14. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
15. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
16. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Из-во иностр. лит., 1956. – 668 с.
17. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

The method of integral transformations builds the exact analytical solution of stationary task of heat conductivity for the limited multi-layer space areas.

Key words: *differential equalization Poisson, integral transformations, fundamental solutions.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 517.5

У. В. Гудима

Кам'янець-Подільський національний університет

АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ЧЕБИШОВСЬКИМ ПІДПРОСТОРОМ З ДОДАТКОВИМ ОБМЕЖЕННЯМ

У статті встановлено теореми характеризації, єдиності екстремального елемента, співвідношення двоїстості та привило чебишовського альтернансу для задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, чебишовський альтернанс, співвідношення двоїстості.*

Вступ. У даній статті для задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням доведено теорему єдиності, теорему характеризації екстремального елемента, встановлено співвідношення двоїстості та правило чебишовського альтернансу. Отримані результати є узагальненням на випадок задачі відшукання величини (1) відповідних результатів дослідження задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервної на компакті функції елементами скінченновимірного підпростору, які задовольняють додатковому обмеженню (див., наприклад, [1-6]).

Постановка задачі. Нехай S – метричний компакт, X – лінійний над полем комплексних чисел нормований сепарабельний простір, $C(S,X)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ – сукупність непорожніх компактів простору X, $C(S,K(X))$ – множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a(s)=K_s\in K(X)$, V – лінійний підпростір простору $C(S,X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i\in C(S,X)$,

$$i=\overline{1,n}\,,\ u\in C(S,X),\ r\in C(S,R),\ r(s)>0\,,$$
$$b(s)=\{x : x\in X,\ \|x-u(s)\|\le r(s)\},\ s\in S\,,$$
$$D=\{g : g\in C(S,X),\ g(s)\in b(s),\ s\in S\}.$$

Через $\operatorname{int} M$ будемо позначати внутрішність, а через ∂M – межу множини М топологічного простору. Зрозуміло, що для $s\in S$

$$\operatorname{int} b(s)=\{x : x\in X,\ \|x-u(s)\|<r(s)\},$$
$$\partial b(s)=\{x : x\in X,\ \|x-u(s)\|=r(s)\}.$$

Будемо припускати, що існує елемент $g_0\in V$, для якого $g_0(s)\in \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s\in S$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a\in C(S,K(X))$ скінченновимірним підпростором V однозначних неперервних відображень g компакту S в X, які задовольняють додатковому обмеженню $g\in D$, що визначається системою замкнутих куль $b(s)$ простору X з центрами $u(s)$ та радіусами $r(s)$, які неперервно змінюються по s на S, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V\cap D)=\inf_{g\in V\cap D}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|g(s)-y\|. \tag{1}$$

Згідно з теоремою 2.1 [7, с.1605] існує елемент $g^*\in V\cap D$ такий, що $\alpha_a^*(V\cap D)=\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\|g^*(s)-y\|$.

Цей елемент будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Позначимо через X^* простір, спряжений з X, через B^* – замкнену одиничну кулю простору X^*: $B^*=\{f : f\in X^*, \|f\|\le 1\}$, а через $E(B^*)$ – множину крайніх точок B^*. Згідно з теоремою Крейна-Мільмана (див., наприклад, [8, с.497]) $E(B^*)\ne\varnothing$.

У подальшому будемо припускати, що обмеження $g \in V \bigcap D$ в задачі відшукання величини (1) є суттєвим у тому розумінні, що

$$\alpha_a^*(D) < \alpha_a^*(V \bigcap D), \tag{2}$$

де $\alpha_a^*(D) = \inf\limits_{g \in D} \max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|$.

Для $s \in S$, $f \in X^*$ будемо позначати через $\varphi_{(s,f)}$ лінійний неперервний на $C(S,X)$ функціонал, значення якого в точках $g \in C(S,X)$ обчислюється таким чином: $\varphi_{(s,f)}(g) = \operatorname{Re} f(g(s))$.

Будемо припускати також, що виконується, так звана, умова (Н): для будь-яких $s_j \in S$, $f_j \in E(B^*)$ таких, що функціонали $\varphi_{(s_j,f_j)}(g) = \operatorname{Re} f_j(g(s_j))$, $j = \overline{1,n}$, $g \in C(S,X)$, є лінійно незалежними, визначник $\det\left[\varphi_{(s_j,f_j)}(g_i)\right] \neq 0$.

Припускається, що хоча б n зазначених функціоналів існують.

Умову (Н) будемо називати узагальненою умовою Хаара.

При виконанні умови (Н) підпростір V називатимемо чебишовським підпростором простору $C(S,X)$.

Актуальність теми. Результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі відшукання величини (1), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що вкладаються у схему її постановки.

Мета роботи. Для задачі відшукання величини (1) встановити теорему єдиності, характеризації екстремального елемента, співвідношення двоїстості та правило чебишовського альтернансу

Основні результати.

Теорема 1. Для того щоб елемент $g^* \in V \bigcap D$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб знайшлись точки $s_j \in S$, $y_j \in a(s_j)$, $f_j \in E(B^*)$, $j = \overline{1,k_1}$, $k_1 \geq 1$, для яких

$$f_j(g^*(s_j) - y_j) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\|, \quad j = \overline{1,k_1}, \tag{3}$$

точки $s_j' \in S$, $f_j' \in E(B^*)$, $j = \overline{1,k_2}$, $k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 \leq n+1$, для яких

$$f_j'(g^*(s_j') - u(s_j')) = r(s_j'), \quad j = \overline{1,k_2}, \tag{4}$$

додатні числа ρ_j, $j = \overline{1,k_1}$, $\sum\limits_{j=1}^{k_1} \rho_j = 1$, β_j, $j = \overline{1,k_2}$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j(g(s_j))+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j \operatorname{Re} f_j'(g(s_j'))=0\,,\ g\in V\,. \qquad (5)$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 2.3 [9, с.124].

Теорема 2. Нехай V – чебишовський підпростір простору $C(S,X)$. Тоді для будь-якого $a\in C(S,K(X))$ існує єдиний екстремальний елемент для величини (1).

Для того щоб елемент $g^*\in V\bigcap D$ був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб знайшлись точки $s_j\in S$, $y_j\in a(s_j)$, $f_j\in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_1}$, $k_1\ge 1$, для яких

$$f_j(g^*(s_j)-y_j)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|,\ j=\overline{1,k_1}\,, \qquad (6)$$

точки $s_j'\in S$, $f_j'\in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_2}$, $k_2\ge 0$, $k_1+k_2=n+1$, для яких

$$f_j'(g^*(s_j')-u(s_j'))=r(s_j')\,,\ j=\overline{1,k_2}\,, \qquad (7)$$

додатні числа ρ_j, $j=\overline{1,k_1}$, $\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j=1$, β_j, $j=\overline{1,k_2}$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j(g(s_j))+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j \operatorname{Re} f_j'(g(s_j'))=0\,,\ g\in V\,. \qquad (8)$$

Доведення. Як уже зазначалось, існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1) випливає з теореми 2.1 [7, с.1605]. Переконаємося у його єдиності.

Припустимо, що g_1^*, g_2^* – екстремальні елементи для задачі відшукання величини (1). Легко переконатися, що $g^*=\dfrac{g_1^*+g_2^*}{2}$ також є екстремальним елементом для цієї величини.

На підставі теореми 1 існують $s_j\in S$, $y_j\in a(s_j)$, $f_j\in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_1}$, $k_1\ge 1$, для яких виконуються рівності (3), точки $s_j'\in S$, $f_j'\in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_2}$, $k_2\ge 0$, $k_1+k_2\le n+1$, для яких виконуються рівності (4), і такі додатні числа ρ_j, $j=\overline{1,k_1}$, $\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j=1$, β_j, $j=\overline{1,k_2}$, що має місце рівність (5).

Легко переконатися, що при виконанні умови (2)

$$\sum_{j=1}^{k_1} \rho_j \varphi_{(s_j, f_j)} + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \varphi_{\left(s'_j, f'_j\right)} \neq 0 .$$

Тоді згідно з твердженням 2.1 [10, с.108] $k = n + 1$ та функціонали $\varphi_{(s_j, f_j)}$, $j = \overline{1, n+1}$, утворюють лінійно незалежну систему.

Для кожного $j = \overline{1, k_1}$ маємо

$$\operatorname{Re} f_j \left(g_1^* (s_j) - y_j \right) \leq \alpha_a^* (V \cap D), \ \operatorname{Re} f_j \left(g_2^* (s_j) - y_j \right) \leq \alpha_a^* (V \cap D).$$

Оскільки для всіх $j = \overline{1, k_1}$ на підставі (3)

$$\frac{\operatorname{Re} f_j \left(g_1^* (s_j) - y_j \right) + \operatorname{Re} f_j \left(g_2^* (s_j) - y_j \right)}{2} = \operatorname{Re} f_j \left(\frac{g_1^* + g_2^*}{2} (s_j) - y_j \right) =$$

$$= \operatorname{Re} f_j \left(g^* (s_j) - y_j \right) = \alpha_a^* (V \cap D),$$

то $\operatorname{Re} f_j \left(g_1^* (s_j) - y_j \right) = \operatorname{Re} f_j \left(g_2^* (s_j) - y_j \right) = \alpha_a^* (V \cap D)$, $j = \overline{1, k_1}$.

Тому для всіх $j = \overline{1, k_1}$

$$\operatorname{Re} f_j \left(g_1^* (s_j) - g_2^* (s_j) \right) = \varphi_{(s_j, f_j)} \left(g_1^* - g_2^* \right) = 0 . \tag{10}$$

Аналогічно доводиться, що для всіх $j = \overline{1, k_2}$

$$\operatorname{Re} f_j' \left(g_1^* \left(s_j' \right) - g_2^* (s_j') \right) = \varphi_{(s_j', f_j')} \left(g_1^* - g_2^* \right) = 0 . \tag{11}$$

Нехай $g_1^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^1 g_i$, $g_2^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 g_i$. З (10), (11) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^1 - \alpha_i^2 \right) \varphi_{(s_j, f_j)} (g_i) = 0 , \ j = \overline{1, k_1} ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^1 - \alpha_i^2 \right) \varphi_{(s_j', f_j')} (g_i) = 0 , \ j = \overline{1, k_2} .$$

З урахуванням умови (Н) звідси робимо висновок, що $\alpha_i^1 = \alpha_i^2$ для всіх $i = \overline{1, n}$. Тому $g_1^* = g_2^*$.

Єдиність екстремального елемента для величини (1) в цьому випадку встановлено.

Справедливість зазначеного у теоремі критерію екстремального елемента для величини (1) випливає з теореми 1 та рівності $k_1 + k_2 = n + 1$.

Теорему доведено.

Має місце така теорема двоїстості для задачі відшукання величини (1).

Теорема 3. Справедлива рівність

$$\alpha_a^*(V\cap D)=\max\left(-\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j(y_j)-\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\left(\operatorname{Re} f_j'(u(s_j'))+r(s_j')\right)\right) \quad (12)$$

при умовах

$$s_j\in S,\ y_j\in a(s_j),\ f_j\in E(B^*),\ j=\overline{1,k_1},\ k_1\ge 1,\ s_j'\in S,$$

$$f_j'\in E(B^*),\ j=\overline{1,k_2},\ k_2\ge 0,\ k_1+k_2=n+1, \quad (13)$$

$$\rho_j>0,\ j=\overline{1,k_1},\ \sum_{j=1}^{k_1}\rho_j=1,\ \beta_j>0,\ j=\overline{1,k_2}; \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j(g(s_j))+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j \operatorname{Re} f_j'(g(s_j'))=0,\ g\in V. \quad (15)$$

Доведення. Нехай g^* – екстремальний елемент для величини (1). Згідно з теоремою 2 існують точки $s_j\in S$, $y_j\in a(s_j)$, $f_j\in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_1}$, $k_1\ge 1$, $s_j'\in S$, $f_j'\in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_2}$, $k_2\ge 0$, $k_1+k_2=n+1$, додатні числа ρ_j, $j=\overline{1,k_1}$, $\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j=1$, β_j, $j=\overline{1,k_2}$, такі, що мають місце рівності (6)-(8). Зрозуміло, що такі точки та числа задовольняють умовам (13)-(15). З (6)-(8) маємо, що

$$\alpha_a^*(V)=-\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j(y_j)-\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\left(\operatorname{Re} f_j'(u(s_j'))+r(s_j')\right).$$

Тому $\alpha_a^*(V\cap D)$ не перевищує

$$\max\left(-\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j(y_j)-\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\left(\operatorname{Re} f_j'(u(s_j'))+r(s_j')\right)\right)$$

при обмеженнях (13)-(15).

Нехай тепер елементи s_j, y_j, f_j, s_j', f_j' та числа ρ_j, β_j задовольняють умовам (13)-(15). Тоді для екстремального елемента g^* для величини (1) одержимо, що

$$-\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j(y_j)-\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\left(\operatorname{Re} f_j'(u(s_j'))+r(s_j')\right)=-\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j(y_j)-$$

$$-\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\left(\operatorname{Re} f_j'(u(s_j'))+r(s_j')\right)+\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j\left(g^*(s_j)\right)+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j \operatorname{Re} f_j'\left(g^*(s_j')\right)\le$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_1} \rho_j \left\| g^*(s_j) - y_j \right\| + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \left(\left\| g^*(s'_j) - u(s'_j) \right\| - r(s'_j) \right) \leq \alpha_a^*(V \cap D).$$

З урахуванням зазначеного вище звідси випливає справедливість (12) при обмеженнях (13)-(15).

Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай V – чебишовський підпростір простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V \cap D$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували точки $s_j \in S$, $y_j \in a(s_j)$, $f_j \in E(B^*)$, $j = \overline{1, k_1}$, $k_1 \geq 1$, для яких

$$f_j(g^*(s_j) - y_j) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|, \; j = \overline{1, k_1}, \tag{16}$$

точки $s_j' \in S$, $f_j' \in E(B^*)$, $j = \overline{1, k_2}$, $k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 = n + 1$, для яких

$$f_j'(g^*(s_j') - u(s_j')) = r(s_j'), \; j = \overline{1, k_2}, \tag{17}$$

та мінори M_{1j}, $j = \overline{1, n+1}$, детермінанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \mathrm{Re} f_1(g_1(s_1)) & \dots & \mathrm{Re} f_{k_1}(g_1(s_{k_1})) & \dots & \mathrm{Re} f_1'\left(g_1\left(s_1'\right)\right) & \dots & \mathrm{Re} f_{k_2}'(g_1(s_{k_2}')) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \mathrm{Re} f_1(g_n(s_1)) & \dots & \mathrm{Re} f_{k_1}(g_n(s_{k_1})) & \dots & \mathrm{Re} f_1'\left(g_n\left(s_1'\right)\right) & \dots & \mathrm{Re} f_{k_2}'(g_n(s_{k_2}')) \end{vmatrix}$$

змінювали свої знаки: $\mathrm{sign}\, M_{1j+1} = -\mathrm{sign}\, M_{1j}$, $j = \overline{1, n}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1). Згідно з теоремою 2 існують елементи $s_j \in S$, $y_j \in a(s_j)$, $f_j \in E(B^*)$, $j = \overline{1, k_1}$, $k_1 \geq 1$, для яких виконуються рівності (16), точки $s_j' \in S$, $f_j' \in E(B^*)$, $j = \overline{1, k_2}$, $k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 = n + 1$, для яких виконуються рівності (17), і такі додатні числа ρ_j, $j = \overline{1, k_1}$, $\sum_{j=1}^{k_1} \rho_j = 1$, β_j, $j = \overline{1, k_2}$, що має місце рівність (8).

Як зазначалось при доведенні теореми 2, функціонали $\varphi_{(s_j, f_j)}$, $j = \overline{1, k_1}$, $\varphi_{(s_j', f_j')}$, $j = \overline{1, k_2}$, утворюють лінійно незалежну систему.

Тому згідно з умовою (Н) детермінант Δ та його мінори M_{1j}, $j=\overline{1,n+1}$, є відмінні від нуля.

Нехай $\Delta > 0$. З рівностей (8) випливає, що

$$\sum_{j=1}^{k_1} \rho_j' \operatorname{Re} f_j(g_i(s_j)) + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j' \operatorname{Re} f_j'(g_i(s_j')) = 0\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{18}$$

де $\rho_j' = \rho_j \left(\sum_{j=1}^{k_1} \rho_j + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \right)^{-1}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\beta_j' = \beta_j \left(\sum_{j=1}^{k_1} \rho_j + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \right)^{-1}$, $j=\overline{1,k_2}$.

Крім того, маємо, що

$$\sum_{j=1}^{k_1} \rho_j{}' + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j' = 1\,. \tag{19}$$

Враховуючи (18), (19), за формулами Крамера приходимо до співвідношень

$$\rho_j' = \frac{(-1)^{1+j} M_{1j}}{\Delta}\,,\ j=\overline{1,k_1}\,,\ \beta_j' = \frac{(-1)^{1+k_1+j} M_{1(k_1+j)}}{\Delta}\,,\ j=\overline{1,k_2}\,.$$

Оскільки $\rho_j' > 0$, $j=\overline{1,k_1}$, $\beta_j' > 0$, $j=\overline{1,k_2}$, і за припущенням $\Delta > 0$, то $(-1)^{1+j} M_{1j} > 0$ та $(-1)^{1+(j+1)} M_{1(j+1)} > 0$, $j=\overline{1,n}$.

Тому мінори M_{1j}, $j=\overline{1,n+1}$, детермінанта Δ змінюють свої знаки.

Аналогічно розглядається випадок, коли $\Delta < 0$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $g^* \in V \bigcap D$ існують такі точки $s_j \in S$, $y_j \in a(s_j)$, $f_j \in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_1}$, $k_1 \ge 1$, для яких виконуються рівності (16), точки $s_j' \in S$, $f_j' \in E(B^*)$, $j=\overline{1,k_2}$, $k_2 \ge 0$, $k_1 + k_2 = n+1$, для яких виконуються рівності (17), та мінори M_{1j}, $j=\overline{1,n+1}$, визначника Δ відмінні від нуля і змінюють свої знаки.

Легко переконатися, що $\Delta > 0$, якщо $M_{11} > 0$, і $\Delta < 0$, якщо $M_{11} < 0$. Тому система рівнянь (18), (19) має єдиний розв'язок, для якого $\rho_j' > 0$, $j=\overline{1,k_1}$, $\beta_j' > 0$, $j=\overline{1,k_2}$.

На основі зазначеного та теореми 2 робимо висновок, що g^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1).

Теорему доведено.

Висновки. Для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення елементами чебишовського підпростору однозначних неперервних відображень, які задовольняють деякому додатковому обмеженню, встановлено теореми єдиності та характеризації екстремального елемента, теорему двоїстості, сформульовано і доведено правило чебишовського альтернансу.

Список використаних джерел:

1. Taylor G. D. Approximation by polynomials having restricted ranges // I. SIAM J. Numer. Anal. – 1968. – Vol.5. – P.258-268.
2. Taylor G. D. On approximation by functions having restricted ranges // J. Math. Anal. Appl. – 1969. – Vol.27. – P.241-248.
3. Shi Y. G. The limits of a Chebyshev-type theory of restricted range approximation // J. Approxim. Theory. – 1988. – Vol.53, №1 – P.41-53.
4. Smirnov G. S., Smirnov R. G. Best uniform restricted ranges approximation of complex-valued functions // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1997. – 19, №2. – P.58-63.
5. Smirnov G. S., Smirnov R. G. Best uniform approximation of complex-valued functions by generalized polynomials having restricted ranges // J. Approximation theory. – 1999. – 100, №2. – P.284-303.
6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
7. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, №12. – С.1601-1619.
8. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Гнатюк Ю. В., Гудима У. В. Задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором однозначних неперервних відображень // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: О. І. Степанець. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т.1, №1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С.115-129.
10. Гудима У. В., Гнатюк Ю. В., Гнатюк В. О. Про єдиність екстремального елемента та чебишовський альтернанс для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. наук. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2005. – Т.2. – №2. – С.106-116.

In the article there established the theorems of existence, characterization, uniqueness of the extremal element, dual relation and generalized rule of Chebyshev alternation for the problem of the best uniform approximation continuous compact-valued maps by finite dimensional Chebyshev space of continuous single-valued maps with additional restriction.

Key words: *the compact-valued maps, dual relation, Chebyshev alternation.*

Отримано: 05.06.2008