Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

ДИПЛОМНА РОБОТА МАГІСТРА
на тему: **ЗАДАЧА ДРОБОВО-КУСКОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ**

виконав здобувач вищої освіти
2 курсу магістратури М1-М20 групи
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Кучерин Дмитро Ігорович

Керівник: Гудима Уляна Василівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Сорич Віктор Андрійович - кандидат фізико-математичних наук, доцент

м. Кам'янець-Подільський, 2021 р.

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми

Математичне моделювання та методи оптимізації важливі при пошуку системних зв'язків та закономірностей функціонування складних систем, для підвищення ефективності управління у технічних та економічних процесах. Сучасна теорія оптимізації у багатьох випадках є методичною основою для вибору найкращих економічних та технічних рішень.

Серед економічних задач оптимізації виробництва важливе значення займають задачі про мінімізацію собівартості продукції, про максимізацію рентабельності виробництва та продуктивності праці, які з математичної точки зору є екстремальними задачами, у яких цільова функція є відношенням двох лінійних функцій, а обмеження – системою лінійних рівнянь або нерівностей.

Розглянемо детальніше задачу про продуктивність праці.

Задача про продуктивність праці.

Для виконання n різних робіт можуть бути використані робітники m різник кваліфікаційних груп. При виконанні j-ї роботи i-ою групою робітників виробок за одиницю часу становить $c_{ij}, i \in \{1,..,m\}, j \in \{1,..,n\}$ одиниць. Загальний фонд часу впродовж якого i-та група робітників може бути зайнята виконанням робіт, не перевищує b_i одиниць часу, а j - та робота повинна бути виконана в обсязі не менше a_j одиниць. Скласти такий план виконання робіт, при якому продуктивність праці буде максимальною.

Нехай $x_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ – час, що виділяється робітникам i - ї кваліфікаційної групи на j - ту роботу. При цьому продуктивність праці рівна:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}.$$

Тоді математична модель задачі про продуктивність праці набере вигляду

$$F = \max \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}} \tag{0.1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, i = 1,..,m, \text{ (обмеження на час)} \tag{0.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \geq a_j,\ j = 1,..,n,\ \text{(обмеження на об'єм роботи)} \quad (0.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.\ \text{(обмеження невід'ємності)} \quad (0.4)$$

Задача (0.1) – (0.4) є задачею дробово-лінійного програмування, яка в загальному полягає в наступному:

$$\max\left(\min\right)\frac{f\left(x_1,..,x_n\right)}{g\left(x_1,..,x_n\right)} \quad (0.5)$$

при обмеженнях

$$\varphi_i\left(x_1,..,x_n\right)\left(\geq,=,\leq\right)b_i, i = \overline{1,m}, \quad (0.6)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \quad (0.7)$$

де, $f, g, \varphi_i, i = \overline{1,m}$ - лінійні функції задані на R^n.

Припускається, що $g\left(x_1,..,x_n\right) \neq 0,$ для усіх допустимих розв'язків задачі (0.5) – (0.7).

Складність економічних та технічних явищ і процесів викликала потребу накладати додаткові умови на множину допустимих розв'язків, коефіцієнти задачі (0.5) – (0.7) та розглядати задачу (0.5) – (0.7) в більш зальних випадках.

Задачі дробового програмування розглядалась багатьма науковцями. Їх дослідженню присвячено низку робіт (див., наприклад [1-9]). Не існує універсального методу дослідження та розв'язування цих задач. Кожна з них має свої особливості, методи дослідження і розв'язування.

Одна із таких задач, а саме, задача дробово-кусково-лінійного програмування в просторі X^*, спряженому з лінійним нормованим простором X, розглядається у дипломній роботі. Вона полягає в наступному:

Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір; X^*- простір спряжений з X; $x_i, i = \overline{1,n}$; $u_l,\ l = \overline{1,p}$, $\upsilon_m,\ m = \overline{1,q}$, – фіксовані елементи простору X; $c_i,\ i = \overline{1,n}$; $a_l, l = \overline{1,p}$; $d_m, m = \overline{1,q}$, ρ – фіксовані дійсні числа, $\rho > 0$.

Поставимо задачу відшукання

$$\inf \frac{\max\limits_{1\leq l\leq p}\left(f\left(u_l\right)+a_l\right)}{\min\limits_{1\leq m\leq q}\left(f\left(\upsilon_m\right)+d_m\right)} \quad (0.8)$$

при обмеженнях

$$f\left(x_i\right) \geq c_i, i = \overline{1,n}, \quad (0.9)$$

$$f \in X^*, \|f\| \le \rho . \quad (0.10)$$

Припускається, що $f(\upsilon_m) + d_m > 0,$ для всіх $f \in D, m = \overline{1,q},$ тобто, що

$$\min_{1 \le m \le q} \left(f(\upsilon_m) + d_m \right) > 0, f \in D,$$

де D - множина допустимих розв'язків задачі (0.8) – (0.10).

Також в роботі розглядається важливий частковий випадок задачі (0.8) – (0.10) в якому $q = 1$. В цьому випадку задачу (0.8) – (0.10) можна записати у вигляді:

$$\min \frac{\max\limits_{1 \le l \le p} \left(f(u_l) + a_l \right)}{f(\upsilon_1) + d_1} \quad (0.11)$$

при обмеженнях

$$f(x_i) \ge c_i, i = \overline{1,n}, \quad (0.12)$$

$$f \in X^*, \|f\| \le \rho. \quad (0.13)$$

Результати одержані при дослідженні задачі (0.8) – (0.10) та чисельний метод її розв'язання становлять самостійний інтерес, а також можуть бути використані при розв'язуванні задач практичного змісту, дослідження та розв'язування задач оптимізації та апроксимації, які вкладаються в постановку задачі (0.8) – (0.10) або ж у процесі розв'язування яких, доводиться розв'язувати подібні їй задачі.

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою дослідження є: встановити критерії існування допустимих розв'язків задачі (0.8) – (0.10), властивості множини допустимих розв'язків, теореми існування оптимального розв'язку, критерій оптимальності допустимого розв'язку для задачі (0.8) – (0.10) ((0.11) – (0.13)), дослідити допоміжну задачу, яка пропонується для розв'язання на кожному кроці методу розв'язування задачі (0.11) – (0.13) та двоїсту до неї задачу, довести співвідношення двоїстості, побудувати чисельний метод розв'язання задачі (0.8) – (0.10) та довести його збіжність, конкретизувати побудований метод на випадок задачі (0.11) – (0.13), побудувати задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень, двоїсту до допоміжної задачі, що розв'язується на кожному кроці методу розв'язування задачі (0.11) – (0.13), встановити умови існування оптимального розв'язку цієї допоміжної задачі.

Об'єктом дослідження є задача дробово-кусково-лінійного програмування в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з додатковими обмеженнями на норми її допустимих розв'язків.

Предметом дослідження є проблеми теорії оптимізаційних задач, що стосуються задачі дробово-кусково-лінійного програмування в просторі спряженому до лінійного нормованого простору, з додатковим обмеженням на норми її допустимих розв'язків.

Задачами дослідження є:

1) Встановити критерії існування допустимого розв'язку задачі (0.8) – (0.10).
2) Встановити існування оптимального розв'язку задачі (0.8) – (0.10).
3) Встановити критерій оптимальності допустимого розв'язку для задачі (0.8) – (1.10).
4) Розглянути частковий випадок задачі (0.8)-(0.10) при $q=1$ – задачу (0.11) – (1.13).
5) Для задачі (0.11)–(0.13) встановити критерії оптимальності її допустимого розв'язку.
6) Дослідити допоміжну задачу, яка пропонується для розв'язання на кожному кроці методу розв'язання задачі (0.11) – (0.13), довести співвідношення двоїстості.
7) Побудувати чисельний метод розв'язування задачі (0.8) – (0.10) та встановити його збіжність.
8) Конкретизувати побудований метод на випадок задачі (0.11) – (0.13).

При розв'язуванні поставлених задач використовувались методи математичного, функціонального, опуклого аналізу, методів оптимізації та дослідження операцій.

Наукова новизна результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1) Встановлено критерії існування допустимого розв'язку задачі (0.8) – (0.10).
2) Встановлено існування оптимального розв'язку задачі (0.8) – (0.10).
3) Встановлено критерій оптимальності допустимого розв'язку для задачі (0.8) – (1.10).
4) Розглянуто частковий випадок задачі (0.8) – (0.10) при $q=1$ – задачу (0.11) – (0.13).
5) Для задачі (0.11) – (0.13) встановлено критерії оптимальності її допустимого розв'язку.
6) Досліджено допоміжну задачу, яка пропонується для розв'язання на кожному кроці методу розв'язання задачі (0.11) – (0.13), доведено співвідношення двоїстості.
7) Побудовано чисельний метод розв'язування задачі (0.8) – (0.10) та встановлено його збіжність.
8) Конкретизовано побудований метод на випадок задачі (0.11) – (0.13).

Практичне значення отриманих результатів.

Результати представлені в дипломній роботі можуть бути використані для подальшого розвитку математичного програмування, зокрема, для дослідження екстремальних задач, цільова функція, яких є дробовою.

Ідею побудованого методу можна використати, зокрема, при побудові чисельних методів найкращої рівномірної апроксимації неперервних на компакті дійснозначних функцій.

Апробація результатів роботи.

Результати роботи доповідались 5 жовтня на науковій конференції студентів та магістрантів Кам'янець–Подільського національного університету імені Івана Огієнка за підсумками науково-дослідної роботи у 2020-2021 навчальному році, на засіданнях проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики.

Структура роботи.

Дипломна робота складається зі вступу, трьох розділів та списку використаних джерел.

Перший розділ присвячений постановці задачі дробово-кусково-лінійного програмування (0.8) – (0.10), встановленню критерію існування допустимого розв'язку для цієї задачі, зокрема, розглянуто випадки, коли $c_i \le 0,\ i = \overline{1,n},$ та коли серед чисел $c_1,..,c_n$ є додатні.

У другому розділі встановлені деякі властивості множини допустимих розв'язків, теореми існування оптимального розв'язку, критерії оптимальності допустимого розв'язку для задач (0.8) – (0.10), (0.11) – (0.13).

Досліджено допоміжну задачу, яка пропонується для розв'язання на кожному кроці методу розв'язування задачі (0.11) – (0.13) та двоїсту до неї задачу, доведено співвідношення двоїстості.

У третьому розділі модифіковано метод січної площини, розв'язування задач опуклого програмування на випадок задачі дробово-кусково-лінійного програмування (0.8) – (0.10) та встановлено його збіжність.

Розглянуто конкретизацію побудованого методу на випадок задачі (0.11) – (0.13).

Побудовано задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень, двоїсту до допоміжної задачі, що розв'язується на кожному кроці методу розв'язування задачі (0.11) – (0.13), встановлено умови існування оптимального розв'язку цієї допоміжної задачі

Висновки

У дипломній роботі розглядалась задача дробово-кусково-лінійного програмування (1.1)-(1.3) в просторі, спряженому до лінійного нормованого простору, з додатковими обмеженнями на норми її допустимих розв’язків та її частковий випадок при $q = 1$ – задача (2.9) – (2.11).

При дослідженні цих задач встановлено критерії існування допустимих розв’язків задачі (1.1)-(1.3), властивості множини допустимих розв’язків, теореми існування оптимального розв’язку, критерії оптимальності допустимого розв’язку для задач (1.1)-(1.3) та (2.9)-(2.11), досліджено допоміжну задачу, яка пропонується для розв’язання на кожному кроці методу розв’язування задачі (2.9)-(2.11) та двоїсту до неї задачу, встановлено співвідношення двоїстості, побудовано чисельний метод розв’язування задачі (1.1)-(1.3) та доведено його збіжність, конкретизовано побудований метод на випадок задачі (2.9)-(2.11), побудовано задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень, двоїсту до допоміжної задачі, що розв’язується на кожному кроці методу розв’язування задачі (2.9)-(2.11), встановлено умови існування оптимального розв’язку цієї допоміжної задачі.

При розв’язуванні поставлених задач використовувались методи математичного, функціонального, опуклого аналізу, методів оптимізації та дослідження операцій.

Список використаних джерел

1. Гнатюк В.О. Одна задача дробово-лінійного програмування в лінійному нормованому просторі/ В. О. Гнатюк// IV наук. конф. молодих математиків України. – К., 1968. – с. 259.

2. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения/Е.Г. Гольштейн. –М: Наука, 1971 – 351 с.

3. Коллатц Л. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения/ Л. Коллатц, В. Крабс. – М: Наука, 1978. - 272 с.

4. Гнатюк В. О. Основні властивості задачі найкращого наближення по дробовій функції/ В.О. Гнатюк, В.В. Мойко, Ю.В. Гнатюк // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – К., 1991. – Вип 2. – с.26-31.

5. Гнатюк В.О. Двоїсті задачі дробово-лінійного програмування та чисельний метод їх розв’язування / В.О. Гнатюк, Ю.В. Гнатюк // Зб. наук. пр. Кам’янець–Подільського держ. пед. ін-ту. Серія фізико-математична.– Кам’янець–Подільський: Кам’янець–Подільський деж. пед. ін-т, 1993. – Вип.1.– с.9-20.

6. Гнатюк Ю.В. Чисельний метод розв’язування узагальненої задачі дробово-опукло-угнутого програмування/ Ю.В.Гнатюк // Інтегральні перетворення і їх застосування до крайових задач: зб. наук. пр. Ін-ту математики НАН України. – К.: Ін-т математики НАН України, 1994.– Вип 6.– с.28 – 40.

7. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю.В. Гнатюк // Доп. НАН Україна. – 1995. – №6. – с. 23-26.

8. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів/ Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т.48. – №9. – с.1183 - 1193.

9. Гудима У.В. Найкраща рівномірна раціональна апроксимація неперервного компактнозначного відображення відношенням опуклих скінченновимірних множин однозначних відображень/ У.В. Гудима, Ю.В. Гнатюк, В.О. Гнатюк// Проблеми теорії наближення та суміжні питання: зб. наук. пр. Ін-ту математики НАН України. – К.: Ін-т математики НАН України, 2007. – Т.4, №1. – с.73 – 91.

10. Люстерник Л.А Краткий курс функционального анализа/ Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Изд.-во «Высшая школа», 1982. – 271 с.

11. Гудима У.В. Опуклий аналіз: навчальний посібник/ У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець–Подільський: Кам’янець–Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112с.

12. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализу/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

13. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе/ Цзи Фань//Бесконечные антагонистические игры. – М: физмат, 1963. - с 31 – 39.

14. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач /А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

15. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752с.

16. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа/ Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

17. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

18. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2004. – Т.2. – 720 с.

19. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2003. –Т.1. – 704 с.