МІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

фізико-математичний факультет

кафедра математики

ДИПЛОМНА РОБОТА

з теми «Чебишовська у розумінні деякої зваженої псевдометрики точка системи многогранників лінійного нормованого простору, які неперервно змінюються»

Студентки М1-М20 групи фізико-математичного факультету
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Чирленюк Іванни Василівни

Науковий керівник:
кандитат фізико-математичних
наук,
доцент
Гнатюк Василь Олексійович

Рецензент:
кандитат фізико-математичних
наук,доцент
Щирба Віктор Самуїлович

Кам’янець-Подільський

2021

Зміст

ВСТУП

Робота присвячена задачі відшукання чебишовської у розумінні деякої зваженої псевдометрики точки системи многогранників лінійного нормованого простору, які неперервно змінюються.

Актуальність теми. Нехай $(X,\|.\|)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, X^* – простір, спряжений з X.

Позначимо через $K(X)$ множину всіх компактів простору X.

Якщо відомо (див. наприклад, [1, с.34]) метрика Гаусдорфа на множині $K(X)$ задається формулою

$$h_p(A,B) = \max\left\{\max_{x\in A}\min_{y\in B}\|x-y\|, \max_{y\in B}\min_{x\in A}\|y-x\|\right\}, A,B \in K(X).,\qquad (0.1)$$

Доводиться, що для всіх $A,B,C \in K(X)$:

1) $h_p(A,B) \geq 0,\ h_p(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B;$

2) $h_p(A,B) = h_p(B,A);$

3) $h_p(A,B) \leq h_p(A,C) + h_p(C,B).$

Оскільки простір $(K(X),h)$ є метричним простором, в цьому просторі можна розглядати низку екстремальних задач (див. наприклад, [2-8]).

Однією з них є, наприклад, задача на відшукання у множині $V \subset X$ чебишовської точки системи компактів $a(s) \in K(X)$, де s пробігає деякий компакт S, причому компакти $a(s), s \in S$, неперервно змінюється на S у розумінні метрики Гаусдорфа h на $K(X)$, тобто задача відшукання

$$\begin{aligned}&\inf_{x\in V}\max_{s\in S} h(\{x\},a(s)) = \inf_{x\in V}\max_{s\in S}\max\{\max_{x\in\{x\}}\min_{y\in a(s)}\|x-y\|, \max_{y\in a(s)}\min_{x\in\{x\}}\|y-x\|\} = \\ &= \inf_{x\in V}\max_{s\in S}\max\{\min_{y\in a(s)}\|x-y\|, \max_{y\in a(s)}\|y-x\|\} = \inf_{x\in V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|x-y\|\end{aligned}\qquad (0.2)$$

Якщо в задачі (0.2) $S = \{1,2,...,n\}$ то ця задача набере вигляду

$$\inf_{x\in V}\max_{1\leq i\leq m}\max_{y\in a(i)}\|x-y\| = \inf_{x\in V}\max_{1\leq i\leq m} h(\{x\},a(i)).\qquad (0.3)$$

Задача (0.3) є задачею про відшукання у множині V чебишовської точки компактів $a(1),...,a(n)$.

При $n=1$ одержимо задачу відшукання чебишовського центра компакта $a(1)$ відносно множини V:

$$\inf_{x\in V}\max_{y\in a(1)}\|x-y\| = \inf_{x\in V} h(\{x\}, a(1)). \tag{0.4}$$

Якщо ж в задачі (0.4) $a(1)=\{x_0\}$, де $x_0\in X$, то ця задача стане задачею найкращого наближення елемента $x_0\in X$ множиною $V\subset X$, тобто задачею відшукання величини

$$\inf_{x\in V}\|x-y\|, \tag{0.5}$$

яка досліджувалась багатьма математиками, результати дослідження яких підсумовані, зокрема, у монографіях [9-17].

Отже, класичну задачу (0.5) можна розглядати як частковий випадок задач (0.2) – (0.4), розглядуваних у метричному просторі $(K(X),h)$, а задачі (0.2) – (0.4), як узагальненнями задачі (0.5).

Останнім часом значна увага приділяється екстремальним задачам теорії наближень в яких міра відхилення між елементами простору X оцінюється з допомогою деякої неперервної опуклої функції, заданої на X, в тому числі сублінійної функції, передномри тощо (див., наприклад [13, 18-21]).

Зокрема, якщо P є неперервною передномою (псевдонормою) на X, то величину $P(x\text{-}y)$ логічно назвати відхиленням у розумінні передномри (псевдонорми) P між точками x та y.

Тоді задачу відшукання величини

$$\inf_{x\in V} P(x-x_0) \tag{0.6}$$

логічно за аналогією із задачею (0.5) назвати задачею найкращого у розумінні передномри P наближення елемента $x_0\in X$ множиною $V\subset X$ (див., наприклад, [13, с. 391]).

Аналогом задачі (0.2) буде задача відшукання

$$\inf_{x\in V}\max_{s\in S} h_p(\{x\}, a(s)) = \inf_{x\in V}\max_{s\in S}\max\{\max_{x\in\{x\}}\min_{y\in a(s)} P(x-y), \max_{y\in a(s)}\min_{x\in\{x\}} P(y-x)\}, \tag{0.7}$$

де $\{x\}\in K(X), a(s)\in K(X)$, а

$$h_p(\{x\}, a(s)) = \max\{\max_{x\in\{x\}} \min_{y\in a(s)} P(x-y), \max_{y\in a(s)} \min_{x\in\{x\}} P(y-x)\},$$

Отже, ми прийшли до необхідності розглядати для $A, B \in K(X)$ величину

$$h_p(A, B) = \max\{\max_{x\in A} \min_{y\in B} P(x-y), \max_{y\in B} \min_{x\in A} P(y-x)\}. \quad (0.8)$$

Виявляється що h_p є псевдометрикою на *K(X)*, тобто для всіх *A,B,C* із *K(X)*:

1) $h_p(A,B) \geq 0,\ h_p(A,A) = 0;$

2) $h_p(A,B) = h_p(B,A);$

3) $h_p(A,B) \leq h_p(A,C) + h_p(C,B)$.

Будемо називати її псевдометрикою на *K(X),* породженою переднормою (псевдонормою) *P*, а значення $h_p(A,B)$, де $A, B \in K(X)$, обчислене за формулою (0.8), будемо називати відхиленням між компактами $A, B \in K(X)$ у розумінні псевдометрики h_p, породженої напівнормою *P*.

Задачу (0.7) тоді можна назвати задачею відшукання у множині $V \subset X$ чебишовської h_p точки системи компактів $\mathrm{a(s), s \in S}$.

З використанням величини h_p точки аналог задачі (0.3) запишеться у вигляді:

$$\inf_{x\in V} \max_{1\leq i\leq m} h_p(\{x\}, a(i)) = \inf_{x\in V} \max_{1\leq i\leq m} \max_{y\in a(i)} P(x-y). \quad (0.9)$$

Задача (0.9) є задачею про відшукання у множині *V* чебишовської у розумінні псевдометрики h_p точки компактів $\mathrm{a(1),...,a(n)}$.

З використанням величини h_p аналог задачі (0.4) запишеться таким чином:

$$\inf_{x\in V} h_p(\{x\}, a(1)) = \inf_{x\in V} \max_{y\in a(1)} P(x-y). \quad (0.10)$$

Задачу відшукання величини (0.10) логічно назвати задачею відшукання чебишовського у розумінні псевдометрики h_p центра компакта *a(s)* відносно множини *V*.

Оскільки простір $(K(X), h_p)$ є псевдометричним, то в цьому просторі можна розглянути низку екстремальних задач, в яких відхилення між елементами *A* і *B* з *K(X)* визначається псевдометрикою h_p, породженою напівнормою *P*, за формулою (0.8).

На даний час такі задачі, в тому числі задачі (0.6), (0.7), (0.9), (0.10), досліджені недостатньо.

Одна з таких задач досліджується у магістерській роботі.

Постановка задачі. Нехай *X* – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, *S* – компакт, X^* – простір, спряжений з *X*, *K* – симетрична опукла обмежена множина простору X^*, замкнена у розумінні слабкої * топології цього простору, $P(x) = \max_{f \in K} f(x), x \in X,$ переднорма на *X*, $\mathrm{a_i} : s \in S \to a_i(s) \in X, i = \overline{1, m},$– відображення компактів *S* в *X*, які неперервні на *S* у розумінні переднорми *P*, $a(s) = co\{a_1(s), ..., a_m(s)\}, s \in S$, – система опуклих многогранників $a(s), s \in S,$ які неперервно змінюються у розумінні псевдометрики h_p на *K(X)*, породженої переднормою *P* на *X*, $\omega \in C(S, R)$– додатна неперервна на *S* числова функція (вагова функція), $\omega(s) h_p(\{x\}, a(s))$– зважене відхилення у розумінні псевдометрики h_p між елементом *x* і многогранником $a(s)$.

Задачею відшукання чебишовської у розумінні зваженої псевдометрики h_p відносно множини $\mathrm{V} \in \mathrm{X}$ точки системи опуклих многогранників $a(s), s \in S,$ які неперервно змінюється по $s \in S$ у розумінні псевдометрики h_p будемо називати задачу відшукання величини

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\overset{*}{v}(\omega, a) = \inf_{x \in V} \max_{s \in S} (\omega(s) h_p(\{x\}, a(s)) = \\ &= \inf_{x \in V} \max_{s \in S} (\omega(s) \max\{\max_{x \in \{x\}} \min_{y \in a(s)} P(x - y), \max_{y \in a(s)} \min_{x \in \{x\}} P(y - x)\}) = \\ &= \inf_{x \in V} \max_{s \in S} (\omega(s) \max_{y \in a(s)} P(x - y)). \end{aligned} \tag{0.11}$$

Якщо існує елемент $x^* \in V$, для якого $\max_{s \in S}(\omega(s)h_p(\{x\}, a(s)) = \mathrm{d}\overset{*}{v}(\omega, a)$, то він називається екстремальним елементом для величини (0.11) або оптимальним розв'язком задачі (0.11), або чебишовського у розумінні зваженої псевдометрики h_p відносно множини V точкою системи опуклих многогранників $a(s), s \in S$.

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Мета роботи є:

- встановлення властивостей функції $P(x) = \max_{f \in K} f(x), x \in X$;
- перевірка аксіом псевдометрики для функції $h_p(A, B) = \max\{\max_{x \in A} \min_{y \in B} P(x - y), \max_{y \in B} \min_{x \in A} P(y - x)\}, A, B \in K(X).$
- розгляд умов, за яких псевдометрика h_p, породжена переднормою P, є метрикою на $K(X)$, в тому числі гаусдорфовою метрикою;
- двоїсте подання та властивості псевдометрики та метрики на $K_0(X)$, породжених переднормою P, заданою на X;
- перевірка на компактність многогранника простору X: подання відхилення між точкою x, та многогранником простору X у розумінні псевдометрики h_p, як максимуму відхилень між x та вершинами цього многогранника у розумінні переднорми P і встановлення неперервності у розумінні псевдометрики h_p відображення $s \in S \to a(s) = co\{a_1(s),..., a_m(s)\} \in K_0(X)$ на S;
- розгляд властивостей цільової функції задачі відшукання величини (0.11), встановлення умов існування екстремального елемента для цієї величини.
- розгляд властивостей цільової функції задачі відшукання величини (0.11), встановлення умов існування екстремального елемента для цієї величини.

- отримання двоїстого подання похідної за напрямом цільової функції задачі відшукання величини (0.11);
- отримання двоїстого подання конуса внутрішніх напрямків для множини $Q(x^*)=\{x\in X:\varphi(x)<\varphi(x^*)\}$ з точки $x^*\in V$, де φ –цільова функція задачі відшукання величини (0.11);
- встановлення необхідних, достатніх умов і критерію екстремальності елемента для величини (0.11);
- конкретизація критерію екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.11) на випадок, коли відшукання чебишовської у розумінні зваженої псевдометрики h_p точки здійснюється в підпросторі простору X – (V – підпростір простору X)
- встановлення низки допоміжних результатів.

Об'єктом дослідження є задача відшукання чебишовської у розумінні зваженої псевдометрики h_p відносно множини $V\subset X$ точки системи опуклих многогранників, які неперервно змінюється у розумінні псевдометрики h_p.

Предметом дослідження є проблеми теорії апроксимації, що стосується екстремальних задач в псевдометричному просторі компактів лінійного нормованого простору *X*, в тому числі задачі відшукання чебишовської у розумінні зваженої псевдометрики h_p відносно множини $V\subset X$ точки системи опуклих многогранників, які неперервно змінюється у розумінні псевдометрики h_p.

Задачами дослідження є:

1. Встановити властивості функції $P(x)=\max\limits_{f\in K} f(x), x\in X$.
2. Перевірити виконання аксіом псевдометрики для функції $h_p(A,B)=\max\{\max\limits_{x\in A}\min\limits_{y\in B}P(x-y),\max\limits_{y\in B}\min\limits_{x\in A}P(y-x)\}, A,B\in K(X)$.
3. Встановити умови, за яких псевдометрика h_p, породжена переднормою *P*, є метрикою на *K(X)*, в тому числі гаусдорфовою метрикою.

4. Отримати співвідношення двоїстості та довести властивості псевдометрики та метрики на $K_0(X)$, породжених переднормою *P*, заданою на *X*.

5. Довести компактность многогранника лінійного нормованого простору *X*. Подати відхилення між точкою *x*, та многогранником простору *X* у розумінні псевдометрики h_p, як максимуму відхилень між *x* та вершинами цього многогранника у розумінні переднорми *P* і встановлення неперервності у розумінні псевдометрики h_p відображення $s \in S \to a(s) = co\{a_1(s),..., a_m(s)\} \in K_0(X)$ на *S*.

6. Встановити властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.11), умови існування її екстремального елемента для цієї величини.

7. Отримати двоїсте подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.11) та конуса внутрішніх напрямків для множини $\mathrm{Q}(\mathrm{x}^*) = \{x \in X : \varphi(x) < \varphi(x^*)\}$ з точки $x^* \in V$, де φ – цільова функція задачі відшукання величини (0.11).

8. Встановити необхідні, достатні умови та критерій екстремальності елемента для величини (0.11).

9. Конкретизувати критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.11) на випадок, коли відшукання чебишовської у розумінні зваженої псевдометрики h_p точки здійснюється в підпросторі простору X – (V – підпростір простору X).

10. Довести низку допоміжних тверджень, необхідних для вирішення задач, поставлених у пункті 1-9.

При розв'язуванні поставлених задач у дипломній роботі використовувались методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорії апроксимації, теорії екстремальних задач, теорії ігор, теорії багатозначних відображень, теорії множин.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Встановлено властивості функції $P(x)=\max_{f\in K} f(x), x\in X$.

2. Перевірено виконання аксіом псевдометрики для функції $h_p(A,B)=\max\{\max_{x\in A}\min_{y\in B}P(x-y),\max_{y\in B}\min_{x\in A}P(y-x)\}, A,B\in K(X).$

3. Встановлено умови, за яких псевдометрика h_p, породжена переднормою *P*, є метрикою на *K(X)*, в тому числі гаусдорфовою метрикою;

4. Отримано співвідношення двоїстості та доведено властивості псевдометрики та метрики на $K_0(X)$, породжених переднормою *P*, заданою на *X*.

5. Доведено компактность многогранника лінійного нормованого простору *X*. Подано відхилення між точкою *x*, та многогранником простору *X* у розумінні псевдометрики h_p, як максимуму відхилень між *x* та вершинами цього многогранника у розумінні переднорми *P* і встановлено неперервності у розумінні псевдометрики h_p відображення $s\in S\to a(s)=co\{a_1(s),...,a_m(s)\}\in K_0(X)$ на *S*.

6. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.11), умови існування її екстремального елемента для цієї величини.

7. Отримано двоїсте подання похідної напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.11) та конуса внутрішніх напрямків для множини $\mathrm{Q}(x^*)=\{x\in X:\varphi(x)<\varphi(x^*)\}$ з точки $x^*\in V$, де φ – цільова функція задачі відшукання величини (0.11).

8. Встановлено необхідні, достатні умови та критерій екстремальності елемента для величини (0.11).

9. Конкретизовано критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.11) на випадок, коли відшукання чебишовської у розумінні зваженої псевдометрики h_p точки здійснюється в підпросторі простору X – (V – підпростір простору X).

10. Доведено низку допоміжних тверджень, які становлять також самостійний інтерес.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота містить має теоретичний характер.

Результати дипломної роботи можуть бути використані для подальшого розвитку теорії апроксимації, теорії екстремальних задач, теорії ігор, теорії оптимального керування в нормованих та напівнормованих просторах та в інших галузях науки.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідачів на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує на кафедрі математики, за результатами участі в роботі звітної конференції студентів і магістрантів за підсумками НДР у 2020-2021 навчальному році підготовлено до друку статтю.

Структура роботи. Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі розглянуто властивості функції

$$P(x) = \max_{f \in K} f(x), x \in X,$$

де X – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, K – симетрична, опукла, обмежена множина простору X^*, спряженого з X.

Встановлено, що P є переднормою на X.

Перевірено, що функція

$$h_p(A, B) = \max\{\max_{x \in A} \min_{y \in B} P(x-y), \max_{y \in B} \min_{x \in A} P(y-x)\}, A, B \in K(X),$$

де $K(X)$ – множина компактів простору X, задовольняє аксіоми псевдометрики; її названо псевдометрикою на $K(X)$, породженою переднормою P.

В цьому розділі розглянуто також умови, за яких h_p є метрикою на $K(X)$, в тому числі метрикою Гаусдорфа; отримано двоїсте подання псевдометрики

h_p на множині $K_0(X)$ всіх опуклих компактів простору X та з його допомогою встановлено властивості цієї псевдометрики на $K_0(X)$.

У другому розділі доведено компактність опуклого многогранника простору *X*; отримано подання відхилення між точкою та многогранником простору *X* у розумінні h_p як максимуму відхилень між *x* та вершинами цього многогранника у розумінні передноpми *P;* розглянуто системи опуклих многограників простору *X*, які неперервно змінюються у розумінні псевдометрики h_p; поставлено задачу відшукання чебишовської у розумінні зваженої псевдометрики h_p відносно множини $V \subset X$ точки системи опуклих многогранників, які неперервно змінюється і встановлено властивості цільової функції цієї задачі та умови існування її екстремальності елемента.

У третьому розділі отримано двоїсте подання похідної за напрямком цільової функції φ задачі відшукання чебишовської у розумінні зваженої псевдометрики h_p відносно множини $V \subset X$ точки системи опуклих многогранників, які неперервно змінюється, двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для множини $\mathrm{Q}(\mathrm{x}^*) = \{x \in X : \varphi(x) < \varphi(x^*)\}$ з точки $x^* \in V$ і на основі цих подань встановлено необхідні, достатні умови і критерій екстремальності елемента для розглядуваної задачі.

В роботі доведено низку допоміжних тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі:

1. Встановлено властивості функції $P(x) = \max_{f \in K} f(x), x \in X$.

2. Перевіренно виконання аксіом псевдометрики для функції $h_p(A,B) = \max\{\max_{x \in A} \min_{y \in B} P(x-y), \max_{y \in B} \min_{x \in A} P(y-x)\}, A, B \in K(X)$.

3. Встановлено умови, за яких псевдометрика h_p, породжена переднормою *P*, є метрикою на *K(X)*, в тому числі гаусдорфовою метрикою.

4. Отримано співвідношення двоїстості та доведено властивості псевдометрики та метрики на $K_0(X)$, породжених переднормою *P*, заданою на *X*.

5. Доведено компактность многогранника лінійного нормованого простору *X*. Подано відхилення між точкою *x*, то многогранником простору *X* у розумінні псевдометрики h_p, як максиму відхилень між *x* та вершинами цього многогранника у розумінні переднорми *P* і встановлено неперервность у розумінні псевдометрики h_p відображення $s \in S \to a(s) = co\{a_1(s),..., a_m(s)\} \in K_0(X)$ на *S*;

6. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.11), умови існування екстремального елемента для цієї величини.

7. Отримано двоїсте подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.11) та конуса внутрішніх напрямків для множини $Q(x^*) = \{x \in X : \varphi(x) < \varphi(x^*)\}$ з точки $x^* \in V$, де φ – цільова функція задачі відшукання величини (0.11).

8. Встановлено необхідні, достатні умови та критерій екстремальності елемента для величини (0.11);

9. Конкретизовано критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.11) на випадок, коли відшукання чебишовської у

розумінні зваженої псевдометрики h_p точки здійснюється в підпросторі простору X – (V – підпростір простору X).

10. Доведено низку допоміжних тверджень, які становлять також самостійний інтерес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Половинкин Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. – М. : Физматлит, 2004. –416 с.

2. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения / Б. Сендов. –София: БАН, 1979. – 372с.

3. Никольский М.С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М.С. Никольский // Докл. АН СССР. – 1989. –308, № 5. – С. 1047–1050.

4. Никольский М.С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями / М.С. Никольский //Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и кибернетика. –1990. –№1. –С. 76-80.

5. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У.В. Гудима // Укр. мат. жур. –2005. – 57,№12. –С. 1601-1619.

6. Гнатюк Ю.В. Критерій екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень /Ю.В. Гнатюк, У.В. Гудима // Доп. НАН України. – 2005. — № 6. — С. 19—23.

7. Гнатюк Ю.В. Відносна чебишовська точка системи обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються /Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. жур. –2011. – 63,№7. –С. 889-903.

8. Гнатюк Ю.В. Найкраща рівномірна апроксимація в метричному просторі неперервних відображень з компактами опуклими образами / Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. жур. –2010. – 62,№12. –С. 1620-1633.

9. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер.–М. : Наука, 1965. –407 с.

10. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 510 с.

11. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения Н.П. Корнейчук. – М. : Наука, 1976. – 320 с.

12. Крейн М. L-проблема в абстрактному ленейном нормированном пространстве / М. Крейн // В кн.: Ахиезера И., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов / И. Ахиезера, М. Крейн. – Харьков: ГОНТИ. – 1938. – С. 171-199.

13. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М. : Мир, 1975. –496 с.

14. Никольский С.М. Приближения функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1946. – 10,№3. –С. 207-256.

15. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. –427с.

16. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. –468с.

17. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. –307 с.

18. Демьянов В.Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. –Л. : Изд-во ЛГУ, 1968. –178 с.

19. Гнатюк В.А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В.А. Гнатюк, В.С. Щирба // Укр. мат. журн. – 1982. – 4,№5. – С. 608-613.

20. Покровский А.В. О наилучшем несимметричном приближении в пространствах непрерывных функций / А.В. Покровский // Изв. РАН. Сер. матем. – 2006. – 70,№4. – С. 175-208.

21. Гудима У.В. Умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень/ У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Теория наближення функцій та суміжні питання: [зб. наук. пр. Інституту математики НАН України]. – К. : Інститут математики НАН України. –2011. –Т. 8, №1. – С. 75-88.

22. Пшеничньй Б.Н. Необходимые условия экстремума / Б.Н. Пшеничньй. – М. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. –144с.

23. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Конторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1984 –752 с.

24. Гудима У.В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець-Подільський: Камянець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. –112 с.

25. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – Випуск 12. – С. 37-55.