МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
фізико-математичний факультет
кафедра математики

ДИПЛОМНА РОБОТА

з теми

“Узагальнена задача Штейнера в метричному просторі опуклих компактів лінійного нормованого простору та чисельний метод її розв’язування”

Студентки М1-М20 групи фізико-математичного факультету
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

ЖИВИЛО АЛІНИ СЕРГІЇВНИ

Науковий керівник:
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Гнатюк Василь Олексійович
Рецензент:
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Щирба Віктор Самуїлович

Кам’янець-Подільський – 2021 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню узагальненої задачі Штейнера в метричному просторі опуклих компактів лінійного нормованого простору та побудові збіжного чисельного методу її розв'язування.

Актуальність теми. В багатьох практичних задачах доводиться знаходити відстані не лише між точками лінійного нормованого простору $(X, \|\cdot\|)$, а й між множинами цього простору. Однією з найбільш природних метрик, заданою на множині всіх обмежених замкнених множин лінійного нормованого простору є метрика Гаусдорфа (див., наприклад, [1, с. 34]).

Якщо позначити через $O(X)$ множину всіх обмежених замкнених множин лінійного нормованого простору *X,* то метрика Гаусдорфа між множинами *A* та *B* із $O(X)$ обчислюється за формулою:

$$h(A,B) = \max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\| x-y \|, \sup_{y\in B}\inf_{x\in A}\| y-x \|\right\}.$$

Доводиться (див., наприклад, [1, с. 34]), що для всіх $A, B, C \in O(X)$:

1) $h(A,B) \geq 0, h(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
2) $h(A,B) = h(B,A)$;
3) $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C, B)$.

У випадку, коли $A, B \in K(X)$, де $K(X)$ — множина всеможливих компактів простору *X,* $h(A,B)$ можна подати у такому вигляді:

$$h(A,B) = \max\{\max_{x\in A}\min_{y\in B}\|x-y\|, \max_{y\in B}\min_{x\in A}\|y-x\|\}.$$

Наявність відстані між двома множинами із $O(X)$ $(K(X))$ дозволяє ставити та досліджувати різноманітні задачі в цих метричних просторах, в тому числі екстремальні задачі.

Так, зокрема, якщо $\{x_0\}$ — одноточковий компакт простору X $(\{x_0\} \in K(X))$, а V — фіксована множина одноточкових компактів $\{x\}$ цього простору

$(\{x\} \in K(X)$ для всіх $\{x\} \in V)$, то можна розглядати задачу про відшукання у множині V такого компакта $\{x\}$, який у розумінні метрики Гаусдорфа на $K(X)$ є найближчим до компакта $\{x_0\}$. Математична модель цієї задачі матиме вигляд:

$$\inf_{\{x\} \in V} h(\{x\}, \{x_0\}). \qquad (0.1)$$

Подамо задачу (0.1) як екстремальну задачу в лінійному нормованому просторі X. Для цього знайдемо, що $\forall \{x\}, \{x_0\}$, де $x \in X, x_0 \in X$:

$$h(\{x\}, \{x_0\}) = \max\left\{\max_{x \in \{x\}} \min_{y \in \{x_0\}} \| x - y \|, \max_{y \in \{x_0\}} \min_{x \in \{x\}} \| y - x \|\right\} =$$

$$= \max\left\{ \min_{y \in \{x_0\}} \| x - y \|, \min_{x \in \{x\}} \| x_0 - x \| \right\} = \max\{\|x - x_0\|, \|x_0 - x\|\} = \|x - x_0\|. \qquad (0.2)$$

З урахуванням цього задачу (0.1) можна подати у такому вигляді:

$$\inf_{\{x\} \in V} h(\{x\}, \{x_0\}) = \inf_{x \in V} \|x - x_0\|. \qquad (0.3)$$

Задача (0.3) є задачею найкращого у розумінні норми $\|\cdot\|$ наближення елемента $x_0 \in X$ множиною $V \subset X$.

Відомо, що однією з перших задач, які вкладаються у схему постановки задачі відшукання величини (0.3), є задача про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на сегменті функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує деякого натурального числа, досліджена ще у 50-х роках XIX століття відомим математиком П. Л. Чебишовим.

Далі розглядалися й інші задачі теорії наближення функцій алгебраїчними поліномами, тригонометричними поліномами, раціональними функціями в різних метриках, які є частковими випадками задачі (0.3).

Основні результати дослідження задачі (0.3) та її часткових випадків підсумовані у працях [2-8].

Якщо в задачі відшукання величини (0.1) замість одноточкового компакта $\{x_0\}$ поставити довільний компакат $A \in K(X)$, то одержимо задачу відшукання величини

$$\inf_{\{x\}\in V} h(\{x\}, A), \tag{0.4}$$

тобто задачу відшукання у множині V одноточкових компактів $\{x\}$ такого компакта, відстань у розумінні метрики Гаусдорфа від якого до фіксованого компакта A є найменшою.

Якщо врахувати, що для $\{x\}\in V$ та $A \in K(X)$

$$h(\{x\}, A) = \max\left\{\max_{x\in\{x\}} \min_{y\in A} \| x-y \|, \max_{y\in A} \min_{x\in\{x\}} \| y-x \| \right\} =$$

$$= \max\left\{\min_{y\in A} \| x-y \|, \max_{y\in A} \| y-x \| \right\} = \max_{y\in A} \| x-y \|,$$

то задачу (0.4) можна подати у вигляді

$$\inf_{\{x\}\in V} h(\{x\}, A) = \inf_{x\in V} \max_{y\in A} \| x-y \|, \tag{0.5}$$

яка, як відомо, є задачею про відшукання чебишовського центра компакта A відносно множини V. Задача (0.5) досліджувалася, зокрема, у прикладах [9 – 12].

Зрозуміло, що задача (0.3) є частковим випадком задачі (0.5). Серед екстремальних задач у лінійному нормованому просторі X помітно виділяється своєю практичною значимістю, так звана, узагальнена задача Штейнера, яку можна розглядати як конкретизацію відповідної екстремальної задачі в метричному просторі $(K(X), h)$ і яка полягає в наступному.

Нехай, як і вище, V є множиною одноточкових компактів лінійного нормованого простору X, $\{a_i\}, i=\overline{1,m},$ — фіксовані одноточкові компакти цього простору, $c_i, i=\overline{1,m},$ — додатні дійсні числа.

Поставимо задачу відшукання

$$\inf_{\{x\}\in V} \sum_{i=1}^{m} c_i\, h\left(\{x\},\{a_i\}\right), \qquad (0.6)$$

тобто задачу відшукання такого $\{x\}\in V$ сума зважених відстаней Гаусдорфа від якого до фіксованих компактів $\{a_i\}, i=\overline{1,m},$ була б найменшою від аналогічних сум для інших елементів множини *V*.

Якщо врахувати співвідношення (0.2), то задачу (0.6) можна подати в такому вигляді:

$$\inf_{\{x\}\in V} \sum_{i=1}^{m} c_i\, h\left(\{x\},\{a_i\}\right) = \inf_{x\in V} \sum_{i=1}^{m} c_i \left\| x - a_i \right\|. \qquad (0.7)$$

При $c_i = 1, i = \overline{1,m}$, та $V = X$, задача (0.7) стає відомою задачею Штейнера в лінійному нормованому просторі *X*.

Задача (0.7) досліджувалась, зокрема, у праці [14].

Зрозуміло, що задача (0.3) є частковим випадком задачі (0.7) і отримається з неї при $m=1$ та $c_1=1$.

Логічно в задачі відшукання величини (0.6) замість одноточкових множин $\{a_i\}$ розглядати довільні компакти $A_i \in K(X)$ або ж навіть довільні обмежені замкнені множини $A_i \in O(X), i = \overline{1,m}$.

Тоді одержимо задачу відшукання величини

$$\inf_{\{x\}\in V} \sum_{i=1}^{m} c_i\, h\left(\{x\}, A_i\right), \qquad (0.8)$$

тобто задачу відшукання такого одноточкового компакта $\{x\}\in V$, для якого сума зважених гаусдорфових відстаней до множин $A_i, i=\overline{1,m}$, не буде перевищувати відповідних сум для інших $\{x\}$ із V.

Зрозуміло, що розглянуті вище задачі (0.3) – (0.7) є частковими випадками задачі (0.8).

Задачі типу задачі (0.8) досліджуються в пропонованій дипломній роботі.

Результати цих досліджень представляють самостійний інтерес і дозволяють отримувати єдиним чином результати для того кола задач, які включаються у постанову задач, розглядуваних у дипломній роботі, як їх частинні випадки.

Постановка задачі. Нехай *X* — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір; X^* — простір, спряжений з *X*; $K_0(X)$— множина всіх опуклих компактів простору *X*;

$$h(A,B) = \max\{\max_{x\in A}\min_{y\in B}\|x-y\|, \max_{y\in B}\min_{x\in A}\|y-x\|\}$$

— гаусдорфова відстань між компактами *A* та *B* із $K_0(X)$; $A_i \in K_0(X)$, $i=\overline{1,m}$; c_i, $i=\overline{1,m}$, — фіксовані додатні дійсні числа; *V* — опукла множина простору *X*.

Узагальненою задачею Штейнера в метричному просторі опуклих компактів простору *X* будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*\left(\{A_i\}_{i=1}^m; \{c_i\}_{i=1}^m\right) = \inf \sum_{i=1}^m c_i\, h(x, A_i), \qquad (0.9)$$

тобто це задача відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок множини *V* (одноточкових опуклих компактів $\{x\}$, де $\{x\}\in V$) до опуклих компактів A_i, $i=\overline{1,m}$, простору *X*.

Якщо у множині *V* існує елемент $x^*(x^*\in V)$ такий, що

$$\sum_{i=1}^m c_i\, h(x^*, A_i) = \inf_{x\in V} \sum_{i=1}^m c_i\, h(x, A_i),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для задачі відшукання величини (0.9) або оптимальним розв'язком задачі відшукання величини (0.9) (оптимальним розв'язком задачі (0.9)).

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є:

1) уточнення постановки задачі відшукання величини (0.9) для випадків, коли $A_i, i=\overline{1,m}$, є довільними компактами, в тому числі опуклими; опуклими многогранниками; замкненими кулями простору X;
2) доведення теорем існування екстремального елемента задачі відшукання величини (0.9);
3) встановлення властивостей цільової функції задачі (0.9);
4) дослідження лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_c\right)$, де $c>0, \|x\|_c = c\|x\|, x \in X$, та прямого добутку m лінійних нормованих просторів $\left(X, \|\cdot\|_{c_1}\right), \dots, \left(X, \|\cdot\|_{c_m}\right)$ і просторів, спряжених з ними;
5) встановлення опуклості та компактності множини $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$, де $A_i, i=\overline{1,m}$, — опуклі компакти простору X, а $X_{c_i} = \left(X, \|\cdot\|_{c_i}\right), i=\overline{1,m}$;
6) доведення еквівалентності задачі відшукання величини (0.9) задачі відшукання чебишовського центра компакта $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$ відносно діагоналі множини $V \times \ldots \times V$;
7) доведення теорем існування екстремальних елементів для задачі (0.9) та еквівалентної їй задачі про чебишовський центр компакта $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$ відносно діагоналі $V \times \ldots \times V$ і теореми про опуклість множин екстремальних елементів для цих задач;

8) побудова, деякої задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень еквівалентної узагальненій задачі Штейнера відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок скінченновимірного підпростору V простору X до опуклих многогранників $A_1, A_2, ..., A_m$;

9) доведення теореми існування функціоналів $f_\ell, \ell = \overline{1, \nu_1}$, замкненої одиничної кулі простору X^* таких, що

$$\min_{(\beta_1, ..., \beta_m) \in S_1(0)} \max_{1 \le \ell \le \nu_1} f_\ell \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k \right) = \mu^0 > 0 ,$$

де $S_1(0)$ — одинична сфера простору R^n, а $x_k, k = \overline{1, n}$, — лінійно незалежні елементи простору X;

10) побудова чисельного методу розв'язування задачі відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок скінченновимірного підпростору V лінійного нормованого простору X до опуклих многогранників $A_i, i = \overline{1, m}$, цього простору та доведення його збіжності;

11) отримання двосторонніх оцінок збіжності.

Об'єктом дослідження є узагальнена задача Штейнера в метричному просторі опуклих компактів лінійного нормованого простору X, тобто задача відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок множини $V \subset X$ до опуклих компактів $A_i \subset X, i = \overline{1, m}$.

Предметом дослідження є питання конкретизації постановки задачі відшукання величини (0.9) для випадків, коли $A_i, i = \overline{1, m}$, є довільними компактами, опуклими многогранниками, замкненими кулями простору X; існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.9) і побудови чисельного методу відшукання цієї величини у випадку, коли

$A_i, i=\overline{1,m}$, є опуклими многогранниками, доведення його збіжності та отримання двосторонніх оцінок збіжності.

Задачами дослідження є:

1. Уточнити постановки задач відшукання величини (0.9) для випадків, коли $A_i, i=\overline{1,m}$, є довільними компактами, в тому числі опуклими; опуклими многогранниками; замкненими кулями простору *X*.
2. Довести теореми існування екстремального елемента задачі відшукання величини (0.9).
3. Встановити властивості цільової функції задачі (0.9).
4. Дослідити лінійний нормований простір $\left(X, \|\cdot\|_c\right)$, де $c>0, \|x\|_c = c\|x\|, x \in X$, та прямий добуток m лінійних нормованих просторів $\left(X, \|\cdot\|_{c_1}\right), \ldots, \left(X, \|\cdot\|_{c_m}\right)$ і простори, спряжені з ними.
5. Встановити опуклість та компактність множини $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$, де $A_i, i=\overline{1,m}$, — опуклі компакти простору *X*, а $X_{c_i} = \left(X, \|\cdot\|_{c_i}\right), i=\overline{1,m}$.
6. Довести еквівалентність задачі відшукання величини (0.9) задачі відшукання чебишовського центра компакта $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$ відносно діагоналі множини $V \times \ldots \times V$.
7. Довести теореми існування екстремальних елементів для задачі (0.9) та еквівалентної їй задачі про чебишовський центр компакта $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$ відносно діагоналі $V \times \ldots \times V$ і теореми про опуклість множин екстремальних елементів для цих задач.
8. Побудувати деяку задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень еквівалентну узагальненій задачі Штейнера відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від

точок скінченновимірного підпростору V простору X до опуклих многогранників $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

9. Довести теореми існування функціоналів $f_\ell, \ell = \overline{1, \nu_1}$, замкненої одиничної кулі простору X^* таких, що

$$\min_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in S_1(0)} \max_{1\le\ell\le\nu_1} f_\ell\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right) = \mu^0 > 0,$$

де $S_1(0)$ — одинична сфера простору R^n, а $x_k, k = \overline{1, n}$, — лінійно незалежні елементи простору X.

10. Побудувати чисельний метод розв'язування задачі відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок скінченновимірного підпростору V лінійного нормованого простору X до опуклих многогранників $A_i, i = \overline{1, m}$, цього простору та довести його збіжність.

11. Отримати двосторонні оцінки збіжності.

При вирішенні поставлених задач в дипломній роботі використовувались методи математичного, функціонального, опуклого аналізів, теорії екстремальних задач, лінійного програмування, теорії множин.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Уточнено постановки задач відшукання величини (0.9) для випадків, коли $A_i, i = \overline{1, m}$, є довільними компактами, в тому числі опуклими; опуклими многогранниками; замкненими кулями простору X.
2. Доведено теореми існування екстремального елемента задачі відшукання величини (0.9).
3. Встановлено властивості цільової функції задачі (0.9).

4. Досліджено лінійний нормований простір $\left(X,\|\cdot\|_c\right)$, де $c>0,\|x\|_c=c\|x\|,x\in X$, та прямий добуток m лінійних нормованих просторів $\left(X,\|\cdot\|_{c_1}\right),\ldots,\left(X,\|\cdot\|_{c_m}\right)$ і простори, спряжені з ними.
5. Встановлено опуклість та компактність множини $A_1\times\ldots\times A_m$ простору $X_{c_1}\times\ldots\times X_{c_m}$, де $A_i, i=\overline{1,m}$, — опуклі компакти простору X, а $X_{c_i}=\left(X,\|\cdot\|_{c_i}\right), i=\overline{1,m}$.
6. Доведено еквівалентність задачі відшукання величини (0.9) задачі відшукання чебишовського центра компакта $A_1\times\ldots\times A_m$ простору $X_{c_1}\times\ldots\times X_{c_m}$ відносно діагоналі множини $V\times\ldots\times V$.
7. Доведено теореми існування екстремальних елементів для задачі (0.9) та еквівалентної їй задачі про чебишовський центр компакта $A_1\times\ldots\times A_m$ простору $X_{c_1}\times\ldots\times X_{c_m}$ відносно діагоналі $V\times\ldots\times V$ і теореми про опуклість множин екстремальних елементів для цих задач.
8. Побудовано деяку задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень еквівалентну узагальненій задачі Штейнера відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок скінченновимірного підпростору V простору X до опуклих многогранників $A_1, A_2,\ldots,A_m$.
9. Доведено теореми існування функціоналів $f_\ell, \ell=\overline{1,\nu_1}$, замкненої одиничної кулі простору X^* таких, що

$$\min_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in S_1(0)}\ \max_{1\le\ell\le\nu_1} f_\ell\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k\right)=\mu^0>0,$$

де $S_1(0)$ — одинична сфера простору R^n, а $x_k, k=\overline{1,n}$, — лінійно незалежні елементи простору X.

10. Побудовано чисельний метод розв'язування задачі відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок скінченновимірного підпростору V лінійного нормованого простору X до опуклих многогранників $A_i, i=\overline{1,m}$, цього простору та доведено його збіжність.
11. Отримано двосторонні оцінки збіжності.
12. Доведено необхідні допоміжні твердження, які становлять і самостійний інтерес.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота в основному, має теоретичний характер. Її результати можуть використовуватися для подальшого розвитку теорії апроксимації, екстремальних задач, для побудови збіжних чисельних методів розв'язування задач апроксимації та оптимізації, в тому числі для розв'язування задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору його множиною, для відшукання чебишовського центра обмеженої замкненої множини лінійного нормованого простору, розв'язання узагальненої задачі Штейнера щодо відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок множини V лінійного нормованого простору X до кількох замкнених куль цього простору тощо.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданнях студентів проблемної групи "Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень ", яка функціонує при кафедрі математики. Окремі з них за підсумками участі в роботі звітної конференції студентів і магістрів за підсумками НДР у 2020 – 2021 навчальному році підготовлено до друку.

Структура роботи. Структуру роботи становлять вступ, три розділи, висновки та список використаних джерел.

У першому розділі:

— уточнено постановки задач відшукання величини (0.9) для випадків, коли $A_i, i=\overline{1,m}$, є довільними компактами, в тому числі опуклими; опуклими многогранниками; замкненими кулями простору X;

— доведено теореми існування екстремального елемента задачі відшукання величини (0.9);

— встановлено властивості цільової функції задачі (0.9);

— досліджено лінійний нормований простір $(X, \|\cdot\|_c)$, де $c>0, \|x\|_c = c\|x\|, x \in X$, та прямий добуток m лінійних нормованих просторів $(X, \|\cdot\|_{c_1}), \ldots, (X, \|\cdot\|_{c_m})$ і простори, спряжені з ними.

У другому розділі:

— встановлено опуклість та компактність множини $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$, де $A_i, i=\overline{1,m}$, — опуклі компакти простору X, а $X_{c_i} = (X, \|\cdot\|_{c_i}), i=\overline{1,m}$;

— доведено еквівалентність задачі відшукання величини (0.9) задачі відшукання чебишовського центра компакта $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$ відносно діагоналі множини $V \times \ldots \times V$;

— доведено теореми існування екстремальних елементів для задачі (0.9) та еквівалентної їй задачі про чебишовський центр компакта $A_1 \times \ldots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \ldots \times X_{c_m}$ відносно діагоналі $V \times \ldots \times V$ і теореми про опуклість множин екстремальних елементів для цих задач.

У третьому розділі:

— побудовано деяку задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень еквівалентну узагальненій задачі Штейнера відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок скінченновимірного підпростору V простору X до опуклих многогранників $A_1, A_2, ..., A_m$;

— доведено теорему існування функціоналів $f_\ell, \ell = \overline{1, \nu_1}$, замкненої одиничної кулі простору X^* таких, що

$$\min_{(\beta_1,...,\beta_m)\in S_1(0)} \max_{1\le\ell\le\nu_1} f_\ell\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k\right) = \mu^0 > 0,$$

де $S_1(0)$ — одинична сфера простору R^n, а $x_k, k = \overline{1, n}$, — лінійно незалежні елементи простору X;

— побудовано чисельний метод розв'язування задачі відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок скінченновимірного підпростору V лінійного нормованого простору X до опуклих многогранників $A_i, i = \overline{1, m}$, цього простору та довести його збіжність;

— отримано двосторонні оцінки збіжності.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі:

1. Уточнено постановки задач відшукання величини (0.9) для випадків, коли $A_i, i = \overline{1,m}$, є довільними компактами, в тому числі опуклими. опуклими многогранниками; замкненими кулями простору X.
2. Доведено теореми існування екстремального елемента задачі відшукання величини (0.9).
3. Встановлено властивості цільової функції задачі (0.9).
4. Досліджено лінійний нормований простір $\left(X, \|\cdot\|_c\right)$, де $c > 0, \|x\|_c = c\|x\|, x \in X$, та прямий добуток m лінійних нормованих просторів $\left(X, \|\cdot\|_{c_1}\right), \dots, \left(X, \|\cdot\|_{c_m}\right)$ і простори, спряжені з ними.
5. Встановлено опуклість та компактність множини $A_1 \times \dots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \dots \times X_{c_m}$, де $A_i, i = \overline{1,m}$, — опуклі компакти простору X, а $X_{c_i} = \left(X, \|\cdot\|_{c_i}\right), i = \overline{1,m}$.
6. Доведено еквівалентність задачі відшукання величини (0.9) задачі відшукання чебишовського центра компакта $A_1 \times \dots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \dots \times X_{c_m}$ відносно діагоналі множини $V \times \dots \times V$.
7. Доведено теореми існування екстремальних елементів для задачі (0.9) та еквівалентної їй задачі про чебишовський центр компакта $A_1 \times \dots \times A_m$ простору $X_{c_1} \times \dots \times X_{c_m}$ відносно діагоналі $V \times \dots \times V$ і теореми про опуклість множин екстремальних елементів для цих задач.
8. Побудовано деяку задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень еквівалентну узагальненій задачі Штейнера відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від

точок скінченновимірного підпростору V простору X до опуклих многогранників $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

9. Доведено теореми існування функціоналів $f_\ell, \ell = \overline{1, \nu_1}$, замкненої одиничної кулі простору X^* таких, що

$$\min_{(\beta_1, \ldots \beta_m) \in S_1(0)} \max_{1 \le \ell \le \nu_1} f_\ell \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k \right) = \mu^0 > 0 ,$$

де $S_1(0)$ — одинична сфера простору R^n, а $x_k, k = \overline{1, n}$, — лінійно незалежні елементи простору *X*.

10. Побудовано чисельний метод розв'язування задачі відшукання найменшої суми зважених гаусдорфових відстаней від точок скінченновимірного підпростору *V* лінійного нормованого простору *X* до опуклих многогранників $A_i, i = \overline{1, m}$, цього простору та доведено його збіжність.

11. Отримано двосторонні оцінки збіжності.

12. Доведено необхідні допоміжні твердження, які становлять і самостійний інтерес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Половинкин Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. – М.: Физматлит, 2004. – 406 с.

2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 407 с.

3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 510 с.

4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М. : Наука, 1976. – 320 с.

5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М. : Мир, 1975. – 496 с.

6. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.

7. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. – 468 с.

8. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.

9. Гаркова А. Л. Об условном чебышевском центре компактного множества непрерывных функций / А. Л. Гаркова // Математические заметки. – 1973. – 14, № 4. – С. 469 – 478.

10. Замятин В. Н. Чебышевские центры и х – нормованые пространства / В. Н. Замятин, А. Б. Шишкин // Математические заметки. – 1981. – 29, № 5. – С. 659 – 672.

11. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1971. – 352с.

12. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, №9. – С.1183-1193.

13. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 429 с.

14. Рубинштейн Т.Ш. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированом пространстве / Т.Ш. Рубинштейн // Сиб. Мат. Журн. –1965. –№3. – С. 183 – 215.

15. Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

16. Гудима У.В. Опуклий аналіз: Навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець-Подільський: Камянець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.

17. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

18. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М: ВШ, 1981. – Том 1. – 687 с.

19. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.

20. Юдин Д. Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М.: Физматгиз,1963. – 774 с.