МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Кафедра математики

ДИПЛОМНА РОБОТА

«Асимптотичні оцінки величини сумісного наближення інтерполяційними поліномами »

здобувача вищої освіти М1-М20 групи фізико-математичного факультету спеціальності 014.04 Середня освіта (Математики, інформатика)

Рой Маріни Михайлівни

Науковий керівник:
Кандидат фізико-математичних наук,
Доцент кафедри математики
Сорич В.А.

Рецензент:
Кандидат фізико-математичних наук,
Доцент кафедри математики
Гудима У.В.

Кам'янець-Подільський, 2021

Зміст

Перелік основних означень

$\forall$ – квантор загальності: «для кожного» «для будь-якого»;

$\exists$ – квантор існування: «існує»;

$x \in A$ – елемент х належить множині А;

$x \notin A$ – елемент х не належить множині А;

$B \cup A$ – об'єднання множин А і В;

$A \cap B$ – перетин множин А і В;

N – множина всіх натуральних чисел;

Z – множина всіх цілих чисел;

R – множина всіх дійсних чисел;

C – множина всіх комплексних чисел;

$\sup_{x \in A} F(x)$ – точна верхня межа значень функціонала F на множині А;

$ess\ sup$ – суттєва точна верхня межа;

$signa$ – величина, що дорівнює 1, якщо $a > 0$, дорівнює -1 якщо $a < 0$ і дорівнює 0, якщо $a = 0$;

$\|\cdot\|_x$ – норма в лінійному нормованому просторі;

U_p – одинична куля в просторі L_p, $p = 1, p = \infty$;

U_p^0– множина вигляду:

$$U_p^0 = \left\{\varphi \in U_p\colon \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0\right\};$$

$Re\ Z$ – дійсна частина комплексного числа;

$Im\ Z$ – уявна частина комплексного числа;

C – простір неперервних 2π – періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_C = \max_{0 \le x \le 2\pi} |f(t)|;$$

L_p – простір 2π – періодичних вимірних і суттєво обмежених (при $p = \infty$) або сумовних у p-ому степені функцій $(1 \leq p \leq \infty)$ з нормою

$$\|f\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0;2\pi]} |f(t)|, & p = \infty; \end{cases}$$

$S[f]$ – ряд Фур'є функції f;

$S_n(f)$ – сума Фур'є функції f;

t_n – тригонометричний поліном порядку n;

t_n^* – многочлен найкращого наближення функції f в лінійному нормованому просторі X;

$\rho_n(f; x)$ – відхилення від функції f її часткових сум Фур'є S_{n-1};

$E_n(f)_X$ – найкраще наближення функції f тригонометричними поліномами порядку $n - 1$ у метриці простору X;

$E_n(\mathfrak{N})_X$ – найкраще наближення множини $\mathfrak{N} \subset X$ тригонометричними поліномами порядку $n - 1$ у метриці простору X;

$E_{n,m}(\mathfrak{N})_X$ – найкраще сумісне наближення функцій f множини $\mathfrak{N} \subset X$ та їх похідних $f_{\beta_i}^{\psi_i}(\cdot)$ тригонометричними многочленами степеня $n - 1$ у метриці простору X;

$B_{r,r}(t)$ – ядра Бернуллі$(r \in N)$;

$B_{r,\beta}(t)$ – узагальнені ядра Бернуллі;

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \ \ r > 0, \ \ \beta \in R;$$

$p^q(t)$ – ядра Пуассона$(0 < q < 1)$;

$P_\beta^q(t)$ – узагальнені ядра Пуассона

$$P_{\beta}^{q}(t)=\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\ \ 0<q<1,\ \ \beta\in R;$$

$(f*g)(x)$ – згортка функцій f і g:

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x-t)g(t)dt\,;$$

$f^{r}(\cdot)=f_{r}^{(r)}(\cdot)-\ r$-та похідна функції f;

$P_{\beta}^{(q)}$ – (q,β) – похідна функції $f(\cdot)$ в сенсі О.І.Степанця:

$$f_{\psi}^{(\psi)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)cos\left(kx+\frac{\psi(k)\pi}{2}\right)+b_k(f)sin\left(kx+\frac{\psi(k)\pi}{2}\right)\right);$$

$f_{\beta}^{(\psi)}(\cdot)$ – (ψ,β) – похідна функції $f(\cdot)$ в сенсі О.І.Степанця:

$$f_{\beta}^{(\psi)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_k(f)sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right);$$

$\mathcal{J}_{\beta}^{\psi}(\varphi)$ – (ψ,β) інтеграл функції φ;

W_{β}^{r} – класи Вейля-Надя;

$$W_{\beta}^{r}=\left\{f\in L_p:\ \left\|f_{\beta}^{(r)}\right\|_{p}\le 1\right\},r>0,\beta\in R,p=1,p=\infty;$$

$P_{\beta,\infty}^{q}$ – класи 2π – періодичних функцій вигляду, які записуються у вигляді згортки:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\varphi(x+t)\,P_{\rho}^{q}(t)dt;$$

$L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ – класи 2π – періодичних функцій вигляду:

$$L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}=\left\{f\in L: f_{\beta}^{\psi}(\cdot)\in\mathfrak{N},\mathfrak{N}\in L\right\},$$

$C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ – класи 2π – періодичних функцій вигляду:

$$C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}=L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}\cap C.$$

§ 1. Попередні відомості

1.1. Вступ

На сучасному етапі розвитку математики теорія наближення активно розвивається. Ідеї цієї галузі математики активно проникають в інші розділи науки, особливо прикладної спрямованості.

Дослідження задач теорії наближення (теорії апроксимації) на запропонованих О.І. Степанцем класах, що базуються на поняттях (ψ, β) – похідних, почали проводитись у 80-х роках XX ст. під впливом робіт Б. Надя, В.К Дзядика, С.М. Нікольського, Н.П. Корнєйчука, С.Б. Стєчкіна, А.В. Єфімова, А. Ахієзера, О.І. Степанця, С.А. Теляковеького та ін. В ці роки сформувалося поняття (ψ, β) – похідної, яка визначається для функції f заданої послідовністю чисел $\psi = \psi(k), k = 1, 2, \ldots,$ та числами β. Звичайна r-та похідна періодичної функції $r = 1, 2, \ldots,$ при цьому, є окремим випадком (ψ, β) – похідної при $\psi(k) = k^{-r}$ і $\beta = r$. Окремими випадками (ψ, β) – похідної є і похідні в розумінні Вейля, Вейля-Надя, $(q, \beta) -$ похідні $(0 < q < 1,\ \beta \in \mathcal{R})$, та інші.

Очевидно, основна задача теорії наближення полягає в тому, що на основі заданих властивостей даної функції, встановити властивості її апроксимаційних характеристик. У випадку наближення 2π- періодичних функцій традиційно в якості таких характеристик виступають швидкості збіжності рядів Фур'є, найкращі наближення тригонометричними многочленами, наближення многочленами що породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, наближення інтерполяційними многочленами і т.п. Функції із однаковими апріорними властивостями об'єднуються у класи і тоді факти, встановлені для даного класу, відносяться і до кожного його представника. При цьому появляється можливість досліджувати екстремальні задачі тепер уже для цілих класів функцій. Це – задачі про властивості величин верхніх меж на даному класі відхилення сум Фур'є, найкращих наближень, наближень лінійними методами, наближення інтерполяційними многочленами і т. ін.

Метою даної роботи є одержання нових результатів про асимптотичні оцінки величини сумісного наближення інтерполяційними поліномами.

Відповідно до мети роботи, виділимо такі завдання:

-дослідити інтерполяційний аналог класичної нерівності Лебега у випадку сумісного наближення функцій f $(\cdot)$ ϵ $W^r_{\beta,\infty}$ та їх (r_i, β_i) – похідних тригонометричними поліномами степеня не вищого за n-1.

- встановити асимптотичні рівності для величини сумісного наближення лінійної комбінації функцій f$(\cdot)$ ϵ $W^r_{\beta,\infty}$ та їх (r_i, β_i) похідних в сенсі Вейля-Надя інтерполяційними тригонометричними поліномами $\tilde{S}^*_n(\cdot)$ в рівномірній (неперервній) метриці

$$\tilde{\mathcal{E}}^*_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}; x; \bar{\alpha}\right) = \sup_{f\,\epsilon\, W^r_{\beta,\infty}} \left|\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\left(f^{(r_i)}_{\beta_i}(x) - \tilde{S}^*_n\left(f^{(r_i)}_{\beta_i}; x\right)\right)\right|, \text{ n}\to\infty,$$

де $\bar{\alpha}$ = $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$- m вимірний дійснозначний вектор.

Об'єктом дослідження дипломної роботи є апроксимаційні властивості класів Вейля-Надя $W^r_{\beta,\infty}$ періодичних функцій, що задаються $\bar{r}$-інтегралами, при наближенні інтерполяційними поліномами лінійних комбінацій функцій та їх похідних $f^{r_i}_{\beta_i}(\cdot)$.

Предметом дослідження є швидкість наближення функціональних класів Вейля-Надя інтерполяційними поліномами. Основна увага у роботі зосереджується на асимптотичній поведінці точних верхніх меж сумісних відхилень тригонометричних поліномів, що породжуються інтерполяційними процесами.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дипломної роботи містять нові факти в теорії наближення функцій і полягають в знаходженні асимптотичної рівності для величини сумісного наближення лінійної комбінації функцій та їх похідних інтерполяційними тригонометричними поліномами.

Практичне значення роботи полягає в тому, що її результати, а також запропоновані в ній підходи та прийоми можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань сумісного наближення функцій та їх похідних інтерполяційними поліномами, теорії підсумовування рядів Фур'є, при розв'язуванні деяких екстремальних задач, при вивченні різноманітних питань математичного аналізу, тощо. Разом із сказаним вище, дипломна робота носить теоретичний характер.

Апробація результатів дослідження. Результати отримані в дипломній роботі доповідалися на студентських наукових конференціях за підсумками НДР у 2019р, 2021р.

Дипломна робота, обсягом 64 друкованих аркуша, складається із переліку основних позначень, чотирьох параграфів, висновків та списку використаних джерел.

У першому параграфі : Попередні відомості, описані результати досліджень отриманими математиками при дослідженні аналогічних задач теорії наближення. Зокрема – це класичні задачі розв'язані видатними математиками (А.Лебег, Джексон, А.М. Колмогоров, С. М. Нікольський, В.К. Дзядик, М.П. Корнєйчук, О. І. Степанець, С.О. Теляковський та інші) , а також задачі, що безпосередньо передували розглядуваній в дипломній роботі темі дослідження, і описані в роботах : А.С. Сердюка, В.А. Сорича, Н.М. Сорич, Н.М. Задерей, В.В. Дрозда, І.В. Соколенка та інших.

У другому параграфі : Класи періодичних функцій, детально описані питання класифікації періодичних функцій, розпочинаючи з диференційованих у звичайному розумінні цього слова функцій і завершуючи $\bar{\psi}$-інтегралами періодичних функцій. Викладені поняття відношення порядку, що базуються на $(\psi, \bar{\beta})$-похідних та дозволяють вивчати апроксимаційні властивості функцій що входять в надзвичайно широкий спектр різноманітних класів і розрізняються між собою тонкими відмінностями.

Питання найкращого наближення на класах згорток викладені в третьому параграфі. Детально розглядаються величини найкращих наближень в просторі неперервних функцій С та просторі інтегровних в першому степені функцій L.В цих просторах, на відміну від простору L_p, 1< $p < \infty$, суми Фур'є в загальному випадку не забезпечують наближення найкращого порядку. Більше того, є неперервні функції, ряди яких розбіжні. Приведені факти існування многочлена найкращого наближення $T^*_{n-1}(\cdot)$ неперервної $2\pi -$ періодичної функції , єдиності ,та найважливішого питання- критерію полінома найкращого наближення. Описані також загальні факти про наближення класів згорток та, для множин функцій, які можна записати у вигляді згорток, приводяться деякі розроблені вже прийоми досліджень.

У четвертому параграфі: Інтерполяційні тригонометричні многочлени, описані загальні положення та апроксимаційні характеристики поліномів, що повністю означаються лише за скінченним числом значень наближаючої функції – інтерполяційні поліноми. Ця перевага наближаючих агрегатів зручна при їх практичній реалізації і, крім цього, дослідження показують, що апроксимаційні властивості інтерполяційних поліномів мало чим уступають сумам Фур'є. В силу цього актуальним є питання побудови рівномірно збіжної на всьому просторі неперервних функцій послідовності поліномів, які визначалися б лише за скінченним числом значень функції f(·). Основні, кінцеві результати досліджень дипломної роботи, відображені в теоремах 1,2 пункту 4.3.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі досліджений інтерполяційний аналог класичної нерівності Лебега у випадку сумісного наближення функцій f $(\cdot)\ \epsilon\ W^r_{\beta,\infty}$ та їх (r_i, β_i) – похідних тригонометричними поліномами степеня не вищого за n-1. При цьому встановлені асимптотичні рівності для величини сумісного наближення лінійної комбінації функцій f$(\cdot)\ \epsilon\ W^r_{\beta,\infty}$ та їх (r_i, β_i) похідних в сенсі Вейля-Надя інтерполяційними тригонометричними поліномами $\tilde{S}^*_n(\cdot)$ в рівномірній (неперервній) метриці

$$\tilde{\mathcal{E}}^*_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}; x; \bar{\alpha}\right) = \sup_{f\ \epsilon\ W^r_{\beta,\infty}} \left|\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\left(f^{(r_i)}_{\beta_i}(x) - \tilde{S}^*_n\left(f^{(r_i)}_{\beta_i}; x\right)\right)\right|, \text{ n}\to\infty,$$

де $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$- m вимірний дійснозначний вектор.

Основні результати досліджень дипломної роботи містяться у твердженнях:

Теорема 1. Нехай $0\le r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_m < r$, $\beta_i\ \epsilon$ R, i = $\overline{1,m}$, та

$$E_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}; \bar{\alpha}\right)_C = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\,\frac{\cos\left(kt + (\beta-\beta_i)\frac{\pi}{2}\right)}{k^{r-r_i}}\,sign\sin(nt-\gamma)dt\right| =$$

$$= \frac{4}{\pi n^r}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\,\frac{\sin\left((2k+1)\gamma + (\beta-\beta_i)\right)\frac{\pi}{2}}{(2k+1)^{(r-r_i+1)}}\right|,$$

тоді для величини $\tilde{\mathcal{E}}^*_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}; x; \bar{\alpha}\right)$ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}^*_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}; x; \bar{\alpha}\right) = \frac{4}{\pi}E_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}; \bar{\alpha}\right)_C \ln n\,|\sin nx| + \mathrm{O}\left(E_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}; \bar{\alpha}\right)_C\right).$$

Теорема 2. 1) Нехай $0\le\ r_1\ \le\ r_2 \le \dots r_m < r$, причому виконується одна із умов:

а) $0 <$ r - $r_i \le 1$, β - $\beta_i\ \epsilon\ [0;\ r-\ r_i] \cup [2;\ 2 + r -\ r_i]$, i = $\overline{1,m}$ або ж

$$\beta -\ \beta_i\ \epsilon\ [2 - r +\ r_i; 2] \cup [4 - r +\ r_i; 4],\ \text{i} = \overline{1,m};$$

б) r - r_m = 1, r - $r_{m-1} < 2$, r - r_i = $4m_i$ + β - β_i,$m_i\ \epsilon\ N_0$, $\beta -\ \beta_i\ \epsilon\ [1; 2]$, i = $\overline{1,m}$,тоді при n→ ∞ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}^*_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}; x\right) = \frac{16}{\pi^2\, n^r}\left|\sum_{i=1}^m \alpha^*_i \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2k+1)\,\gamma + \frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right]}{(2k+1)^{(r-r_i+1)}}\right| \ln n|\sin nx| + \mathrm{O}(n^{-r}),$$

де $\alpha_i^* = 1$, якщо β - $\beta_i \epsilon [0,2]$ і $\alpha_i^* = -1$, якщо β - $\beta_i \epsilon [2,4]$, а γ – корінь рівняння

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2k+1)\gamma + \frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right]}{(2k+1)^{r-r_i}} = 0.$$

2) Нехай виконується одна із умов:

а) $r - r_m = 1$, $r - r_{m-1} < 2, r - r_i = 4m_i + \beta - \beta_{i,}\ m_i \epsilon N_{0,}\ \beta - \beta_i \epsilon [1;2]$, $i = \overline{1,m}$;

б) $0 < r - r_m < 1, r - r_i = 4m_i + \beta - \beta_{i,}\ m_i \epsilon N, \beta - \beta_i \epsilon [0,1]$, $i = \overline{1, m-1}$,

тоді при $n \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,m}^*\left(W_{\beta,\infty}^r; x\right) = \frac{16|\alpha_i^*|}{\pi^2 n^r} \sum_{i=1}^{m} \sin\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{(r-r_i+1)}} \ln n |\sin nx| +$$

$O(n^{-r})$,

де α_i^* в пунктах а) та б) вибираються одного знаку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем /С.М. Никольский// Изв. АН СССР, сер.мат.-1946.-10.№3.-С.207-256.

2. Степанец А.И. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций / А.И. Степанец, О.К. Кушпель.- 1984.-С.1-44 (Пре-принт/ АН УРСР :Ін-т математики:84.15).

3. Степанец А.И. Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p /А.И. Степанец, О.К. Кушпель // Укр. мат. журн. - 1987.-39,№4.-С.483-492.

4. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений/В.М. Тихомиров.-М.:Изд.-во Моск. ун-та, 1976.-307с.

5. Дзядык В.К.К вопросу о наилучшем приближении абсолютно монотонных и некоторых других функций в метрике L при помощи тригономе-трических полиномов/ В.К. Дзядык// Изв. АН СССР, сер.мат. -1961.-25, №2.-С.173-238.

6. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций ,определяемых интегралами от линейной комбинации абсо- лютно монотонных ядер/ В.К. Дзядык// Мат. заметки.-1974.-16.№5.-С.691-701.

7. Lebesque H. Sur les inteqrales sinqulieres / H.Lebesque //Ann. de Toulou-se,1909, I., P. 25-117.

8. Никольский С. М. Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами /С.М.Никольский //ДАН АН СССР, -1941.-31.№3.-С.215-218.

9. Никольский С.М. Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывно-сти /С.М.Никольский //ДАН АН СССР,-1946.-52.№3.-С.191-193.

10. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими поли-номами/А.И. Степанец.-К.: Наук.думка, 1981.-340с.

11. Степанец А.И. Методы теории приближений :в 2 ч./ А.И.Степанец.-К.:

Ин-т. математики НАН Украины, 2002.-Ч.II/-468с.

12. Сорич В.А. Наилучшее совместное приближение функций и их производных /В.А. Сорич.-К.1989.-С.3-54.-(Препринт/Ін-т математики АН УРСР;89.19).

13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. пособие у 3т.М. Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1066. Т.3. -656с.

14. Задачник по курсу математического анализа /под ред. Н.Я. Виленкина.- М.:Просвещение,1971.-336с.

15. Сорич В.А. Наилучшее совместное приближение функций и их производных /В.А.Сорич//Теория приближения функций: тез. докл. Всесоюз-ной школы (г. Луцк,31авг.-8сент.,1989г.).-К.:Ін-т математики АН УРСР, 1989.-С.39.

16. Сорич В.А. Про найкраще сумісне наближення функцій та їх похідних на класах W_β^r/В.А. Сорич, Н.М. Сорич// Зб.наук.пр. Кам'янець-Подільського держ. пед. ін-ту. Серія фізико-математична.-Кам'янець-Подільський держ. пед. ін-т, 1993.-Вип.1.-С.75-82.

17. Рой М. Асимптотичні оцінки величини сумісного наближення інтерполяційними поліномами / М. Рой // Зб. наукових праць студентів та магістрантів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.-Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка,2021.

18. Рой М.М., Івасюк Б.В. Наближення аналітичних функцій сумами Фур'є. / М. Рой, Б. Івасюк // Збірник наукових праць студентів та магістрантів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. Випуск 14. С. 84-85.