Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
фізико-математичний факультет
кафедра математики

Дипломна робота магістра

з теми «Задача мінімізації максимуму кількох неперервних функцій на опуклому компакті лінійного нормованого простору»

Виконав: студент II курсу, групи М1-М20
спеціальності 014. Середня освіта (Математика)
Горбунь Едуард Валерійович
Керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Гнатюк В.О.
Рецензент: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Щирба В.С.

Кам’янець-Подільський – 2021р

ЗМІСТ

Вступ

В роботі побудовано збіжні чисельні методи розв’язування деяких задач мінімізації максимуму кількох неперервних опуклих функцій на опуклому компакті лінійного нормованого простору, наведено приклади їх застосування.

Актуальність теми

Задачі оптимізації природним чином виникають у процесі практичної діяльності, адже її доводиться організовувати найкращим чином, вибираючи оптимальний з кількох або нескінченної кількості можливих способів здійснення цієї діяльності.

Відшукання такого способу математичними методами приводить до необхідності досліджувати та розв’язувати оптимізаційні задачі на відшукання мінімуму чи максимуму деякої функції, заданої на лінійному нормованому просторі, на деякій множині цього простору.

Дослідженню оптимізаційних задач такого роду присвячено низку наукових праць, в тому числі праці [1-9].

Часто цільова функція в задачах мінімізації є функцією типу максимуму кількох або нескінченної кількості інших функцій, коли кожне її значення є найбільшим із значень цих функцій (її частин).

Серед таких задач є задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів, задачі про чебишовську точку, чебишовський центр та ін. , розглядаються, зокрема, у працях [10-18].

Наведемо деякі приклади таких задач.

Задача про чебишовську точку для кількох прямих

Припустимо, що на координатній площині R^2 задано m прямих:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1 = 0, \dots, a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_1 = 0, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m = 0.$$

Будемо вважати, що

$$\sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2} = 1, i = \overline{1, m}.$$

Якщо б, наприклад,

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2} \neq 1,$$

то рівняння $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1 = 0$ можна було б записати в еквівалентній формі:

$$\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} x_1 + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} x_2 + \frac{c_1}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} = 0,$$

$$a_{11}^{'}x_1 + a_{12}^{'}x_2 + c_1^{'} = 0, \text{де}$$

$$a_{11}^{'} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}, a_{12}^{'} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}, c_1^{'} = \frac{c_1}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

Для рівняння $a_{11}^{'}x_1 + a_{12}^{'}x_2 + c_1^{'} = 0$, еквівалентного першому рівнянню, уже будемо мати, що

$$\sqrt{\left(a_{11}^{'}\right)^2 + \left(a_{12}^{'}\right)^2} = \sqrt{\frac{a_{i1}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} + \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}} = 1.$$

В цьому випадку рівняння $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1 = 0$ можна замінити на еквівалентне йому рівняння

$$a_{11}^{'}x_1 + a_{12}^{'}x_2 + c_1^{'} = 0.$$

Тому можна вважати, що для записаних вище рівнянь уже виконуються умови:

$$\sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2} = 1, i = \overline{1, m}.$$

Нехай K є обмеженою, опуклою та замкненою множиною простору R^2. Потрібно знайти в цій множині точку x^*, максимальна відстань від якої до прямих буде меншою або рівною від максимальної відстані до цих прямих від будь-якої іншої точки x із K, тобто знайти чебишовську точку для прямих

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i, i = \overline{1, m}$, у множині K. Інакше потрібно знайти

$$\min_{x=(x_1,x_2)\in K} \max_{1\le i\le m} \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i}{\sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2}} = \min_{x=(x_1,x_2)\in K} \max_{1\le i\le m} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i|. \qquad (0.1)$$

Зрозуміло, що для всіх $x = (x_1, x_2) \in R^2$

$$\max_{1\le i\le m} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i| =$$

$$= \max\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1, -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - c_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2, -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - c_2; \dots; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m, -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - c_m\} \qquad (0.2)$$

Дійсно, якщо, наприклад,

$$\max_{1\le i\le m} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i| = |a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m|,$$

та $|a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m|$=$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m, то$

$$|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i| = \max\{\begin{matrix} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - c_i \end{matrix} \le a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m.$$

Звідси випливає, що

$$\max\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1, -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - c_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2, -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - c_2; \dots; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m, -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - c_m\} \le$$
$$\le a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m = \max_{1\le i\le m} |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i|. \qquad (0.3)$$

Аналогічно доводиться ця нерівність і у випадку, коли

$|a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m|$=$-a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - c_m$.

З іншого боку для всіх $i = \{1, \dots, m\}$

$$|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i| \le$$
$$\le \max\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1, -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - c_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2, -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - c_2; \dots; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m, -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - c_m\}.$$

Тому і

$$\max |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i| \le$$
$$\le \max\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - c_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2 - a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2; \dots; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - c_m\}. \qquad (0.4)$$

З співвідношень(0.3), (0.4) випливає рівність(0.2) .

З урахуванням цієї рівності задача (0.1) про відшукання чебишовської точки для прямих $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i = 0, i = \overline{1, m}$, у множині K набере вигляду

$$\min_{x=(x_1,x_2)\in K} \max\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1, -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - c_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2, -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - c_2; \dots; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + c_m. -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - c_m\} \qquad (0.5)$$

Задача (0.5) є задачею мінімізації максимуму 2m неперервних опуклих (афінних) функцій на опуклому компакті K, адже K є опуклою обмеженою та замкненою множиною, а кожна обмежена замкнена множина простору R^n є компактом.

Задача найкращої одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору опуклим компактом

Прикладом задачі мінімізації максимуму кількох неперервних опуклих функцій на опуклому компакті є задача найкращої одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору X опуклим компактом K цього простору, тобто задача відшукання

$$\min_{x \in K} \max_{1 \le i \le r} \|y - x_i\|. \tag{0.5}$$

В роботі доводиться, що функції $P_i(y) = \|y - x_i\|, y \in X, i = \overline{1,r}$ є неперервними опуклими функціями.

З урахуванням цих функцій задачу (0.5) можна записати у такому вигляді

$$\min_{x \in K} \max_{1 \le i \le r} P_i(y). \tag{0.6}$$

Задача (0.6) також є задачею мінімізації максимуму кількох неперервних опуклих функцій на опуклому компакті.

Подібні приклади можна продовжити.

Відсутність універсального методу розв'язування всіх оптимізаційних задач приводить до необхідності розробляти скінченні або збіжні чисельні методи розв'язування окремих класів цих задач.

В дипломній роботі побудовано скінченний метод розв'зування задачі мінімізації опуклої кусково-афінної функції на опуклому многограннику лінійного нормованого простору, збіжний метод мінімізації опуклої кусково-афінної функції на опуклому компакті лінійного нормованого простору та збіжний метод розв'язування задачі найкращої одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору опуклим компактом цього простору, які узагальнюють відповідні методи мінімізації сублінійних функціоналів на опуклому компакті, побудовані у працях [2, 6].

Постановки задач:

Задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції на опуклому многограннику лінійного нормованого простору

Постановка задачі. Нехай X – лінійний нормований простір, X* - простір, спряжений з X; $g_i, i = \overline{1,n},$ – елементи простору X*;δ_i, $i = \overline{1,n},$ - довільні дійсні числа; $\overline{z}_j, j = \overline{1,r},$ - довільні елементи простору X; K_r – опукла оболонка множини $\{\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_r\}$

$$\left(K_r = co\{\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_r\} = \left\{ x = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \overline{z}_j : \alpha_j \geq 0, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j = 1 \right\} \right),$$

тобто опуклий многогранник, породжений точками $\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_r$.

Ставиться задача відшукання

$$\beta_{K_r}^* = \min_{x \in K_r} \max_{1 \leq i \leq n} (g_i(x) + \delta_i). \tag{0.7}$$

Елемент x*є K_r такий, що

$$\max_{1 \leq i \leq n} (g_i(x^*) + \delta_i) = \beta_{K_r}^*$$

будемо називати оптимальним розв'язком задача (0.7) або екстремальним елементом для величини (0.7).

Задача мінімізації опуклої кусково-афінної функції на опуклому компакті лінійного нормованого простору

Постановка задачі. Нехай, як і вище, X – лінійний нормований простір, X* - простір, спряжений з X; $g_i, i = \overline{1,n}$ – елементи простору X*; $\delta_i, i = \overline{1,n}$ – *довільні дійсні числа*; K – опуклий компакт простору X.

Ставиться задача відшукання

$$\beta_K^* = \min_{x \in K} \max_{1 \leq i \leq n} (g_i(x) + \delta_i). \tag{0.8}$$

Елемент x*є K. такий, що

$$\max_{1 \leq i \leq n} (g_i(x^*) + \delta_i) = \beta_K^*$$

будемо називати оптимальним розв'язком задачі (0.8) або екстремальним елементом для величини (0.8).

Задача найкращої апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору опуклим компактом цього простору

Постановка задачі. Нехай, як і вище, X – лінійний нормований простір, X* простір, спряжений з X; $x_i, i = \overline{1,n},-$ фіксовані елементи простору X; K – опуклий компакт простору X.

Ставиться задача відшукання

$$\mu_K^*(\{x_i\}_{i=1}^m) = \min_{x \in K} \max_{1 \le i \le r} \|y - x_i\|. \tag{0.9}$$

Елемент x*є K такий, що

$$\max_{1 \le i \le r} \|y^* - x_i\| = \mu_K^*(\{x_i\}_{i=1}^m)$$

будемо називати оптимальним розв’язком задачі (0.9), елементом найкращої одночасної апроксимації елементів $x_i, i = \overline{1,n}$ опуклим компактом K або екстремальним елементом для величини (0.9).

Метою роботи є:

- побудувати задачу лінійного програмування, еквівалентну задачу (0.7);
- побудувати мінімаксну задачу, еквівалентну задачу (0.7); максимінну задачу, двоїсту до задачі (0.7); встановити відповідні співвідношення двоїстості;
- довести критерій оптимальності допустимого розв’язку для задачі (0.7) та допустимого розв’язку для максимінної задачі, двоїстої до задачі (0.7);
- описати метод розв’язування задачі відшукання величини (0.8), оснований на апроксимації опуклого компакта K опуклими многогранниками та довести його збіжність;
- описати метод розв’язування задачі відшукання величини (0.9), оснований на апроксимації компакта K опуклими многогранниками та цільової функції цієї задачі опуклими кусково-афінними функціями, та довести його збіжність;
- отримати двосторонні оцінки збіжності, які дозволяють знайти величини (0.8), (0.9) з наперед заданою точністю;
- довести низку допоміжних тверджень.

Об’єктом дослідження є деякі задачі мінімізації максимуму кількох неперервних опуклих функцій на опуклому компакті та чисельні методи їх дослідження.

Предметом дослідження є: дослідження властивостей цільових функцій, які фігурують в задачах (0.7) - (0.9), побудова чисельних методів розв’язування цих задач, доведення збіжності цих методів, отримання двосторонніх оцінок збіжності для відшукання оптимальних значень цільових функцій задач (0.8), (0.9) з наперед заданою точністю.

Задачами дослідження є:

1. Побудова задачі лінійного програмування, еквівалентної задачі (0.7);
2. Побудова мінімаксної задачі еквівалентнрї задачі (0.7); максимінної задачі, двоїстої до задачі (0.7); встановлення відповідних співвідношень двоїстості;
3. Доведення критерію оптимальності допустимого розв’язку для задачі (0.7) та допустимого розв’язку для максимінної задачі, двоїстої до задачі (0.7);
4. Описання методу розв’язування задачі відшукання величини (0.8), основаного на апроксимації опуклого компакта К опуклими многогранниками та доведення його збіжності;
5. Описання методу розв’язування задачі відшукання величини (0.9), основаного на апроксимації компакта К опуклими многогранниками та цільової функції цієї задачі опуклими кусково-афінними функціями, та доведення його збіжності;
6. Отримання двосторонніх оцінок збіжності, які дозволяють знайти величини (0.8), (0.9) з наперед заданою точністю;
7. Доведення низки допоміжних тверджень.

При розв’язуванні задач, поставлених у роботі, використовувалися методи математичного, функціонального, опуклого аналізу, теорії ігор, теорії апроксимації, теорії оптимізації, теорії екстремальних задач, чисельні методи розв’язування задач оптимізації, в тому числі, методи розв’язування задач лінійного програмування.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Побудовано задачу лінійного програмування, еквівалентну задачі (0.7);

2. Побудовано мінімаксну задачу еквівалентну задачі (0.7); максимінну задачу двоїсту до задачі (0.7); встановлнно відповідні співвідношення двоїстості;
3. Доведено критерій оптимальності допустимого розв'язку для задачі (0.7) та допустимого розв'язку для максимінної задачі, двоїстої до задачі (0.7);
4. Описано метод розв'язування задачі відшукання величини (0.8), оснований на апроксимації опуклого компакта К опуклими многогранниками та доведено його збіжність;
5. Описано метод розв'язування задачі відшукання величини (0.9), оснований на апроксимації компакта К опуклими многогранниками та цільової функції цієї задачі опуклими кусково-афінними функціями, та доведено його збіжність;
6. Отримано двосторонні оцінки збіжності, які дозволяють знайти величини (0.8), (0.9) з наперед заданою точністю;
7. Доведено низку допоміжних тверджень

Практичне значення отриманих результатів

Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати та побудовані в роботі методи розв'язування задач (0.7) - (0.9) можна поширити на випадок розв'язування низки задач оптимізації та апроксимації; відшукання чебишовського центра компакта лінійного нормованого простору, наближеного розв'язування несумісної системи кількох лінійних рівнянь тощо.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідалися на засіданні проблемної групи «найкраще рівномірне наближення компактно значних відображень», яка працює при кафедрі математики. За результатами участі у науковій конференції студентів та магістрантів К-ПНУ за підсумками науково – дослідної роботи у 2020 – 2021 н.р. підготовлено до друку статтю.

Структура роботи.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі:

- побудовано задачу лінійного програмування, еквівалентну задачі (0.7);
- побудовано мінімаксну задачу, еквівалентну задачі (0.7); максимінну задачу двоїсту до задачі (0.7); встановлено відповідні співвідношення двоїстості;
- доведено критерій оптимальності допустимого розв’язку для задачі (0.7) та допустимого розв’язку для максимінної задачі, двоїстої до задачі (0.7).

У другому розділі:

- описано метод розв’язування задачі відшукання величини (0.8), оснований на апроксимації опуклого компакта K опуклими многогранниками та доведено його збіжність;
- отримано двосторонні оцінки збіжності цього методу, які дозволяють знайти величину (0.8) з наперед заданою точністю.

У третьому розділі:

- описано метод розв’язування задачі відшукання величини (0.9), оснований на апроксимації компакта K опуклими многогранниками та цільової функції цієї задачі опуклими кусково-афінними функціями, та доведено його збіжність;
- отримано двосторонні оцінки збіжності цього методу, які дозволяють знайти величину (0.9) з наперед заданою точністю.

Висновки

У дипломній роботі:

1. Побудовано задачу лінійного програмування, еквівалентну задачі (0.7);
2. Побудовано мінімаксну задачу, еквівалентну задачі (0.7); максимінну задачу, двоїсту до задачі (0.7); встановлено відповідні співвідношення двоїстості;
3. Доведено критерій оптимальності допустимого розв'язку для задачі (0.7) та допустимого розв'язку для максимінної задачі, двоїстої до задачі (0.7);
4. Описано метод розв'язування задачі відшукання величини (0.8), оснований на апроксимації опуклого компакта K опуклими многогранниками та доведено його збіжність;
5. Описано метод розв'язування задачі відшукання величини (0.9), оснований на апроксимації компакта K опуклими многогранниками та цільової функції цієї задачі опуклими кусково-афінними функціями, та доведено його збіжність;
6. Отримано двосторонні оцінки збіжності, які дозволяють знайти величини (0.8), (0.9) з наперед заданою точністю;
7. Доведено низку допоміжних, які представляють і самостійний інтерес.

Список використаних джерел

1. Kelly J.E. The Cutting plane methods for solving convex programs /J.E. Kelly //SIAM.J. – 1960.-8, №4.-P.703-712.
2. Акилов Г. П. Метод последовательных приближений для разыскания полинома найлучшего приближения / Г. П. Акилов, А. М. Рубинов//| Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 157. - №3. – С. 503 – 505.
3. Демьянов В. Ф. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве /В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов // Вестн. ЛГУ. – 1964. – Вып. 19. – С. 5 – 18.
4. Демьянов В. Ф. К минимизации функций на выпуклых ограниченных множествах /В. Ф. Демьянов // Кибернетика. – 1965. - №6. – С. 65-74.
5. Левитин Е. С. Методы минимизации при наличии ограничений / Е.С Левитин, Б. Т. Поляк // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1966. – т. 6. - №5. – С. 787 – 823.
6. Демьянов В. Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. – Л.:Изд-во Ленигр. ун-та, 1968. – с. 182.
7. Демьянов В. Ф. Минимизация выпуклой функции максимина / В.Ф. Демьянов// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1971. – Т. 11. - №2. С. 313 – 327.
8. Пшеничный Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М. : Наука, 1975. – 320 с.
9. Черняев Ю. А. Численный алгоритм минимизации выпуклой функции на пересечении гладкой поверхности и выпуклого компакта. / Ю.А. Черняев // Ж. вычисл. матем и матем. физ. – 2019. Т. 59 -№ 7. – С. 1151 – 1157.
10. Белобров П. К. К вопросу о чебышевском центре множества / П.К. Белобров // Изв. вузов. Матем. – 1964. - №1 (38). – С. 3 - 9.
11. Белобров П. К. К задаче выпуклого чебышевского приближения в нормированном пространстве / П. К. Белобров // Ученые записки Казанского ун – та. – 1965. – Т. 125. – Кн. 2. – С. 3-6.
12. Белобров П. К. Об одной задачи чебшевского приближения / П.К. Белоров // Изв. вузов. Матем. – 1967. - №2(57). – С. 3 - 8.
13. Зуховицкий С. И. Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
14. Демьянов В. Ф. Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.

15. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48. - №9. – С. 1183 – 1193.
16. Гнатюк Ю. В. Найкраще рівномірне наближення сім’ї неперервних на компакті функцій / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. – 2002р. – Т. 54. - №11. – С. 1574 – 1581.
17. Гнатюк Ю. В. Алгоритми найкращого одночасного рівномірного наближення сім’ї неперервних на компакті функцій чебешовським підпростором /Ю. В. Гнатюк// Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55. - №3. – С. 291 – 307.
18. Белых Т. И. Методы чебышевских точек выпуклых множеств и их приложения / Т. И. Белых, В. П. Булатов, Э. Н. Яськова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т.48. - №1. – С. 18 – 32.
19. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М. : Наука, 1976. -320 с.
20. Гудима У. В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк. – Кам’янець – Подільський: К-ПНУ ім. Івана Огієнка, 2019. – 112 с.
21. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752с.
22. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2004. – Т. 2. – 720 с.
23.Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, Л. И. Соболев. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1982. – 271 с.
24. Юдин Д. Б. Задачи и методы линейного программирования / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М. : Изд-во «Советское радио», 1961. – 494 с.
25. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремауму / Б.Н. Пшеничный. – М. : Наука, 1982. – 144 с.
26.Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2003. – Т. 1. – 704 с.