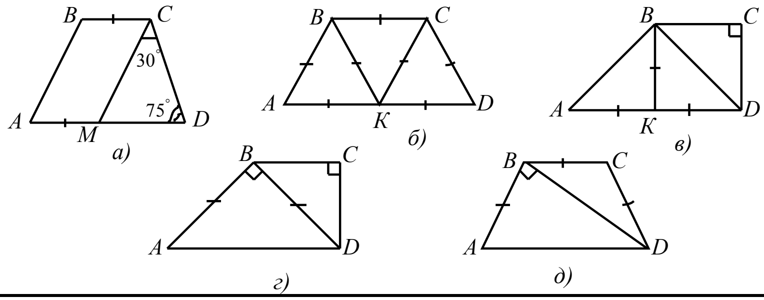
Продовження таблиці 4

<table>
<tr><td colspan="2">
Рівнобічною трапецією називається трапеція, у якої бічні сторони рівні.</td></tr>
<tr><th>Властивість рівнобічної трапеції</th><th>Ознака рівнобічної трапеції</th></tr>
<tr><td>
У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.</td><td>
Якщо в трапеції кути при основі рівні, то така трапеція рівнобічна.</td></tr>
</table>

Задачі *кодоплівки 7* допоможуть закріпити властивості трапеції.

Кодоплівка 7

Знайдіть кути трапеції.



Систематизацію і узагальнення матеріалу з теми «Чотирикутники і їх види» можна провести у вигляді фронтального опитування за питаннями, записаними на *кодоплівці 8*.

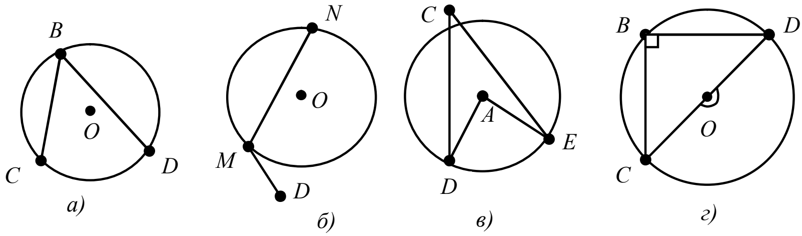
Кодоплівка 8

1. Що називається чотирикутником?
2. Що таке вершини і сторони чотирикутника?
3. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?
4. Що таке діагональ чотирикутника?
5. Що таке периметр чотирикутника?
6. Що називається паралелограмом?
7. Які властивості паралелограма?
8. Які ознаки паралелограма?
9. Дайте означення прямокутника.
10. Які властивості прямокутника?
11. Дайте означення ромба.
12. Які властивості ромба?
13. Дайте означення квадрата.
14. Які властивості квадрата?
15. Дайте означення трапеції.
16. Які є види трапеції?

Ввівши поняття центрального і вписаного кутів, варто запропонувати учням вправу, подану на *кодоплівці 9*.

Кодоплівка 9

Назвіть вписані і центральні кути, зображені на малюнках. Відповідь поясніть.

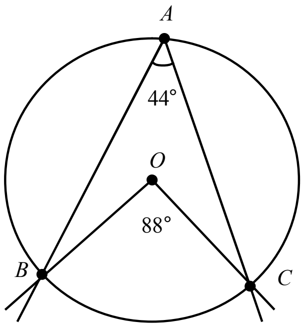


Покажемо, як можна вивчати з учнями вписані і центральні кути, використовуючи комп'ютер і програмний засіб **DG** (динамічної геометрії).

Завдання для роботи за комп'ютером надруковано й роздано по одному на кожну парту.

Варіанти завдань

Завдання № 1



Дослідіть залежність величини вписаного й центрального кутів, якщо вони спираються на спільну дугу.

1. Побудуйте коло (інструмент *Коло*) й позначте його центр точкою *O*.

2. Позначте на колі три точки *A, B, C* (інструмент *Точка фігури*).

3. Використовуючи інструмент *Промінь*, побудуйте $\angle BAC$, вписаний у коло.

4. Побудуйте центральний $\angle BOC$.

5. Виберіть інструмент *Виміряти кут* та виміряйте $\angle BOC$ та $\angle BAC$. У скільки разів $\angle BOC$ більший від $\angle BAC$?

6. Динамічно змінюйте положення точок *A, B, C*. Дослідіть, чи буде зберігатися співвідношення між градусними мірами кутів *BOC* та *BAC*. Зробіть висновок.

7. Змінюючи положення точок *B, C*, розгляньте випадок, коли хорда *BC* перетвориться на діаметр. Якою буде градусна міра кута *BAC*?

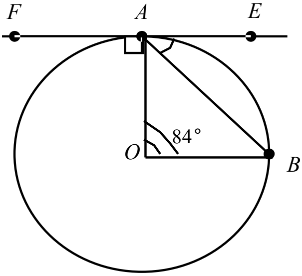
8. Сформулюйте властивість вписаних кутів, які спираються на діаметр кола.

Заповніть таблицю та сформулюйте висновок.

Таблиця

№ з/п	$\angle BOC$	$\angle BAC$	$k = \dfrac{\angle BOC}{\angle BAC}$
1.			
2.			
3.			

Завдання № 2



Перевірте наступну властивість: кут між хордою і дотичною до кола, що проходить через точку A, дорівнює половині дуги AB.

1. Побудуйте коло (інструмент *Коло*) і позначте його центр точкою O.

2. Позначте на колі точки A і B (інструмент *Точка фігури*).

3. Побудуйте відрізки AB, AO, BO.

4. Виберіть інструмент *Перпендикулярна пряма* і побудуйте пряму AE перпендикулярно до радіуса AO.

5. За допомогою інструмента *Виміряти кут* виміряйте кути BAE та AOB.

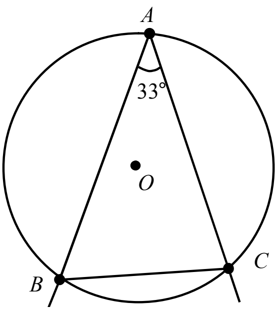
6. Динамічно змінюючи положення точок A і B, порівняйте відношення кутів AOB і BAE.

Заповніть таблицю та сформулюйте висновок.

Таблиця

№ з/п	$\angle AOB$	$\angle BAE$	$k = \dfrac{\angle AOB}{\angle BAE}$
1.			
2.			
3.			

Завдання № 3



Дослідіть величини вписаних кутів, які спираються на одну і ту саму хорду).

1. Побудуйте коло (інструмент *Коло*) і позначте його центр точкою O.

2. Позначте на колі три точки A, B і C (інструмент *Точка фігури*).

3. Використовуючи інструмент *Промінь*, побудуйте кут BAC, вписаний у коло.

4. Побудуйте хорду BC (інструмент *Відрізок*). Виміряйте кут BAC. Динаміч-

но змінюючи положення лише точки A, дослідіть зміну величини кута BAC.

5. Сформулюйте висновок.

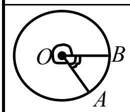
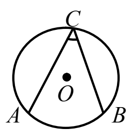
Кути, вписані в коло — це не найважча тема у курсі планіметрії, проте вимагає надання багатьох точних і правильно виконаних малюнків. Вимірювання кутів за допомогою транспортира викликає деякі труднощі. Використання програмного засобу динамічної геометрії для ілюстрації завдань значно полегшує розуміння багатьох фактів і допомагає в усвідомленні різноманітних закономірностей. Виміри, отримані учнями в результаті застосування інструментів програми **Gran−2D**, будуть точними, а не наближеними. Учень зосереджується на навчальній проблемі, яку має вирішити, а не на тому, чи добре виміряв кут або відрізок. Використання даної програми розв'язує проблему використання циркуля, яким, як відомо, не завжди можна акуратно побудувати коло.

Використання комп'ютера на уроках математики дозволяє реалізувати принципи розвивального навчання, а саме проведення навчання в зоні найближчого розвитку кожного учня.

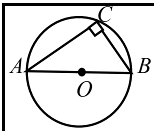
Вирішуючи проблему застосування ППЗ в процесі навчання математики, варто виходити не скільки з функціональних можливостей комп'ютера й бажання використати його в навчальному процесі, скільки з методичної системи навчання математики, аналіз якої повинен показати, які навчальні задачі можуть бути розв'язані тільки ППЗ, тому що інші дидактичні засоби менш ефективні або їх застосування взагалі неможливе.

Крім того, впродовж вивчення центральних і вписаних кутів корисною буде *таблиця 5*.

Таблиця 5

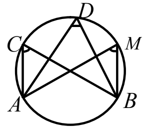
ЦЕНТРАЛЬНІ І ВПИСАНІ КУТИ	
	***Центральним кутом*** називається кут з вершиною в центрі кола. $\angle AOB$ − центральний кут. ***Градусною мірою дуги кола*** називається градусна міра відповідного центрального кута.
	***Вписаним кутом*** називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло. $\angle ACB$ − вписаний кут. **Теорема.** Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Наслідки



1. Вписаний кут, що спирається на діаметр, прямий.

$\angle ACB = 90^\circ$.



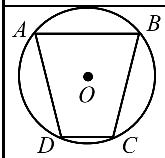
2. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.

$\angle ACB = \angle ADB = \angle AMB$.

Вивчення вписаних і описаних чотирикутників, їх властивостей і ознак доцільно супроводжувати демонстрацією *таблиці 6*.

Таблиця 6

ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ



Вписані чотирикутники

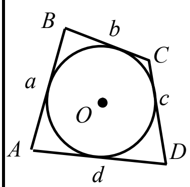
Чотирикутник називається ***вписаним у коло***, якщо всі його вершини лежать на колі.

Властивість вписаного чотирикутника

Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

Ознака вписаного чотирикутника

Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.



Описані чотирикутники

Чотирикутник називається ***описаним навколо кола***, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола.

Властивість описаного чотирикутника

В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні: $a + c = b + d$.

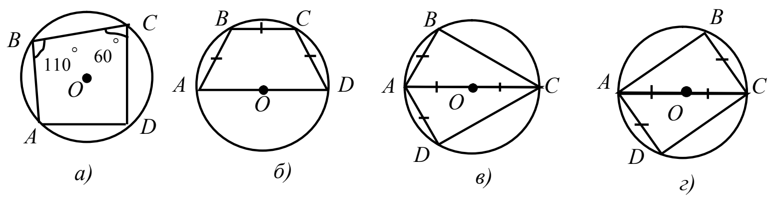
Ознака описаного чотирикутника

Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

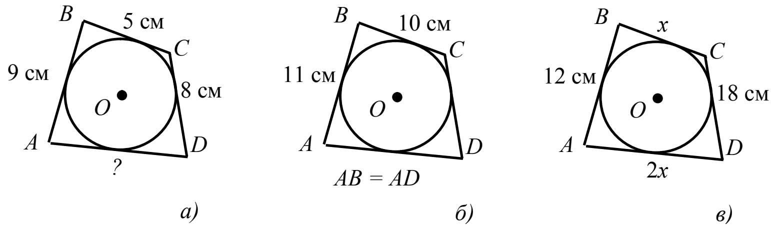
Закріпленню властивостей вписаних і описаних чотирикутників сприятиме розв'язання вправ на *кодоплівках 10* і *11*.

Кодоплівка 10

Знайдіть кути чотирикутників.



Знайдіть невідомі сторони чотирикутників.



Після вивчення теми «Теорема Фалеса. Середні лінії трикутника і трапеції» можна провести повторення вивченого матеріалу у вигляді фронтального опитування за питаннями *кодоплівки 12*.

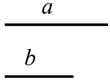
Кодоплівка 12

1. Сформулюйте теорему Фалеса.
2. Як поділити відрізок AB на n рівних частин?
3. Що називається середньою лінією трикутника?
4. Які властивості середньої лінії трикутника?
5. Що називається середньою лінією трапеції?
6. Які властивості середньої лінії трапеції?

Вивчення пропорційних відрізків і узагальненої теореми Фалеса доцільно супроводжувати демонстрацією *таблиці 7*.

Таблиця 7

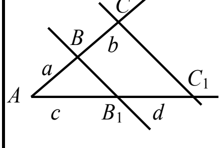
ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ



Відношенням відрізків називається частка їх довжин.

Відрізки a і c називаються ***пропорційними*** відрізкам b і d, якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

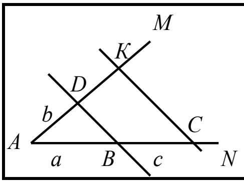
Узагальнена теорема Фалеса, або теорема про пропорційні відрізки



Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}, \text{ або } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Відрізок x називається ***четвертим пропорційним*** трьох даних відрізків a, b і c, якщо виконується співвідношення $a : b = c : x$, тобто $x = \frac{cb}{a}$.



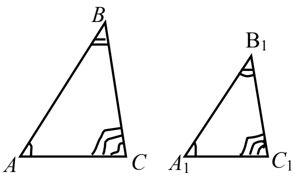
Побудова четвертого пропорційного відрізка

1. Будуємо довільний кут MAN.
2. На промені AN відкладаємо $AB = a$, $BC = c$.
3. На промені AM відкладаємо $AD = b$.
4. Будуємо $CK \parallel BD$, $x = DK$ — шуканий.

Таблиця 8 допоможе учням успішніше засвоїти поняття подібних трикутників, основної теореми про подібність трикутників і ознак подібності трикутників.

Таблиця 8

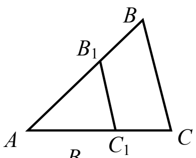
ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



Два трикутники називаються ***подібними***, якщо їх відповідні кути рівні, а сторони пропорційні.

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k.$$

k — коефіцієнт подібності.

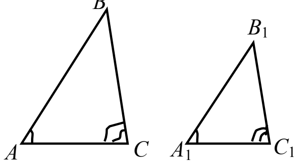


Основна теорема про подібність трикутників.

Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

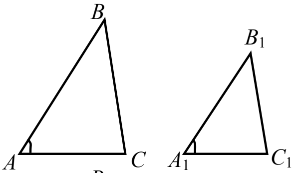
$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC.$$

Ознаки подібності трикутників.



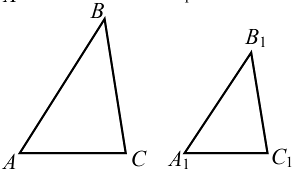
Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

$$\angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1, \Rightarrow\ \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$



Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \angle A = \angle A_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$



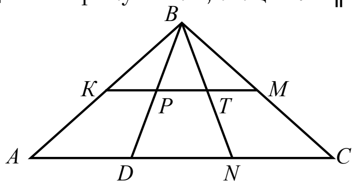
Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то такі трикутники подібні.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow\ \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

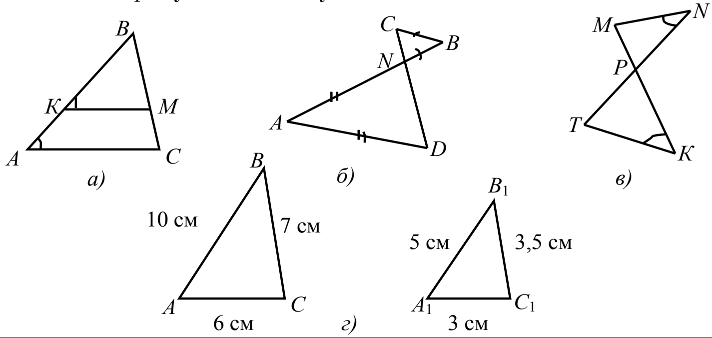
Розв'язування вправ на *кодопліввці 13* допоможе систематизувати і повторити ознаки подібності трикутників.

Кодоплівка 13

1. Скільки пар подібних трикутників, якщо $KM \parallel AC$?



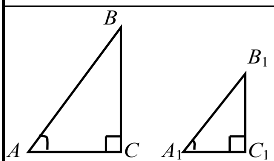
2. Чи подібні трикутники? Чому?



Ознаки подібності прямокутних трикутників доцільно ілюструвати на *таблиці 9*.

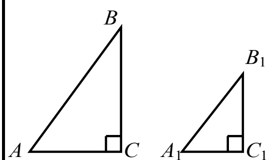
Таблиця 9

ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ



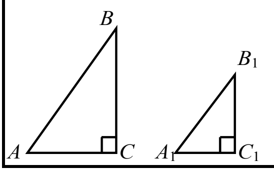
Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого, то такі трикутники подібні.

$$\angle A = \angle A_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$



Якщо катети одного прямокутного трикутника пропорційні катетам другого, то такі трикутники подібні.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$



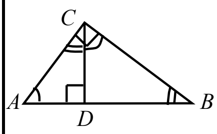
Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника пропорційні гіпотенузі і катету другого, то такі трикутники подібні.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику, теорему Піфагора і теорему, обернену до неї, корисно пояснювати учням, використовуючи *таблицю 10*.

Таблиця 10

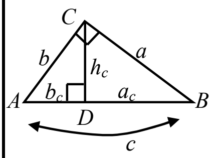
МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА



Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два подібні трикутники. Кожний з цих трикутників подібний до заданого трикутника.

$\Delta ADC \sim \Delta ACB$; $\Delta CDB \sim \Delta ACB$; $\Delta ADC \sim \Delta CDB$.



Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, є середнім пропорційним відрізків, на які ця висота ділить гіпотенузу.

$$CD^2 = AD \cdot DB \text{, тобто } h_c^2 = b_c \cdot a_c .$$

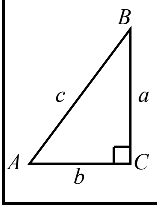
Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу.

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{, тобто } b^2 = c \cdot b_c ;\ BC^2 = AB \cdot DB \text{, тобто } a^2 = c \cdot a_c .$$

Висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює добутку катетів, поділеному на гіпотенузу.

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} \text{, тобто } h_c = \frac{a \cdot b}{c} .$$

Теорема Піфагора



У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів: $c^2 = a^2 + b^2$.

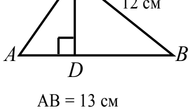
Теорема, обернена до теореми Піфагора

Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник прямокутний: якщо $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90°$.

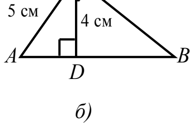
Закріплення цього матеріалу можна проводити на конкретних задачах, зокрема, записаних на *кодоплівці 14*.

Кодоплівка 14

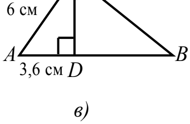
Знайдіть невідомі елементи прямокутного трикутника.



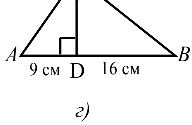
а)



б)



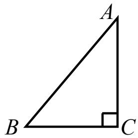
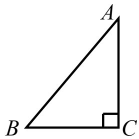
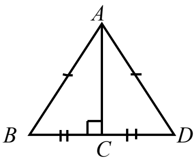
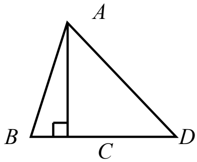
в)



г)

Вивчення перпендикуляра і похилої, властивостей похилих варто ілюструвати *таблицею 11*.

Таблиця 11

ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА	
	AC – ***перпендикуляр***, опущений з точки A на пряму BC. AB – ***похила***, проведена з точки A до прямої BC. B – основа похилої AB. CB – ***проекція похилої*** AB на пряму BC.
	**Властивості похилих** Кожна похила більша за перпендикуляр, проведений з тієї самої точки на ту саму пряму. $AB > AC$. Проекція похилої менша від самої похилої. $BC < AB$.
	Рівні похилі мають рівні проекції. $AB = AD \Rightarrow BC = CD$. Якщо проекції двох похилих рівні, то рівні і похилі. $BC = CD \Rightarrow AB = AD$.
	Більша похила має більшу проекцію. $AD > AB \Rightarrow CD > BC$. З двох похилих більша та, яка має більшу проекцію. $CD > BC \Rightarrow AD > AB$.

Застосування подібності трикутників мають важливе значення в шкільному курсі геометрії, оскільки вони широко використовуються як при викладі теоретичного матеріалу, так і при розв'язанні задач. Тому бажано ці застосування продемонструвати на *таблиці 12*.

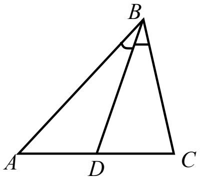
Вивченню властивості бісектриси трикутника і її доведення сприятиме використання граф-схеми, зображеної на *кодоплівці 15*.

Таблиця 13 сприятиме успішному засвоєнню учнями поняття многокутника, його елементів, властивостей многокутників, вписаних і описаних многокутників.

При вивченні площі многокутника, площ прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції доцільно використати *таблицю 14*.

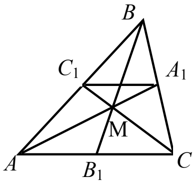
Таблиця 12

ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



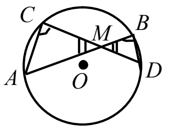
Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}\ .$$



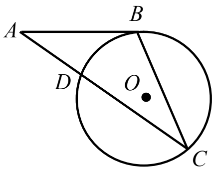
Усі три медіани трикутника проходять через одну точку і діляться цією точкою у відношенні 1 : 2.

$$\frac{A_1M}{MA} = \frac{C_1M}{MC} = \frac{B_1M}{MB} = 1 : 2\ .$$



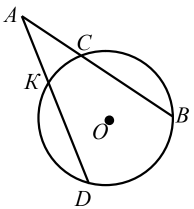
Добутки відрізків хорд, що перетинаються, рівні.

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD\ .$$



Добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з тієї самої точки.

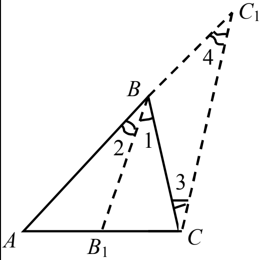
$$AC \cdot AD = AB^2\ .$$



Добутки відрізків січних, проведених з однієї точки кола, рівні.

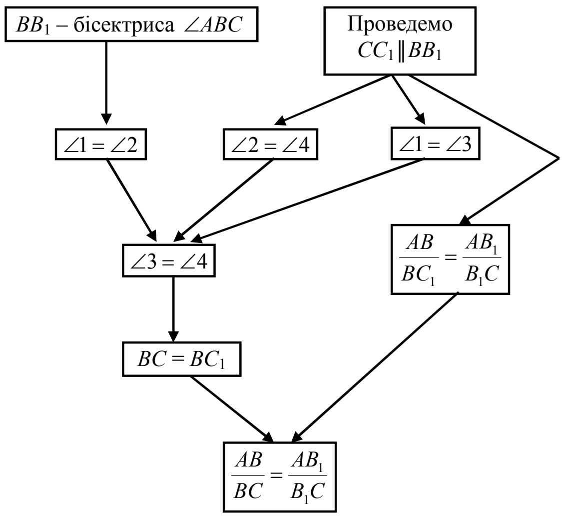
$$AB \cdot AC = AD \cdot AK\ .$$

Граф-схема
ТЕОРЕМА ПРО БІСЕКТРИСУ ТРИКУТНИКІВ



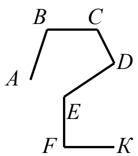
BB_1 — бісектриса $\angle ABC \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB_1}{B_1C}$.

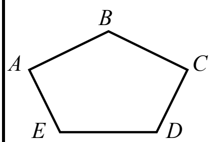
Доведення.

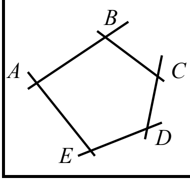


Таблиця 13

МНОГОКУТНИКИ







Фігура, що складається з відрізків *AB, BC, CD, DE, EF, FK*, називається ***ламаною*** *ABCDEFK*. *A, B, C, D, E, F, K* — ***вершини*** ламаної. *A* і *K* — ***кінці*** ламаної.

Ламана називається ***простою***, якщо вона не має самоперетинів і ніякі дві її сусідні ланки не лежать на одній прямій. Ламана називається ***замкненою***, якщо її кінці збігаються.

Многокутником називається проста замкнена ламана. *ABCDE* — многокутник.

A, B, C, D, E — вершини многокутника.

AB, BC, CD, DE, AE — ***сторони многокутника***.

Дві вершини многокутника, які є кінцями однієї сторони, називаються ***сусідніми***.

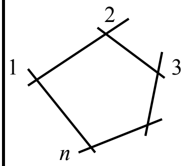
Вершини многокутника, які не є кінцями однієї його сторони, називаються ***несусідніми***.

Продовження таблиці 13

Відрізок, що сполучає дві несусідні вершини, називається ***діагоналлю многокутника***.

Многокутник називається ***опуклим***, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, яка містить його сторону.

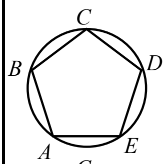
$ABCDE$ — опуклий многокутник.



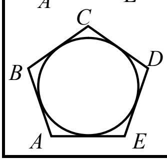
Властивості многокутників

1. Будь-яка сторона многокутника менша за суму всіх його інших сторін.
2. Сума кутів n-кутника дорівнює $180°\ (n-2)$.
3. Сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360°$.

$$\angle 1 + \angle 2 + \ldots + \angle n = 360^\circ .$$



Многокутник називається ***вписаним у коло***, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.



Многокутник називається ***описаним навколо кола***, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола.

Таблиця 14

ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

Площа многокутника — це додатна величина, яка має такі властивості:

1) рівні многокутники мають рівні площі;
2) площа многокутника, складена з кількох частин, дорівнює сумі площ усіх цих частин;
3) площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці площі.

Дві фігури називаються ***рівновеликими***, якщо вони мають рівні площі.

Площа ***прямокутника*** з сторонами a і b рівна $S = a \cdot b$.

Площа ***квадрата*** з стороною a рівна $S = a^2$.

Площа ***паралелограма*** з основою a і висотою h_a, проведеної до основи, рівна $S = a \cdot h_a$.

Площа ***трикутника*** з стороною a і висотою h_a, проведеної до неї, рівна $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$.

Площа ***прямокутного трикутника*** з катетами a і b рівна $S = \frac{1}{2} a \cdot b$.

Площа ***рівностороннього трикутника*** з стороною a рівна $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Площа ***ромба*** з діагоналями d_1 і d_2 рівна $S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Площа ***трапеції*** з основами a і b і висотою h, рівна $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

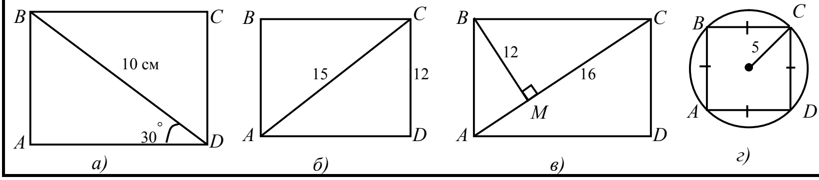
Теорема про відношення площ подібних трикутників

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Закріплення формул для обчислення площ прямокутника, паралелограма, трикутника і трапеції корисно провести, розв'язуючи задачі, записані на *кодоплівках 16, 17, 18, 19*.

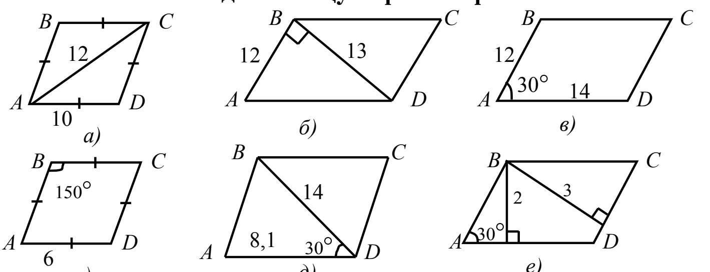
Кодоплівка 16

Знайдіть площі прямокутників



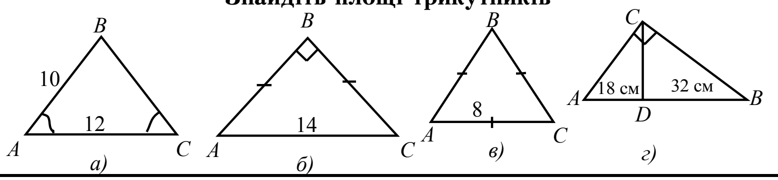
Кодоплівка 17

Знайдіть площу паралелограма



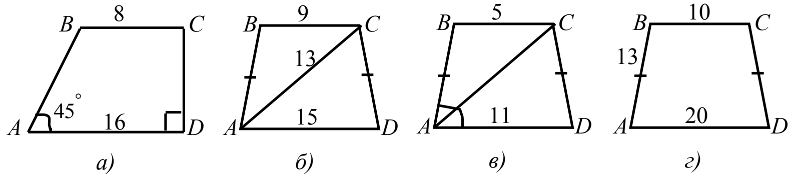
Кодоплівка 18

Знайдіть площі трикутників



Кодоплівка 19

Знайдіть площі трапецій



Систематизацію і узагальнення теми «Многокутники. Площі многокутників» варто провести у формі фронтального опитування за питаннями, записаними на *кодоплівці 20*.

Кодоплівка 20

1. Що таке ламана? Проста ламана?
2. Дайте означення многокутника.
3. Що таке сторони і вершини многокутника?
4. Що називається діагоналлю многокутника?
5. Який многокутник називається опуклим?
6. Що називається периметром многокутника?
7. Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?
8. Який многокутник називається вписаним в коло?
9. Який многокутник називається описаним навколо кола?
10. Що називають площею многокутника?
11. Як визначають площу фігури за допомогою палетки?
12. Чому дорівнює площа прямокутника?
13. Чому дорівнює площа квадрата?
14. Чому дорівнює площа паралелограма?
15. Чому дорівнює площа ромба?
16. За якими формулами обчислюють площу трикутника?
17. Чому дорівнює площа трапеції?
18. Чому дорівнює відношення площ подібних трикутників?

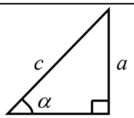
Вивчення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника слід супроводжувати демонстрацією *таблиці 15.*

Закріплення цього матеріалу можна провести, розв'язуючи задачі *кодоплівки 21*.

Пояснивши учням розв'язування прямокутних трикутників, варто продемонструвати *таблицю 16,* в якій помістити основні види задач на розв'язування прямокутних трикутників, умови цих задач і схеми розв'язання. Ця таблиця допоможе засвоїти алгоритми розв'язання прямокутних трикутників.

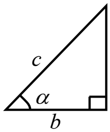
Таблиця 15

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



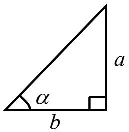
Синусом гострого кута називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$



Косинусом гострого кута називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$



Тангенсом гострого кута називається відношення протилежного катета до прилеглого.

$$tg\alpha = \frac{a}{b}.$$

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ називаються тригонометричними функціями.

Тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

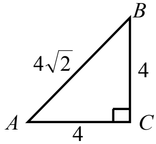
$$\sin\left(90° - \alpha\right) = \cos\alpha,\ \cos\left(90° - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

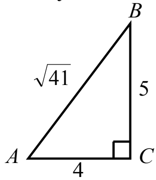
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Кодоплівка 21

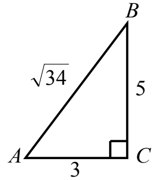
1. Знайдіть синус, косинус, тангенс кута A прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C.



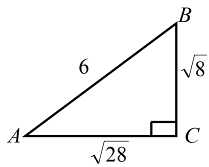
а)



б)

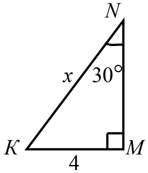


в)

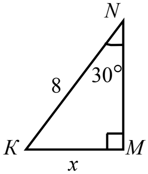


г)

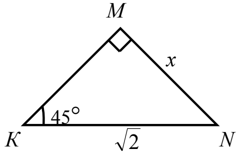
2. Знайдіть невідому сторону прямокутного трикутника KMN з прямим кутом M.



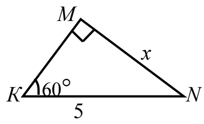
а)



б)

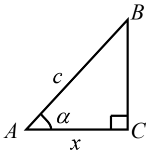


в)

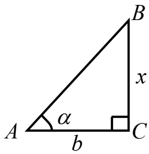


г)

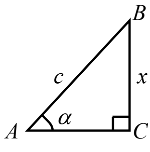
3. Знайдіть невідому сторону прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C.



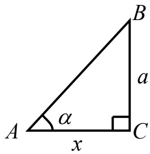
а)



б)

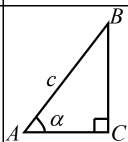
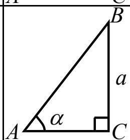
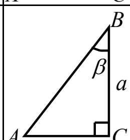
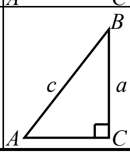


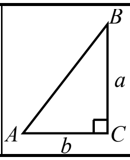
в)



г)

Таблиця 16

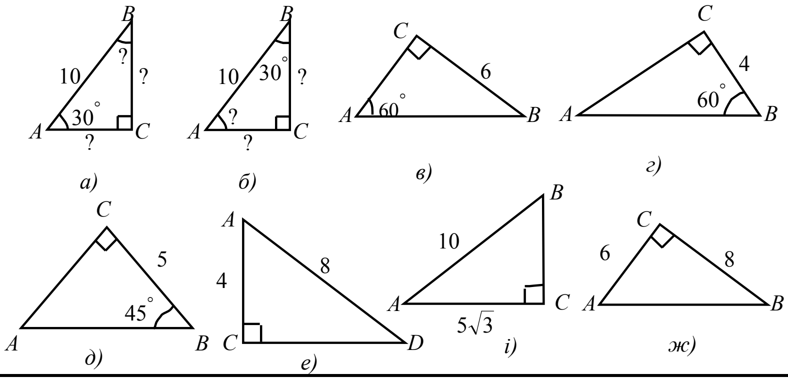
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ			
Вид задачі	**Умова задачі**		**Схема розв'язання**
Відомі гіпотенуза і гострий кут.		Дано: $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$. Знайти: $\angle B$, AC, BC.	1. $\angle B = 90° - \alpha$. 2. $AC = c \cdot \cos\alpha$. 3. $BC = c \cdot \sin\alpha$.
Відомі катет і протилежний гострий кут.		Дано: $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$. Знайти: $\angle B$, AB, AC.	1. $\angle B = 90° - \alpha$. 2. $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. 3. $AC = AB \cdot \cos\alpha$.
Відомі катет і прилеглий гострий кут.		Дано: $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = 90°$. Знайти: $\angle A$, AB, AC.	1. $\angle A = 90° - \beta$. 2. $AB = \dfrac{a}{\cos\beta}$. 3. $AC = AB \cdot \sin\beta$.
Відомі гіпотенуза і катет.		Дано: $AB = c$, $BC = a$, $\angle C = 90°$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AC.	1. $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$. 2. $\sin A = \dfrac{a}{c}$. 3. $\angle B = 90° - \angle A$.

Відомі два катети.		Дано: $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = 90°$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AB.	1. $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. 2. $\sin A = \dfrac{a}{AB}$. 3. $\angle B = 90° - \angle A$.

Закріплення цих алгоритмів учитель проводить, розв'язуючи задачі з *кодоплівки 22*.

Кодоплівка 22

Розв'яжіть прямокутний трикутник за даними на малюнку



Для повторення і систематизації матеріалу розділу 4 «Розв'язування прямокутних трикутників» корисно провести фронтальне опитування учнів за допомогою питань, записаних на *кодоплівці 23*.

Кодоплівка 23

1. Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника.
2. Як змінюється синус кута, якщо кут збільшується від 0° до 90°?
3. Як змінюється косинус кута, якщо кут збільшується від 0° до 90°?
4. Назвіть основні тригонометричні тотожності.
5. Назвіть значення тригонометричних функцій кутів 30°; 45°; 60°.
6. Що означає розв'язати трикутник?
7. Як знайти катети за гіпотенузою і гострим кутом?
8. Як знайти гіпотенузу за катетами?
9. Як знайти гіпотенузу за катетом і гострим кутом?
10. Як знайти кути за гіпотенузою і катетом?

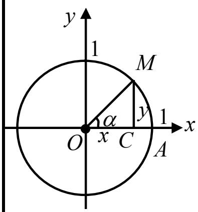
Розглянуті наочні посібники покращать засвоєння учнями геометричного матеріалу, а вчителю допоможуть зекономити час, завдяки чому більше розв'язати задач, що сприятиме розвитку в учнів інтересу до геометрії.

3.3. Наочні посібники на уроках геометрії 9 класу

Розкриємо методику використання наочності на уроках геометрії у 9 класі.

Розділ I «Розв'язування трикутників» розпочинається з ознайомлення учнів з поняттями синуса, косинуса і тангенса кутів від 0° до 180°. Тут варто використати *кодоплівку 1*.

Кодоплівка 1



Коло радіуса $R = 1$ називається ***одиничним***.

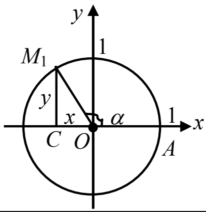
$\sin\alpha = y$,

$\cos\alpha = x$, $M(\cos\alpha; \sin\alpha)$,

$tg\alpha = \dfrac{y}{x}$.

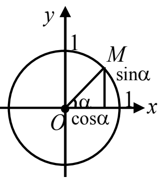
Означення. Абсцису точки M називають ***косинусом кута α***, ординату — ***синусом кута α***.

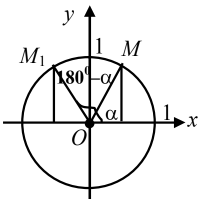
$M_1(\cos\alpha; \sin\alpha)$



Розглядаючи основні тотожності для sin*α*, cos*α* і tg*α*, доцільно підготувати *таблицю 1*, якою учні зможуть користуватися до тих пір, поки не запам'ятають ці тотожності.

Таблиця 1





ОСНОВНІ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ
sinα, cosα і tgα

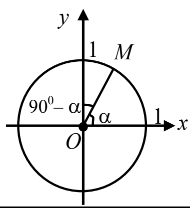
$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$; $tg(180° - \alpha) = -tg\alpha$;

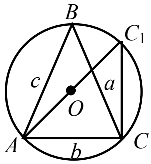
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.



Таблиця 2 допоможе учням краще засвоїти теорему синусів, наслідки, які з неї випливають, і розв'язування трикутників за теоремою синусів.

Таблиця 2

ТЕОРЕМА СИНУСІВ



Теорема. Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Наслідок 1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

Наслідок 2. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

Теорема синусів дозволяє за стороною і прилеглими до неї кутами або за двома сторонами і кутом, протилежним одній з них, знаходити інші елементи трикутника.

Перед вивченням теореми косинуса корисно спочатку провести актуалізацію опорних знань.

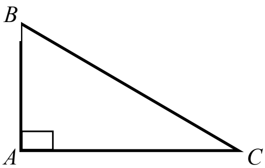
1. Сформулюйте означення синуса, косинуса гострого кута прямокутного трикутника.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.

2. Дайте відповіді на питання, сформульовані на *кодоплівці 2*.

Кодоплівка 2



Розгляньте відношення: $\frac{AC}{BC}$; $\frac{AB}{AC}$; $\frac{BC}{AC}$; $\frac{AC}{AB}$; $\frac{BC}{AB}$; $\frac{AB}{BC}$.

Яке з цих відношень є:

- косинусом кута C;
- косинусом кута B;
- синусом кута C;
- синусом кута B?

3. Виконайте завдання з *кодоплівки 3*.

Кодоплівка 3

Із заданих виразів: $\cos\alpha$; $\cos^2\alpha$; $\sin\alpha$; 1; 120°; $\sin^2\alpha$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$ виберіть і підставте замість крапок такі з них, щоб рівності були правильними:

• $\sin^2\alpha+\ldots=1$; • $\cos 60^\circ=\ldots$; • $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\ldots}$; • $\cos^2\alpha+\ldots=1$; • $\cos\ldots=-\frac{1}{2}$.

4. Сформулюйте теорему Піфагора.

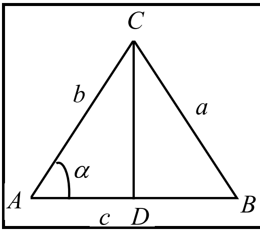
У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

5. Сформулюйте теорему синусів. Як її можна використати для розв'язування трикутників.

Далі запитати в учнів, чи можна розв'язати трикутник, якщо відомі дві сторони і кут між ними?

Розглянемо трикутник ABC, у якого відомі сторони AC і AB і кут A. Знайти сторону BC (*кодоплівка 4*). Вчитель проводить запис умови задачі на дошці, а учні в зошитах будують відповідні малюнки та роблять потрібні записи за вчителем.

Кодоплівка 4



Дано: ΔABC,

$AB = c$, $AC = b$,
$\angle BAC = \alpha$.

Знайти: BC.

Розв'язання.

Проведемо з вершини C висоту CD. Вона розділить ΔABC на два прямокутні трикутники — CDB і CDA.

У ΔCDA ($\angle CDA = 90^\circ$): AC — гіпотенуза, $CD = b \cdot \sin\alpha$, $AD = b \cdot \cos\alpha$. У ΔCDB ($\angle CDB = 90^\circ$): $DB = c - b \cdot \cos\alpha$.

Позначимо BC через a, тоді за теоремою Піфагора з ΔBDC:

$$a^2 = b^2 \sin^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2,$$

$$a^2 = b^2 \sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha,$$

$$a^2 = b^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Тобто, квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Це твердження носить назву «Теорема косинусів» і використовується для знаходження невідомої сторони трикутника через дві інші сторони та кут між ними. Слід також зауважити і показати, що $AC \cdot \cos A$ дорівнює за абсолютною величиною проекції AD сторони AC на сторону AB або її продовження (див. малюнок на *таблиці 3*).

Знак $AC \cdot \cos A$ залежить від кута A: якщо кут A гострий, то береться «+», якщо тупий, то «−».

Звідси маємо наслідок: квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін «±» подвоєний добуток однієї з них на проекцію другої. Знак „+" слід брати тоді, коли протилежний кут тупий, а знак «−» — коли гострий.

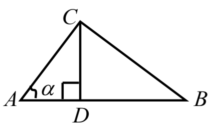
Для закріплення доведення теореми використовується *таблиця 3* «Теорема косинусів».

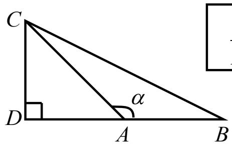
Таблиця 3

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

Квадрат будь-якої сторони трикутника	=	Сумі квадратів двох інших сторін	−	Подвоєний добуток цих сторін	•	Косинус кута між ними
BC^2	=	$AB^2 + AC^2$	−	$2AB \cdot AC \cdot \cos A$		

Доведення.





Скалярний добуток

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos A$

ABC – даний трикутник → $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

Теорему доведено.

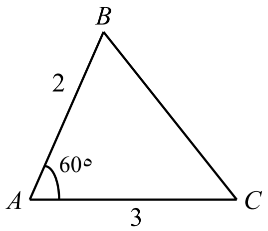
$\angle A$

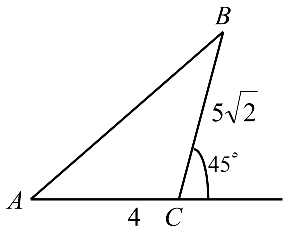
гострий	тупий
$AC \cdot \cos A > 0$	$AC \cdot \cos A < 0$
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$	$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

Для формування уміння застосовувати дану теорему вчитель пропонує задачі за допомогою *кодоплівки 5*.

Кодоплівка 5

Знайти невідому сторону трикутника





Пояснивши учням розв'язування трикутників, вчителю варто продемонструвати їм *таблицю 4*, в якій розкрито алгоритми розв'язування основних типів задач на розв'язування трикутників.

Таблиця 4

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ	
Умова задачі	**Алгоритм розв'язування**
1. Розв'язування трикутника за стороною і прилеглими до неї кутами. Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Знайти: b, c, $\angle A$.	1. За сумою кутів трикутника 180° і двома даними знаходимо $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$. 2. За теоремою синусів знаходимо $b = \dfrac{a \cdot \sin B}{\sin A}$ і $c = \dfrac{a \cdot \sin C}{\sin A}$.
2. Розв'язування трикутника за двома сторонами і кутом між ними. Дано: a, b, $\angle C$. Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$.	1. За теоремою косинусів знаходимо $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$. 2. За теоремою косинусів знаходимо $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 3. $\angle B = 180° - \angle A - \angle C$.
3. Розв'язування трикутника за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них. Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.	1. За теоремою синусів знаходимо $\sin B = \dfrac{b \cdot \sin A}{a}$. 2. $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$. 3. За теоремою синусів знаходимо $c = \dfrac{a \cdot \sin C}{\sin A}$.
4. Розв'язування трикутника за трьома сторонами. Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.	1. За теоремою косинусів знаходимо $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. 2. $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.

Ця таблиця має демонструватися в кабінеті математики до тих пір, поки учні не засвоять дані алгоритми.

Закріплення формул для знаходження площі трикутника зручно проводити, використовуючи *таблицю 5*.

Таблиця 5

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, де a — основа, h_a — висота, проведена до основи.

$S=p\cdot r$, де $p=\frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника, r — радіус вписаного кола.

$S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot \sin\alpha$, де α — кут між сторонами b і c.

$S=\frac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола.

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Таблиця 5 є довідковою таблицею і має демонструватися в кабінеті математики протягом тривалого часу.

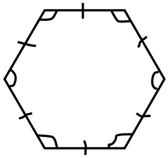
Проводячи повторення і систематизацію вивчення розділу «Розв'язування трикутників», доцільно провести фронтальне опитування учнів, демонструючи *кодоплівку 5*.

Кодоплівка 5

1. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса для кутів від 0° до 180°.
2. Доведіть тотожності для синуса, косинуса і тангенса.
3. Сформулюйте і доведіть теорему синусів.
4. Сформулюйте і доведіть два наслідки з теореми синусів.
5. Сформулюйте і доведіть теорему косинусів.
6. Які є види задач на розв'язування трикутників? Які їх алгоритми розв'язування?
7. Які є формули для обчислення площі трикутника? Як їх довести?

Вивчення правильних многокутників, формул для радіусів описаних і вписаних кіл правильних многокутників, побудови правильних многокутників корисно проводити з використанням таблиці 6, яка полегшить засвоєння цих питань.

Таблиця 6



ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

Означення. Многокутник називається ***правильним***, якщо в нього всі сторони рівні і всі кути рівні.

Властивості правильного многокутника

Навколо правильного многокутника можна описати коло і в нього можна вписати коло.

Кут правильного многокутника: $\alpha = \dfrac{180° \cdot (n-2)}{n}$.

Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників:

$r = \dfrac{a}{2tg\dfrac{180°}{n}}$; $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$, де a — сторона, r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола, n — число сторін.

Для $n = 3$, $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $n = 4$, $r = \dfrac{a}{2}$; $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$n = 6,\ r = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ R = a.$$

Для побудови правильного n-кутника досить поділити коло на n рівних частин і точки поділу послідовно сполучити.

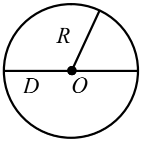
Використання *таблиці 7* полегшить засвоєння учнями таких питань як довжина кола, довжина дуги кола, площа круга, сектора і сегмента.

Таблиця 7

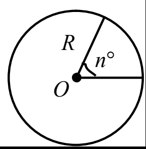
ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА. ДОВЖИНА ДУГИ КОЛА

Довжина кола: $C = 2\pi R = \pi D$, де C — довжина кола, R — радіус, D — діаметр.

Довжина дуги кола: $l = \dfrac{\pi R n°}{180°}$, де l — довжина дуги, $n°$ — центральний кут, що відповідає даній дузі, R — радіус кола.

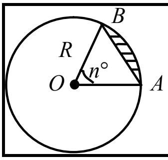


Площа круга: $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$, де R — радіус круга, D — діаметр круга.



Площа сектора: $S = \dfrac{\pi R^2 n°}{360°}$, де $n°$ — центральний кут, R — радіус круга.

Продовження таблиці 7



Площа сегмента: $S = S_{сектораа} - S_{\Delta AOB}$, якщо $n^\circ < 180^\circ$.

$S = S_{сектораа} + S_{\Delta AOB}$, якщо $n^\circ > 180^\circ$.

Повторення і систематизацію розділу 2 «Правильні многокутники» зручно проводити з використанням *кодоплівки 6*.

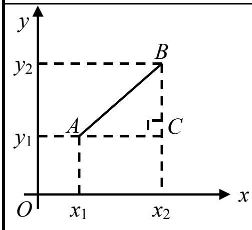
Кодоплівка 6

1. Який многокутник називається правильним? Наведіть приклади правильних многокутників.
2. Виведіть формулу для обчислення кута правильного n-кутника.
3. Доведіть, що навколо правильного n-кутника можна описати коло і в нього можна вписати коло.
4. Виведіть формули для радіусів вписаного і описаного кіл правильного n-кутника.
5. Як побудувати правильний шестикутник, трикутник, чотирикутник?
6. За якою формулою обчислюється довжина кола, довжина дуги кола?
7. Виведіть формулу для обчислення площі круга.
8. Як знайти площу сектора?
9. Як знайти площу сегмента?

Таблиця 8 вчителю допоможе пояснити, а учням успішно засвоїти такі поняття: довжина відрізка, координати середини відрізка, рівняння кола, рівняння прямої.

Таблиця 8

ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ



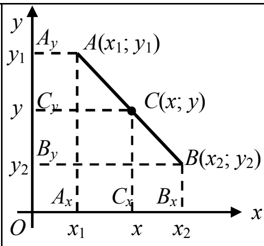
Довжина відрізка

$A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$.

$AC = x_2 - x_1$.

$BC = y_2 - y_1$.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

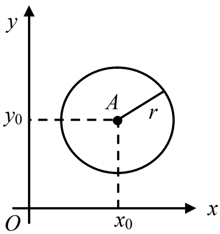
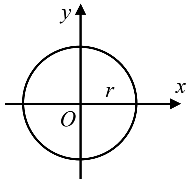


Координати середини відрізка

$C(x;\ y)$ — середина відрізка AB.

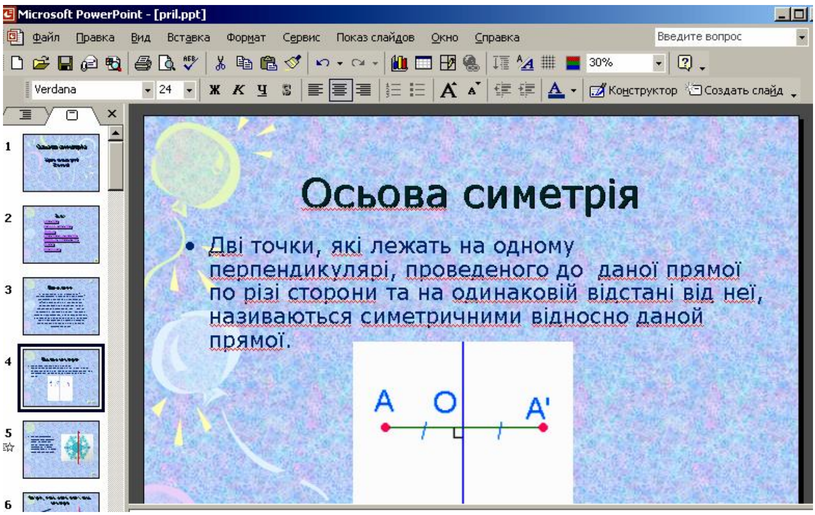
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Рівняння кола	**Рівняння прямої**
 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, де r — радіус кола, $A(x_0;\ y_0)$ — центр кола.  $x^2+y^2=r^2$, де $O(0;\ 0)$ — центр кола, r — радіус кола.	1. $y=kx$ — рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через початок координат. 2. $y=kx+b$ — рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка відтинає на осі Oy відрізок b. 3. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ — рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. 4. $ax+by+c=0$, $a,\ b,\ c$ — числа, які одночасно не рівні нулю — загальне рівняння прямої.

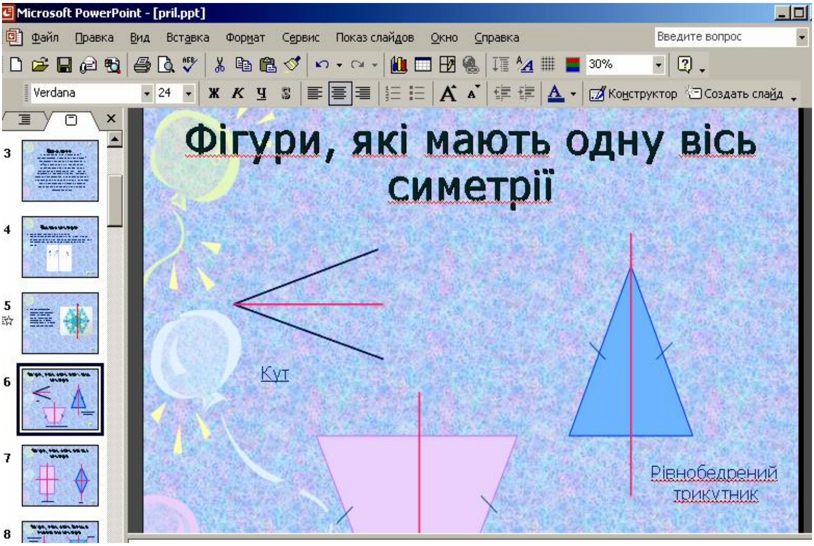
Розглядаючи поняття симетричних точок відносно прямої, доцільно продемонструвати учням *слайд 1*, який допоможе виділити властивості таких точок і спосіб побудови точки A', симетричної точці А відносно прямої.

Слайд 1



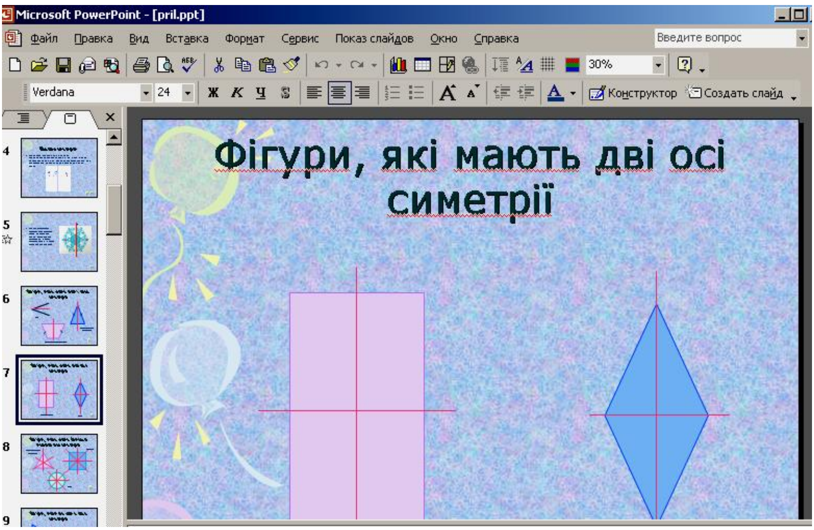
Ввівши поняття фігури, симетричної відносно прямої, корисно використати *слайд 2*.

Слайд 2

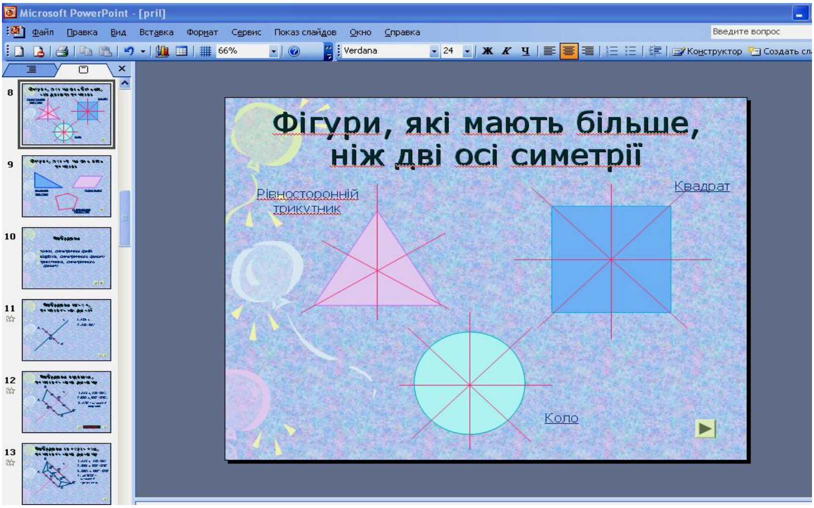


Розглядаючи фігури, які мають дві осі і більше осей симетрії, і фігури, які не мають осі симетрії, варто продемонструвати *слайди 3, 4, 5*.

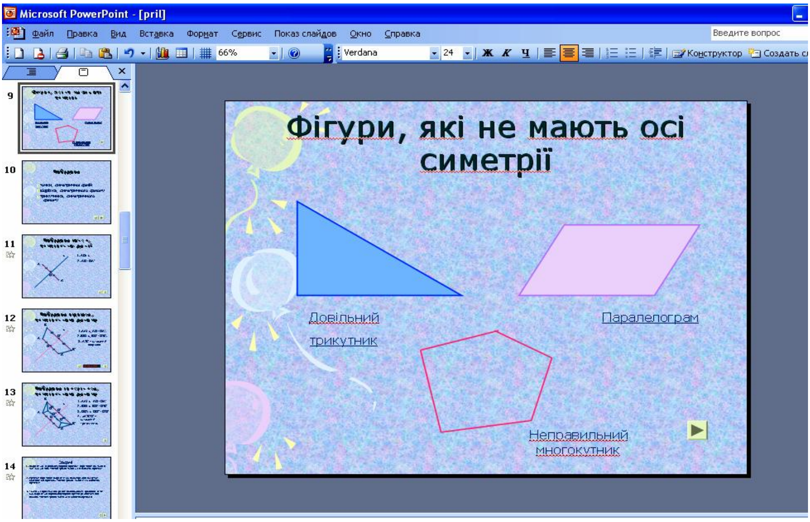
Слайд 3



Слайд 4



Слайд 5

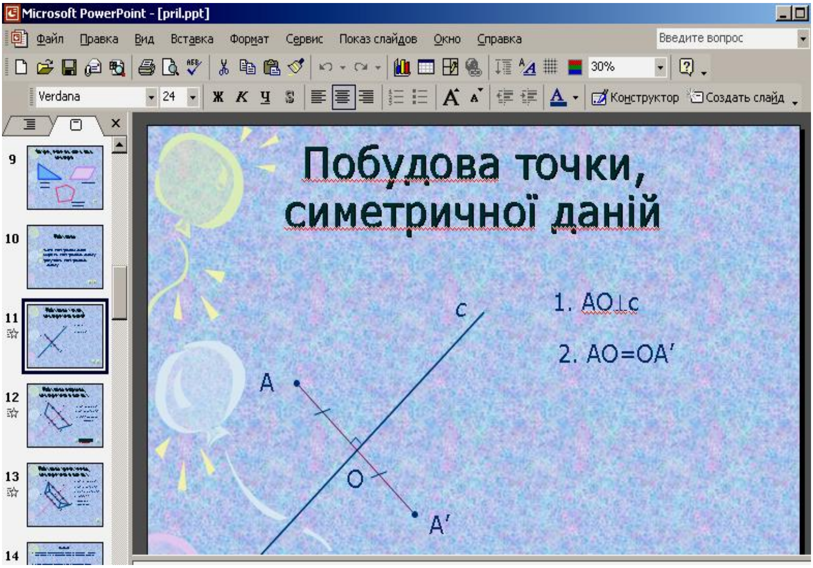


Побудову точки, симетричної даній, варто супроводжувати демонстрацією *слайду 6*.

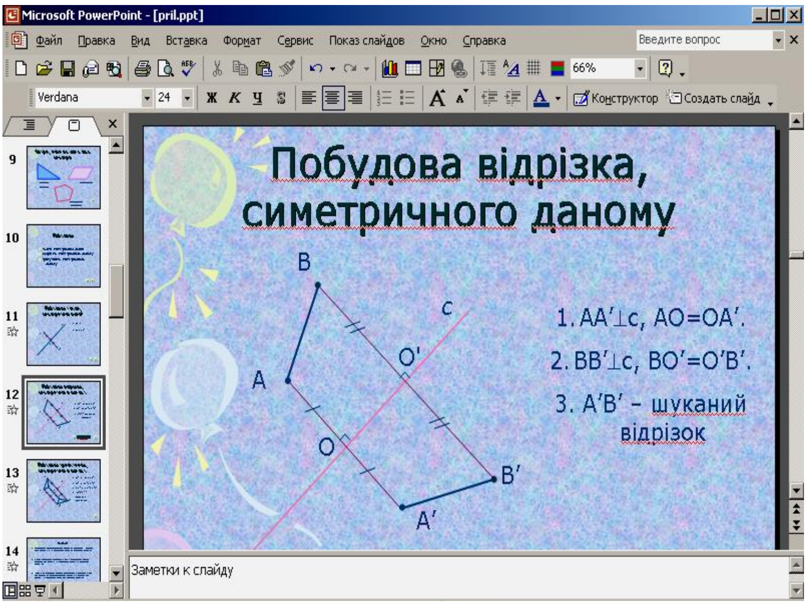
Виконання побудови відрізка, симетричного даному, бажано ілюструвати за допомогою *слайду 7*.

Щоб показати приклади фігур, які мають вісь симетрії, у природі, побуті, поезії, можна продемонструвати учням *слайди 8, 9, 10*.

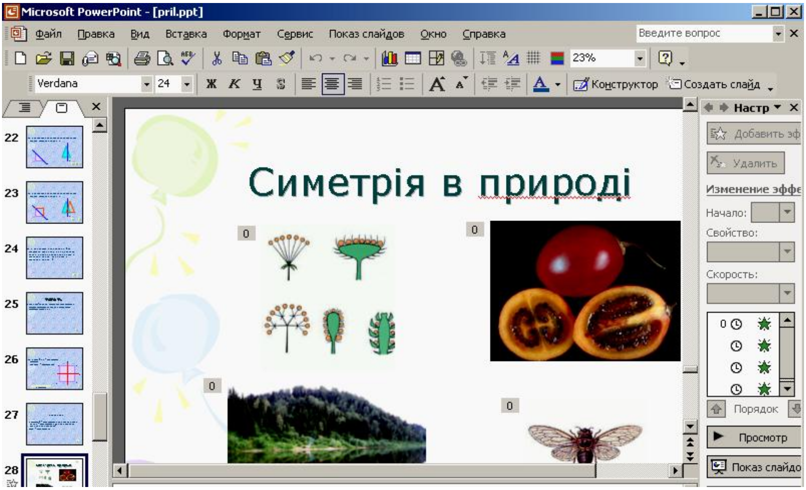
Слайд 6



Слайд 7



Слайд 8

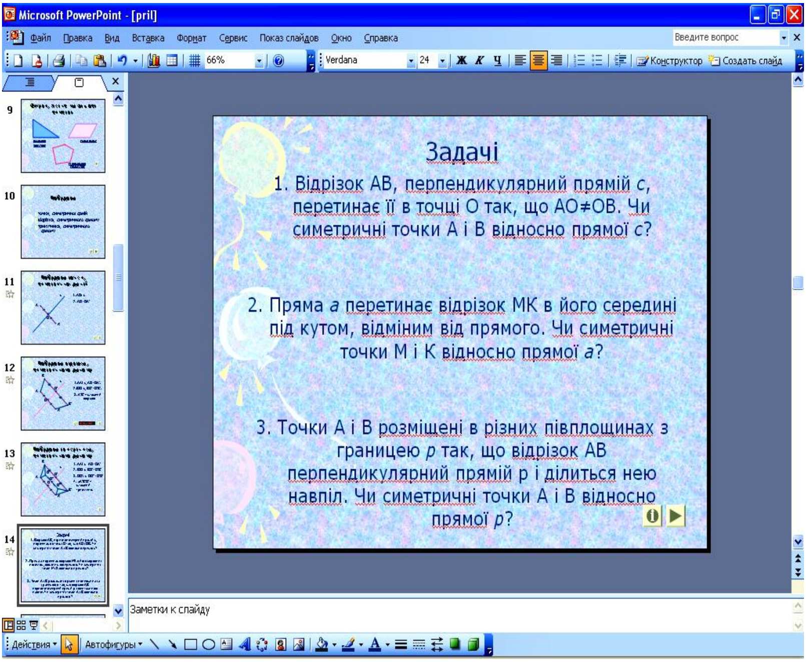


Слайд 9

Слайд 10

Для закріплення вивченого матеріалу доцільно запропонувати учням розв'язати задачі, розміщені на *слайді 11*.

Слайд 11



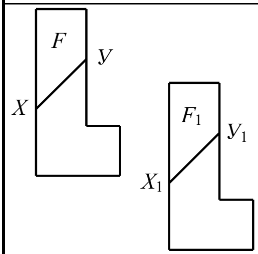
Використання даних слайдів на уроці дає змогу зекономити час на засвоєння нового матеріалу за рахунок наочності та активізації зорової пам'яті. Комп'ютер дає змогу вносити елементи новизни при розв'язанні задач, робить процес роботи наочним, допомагає вчителю сконцентрувати увагу на основних моментах. Робота по розв'язанню кожної задачі будується як деякий діалог між вчителем та учнями, в якому комп'ютер служить демонстратором розв'язання задач.

Закріплення поняття переміщення і його властивостей, видів переміщення і їх властивостей доцільно супроводжувати демонстрацією *таблиці 9*.

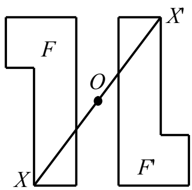
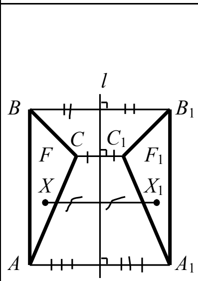
Таблиця 9

ПЕРЕМІЩЕННЯ І ЙОГО ВИДИ

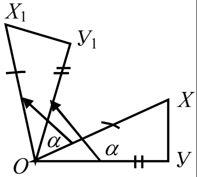
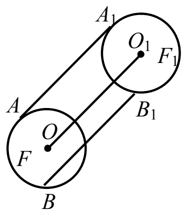
Переміщення

Малюнок	*Означення*	*Властивості*
	***Переміщенням*** називається перетворення, яке зберігає відстань між точками. Дві фігури називаються ***рівними***, якщо вони переводяться переміщенням одна в одну: $F = F_1$.	1. Точки, що лежать на прямій, переходять в точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення. 2. Прямі переходять у прямі, промені — у промені, відрізки — у рівні їм відрізки. 3. Кути переходять у рівні їм кути.

Види переміщень

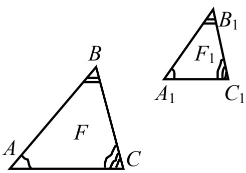
Види переміщень	*Малюнок*	*Означення*	*Властивості*
1. Симетрія відносно точки (центральна симетрія).		Дві точки X і X' площини називаються ***симетричними відносно точки O***, якщо O є серединою відрізка XX'. Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну відносно даної точки O, називається ***перетворенням симетрії відносно точки O***.	Симетрія відносно точки має всі властивості переміщення. Точка O переходить сама в себе (нерухома). Пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе.
2. Симетрія відносно прямої (осьова симетрія).	 l — вісь симетрії.	Дві точки A і A_1 називаються ***симетричними відносно прямої l***, якщо $l \perp AA_1$ і пряма l проходить через середину відрізка AA_1. Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно прямої l, називається ***перетворенням симетрії відносно прямої***.	Симетрія відносно прямої має всі властивості переміщення. Пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе.

Продовження таблиці 9

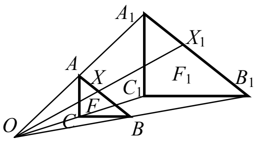
3. Поворот.	 α — кут повороту, O — центр повороту, $OX = OX_1$, $OY = OY_1$, $\angle XOX_1 =$ $= \angle YOY_1 = \alpha$.	Точку X повернемо навколо точки O на кут α. Одержимо точку X_1. Такий перехід точки X у точку X_1 називається ***поворотом навколо точки O*** на кут α.	Поворот має всі властивості переміщення.
4. Паралельне перенесення.		Перетворення, при якому всі точки фігури F зміщуються в одному й тому самому напрямі на одну й ту саму відстань, називається ***паралельним перенесенням***.	Паралельне перенесення має всі властивості переміщення. Пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе.

Перетворення подібності і гомотетію та їх властивості вчителю зручно пояснювати, використовуючи *таблицю 10*.

Таблиця 10

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ		
Малюнок	*Означення*	*Властивості*
 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} =$ $= \frac{AC}{A_1C_1} = k$, $k > 0$ — коефіцієнт подібності.	Перетворення, яке переводить фігуру F у фігуру F_1, при якому відстані між точками змінюються в тому самому відношенні $k > 0$, називається ***перетворенням подібності***. Дві фігури називаються ***подібними***, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.	1. Пряма переходить в пряму, промінь у промінь, відрізок — у відрізок. 2. Кут переходить у рівний йому кут. 3. Якщо $F \overset{k}{\sim} F_1$, то $\frac{S_F}{S_{F_1}} = k^2$, де S_F і S_{F_1} – площі подібних фігур F і F_1.

Продовження таблиці 10

ГОМОТЕТІЯ		
	Перетворення називається ***гомотетією***, якщо воно переводить кожну точку X фігури F у точку X_1 фігури F_1 так, що $OX_1 = \lvert k \rvert \cdot OX$, де $k \neq 0$ — кефіцієнт гомотетії. O — центр гомотетії.	Гомотетія має всі властивості перетворення подібності. Пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе.

Повторення розділу «Геометричні перетворення» можна провести за допомогою *кодоплівки 7*.

Кодоплівка 7

1. Яке перетворення називається переміщенням?
2. Які властивості переміщення?
3. Які дві фігури називаються рівними?
4. Яке перетворення називається центральною симетрією?
5. Яке перетворення називається осьовою симетрією?
6. Які властивості центральної симетрії?
7. Які властивості осьової симетрії?
8. Яке перетворення називається поворотом?
9. Які властивості повороту?
10. Яке перетворення називається паралельним перенесенням?
11. Які властивості паралельного перенесення?
12. Яке перетворення називається перетворенням подібності?
13. Які властивості перетворення подібності?
14. Які дві фігури називаються подібними?
15. Яке перетворення називається гомотетією?
16. Які властивості гомотетії?

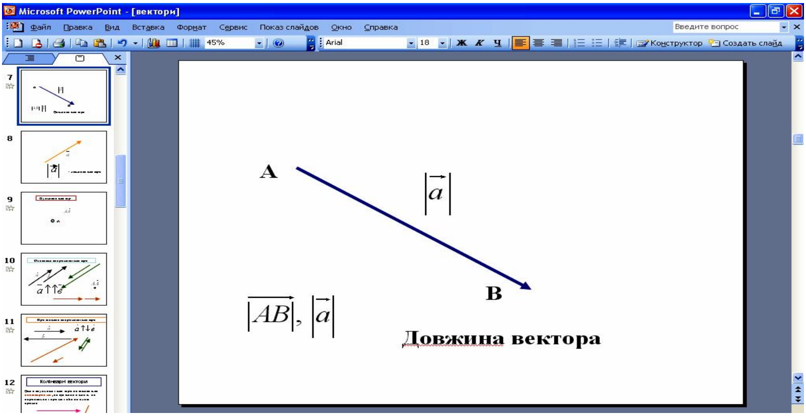
Під час пояснення навчального матеріалу за допомогою слайдів уроки проходять у вигляді шкільної лекції, де учні не тільки слухають, продивляються інформацію на екранах, конспектують, а й відповідають на запитання, розв'язують задачі за наведеним зразком. Під час пояснення матеріалу, що стосується дій над векторами, найдоцільніше використати ефекти анімації для кращого запам'ятовування відповідних правил. Слайди містять в собі теоретичний матеріал, сформований у вигляді правил, теорем.

Так, пояснюючи учням поняття вектора і довжини вектора, вчитель демонструє *слайд 12*.

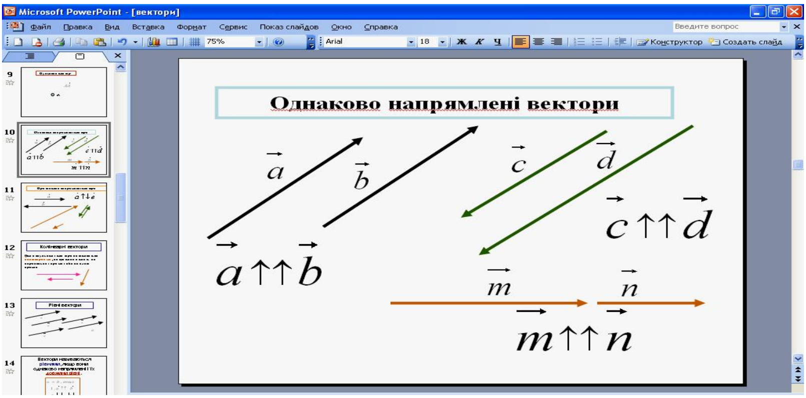
Введення поняття однаково напрямлених векторів слід здійснювати за допомогою *слайду 13*.

Протилежно напрямлені вектори вчитель ілюструє на *слайді 14*.

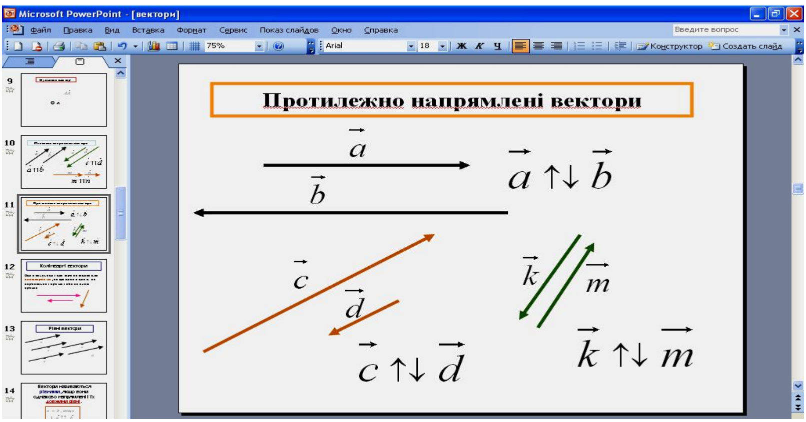
Слайд 12



Слайд 13

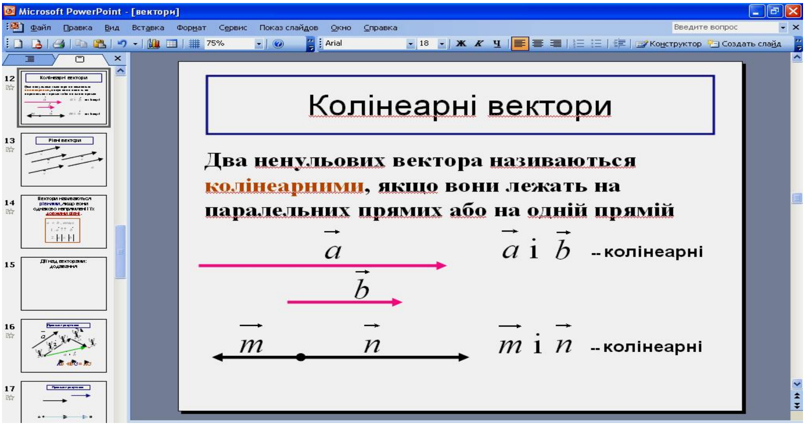


Слайд 14



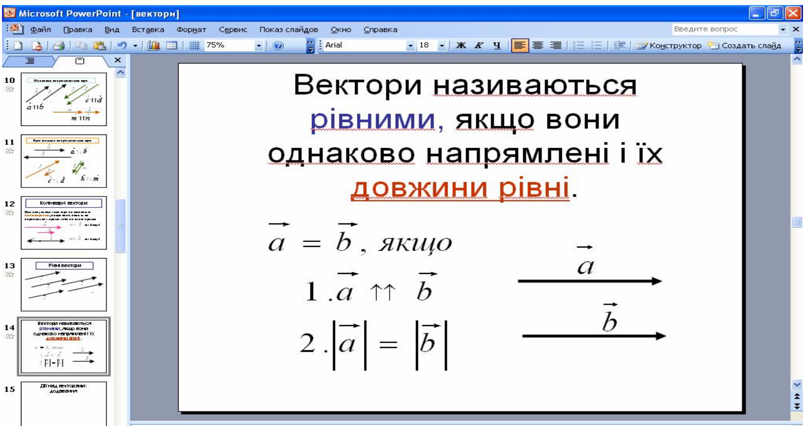
Означення колінеарних векторів слід вводити, використовуючи *слайд 15*.

Слайд 15



Поняття рівних векторів і означення рівних векторів вчитель демонструє на *слайді 16*.

Слайд 16

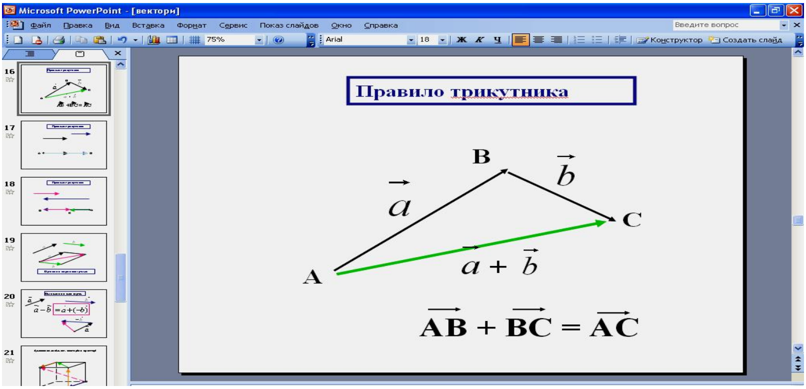


Операції над векторами теж зручно ілюструвати на слайдах. Зокрема, додавання векторів за правилом трикутника слід ілюструвати на *слайді 17*.

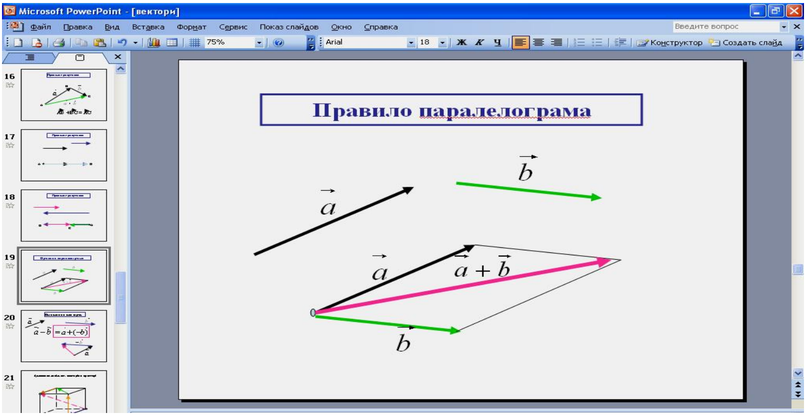
Правило паралелограма для додавання векторів можна пояснити на *слайді 18*.

Віднімання векторів вчитель пояснює при допомозі *слайду 19*.

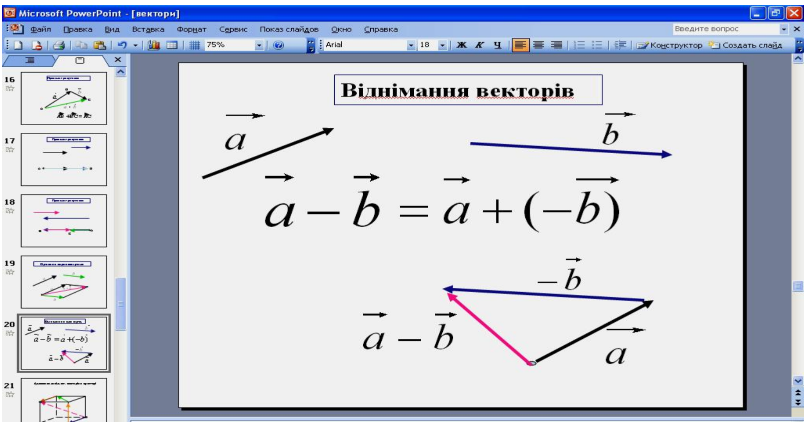
Слайд 17



Слайд 18

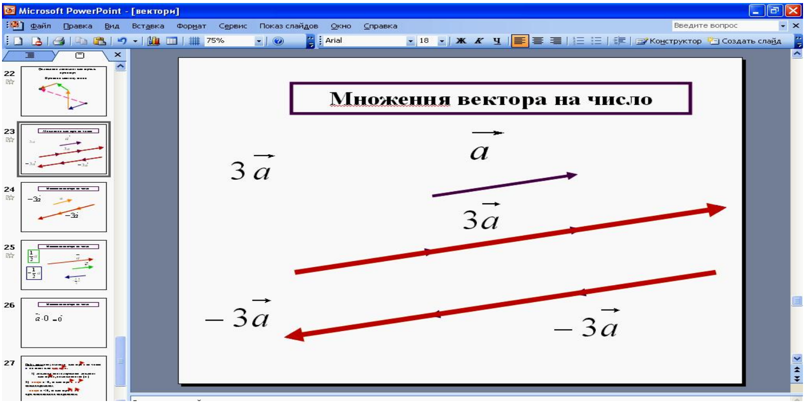


Слайд 19



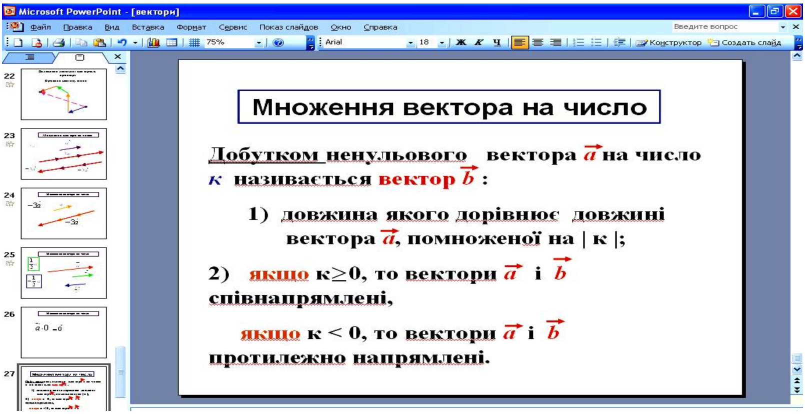
Різні випадки множення вектора на число зручно пояснювати учням, використовуючи *слайд 20*.

Слайд 20



Означення добутку ненулевого вектора на число можна ілюструвати на *слайді 21*.

Слайд 21



Використання ППЗ за наявності в класі проекційної техніки необхідне на етапі пояснення нового матеріалу: тут стають в пригоді презентаційні можливості інтерактивних побудов та міркувань. Головне при цьому, щоб методично правильно було продумано систему демонстрацій.

Все це в цілому сприяє розвитку важливих якостей мислення школярів: самостійності, гнучкості, критичності, глибини, раціональності. Застосовані наочні методи роботи вчителя з комп'ютерною підтримкою відкривають широкі можливості колективної, розумової, активної діяльності учнів та вчителя.

Для закріплення властивостей дій над векторами корисно використати *таблицю 11*.

Таблиця 11

ВЛАСТИВОСТІ ДІЙ НАД ВЕКТОРАМИ		
Додавання векторів	**Множення вектора на число**	**Скалярний добуток векторів**
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{a}+(\overrightarrow{-a})=\vec{0}$.	$\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$, $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$, $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$.	
Переставний закон		
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	$k\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot k$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
Сполучний закон		
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	$k\cdot(n\cdot\vec{a})=(k\cdot n)\cdot\vec{a}$	$(k\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=k\cdot\vec{a}\vec{b}$
Розподільний закон		
$k\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{a}=\left(k+n\right)\cdot\vec{a}$, $k\cdot\vec{a}+k\cdot\vec{b}=k\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.		$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

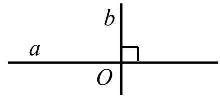
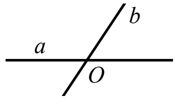
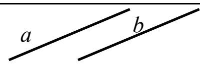
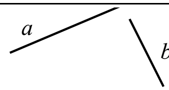
Систематизацію і узагальнення теми «Вектори на площині» доцільно провести у вигляді фронтального опитування за допомогою *кодоплівки 8*.

Кодоплівка 8

1. Що таке вектор?
2. Поясніть, що таке довжина і напрям вектора.
3. Як зображають вектори?
4. Які вектори називаються рівними?
5. Які вектори називаються колінеарними?
6. Як додавати вектори за правилом трикутника і правилом паралелограма?
7. Як віднімати вектори?
8. Як множити вектор на число?
9. Які властивості додавання векторів і множення вектора на число?
10. Що називається координатами вектора?
11. Як знайти суму і різницю векторів, заданих своїми координатами?
12. Що називається скалярним добутком двох векторів?
13. Які властивості скалярного добутку двох векторів?

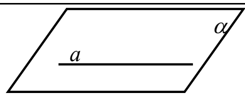
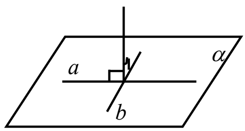
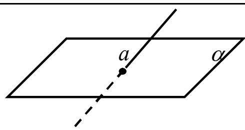
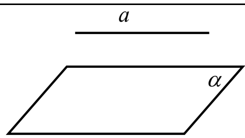
При вивченні початкових відомостей з стереометрії спочатку розглядають взаємне розміщення двох прямих в просторі, прямої і площини, двох площин. Взаємне розміщення двох прямих доцільно пояснювати, використовуючи *таблицю 12*.

Таблиця 12

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ			
Прямі a і b перетинаються	Перпендикулярні		$a \perp b$
	Не перпендикулярні		$a \times b$
Прямі a і b не перетинаються	Паралельні		$a \| b$
	Мимобіжні		$a \overset{\bullet}{\_\_} b$

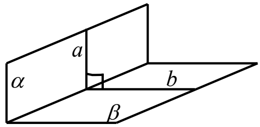
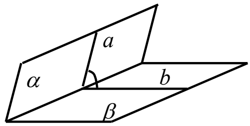
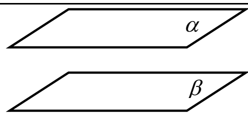
Таблиця 13 допоможе пояснити взаємне розміщення прямої і площини.

Таблиця 13

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ			
Пряма a лежить у площині α			$a \in \alpha$
Пряма a перетинає площину α	Пряма перпендикулярна до площини		$a \perp \alpha$
	Пряма не перпендикулярна до площини		$a \times \alpha$
Пряма a не перетинає площину α	Пряма паралельна площині		$a \| \alpha$

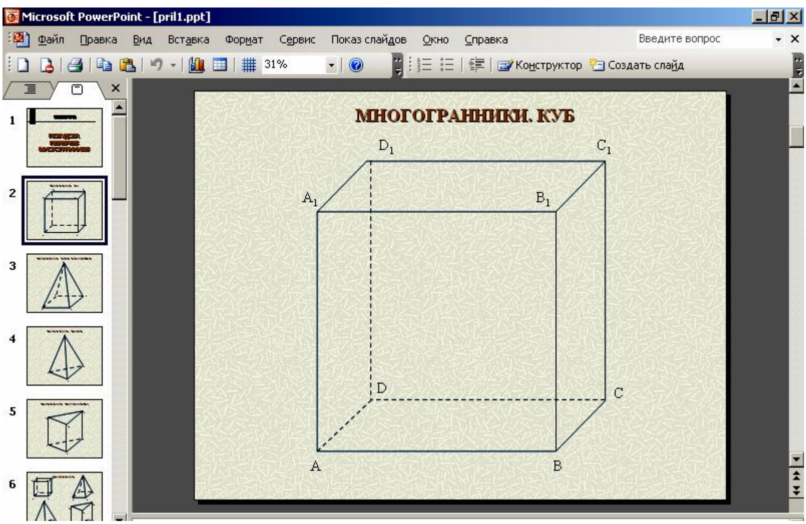
Для кращого засвоєння взаємного розміщення двох площин корисною буде *таблиця 14*.

Таблиця 14

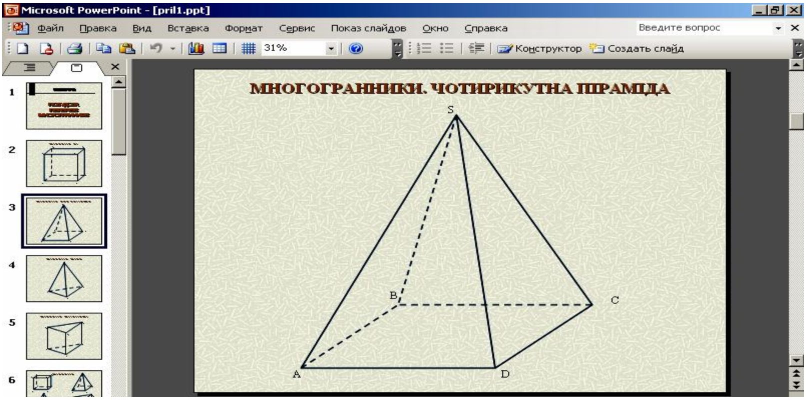
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОЩИН			
Площини α і β перетинаються	Перпендикулярні		$\alpha \perp \beta$
	Не перпендикулярні		$\alpha \times \beta$
Площини α і β не перетинаються	Паралельні		$\alpha \parallel \beta$

Пояснюючи учням поняття многогранника, його елементів, видів многогранників, доцільно продемонструвати учням моделі різних видів многогранників: трикутних, чотирикутних, п'ятикутних, шестикутних, восьмикутних призм і пірамід, прямих і прямокутних паралелепіпедів, кубів, показати на них грані, ребра, вершини, ввести поняття бічної і повної поверхонь призми і піраміди, показати як їх обчислити. Для того, щоб учні зрозуміли, як зображати призми і піраміди, варто їм показати *слайди 22, 23, 24, 25, 26*.

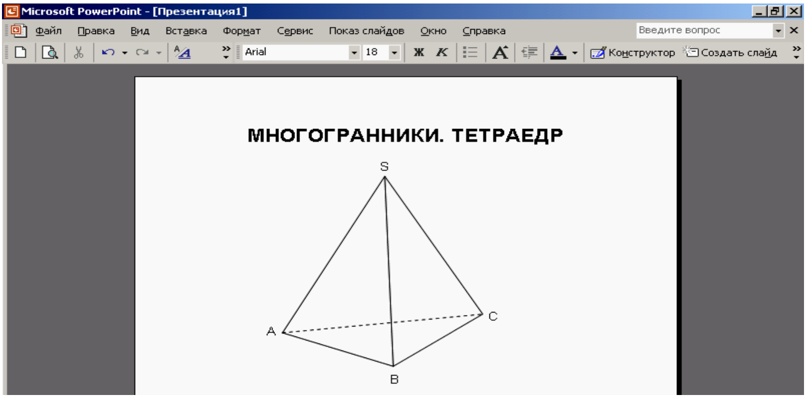
Слайд 22



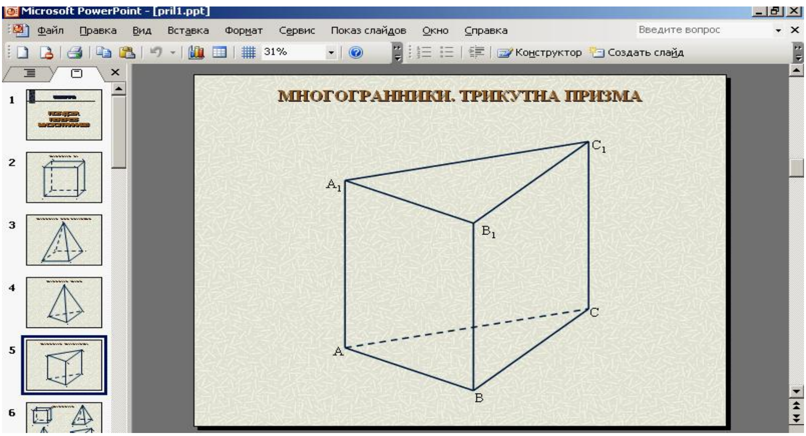
Слайд 23



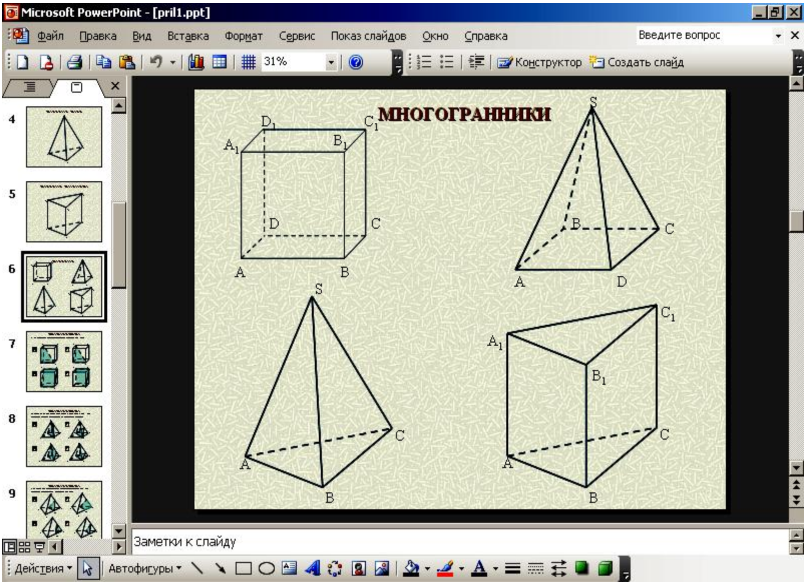
Слайд 24



Слайд 25

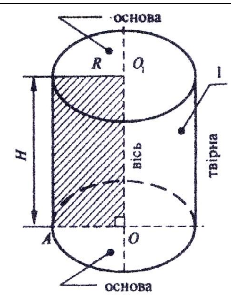
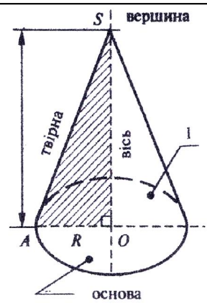
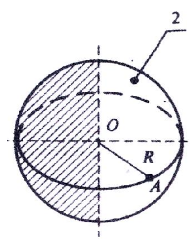


Слайд 26

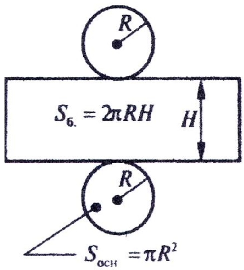
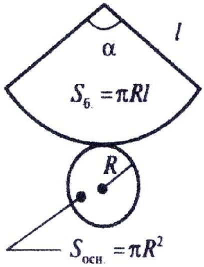


При введенні понять тіла обертання, циліндра, конуса, кулі, їх елементів, бічної і повної поверхонь циліндра і конуса, площі сфери, їх об'ємів доцільно продемонструвати учням моделі циліндра, конуса, кулі, розгорток циліндра і кулі, а також *таблицю 15*.

Таблиця 15

Циліндр	**Конус**	**Куля**
		
1 — бічна поверхня *H* — висота *R* — радіус основи		2 — поверхня кулі (сфера) *R* — радіус

Продовження таблиці 15

Площа поверхні		
		$S = 4\pi R^2$
Об’єми		
$V = \pi R^2 H$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Використання розглянутої вище наочності на уроках геометрії у 9 класі сприятиме успішному засвоєнню учнями матеріалу, дасть можливість вчителю зекономити час, який можна використати для розв’язування відповідних задач.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Основна використана література

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посібник / Г. П. Бевз. — 3-тє вид., перероб. і допов. — К. : Вища школа, 1989. — 367 с.
2. Бобровник М. П. Наочне приладдя з математики / М. П. Бобровник, М. О. Журбас. — К. : Рад. школа, 1968. — 180 с.
3. Дистервег А. Избранные педагогические сочинения / А. Дистервег. — М., 1956. — 425 с.
4. Дьяконов В.П. Компьютерная математика: теория и практика / В. П. Дьяконов. — М. : Нолидж, 2000. — 1296 с.
5. Эрдниев П. М. Преподавание математики в школе. (Из опыта обучения методом укрупненных упражнений) / П. М. Эрдниев. — М. : Просвещение, 1978. — 304 с.
6. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії : посібник для вчителів / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. — К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2000. — 168 с.
7. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики : посіб. для вчителів / М. І. Жалдак. — К. : Техніка, 1997. — 303 с.
8. Загальна психологія : підручник/ за ред. С. Д. Максименка. — Вінниця : Нова книга, 2004. — 704 с.
9. Загальна психологія : підручник / О. С. Скрипченко, Л. В. Долинська, З. В. Огороднійчук та ін. — К. : Либідь, 2005. — 464 с.
10. Кабанова-Меллер Е. М. Психология формирования знаний и навыков у школьников. Проблема приемов умственной деятельности / Е. М. Кабанова-Меллер. — М. : Изд-во АПН РСФСР, 1962. — 377 с.
11. Каптерев П. Ф. Избранные педагогические сочинения / П. Ф. Каптерев ; под ред. А. М. Арсеньева. — М. : Педагогика, 1982. — 704 с.
12. Коменский Я. А. Великая дидактика : избр. пед. соч. / Я. А. Коменский. — М., 1982. — Т. 1. — 596 с.
13. Корінь Г. О. Доведення математичних тверджень з використанням наочності / Г. О. Корінь // Математика в школі. — 2000. — № 37. — С. 6–8.
14. Красуля Л. Наочність на уроках математики / Л. Красуля // Математика. — 2005. — № 18. — С. 7–9.
15. Малафіїк І. В. Дидактика : навчальний посібник / І. В. Малафіїк. — К. : Кондор, 2005. — 398 с.
16. Математика. 5–12 класи. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Ірпінь, Перун, 2005. — 65 с.
17. Метельский Н. В. Дидактика математики. Общая методика и ее проблемы / Н. В. Метельский. — Изд. второе, переработанное. — Минск : Изд-во БГУ им. В.И.Ленина, 1982. — 256 с.

18. Методика викладання математики в середній школі : [навч. посібник для пед. ін-тів за спец. 2104 «Математика» і 2105 «Фізика» : пер. з рос. / О. Я. Блох, Є. С. Канін, Н. Г. Килина та ін.] ; упоряд. П. С. Черкасов, А. А. Столяр. — Х. : Вид-во «Основа» при Харк. ун-ті, 1992. — 304 с.
19. Методика викладання математики : практикум / за заг. ред. Г. П. Бевза. — К. : Вища школа, 1981. — 200 с.
20. М'ясоїд П. Л. Загальна психологія : навч. посібник / П. Л. М'ясоїд. — К. : Вища школа, 2001. — 487 с.
21. Оборудование кабинета математики : пособие для учителей / В. Г. Болтянский, М. Б. Волович, Э. Ю. Красс, Г. Г. Левитас. — 2-е изд., исп. и доп. — М. : Просвещение, 1981. — 191 с.
22. Остроградський М. В. Міркування про викладання / М. В. Остроградський, А. М. Блюн // Наукові записки КДПІ ім. О. М. Горького. — К., 1955. — Т. XVII. — С. 137–155.
23. Педагогічний словник / упор. С. У. Гончаренко. — К. : Вища школа, 1999. — 568 с.
24. Песталоцци Й. Г. Избранные педагогические сочинения. — В 3 т. / Й. Г. Песталоцци ; под ред. М. Ф. Шабаевой. — М., 1965. — Т. 3. — 477 с.
25. Психологія навчання / за ред. Б. Ф. Баєва. — К. : Рад. школа, 1972. — 136 с.
26. Рубинштейн С. Л. Проблемы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. — М., 1973. — 416 с.
27. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник / З. І. Слєпкань. — 2-ге вид., допов. і перероб. — К. : Вища школа, 2006. — 582 с.
28. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математики : метод. пособие / З. И. Слепкань. — К. : Рад. школа, 1983. — 192 с.
29. Сухомлинський В. О. Сто порад учителеві / В. О. Сухомлинський. — К. : Рад. школа, 1988. — 304 с.
30. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики : монографія / Н. А. Тарасенкова. — Черкаси : Відлуння–Плюс, 2002. — 400 с.
31. Урок математики в школі : посібник для вчителів / під ред. Г. П. Бевза. — К. : Рад. школа, 1977. — 112 с.
32. Ушинский К. Д. Собрание сочинений / К. Д. Ушинский. — М., 1950. — Т. 8. — 776 с.

2. Рекомендована література

1. Апостолова Г. В. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. В. Апостолова. — К. : Ґенеза, 2007.
2. Апостолова Г. В. Геометрія : дворів. підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. В. Апостолова. — К. : Ґенеза, 2008. — 272 с.
3. Апостолова Г. В. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. В. Апостолова. — К. : Ґенеза, 2009.
4. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Зодіак–ЕКО, 2007. — 304 с.
5. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Зодіак–ЕКО, 2008. — 256 с.
6. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Зодіак–ЕКО, 2009. — 288 с.
7. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Вежа, 2007. — 208 с.
8. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Вежа, 2008. — 256 с.
9. Бурда М. І. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. — К. : Зодіак–ЕКО, 2007.
10. Бурда М.І. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. — К. : Зодіак—ЕКО, 2008. — 240 с.
11. Бурда М. І. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. — К. : Зодіак–ЕКО, 2009. — 240 с.
12. Дидактика современной школы : пособ. для учителей / под ред. В. А. Онищука. — К. : Рад. школа, 1987. — 351 с.
13. Дубинчук О. С. Методика викладання алгебри в 7–9 класах : посібник для вчителя / О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований, Н. П. Дичек. — К. : Рад. шк., 1991. — 254 с.
14. Дьяконов В. П. Компьютерная математика / В. П. Дьяконов // Соросовский образовательный журнал. — Том 7. — 2001. — № 11. — С. 116–121.
15. Єршова А. П. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижанівський, С. В. Єршов. — Х. : АН ГРО ПЛЮС, 2008. — 256 с.
16. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. — К. : Освіта, 2007. — 223 с.
17. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. — К. : Освіта, 2008. — 208 с.
18. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. — К. : Освіта, 2007. — 159 с.

19. Кравчук В. Р. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Р. Кравчук, М. В. Підручна, Г. М. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2009. — 240 с.
20. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2008. — 256 с.
21. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2009. — 320 с.
22. Янченко Г. М. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. М. Янченко, В. Р. Кравчук. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2007. — 224 с.
23. Янченко Г. М. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. М. Янченко, В. Р. Кравчук. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. — 232 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

СМОРЖЕВСЬКИЙ *Людвіг Октав'янович*

кандидат педагогічних наук, доцент, професор кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

СМОРЖЕВСЬКИЙ *Юрій Людвігович*

кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ І ГЕОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Навчальний посібник

Підп. до друку 29.11.2010. Формат 60x84/16. Папір офісний.
Гарнітура "Петербург". Друк різографічний. Обл.-вид. арк. 11,4.
Умовн. друк. арк. 10,7. Тираж 300. Зам. № 428.

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

Вул. Огієнка, 61. Кам'янець-Подільський, 32300

Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.