

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

# **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Технічні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 18**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка  
2018

УДК 004.94:53.072  
ББК 30  
М34

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:  
Серія КВ № 14522-3493Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до Переліку наукових фахових  
видань ДАК Міністерства освіти і науки України з технічних наук  
(наказ №1021 від 07 жовтня 2015 р.)

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського  
національного університету імені Івана Огієнка,  
протокол №11 від 27 грудня 2018 року.

#### Рецензенти:

**І. В. Бейко**, доктор технічних наук, професор,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;

**Р. Н. Квстний**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри  
Вінницького національного технічного університету.

#### Редакційна колегія:

**О. М. Хіміч**, член-кореспондент НАНУ,  
доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);

**А. Ф. Верлань**, член-кореспондент НАПНУ,

доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);

**В. А. Федорчук**, доктор технічних наук, професор (*відповідальний секретар*);

**Т. Бокалруд**, доктор філософії, професор, Норвегія;

**В. П. Боюн**, член-кореспондент НАНУ, доктор технічних наук, професор;

**В. В. Васильєв**, член-кореспондент НАНУ, доктор технічних наук, професор;

**А. А. Верлань**, доктор філософії, професор, Норвегія;

**В. К. Задірака**, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор

**І. М. Конет**, доктор фізико-математичних наук, професор;

**Б. Б. Нестеренко**, доктор технічних наук, професор;

**С. А. Положанко**, доктор технічних наук, професор.

**Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки** : зб.  
**М34** наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної  
академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка ; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-  
Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана  
Огієнка, 2018. — Вип. 18. — 120 с.

У збірнику друкуються результати досліджень, що стосуються проблем  
застосування математичних моделей у різних галузях людської діяльності.

Збірник включений до бази даних наукових журналів Норвегії.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, докторантів, аспірантів,  
студентів вищих навчальних закладів.

УДК 004.94:53.072  
ББК 30

ISSN 2308-5916  
DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2018

© Кам'янець-Подільський національний  
університет імені Івана Огієнка, 2018

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of National Academy of Sciences of Ukraine  
Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University

# **MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING**

**Series: Technical sciences**

Scientific journal

**ISSUE 18**

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University  
2018

### Critics:

**I. Beyko**, Doctor of Technical Science, Professor,  
National Technical University of Ukraine  
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»;

**R. Kvyetnyy**, Doctor of Technical Science, Professor,  
Head of department Vinnytsia national technical university.

### Editorial board:

**O. Himich**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Doctor  
of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

**A. F. Verlan**, Corresponding Member of the NAPS of Ukraine,  
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

**V. Fedorchuk**, Doctor of Technical Science,  
Professor (*Responsible Secretary*);

**T. Bokalrud**, Associate Professor, Norway;

**V. Boyun**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,  
Doctor of Technical Science, Professor;

**I. Konet**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

**B. Nesterenko**, Doctor of Technical Science, Professor;

**S. Polozhaenko**, Doctor of Technical Science, Professor;

**V. Vasiliev**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,  
Doctor of Technical Science, Professor;

**A. A. Verlan**, Ph. D., Professor, Norway;

**V. Zadiraka**, Academician of the NAS of Ukraine,  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

**Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences:** scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University ; [Editorial Board: O. Himich (Executive Editor) and others]. — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2018. — ISSUE 18. — 120 p.

The journal publishes results of studies on the mathematical models' application problems in various areas of human activity.

Joint with NTNU the journal has been included to the database of Norwegian Register for Scientific Journals, Series and Publishers.

Intended for scientific and engineering staff, researchers, undergraduate, graduate and Ph. D. students, post-graduates.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of NAS of Ukraine, 2018

© Kamianets-Podilskyi National  
Ivan Ohiienko University, 2018

ISSN 2308-5916

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18

UDC 517.9

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.5-17

**A. Bomba**, Doctor of Engineering, Professor,  
**K. Malash**, Ph. D. Student

Rivne State Humanitarian University, Rivne

## **MODELING OF EXPLOSIVE PROCESSES IN ANISOTROPIC MEDIA WHERE BOUNDARY OF THE INFLUENCE REGION IS IDENTIFIED**

Nowadays, explosive processes are widely used for the optimization of extraction minerals processes, in the buildings construction and industry. This practice allows to significantly increase the speed of the work and, at the same time, reduce its cost. However, side effects of the explosion usage can be catastrophic, since its destructive power is capable of completely demolishing even fairly stable buildings and causing irreparable damage to the environment, therefore there is a need for a precise mathematical modeling of the explosive process with a detailed calculation of all its consequences.

One of the models used to investigate the explosion process is a fluid based on the simulation of an environment in which an explosion occurs as a filtration fluid. In this case, the velocity field generated by the explosion is usually considered to be potential.

This article deals with a mathematical model of the explosion process based on a liquid model. It takes into account the mutual influence of the deformable anisotropic porous medium parameters and the explosive process characteristics. The corresponding boundary value problem is solved using the numerical quasiconformal mappings method which ensures the possibility of its solution taking into account the presence of the reverse effect, the existence of which essentially complicates the process of solving the problem by other, less «dynamical» methods. Algorithm used in the modelling of similar processes in hydrodynamics and electrodynamics, in particular for the study of filtration processes and electromotography is adapted for solving appropriate boundary value problems. The method of identifying the external boundary of the domain of the explosive process influence is developed by introducing certain changes to the «classical» algorithm for solving such a type of boundary problems for the twice-bounded domain since the last one requires a priori assignment of the inner and outer domain contours.

**Key words:** *anisotropic medium, complex analysis, explosion processes, hydrodynamic mesh, identification, mathematical modelling, numerical methods, quasiconformal mapping.*

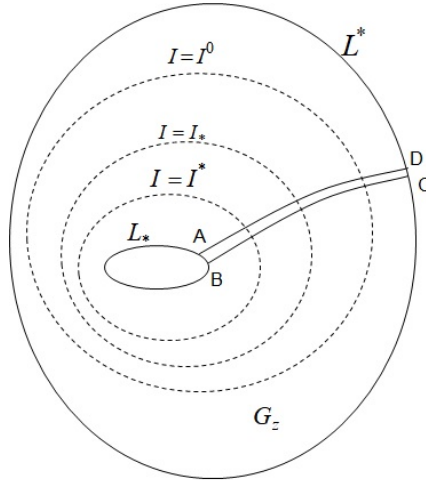
**Introduction.** Explosive processes are often used in mining, particularly, for grinding the hard rock preventing easily access to the minerals at the present stage of development of production. Also, explosions are often

used in buildings construction, for example, to clear the territory or create large depths. It is extremely important to determine the correct technological parameters of the explosion process, since the inaccuracies made may result in catastrophic consequences, particularly, the destruction of nearby buildings, or the other significant damage, the elimination of which requires enormous costs or is impossible. For this purpose, mathematical modeling of the process is carried out.

Nowadays there are several models of explosion processes, each of which is used by various researchers. Particularly, V. Kravets, V. Korobichyuk, V. Boyko use linear-elastic, elastic-plastic and visco-elastic ones [1]. V. Bulavatskii, V. Skopetskii, and I. Luchko consider the liquid model based on the representation of the medium in which the explosion occurs as an ideal liquid, and the field formed by the explosion is considered to be a potential. In this case the process modelling is based on the solution of the corresponding boundary value problem using conformal mappings. However, their functional does not provide sufficient accuracy of the solution, since the field formed as a result of the explosion is not ideal (this is due to the presence of squeezed parts of the soil, as well as areas close to the cavities); in addition, there is a need to take into account the reciprocal influence of process characteristics and the medium characteristics. The liquid model of explosive processes was improved by A. Bomba and his scientific school [4–5]. Quasiconformal mappings methods are used for solving the corresponding boundary value problem [6–10]. The impact of the explosive process on an isotropic medium is investigated in [4], the impact on anisotropic one is described in [5] (the boundaries of crater, pressed and undisturbed sections of the medium are determined, and, also, the hydrodynamic grid of the formed field is constructed). The area of an explosion influence is considered to be given a priori in these works (the corresponding mathematical domain is modeled as a twice-bounded domain).

In this article we propose a solution to the problem of determining the boundaries of the crater, pressed and undisturbed domains of the medium with the simultaneous identification of the area boundary of the explosion impact on the investigated environment, taking into account the interaction of the characteristics of the environment and the process with the automatic construction of the hydrodynamic grid.

**Presenting main material.** We consider a certain domain  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), where the charge of a given form with a constant quasipotential on it is placed, in a medium where an explosion was occurred (Fig. 1).



**Fig. 1.** Physical domain of the medium

The particles motion process is described (analogously to [5]) by the motion equation  $\vec{v} = k \text{ grad } \varphi$  and the continuity equation  $\text{div } \vec{v} = 0$ , where  $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$  is the particle velocity, and  $\varphi = \varphi(x, y)$  is the quasi-potential of the corresponding field,

$$k = \begin{pmatrix} k_{11}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) & k_{12}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \\ k_{21}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) & k_{22}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \end{pmatrix}$$

is the conductivity coefficient of the medium (which characterizes the ability of particles to rise). We consider that the explosion influence area is bounded by two contours — external and internal ones. The inner contour is the charge boundary. It is known a priori:

$$L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = x_*(t), y = y_*(t), \alpha_* < t < \beta_*\}.$$

The outer contour of the domain separates the studied area from the general one, and we can't set it a priori. Physically, it delimits the soil areas with the same characteristics, because the undisturbed zone of soil from the studied domain has the same characteristics as the outside one, so the external contour, which is established solely for the purpose of correct calculation, should be chosen so that it is situated in the undisturbed zone (emphasize that the contour that separates the pressed and the undisturbed soil zone is important to know from a practical point of view). It is inappropriate to choose the outer contour so that the undisturbed area within the studied area is too large, since an increase in the size of the studied area requires an increase in the number of the partition nodes, which leads

to higher costs of machine time or to the loss of accuracy; on the other hand, the choice of the external contour so that it would be outside the unbroken area will result in distortion of the results. We propose to identify the outer contour of the investigated area by solving a sequence of similar tasks, each of which differs from the previous one by outer contour. After solving each of the following tasks (starting with the second one), we compare the obtained boundaries of the crater, the pressed and undisturbed domains of the soil with those obtained for the previous. If they coincide with sufficient accuracy, then the contour that we found in the first of the comparable tasks is the wanted one; otherwise, we go to solving the next problem, in which we consider a little bit "larger" area. The process should be repeated until the desired boundaries of the crater, pressed and undisturbed domains of soil in the two adjacent tasks do not coincide. So, in each of the subtasks the outer contour is set in such way:

$$L_s^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = x_s^*(t), y = y_s^*(t), \alpha^* < t < \beta^*\},$$

where  $\varphi|_{L_s} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L_s^*} = \varphi^*$ ,  $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$ . In each task from the considered sequence, the functions  $x_s^*(t)$ ,  $y_s^*(t)$  have the same structure and differ only in parameters in such a way that they form a sequence of so-called «concentric» contours.

As a result of the problem solution it is necessary to construct a hydrodynamic grid, to determine the boundaries of the crater, the pressed and undisturbed sections of the soil (in Fig. 1, these borders are marked by dashed lines  $I = I^*$ ,  $I = I^0$ ).

We model the explosion process in the same way as [5] — taking into account the interaction of the quasipotential  $\varphi = \varphi(x, y)$  gradient

$$I = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \text{ and the conductivity tensor } k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \text{ and the formation of the sections (Fig. 1), in which the correction of the latter is made, depending on the values } I \text{ according to the following formula:}$$

$$k_{rs} = k_{0rs} + \frac{1}{2} \beta_{rs} (I - I^*) \left( (I - I^0) + |I - I^0| \right), \quad (r, s = 1, 2), \quad (1)$$

where  $I^0$ ,  $I^*$  are the critical gradient values, which characterize the delay and separation of particles (the position of the line of the section), the parameter tensor  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ , which characterizes the medium anisotropy change, is selected based on the physical experiment [3].



We introduce a flow function  $\psi = \psi(x, y)$ , that is complex conjugate to  $\varphi = \varphi(x, y)$  (as described in [7]), fix a certain point  $A = B \in L_*$  on the inner contour of the domain and make a conditional incision of the investigated domain along one of the flow lines (unknown yet, it will be refined in the process of problem solving). The top and bottom of the section are marked via AA and BB on Fig. 1. We obtain (in the case of a fixed  $k$ ) the problem on a quasiconformal mapping  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  [6] formed by a single-bounded domain  $G_z^0 = G_z / AA$  on the corresponding rectangular domain of a complex quasipotential  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  with an unknown parameter  $Q$ :

$$\begin{aligned} \kappa_{11}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \kappa_{21}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22}(x, y, \varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0. \quad (2) \\ \varphi|_{L_*} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{L_s} = \varphi^*, \quad \psi|_{AA} = 0, \quad \psi|_{BB} = Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy. \end{aligned}$$

The corresponding inverse boundary value problem on the quasiconformal mapping  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  of the domain  $G_\omega$  on  $G_z^0$  and the real  $x = x(\varphi, \psi)$  and imaginary  $y = y(\varphi, \psi)$  parts equation (we also require it's execution in the section to account for their «split» in the transition from the domain  $G_z$  to  $G_\omega$ ) of the characteristic flow function with the unknown position of the section and the value  $Q$  is obsessed as:

$$\begin{aligned} \kappa_{11} \left( x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12} \left( x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa_{21} \left( x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22} \left( x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$(\varphi, \psi) \in G, \quad J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi,$$

$$\begin{aligned} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ f_s^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (4) \end{aligned}$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{21} \kappa_{12}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\kappa_{12}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{21} \kappa_{12}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa_{12}}{\kappa_{22}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

We construct the algorithm for numerical solution of the problem analogously to [5]. The difference analogs of equations (6), boundary conditions (4), as well as additional conditions for boundary and near-boundary nodes in the corresponding uniform grid domain

$$\begin{aligned}
 G_{\omega}^{\gamma} = \{ & (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta \varphi, \quad i = \overline{0, n}; \quad \psi_j = j \cdot \Delta \psi, \quad j = \overline{0, m}; \\
 & \Delta \varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}, \quad \Delta \psi = \frac{Q}{m}, \quad \gamma = \frac{\Delta \psi}{\Delta \varphi} \}
 \end{aligned}$$

is written, respectively, in the form:

$$\begin{aligned}
 & \sigma \left( \widehat{a}_{i+1, j+1} x_{i+1, j+1} - (\widehat{a}_{i+1, j+1} + \widehat{a}_{i, j+1}) x_{i, j+1} + \widehat{a}_{i, j+1} x_{i-1, j+1} \right) + \\
 & (1 - 2\sigma) \left( \widehat{a}_{i+1, j} x_{i+1, j} - (\widehat{a}_{i+1, j} + \widehat{a}_{i, j}) x_{i, j} + \widehat{a}_{i, j} x_{i-1, j} \right) + \\
 & + \sigma \left( \widehat{a}_{i+1, j-1} x_{i+1, j-1} - (\widehat{a}_{i+1, j-1} + \widehat{a}_{i, j-1}) x_{i, j-1} + \widehat{a}_{i, j-1} x_{i-1, j-1} \right) + \\
 & + \gamma^2 \left( \widehat{b}_{i+1, j+1} x_{i+1, j+1} - (\widehat{b}_{i+1, j+1} + \widehat{b}_{i+1, j}) x_{i+1, j} + \widehat{b}_{i+1, j} x_{i+1, j-1} \right) + \\
 & + (1 - 2\sigma) \left( \widehat{b}_{i, j+1} x_{i, j+1} - (\widehat{b}_{i, j+1} + \widehat{b}_{i, j}) x_{i, j} + \widehat{b}_{i, j} x_{i, j-1} \right) + \\
 & + \sigma \left( \widehat{b}_{i-1, j+1} x_{i-1, j+1} - (\widehat{b}_{i-1, j+1} + \widehat{b}_{i-1, j}) x_{i-1, j} + \widehat{b}_{i-1, j} x_{i-1, j-1} \right) + \\
 & + \gamma \left( \widehat{c}_{i+1, j} (x_{i+1, j+1} - x_{i+1, j-1}) - \widehat{c}_{i-1, j} (x_{i-1, j+1} - x_{i-1, j-1}) - \right. \\
 & \left. - \widehat{d}_{i, j+1} (x_{i+1, j+1} - x_{i-1, j+1}) + \widehat{d}_{i, j-1} (x_{i+1, j-1} - x_{i-1, j-1}) \right) / 4 = 0, \\
 & \sigma \left( \widetilde{a}_{i+1, j+1} y_{i+1, j+1} - (\widetilde{a}_{i+1, j+1} + \widetilde{a}_{i, j+1}) y_{i, j+1} + \widetilde{a}_{i, j+1} y_{i-1, j+1} \right) + \\
 & + (1 - 2\sigma) \left( \widetilde{a}_{i+1, j} y_{i+1, j} - (\widetilde{a}_{i+1, j} + \widetilde{a}_{i, j}) y_{i, j} + \widetilde{a}_{i, j} y_{i-1, j} \right) + \\
 & + \sigma \left( \widetilde{a}_{i+1, j-1} y_{i+1, j-1} - (\widetilde{a}_{i+1, j-1} + \widetilde{a}_{i, j-1}) y_{i, j-1} + \widetilde{a}_{i, j-1} y_{i-1, j-1} \right) + \\
 & + \gamma^2 \left( \widetilde{b}_{i+1, j+1} y_{i+1, j+1} - (\widetilde{b}_{i+1, j+1} + \widetilde{b}_{i+1, j}) y_{i+1, j} + \widetilde{b}_{i+1, j} y_{i+1, j-1} \right) +
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 - 2\sigma) \left( \bar{b}_{i,j+1} y_{i,j+1} - (\bar{b}_{i,j+1} + \bar{b}_{i,j}) y_{i,j} + \bar{b}_{i,j} y_{i,j-1} \right) + \\
 & + \sigma \left( \bar{b}_{i-1,j+1} y_{i-1,j+1} - (\bar{b}_{i-1,j+1} + \bar{b}_{i-1,j}) y_{i-1,j} + \bar{b}_{i-1,j} y_{i-1,j-1} \right) + \\
 & + \gamma \left( -\bar{c}_{i+1,j} (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) + \bar{c}_{i-1,j} (y_{i-1,j+1} - y_{i-1,j-1}) \right) + \\
 & + \bar{d}_{i,j+1} (y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}) - \bar{d}_{i,j-1} (y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}) \Big) / 4 = 0, \\
 & i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

Where

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_{i,j} &= ac \left( \frac{1}{\kappa_{i,j}^{11}} \right), \quad \hat{b}_{i,j} = bd \left( \frac{\kappa_{i,j}^{11} \kappa_{i,j}^{22} - \kappa_{i,j}^{21} \kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{11}} \right), \quad \hat{c}_{i,j} = ac \left( \frac{\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{11}} \right), \\
 \hat{d}_{i,j} &= bd \left( \frac{\kappa_{i,j}^{21}}{\kappa_{i,j}^{11}} \right), \quad \check{a}_{i,j} = ac \left( \frac{1}{\kappa_{i,j}^{22}} \right), \quad \check{b}_{i,j} = bd \left( \frac{\kappa_{i,j}^{11} \kappa_{i,j}^{22} - \kappa_{i,j}^{21} \kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{22}} \right), \\
 \check{c}_{i,j} &= ac \left( \frac{\kappa_{i,j}^{21}}{\kappa_{i,j}^{22}} \right), \quad \check{d}_{i,j} = bd \left( \frac{\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{22}} \right);
 \end{aligned}$$

$$ac(k_{i,j}) = \frac{k_{i,j} + k_{i-1,j}}{2}, \quad bd(k_{i,j}) = \frac{k_{i,j} + k_{i,j-1}}{2}.$$

$$\kappa_{i,j}^{rs} = \kappa_{rs} \left( \frac{2\Delta\varphi(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{J_{i,j}}, \frac{2\Delta\varphi(x_{i,j-1} - x_{i,j+1})}{J_{i,j}} \right).$$

$$\begin{aligned}
 J_{i,j} &= (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \\
 & i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & -f'_{*x}(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) + f'_{*y}(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = \\
 & = \sqrt{f'^2_{*x}(x_{0,j}, y_{0,j}) + f'^2_{*y}(x_{0,j}, y_{0,j})} \times \\
 & \times \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{*0,j}}, \\
 & f^*_{s\ x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f^*_{s\ y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = \\
 & = \sqrt{f^{*2}_{s\ x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) + f^{*2}_{s\ y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})} \times \\
 & \times \sqrt{(x_{i,n} - x_{i,n+1})^2 + (y_{i,n} - y_{i,n+1})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta^*_{i,n+1}},
 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

where

$$\cos \Theta = \left( \kappa_{11} f_x'^2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) f_x' f_y' + \kappa_{22} f_y'^2 \right) / \left( f_x'^2 + f_y'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \left( \kappa_{11} f_x' + \kappa_{12} f_y' \right)^2 + \left( \kappa_{21} f_x' + \kappa_{22} f_y' \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The approximation magnitude  $\gamma$  formula is obtained based on the «quasi-conformal similarity» condition of elementary rectangles [6] of two domains:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{a_{i,j} + a_{i+1,j}}, \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \\ a_{i,j} &= \left( \left( \kappa_{11} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{12} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \kappa_{21} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{22} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

The numerical implementation of the algorithm is carried out as follows. Firstly, we set the domain  $G_\omega$  partition parameters:  $n$  and  $m$ , critical potential values  $I^*$ ,  $I^0$ , parameters  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , which characterize the accuracy of the difference problem solution, parameter  $\varepsilon_4$ , which characterizes the accuracy of the investigated domain boundary identification. We set the outer contour  $L_1^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = x_1^*(t), y = y_1^*(t), \alpha^* < t < \beta^*\}$  so that it is at a short distance from the inner one for the first problem. We set the initial approximation of the boundary nodes coordinates  $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$ ,  $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$  (with monitoring the fulfillment of conditions (4)) and inner nodes  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$  (for example, evenly dividing the segments with the ends at the points  $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$ ,  $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$ ). Then we find the initial approximation  $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$  of the quasiconformal invariant  $\gamma$  by formula (9). Next, we perform the

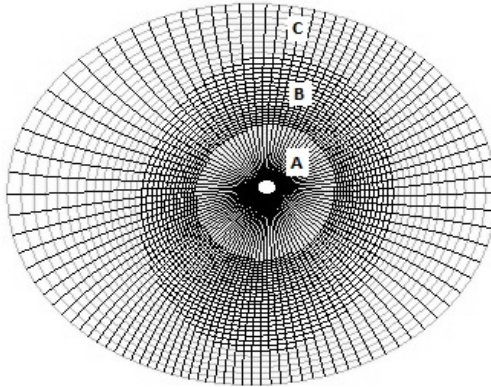
refinement of the internal nodes coordinates  $(x_{i,j}^{(\alpha)}, y_{i,j}^{(\alpha)})$  with the given accuracy  $\varepsilon_1$  ( $\alpha$  — the total iteration number) using iterative circuits such as the «cross» obtained by solving (7) with respect to  $x_{i,j}$  and  $y_{i,j}$ . In this case, the necessary values of the pressure gradient and the permeability tensor  $k$  in the grid nodes  $G_{\omega}^{\gamma}$  are calculated from the values  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$  from the previous iteration step. We correct the boundary nodes, solving approximately the system of equations (8), for example, by Newton's method. If the value of the nodes displacement on the boundary for the performed  $\alpha$ -th total iteration

$$S = \max_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(\alpha)} - x_{i,j}^{(\alpha-1)}\right)^2 + \left(y_{i,j}^{(\alpha)} - y_{i,j}^{(\alpha-1)}\right)^2}$$

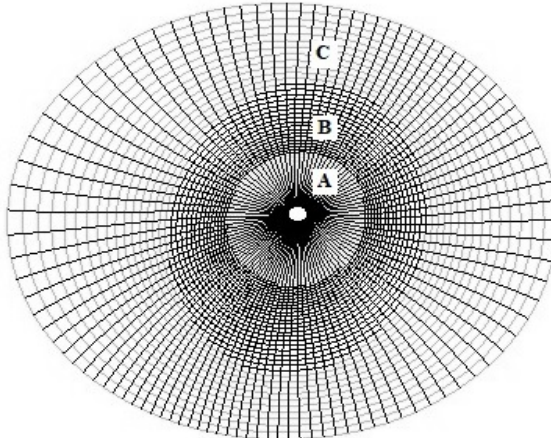
( $(i, j)$  are indexes of the boundary nodes coordinates) is greater than  $\varepsilon_2$ , then we return to refine the internal nodes. Otherwise, we find new approximations  $Q^{(L)}$  and  $\gamma^{(L)}$  quantities  $Q$  and  $\gamma$  by the formula (9) and the condition for the connection between them:  $Q = m\Delta\varphi \cdot \gamma$ . If  $|\mathcal{Q}^{(L)} - \mathcal{Q}^{(L-1)}| > \varepsilon_3$ , then we return to the refinement of the internal nodes, otherwise we calculate the resulting grid «quasi-conformality» non-connection  $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ , where  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  are the equations approximations incompatibilities (3):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - k_{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + k_{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|. \end{cases}$$

Then we determine the position of the section lines of the hole, pressed and undamaged sections of the soil and set the outer contour  $L_2^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = x_2^*(t), y = y_2^*(t), \alpha^* < t < \beta^*\}$  so that it is somewhat «bigger» from the previous, and solve the problem for this contour. We compare the position of the section lines of the pressed and undisturbed soil plots for the first and second tasks. If the difference between them does not exceed  $\varepsilon_4$ , then the contour  $L_1^*$  is sought, otherwise we go to the next task with the contour  $L_3^*$ , the results of which are compared with the results of the second one.



a)



b)

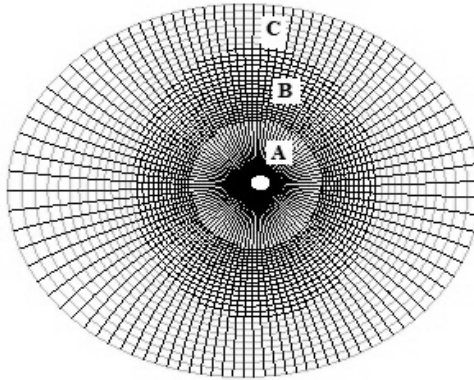
**Fig. 2.** Distribution of zones formed by explosion

The process should be repeated until the difference between the section lines of the crater, the pressed and undisturbed zones for some  $s$  and  $s+1$  tasks will not satisfy the given accuracy. The contour  $L_s^*$  is considered to be sought.

A computer program was developed and numerical calculations were performed based on the algorithm. For input data  $n \times m = 70 \times 100$ ,  $I^* = 0.008$ ,  $I^0 = 0.004$ .  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = 10 + 6 \cos(t), y = 5 + 5 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$  is charge contour,  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 1$ ,

$\beta = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.15 \\ 0.05 & 0.06 \end{pmatrix}$ , the original outer contour  $L_0^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = 48 \cos(t), y = 39 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ ,  $k_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ . The corresponding situational condition (in particular, the hydrodynamic field grid) resulting from the explosion in such medium is depicted in Fig. 2 a).

We see that 3 depreciated zones were created: A is a crater, B is a pressed zone, C is an undisturbed zone. The outer contour of the studied area is also identified:  $L_s^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = 160 \cos(t), y = 130 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ . For comparison Fig. 2b) shows the result of calculations for a predetermined external contour  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = 176 \cos(t), y = 143 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ . We see that the boundaries of the crater, pressed and undisturbed domains of the soil coincide.



**Fig. 3.** Distribution of zones for an isotropic medium

Note that the algorithm works for an isotropic medium. Fig. 3 shows the results for anisotropy.

The input data is the same as for Fig. 2 only  $k_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  (since the medium is isotropic). The outer contour is identified  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy : x = 144 \cos(t), y = 117 \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$ . We see that the anisotropy of the medium significantly influences the formation of a crater, the pressed and undisturbed domains of the soil, but the developed algorithm works for both the case of isotropy and for anisotropy.

**Conclusions.** The mathematical model of the explosion process that takes into account the interaction of the process characteristics (quasi-potential) and a deformable porous anisotropic medium based on the use of the numerical method of quasi-conformal mappings (as well as the algorithm for solving the corresponding nonlinear boundary-value problems) and aims to determine the position of the boundaries of the extruded, and unpolluted soil zones, is generally summarized in the case of identification and the boundary of the zone of influence of the explosion process on the medium. The solution of the corresponding boundary value problem occurs using the special procedure of inverse mapping and the stepwise parametrization of the medium characteristics and process, as well as the ideas of the block iteration method. This allows to automatically build a hydrodynamic grid and a speed field.

The results of the numerical experiments developed on the basis of the algorithm developed showed the feasibility of using it for modelling of explosive processes in anisotropic deformable porous medium in order to determine the position of the section lines of the crater, the pressed and undisturbed zones of the soil with the simultaneous identification of the boundary of the explosion impact zone. It is shown that the developed algorithm works for both anisotropic medium and for isotropic.

In the perspective is identification of the explosion process parameters, in particular, finding the location and the shape of the charge, as well as solving the corresponding spatial problems.

### References:

1. Kravets V. G. Physical processes of applied geodynamics of an explosion: monograph / V. G. Kravets, V. V. Korobyichuk, V. V. Boiko. — Zhytomyr : ZSTU, 2015. — 408 p.
2. Bulavatskii V. M.. Some inverse problems of the pulsed-hydrodynamic theory of explosion on the discharge / V. M. Bulavatskii, I. A. Luchko // Investigations on boundary value problems of hydrodynamics and thermophysics. — Kiev, 1979. — P. 53–64.
3. Bomba A. Ya. Nonlinear mathematical models of geohydrodynamics processes / A. Ya. Bomba, V. M. Bulavatskii, V. V. Skopetskii. — Kiiv : Naukova dumka, 2007. — 308 p.
4. Bomba A. Ya. Using quasi-conformal mappings to mathematical modeling of explosion processes / A. Ya. Bomba, A. M. Sinchuk // Volynskii matematychnii visnyk. Serie «Applied mathematics». — Ed. 8. — P. 32–41.
5. Bomba A. Ya. Modeling of the explosion process in an anisotropic medium with quasiconformal mapping methods/ A. Ya. Bomba, K. M. Malash // Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. — Kremenchuk. — 2017. Ed. 4 (105). — P. 28–33.
6. Bomba A. Ya. Methods of complex analysis: monograph / A. Ya. Bomba, S. S. Kash-tan, D. O. Prigornytskii, S. V. Yaroshchack. — Rivne : NUWM, 2013. — 415 p.
7. Blair David E. Inversion theory and conformal mapping / David E. Blair. — American Mathematical Society, 2000. — 152 p.



8. Nearling James. Mathematical tools for physics / James Nearling. — Miami, 2008. — 594 p.
9. Prigornitskii D. O. Modification of the algorithm for numerical solving a class of nonlinear modeling boundary value problems on quasi-conformal mappings in two-coupling deformable media / D. O. Prigornitskii // Volynskii matematychnii visnyk — Serie «Applied mathematics». — Ed. 9. — 2002. — P. 60–66.
10. Bomba A. Ya. Numerical solution of nonlinear modeling boundary value problems on quasi-conformal mapping under conditions of interaction of gradients of potential and environmental characteristics / A. Ya. Bomba, V. V. Skopetskii, D. O. Prigornitskii // Visnyk Kiiivskoho Universitetu. Serie: «Physics and mathematics». — 2003. — Ed. 1. — P. 126–135.

### **МОДЕЛЮВАННЯ ВИБУХОВИХ ПРОЦЕСІВ В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ІДЕНТИФІКАЦІЄЮ МЕЖИ ЗОНИ ВПЛИВУ**

У наші дні для оптимізації процесів видобування корисних копалин, у будівництві та промисловості досить поширеною є практика застосування вибухових процесів. Вона дозволяє значно підвищити швидкість виконання робіт і, водночас, знизити їх вартість. Проте, побічні дії застосування вибухівки можуть бути катастрофічними, оскільки її руйнівна сила здатна повністю зносити навіть досить стійкі споруди та завдавати непоправної шкоди навколишньому середовищу, тому є необхідність попереднього точного математичного моделювання вибухового процесу з детальним прорахуванням усіх його наслідків.

Однією з моделей, котрі застосовуються для дослідження вибухового процесу, є рідинна, яка базується на моделюванні середовища, у якому відбувається вибух, як нестискуваної фільтраційної рідини. При цьому поле швидкостей, породжене вибухом, як правило, вважається потенціальним.

У статті сформовано математичну модель процесу вибуху, яка базується на рідинній. Вона враховує взаємовплив параметрів деформівного анізотропного пористого середовища та характеристик вибухового процесу. Відповідна крайова задача розв'язується з використанням числового методу квазіконформних відображень, що забезпечує можливість її розв'язання з врахуванням наявності зворотного впливу, існування якого суттєво ускладнює процес розв'язування задачі іншими, менш «динамічними», методами. Адаптовано алгоритм розв'язування крайових задач, що використовуються при моделюванні аналогічних процесів у гідродинаміці та електродинаміці, зокрема, для дослідження фільтраційних процесів та електротомографії. Розроблено методику ідентифікації зовнішньої межі області впливу вибухового процесу шляхом внесення певних змін до «класичного» алгоритму для розв'язування такого типу крайових задач для двозв'язної області, оскільки останній вимагає апріорного задання внутрішнього та зовнішнього контурів області.

**Ключові слова:** *анізотропне середовище, вибухові процеси, гідродинамічна сітка, ідентифікація, квазіконформне відображення, комплексний аналіз, математичне моделювання, числові методи.*

Отримано: 20.11.2018

УДК 62-501.4:681.326.7

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.18-25

**А. Ф. Верлань\***, д-р техн. наук, професор,

**С. А. Положаєнко\*\***, д-р техн. наук, професор

\*Інститут проблем моделювання в енергетиці  
імені Г. Е. Пухова НАН України, г. Київ,

\*\*Одеський національний політехнічний університет, г. Одеса

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ**

Современный этап развития технических систем характеризуется неуклонным возрастанием их структурной сложности, а также сложности выполняемых ими функций. Это обстоятельство приводит к необходимости совершенствования технологической подготовки производства систем, что связано с необходимостью обеспечения жестких требований к тестированию последних как на стадии изготовления, так и на стадиях эксплуатации и технического обслуживания.

Хотя имеется значительный опыт в решении указанных задач, однако остаются актуальными проблемы методологического обеспечения процесса диагностирования (и тестирования), гарантирующего получение заданных показателей работоспособности достаточно широкого класса технических систем, что, в конечном итоге, дает возможность повышения достоверности оценок технического состояния данных систем.

В ряде случаев диагностический эксперимент следует производить в условиях, когда диагностируемая система не может быть выведена из эксплуатации или затруднен (ограничен) доступ к ее внутренним элементам (подсистемам). Действенным и эффективным подходом в данном случае является применение для получения оценок работоспособности реальных систем их моделей, допускающих учет наложенных выше условий на проведение диагностического эксперимента. Причем, теоретические исследования последних лет показали, что при решении большинства задач диагностирования имеет место недоопределенность пары «модель — контролируемая система». С практической точки зрения, решение задачи диагностирования с применением модели системы сводится к эквивалентной задаче идентификации, в ходе решения которой определяется отклонение модели диагностируемой системы от некоторого эталона, представляющего собой модель исправной системы.

Рассмотрена возможность применения эквивалентной модели системы (в частности, электротехнического устройства) для контроля ее состояния, когда система не выводится из ре-

жима експлуатації. Определены условия эквивалентности модели и реальной системы, а также порядок выбора параметров, по которым осуществляется оценка состояния системы. Корректность применения эквивалентной модели для оценки состояния системы без вывода последней из эксплуатации, показана на тестовом примере.

**Ключевые слова:** *оценка состояния, эквивалентная модель, условия эквивалентности, контролируемые параметры, контролируемая система.*

**Введение.** Постоянное возрастание сложности технических систем, связанное с увеличением и усложнением выполняемых функций, совершенствованием технологий производства, ужесточением требований к показателям качества и т. д., приводит к усложнению методов и средств диагностирования, обеспечивающих необходимые свойства систем. Несмотря на значительные достижения в области диагностики технического состояния систем, в связи с развитием техники актуальными являются теоретические исследования и практическое применение методов диагностирования как основы для обеспечения необходимых показателей работоспособности широкого класса технических средств и повышения достоверности оценок технического состояния последних.

В последнее время делаются попытки [1–7] разработки теории и методов диагностирования объектов (систем) различного типа при ограниченном доступе к их внутренним элементам, ориентированных на широкий класс допустимых неисправностей. Интерес также представляет реализация возможности выполнения оценки состояния системы без вывода ее из эксплуатации. Упомянутая выше теория представляет собой распространение и развитие теории идентификации применительно к задачам технической диагностики, а соответствующие методы являются модельно-ориентированными.

Следует указать, что при решении задач диагностирования, имеет место недоопределенность совокупности «модель — контролируемая система», причем, эта недоопределенность состоит в контролируемой системе. Те изменения, которые необходимо внести в модель для достижения идентичности с реальной (контролируемой) системой при их физической и инженерной интерпретации, и дают основания для постановки диагноза. С точки зрения реализации, задачу диагностирования можно рассматривать как задачу идентификации некоторого нового объекта (в данном случае модели), который отличается от известного новыми свойствами параметрического или инженерно-физического характера, порожденными или не предусмотренным изменением характеристик или появлением не предусмотренных конструктивных или физических эффектов.

Обычно элементам (фрагментам) модели контролируемой системы можно поставить в соответствие ее конструктивные элементы, что позволяет задачу определения места неисправности свести к задаче определения места изменения модели системы. В задаче диагностической оценки состояния системы требуется определить не модель системы, как при идентификации, а отклонение модели диагностируемой системы от некоторого эталона, в качестве которого обычно принимается модель исправной системы. Рассматриваемый подход к диагностированию технических систем позволяет определить место отклонения модели диагностируемой системы от модели исправной системы и при необходимости оценить это отклонение.

**Основная часть.** При автоматическом контроле работающей системы оценку ее состояния можно осуществить по результатам сравнения реакции системы с реакцией *эквивалентной модели*, включаемой параллельно контролируемой системе. Для повышения надежности контроля, а также из очевидных практических соображений модель необходимо иметь наиболее простой.

Поскольку исправность автоматической системы определяется комплексом характеристик качества, то, естественно, требовать, чтобы эквивалентная модель обладала теми же характеристиками качества, что и контролируемая система.

Ниже излагается методика построения модели, эквивалентной по характеристикам качества контролируемой системы.

**Эквивалентность модели.** Пусть переходные характеристики  $h_c$  и  $h_m$  контролируемой системы  $C$  и модели  $M$  определяются комплексами параметров соответственно  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ;  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , причем, параметры  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  имеют одинаковый смысл (например, если  $\alpha_1$  — время регулирования системы  $C$ , то  $\beta_1$  — время регулирования модели  $M$ ).

**Определение 1.** Модель  $M$  эквивалентна системе  $C$  на подмножестве параметров  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$ , если  $\alpha_n = \beta_n$ ; модель  $M$  эквивалентна системе  $C$ , если  $\alpha_k = \beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Эквивалентность модели системе будем обозначать в первом случае  $(M \sim C)_n$  и во втором случае:  $(M \sim C)_k$ .

**Рассмотрим следующую постановку задачи.** Дана система  $C$  с переходной характеристикой, определяемой множеством параметров  $\{\alpha_m\}$ . Требуется построить модель  $M$  с передаточной функцией

$W_M(p)$ , для которой  $[W_M(p)]^{-1}$  представляет собой полином и  $M \sim C$ , где,  $\{n_i\}$  — некоторое подмножество множества индексов  $\{n\}$ .

Следует отметить, что эквивалентность  $(M \sim C)_{n_i}$  представляет частный случай эквивалентности  $(M \sim C)_k$ , к которому всегда можно свести общий случай, отбросив лишние параметры и введя новую нумерацию.

Поскольку, как известно, параметры  $\beta_i \in \{\beta_n\}$  и вид переходной характеристики модели  $M$ , для которой  $[W_M(p)]^{-1}$  представляет собой полином, зависит от корней этого полинома, то для эквивалентности модели  $M$ , системе  $C$  в смысле определения 1 необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\begin{cases} \beta_1(p_1, p_2, \dots, p_n) = \alpha_1; \\ \dots \\ \beta_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \alpha_n. \end{cases} \quad (1)$$

относительно неизвестных корней полинома  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Докажем следующее утверждение.

**Утверждение.** Если система уравнений (1) разрешима, то передаточная функция эквивалентной модели  $M$  имеет следующий вид:

$$W_M(p) = \left[ \prod_{i=1}^n (p - p_i) \right]^{-1}, \quad (2)$$

причем полином в знаменателе  $W_M(p)$  имеет степень  $n$ .

**Доказательство.** Пусть имеется система из  $n$  уравнений относительно  $n$  переменных

$$\begin{cases} \beta_1(p_1, p_2, \dots, p_n) = \alpha_1; \\ \dots \\ \beta_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \alpha_n, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\beta_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$  — функции  $n$  переменных,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — числа.

Если система (3) разрешима относительно  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , то всегда существует полином  $Q(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i)$ , корнями которого служат числа  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Степень его не может быть меньше  $n$ , по-

скільки число корней полинома равно его степени. Таким образом, теорема доказана.

**Следствие 1.** Если в условиях теоремы 1 любое  $i$ -ое уравнение системы (1) не является следствием остальных  $(n-1)$  уравнений, то степень полинома знаменателя  $W_M(p)$  не может быть меньше  $n$ .

**Замечание 1.** Принципиально степень полинома в знаменателе  $W_M(p)$  может быть взята большей, чем  $n$ , но это, по техническим причинам, нецелесообразно, поскольку усложняет модель.

**Замечание 2.** При построении  $W_M(p)$  вместо системы (1) можно решать эквивалентную ей систему уравнений

$$\begin{cases} \beta_1(\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = \alpha_1; \\ \dots \\ \beta_n(\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = \alpha_n, \end{cases} \quad (4)$$

где  $(\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$  — коэффициенты полинома знаменателя в выражении (2) при  $p^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Последнее замечание следует из обобщенной теоремы Виета, которая устанавливает взаимное соответствие между корнями полинома и его коэффициентами [7] при условии, что  $\alpha_n = 1$ .

**Пример 1.** Оценку состояния большинства автоматических систем можно осуществить по двум параметрам качества переходной характеристики, а именно:  $t_p$  — временем регулирования;  $\sigma_{\max}$  — максимальным перерегулированием.

В этом случае множество  $\{\alpha_n\}$  состоит из двух параметров  $\alpha_1 = t_p$  и  $\alpha_2 = \sigma_{\max}$  в силу следствия 1 теоремы 1: наименьшей возможной степенью полинома в знаменателе  $W_M(p)$  будет вторая степень. Тогда полином  $[W_M(p)]^{-1}$  имеет вид

$$[W_M(p)]^{-1} = p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0.$$

На основании замечания 1 составим систему уравнений вида (1), относительно коэффициентов  $\alpha_0, \alpha_1$  искомого полинома второй степени:

$$\begin{cases} \beta_1(\alpha_0, \alpha_1) = \alpha_1, \\ \beta_n(\alpha_0, \alpha_1) = \alpha_2. \end{cases} \quad (5)$$

Полагая  $\alpha_0 = \omega_n^2$  и  $\alpha_1 = 2\xi\omega_n$  используя известные соотношения для системы второго порядка [8] между  $\sigma_{\max} = \alpha_2$ ,  $\alpha_1 = t_p$  и  $\omega_n\xi$ , получим

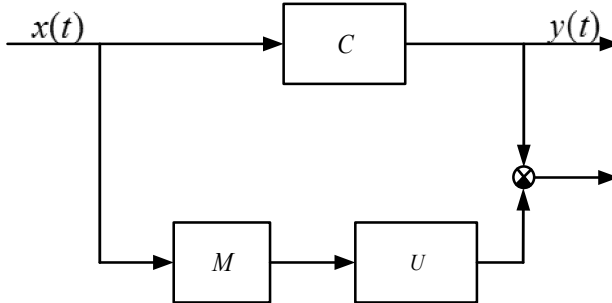
$$\begin{cases} \beta_1(\xi, \omega_n) = \frac{\gamma}{\xi\omega_n} = \alpha_1, \\ \beta_2(\xi, \omega_n) = 1 + e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \alpha_2, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\gamma$  — заданный коэффициент ( $\gamma = 3 \dots 5$ ).

Разрешим систему уравнений (6) относительно  $\alpha_1 = 2\xi\omega_n$  и  $\alpha_0 = \omega_n^2$ :

$$\alpha_1 = 2\xi\omega_n = \frac{2\gamma}{\alpha_1}, \quad \alpha_0 = \frac{2\gamma}{\alpha_1^2} \left[ \frac{\pi^2}{\ln^2(\alpha_2 - 1)} + 1 \right].$$

Теперь можно построить эквивалентную контролируемую систему модель, представляющую собой звено второго порядка с заданными параметрами  $t_p$  и  $\sigma_{\max}$ . Схема контроля системы  $C$  с помощью эквивалентной модели  $M$  представлена на рис. 1.



*Рис. 1. Схема определения работоспособности с помощью эквивалентной модели*

Для согласования масштабов выходных сигналов контролируемой системы и эквивалентной модели, при практическом решении задачи оценки состояния, последовательно с моделью необходимо включить безынерционное усилительное звено с коэффициентом усиления, равным статическому коэффициенту усиления контролируемой системы.

**Выводы.** Показано, что из практических соображений, при построении эквивалентной модели контролируемой системы модель должна быть наиболее простой. Однако, должно выдерживаться условие эквивалентности, заключающееся в том, что подмножества

параметров, характеризуючих реальну систему і її модель, повинні совпадать. При цьому також доведено, що достаточним умовою еквівалентності може служити функціональна зв'язь підмножества параметрів моделі з відповідним підмножеством параметрів реальної системи.

На прикладі рішення тестової задачі отримано, що для систем автоматичного управління в якості підмножества контролюємих параметрів системи зручно вибирати час регулювання і максимальне перерегулювання в системі, які дають достаточну повну оцінку стану системи в цілому.

### Список использованной литературы:

1. Александровская Л. Н. Современные методы обеспечения безотказности сложных технических систем / Л. Н. Александровская, А. П. Афанасьева, А. А. Лисов. — Москва : Логос, 2006. — 208 с.
2. Верлань А. А. Декомпозиционный метод локализации неисправных электронных подсистем / А. А. Верлань, С. А. Положаенко, И. Х. Осман // Электротехническое и электрооборудование. — 2007. — Вып. 69. — С. 72–76.
3. Верлань А. А. Метод идентификационных экспериментов для диагностирования электронных устройств / А. А. Верлань, И. Х. Осман // Зб. наук. праць ІІМЕ НАНУ. — 2007. — Вип. 42. — С. 98–105.
4. Верлань А. А. Способы локализации и идентификации элементов электрических устройств в задачах диагностики / А. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка, 2012. — Вип. 7. — С. 20–27.
5. Верлань А. Ф. Локализация неисправных фрагментов при диагностировании безынерционных систем / А. Ф. Верлань, С. А. Положаенко // Електротехнічні та комп'ютерні системи: Теорія і практика. Спеціальний випуск. Астропрінт. — 2017. — С. 439 — 445.
6. Верлань А. Ф. О применении методов идентификации в задачах технической диагностики / А. Ф. Верлань, Т. А. Носик // Тези доп. V Міжнародної наук. конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», 4-5 квітня 2012 р. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка, 2012. — С. 22–23.
7. Fedì G. Determination of an Optimum Set of Testable Components in the Fault Diagnosis of Analog Linear Circuits / G. Fedì, S. Manetti, M. Cristina Piccirilli, J. Starzyk // IEEE Transactions on circuits and systems-i : fundamental theory and applications. — 1999. — Vol. 46. — №7. — P. 778–787.
8. Гусак А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. — Минск : ТетраСистемс, 1999. — 640 с.

### APPLYING AN EQUIVALENT MODEL TO ASSESS THE STATE OF THE SYSTEMS

The current stage of development of technical systems is characterized by a steady increase in their structural complexity, as well as the complexity of their functions. This circumstance leads to the need to improve the



technological preparation of production systems, which is associated with the need to ensure strict requirements for testing the latter both at the manufacturing stage and at the operation and maintenance stages.

Although there is considerable experience in solving these problems, however, problems of methodological support of the process of diagnosing (and testing) remain, guaranteeing the receipt of specified performance indicators of a fairly wide class of technical systems, which ultimately makes it possible to increase the reliability of estimates of the technical condition of these systems.

In some cases, a diagnostic experiment should be performed under conditions when the system being diagnosed cannot be decommissioned or access to its internal elements (subsystems) is difficult (limited). An effective and efficient approach in this case is the use of their models to obtain estimates of the operability of real systems, which allow for the inclusion of the above conditions for conducting a diagnostic experiment. Moreover, theoretical studies of recent years have shown that when solving most of the problems of diagnosis, the model-controlled system pair is underdetermined. From a practical point of view, the solution of the problem of diagnosing using a system model is reduced to an equivalent identification problem, during the solution of which the deviation of the model of the system being diagnosed from a certain standard, which is a model of a serviceable system, is determined.

The possibility of using an equivalent system model (in particular, an electrical device) to control its state when the system is not removed from the operating mode is considered. The conditions of equivalence of the model and the real system are determined, as well as the order of choice of parameters by which the state of the system is assessed. The correctness of applying an equivalent model to assess the state of the system without taking the last out of service is shown in a test example.

**Key words:** *state estimation, equivalent model, equivalence conditions, controlled parameters, controlled system.*

Отримано: 08.11.2018

UDC 004.41;004.424;519.64  
DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.26-34

**A. A. Verlan**, Ph. D., Associate Prof.,  
**Jo Sterten**, Assist. Prof

Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway

## IMPLEMENTATION OF INTEGRAL EXPLICIT MACROMODELS BY MEANS OF QUICK-ACTING ALGORITHMS

A class of mathematical models of dynamic objects in the integral macromodels form, built on the «input-output» principle is considered. The possibility of reducing errors and increasing speed of the modeling process using quadrature formulas based on integral macromodels in the Volterra operators form (Volterra-Hammerstein) is investigated. The constructive algorithms of numerical modeling procedures are proposed using the method of dividing kernels.

**Key words:** *macromodels, integral operators, quadrature formulas, simulation error, computational algorithm, speed.*

**Introduction.** Integral macromodels with a sufficient degree of adequacy for practical applications display processes in dynamic objects of varying complexity, assuming their representation by the «input-output» principle [1]. The statement of the modeling problem is set as follows:

- the dynamic characteristic is specified by  $K(t, \tau)$  of a linear part, nonlinear dependence  $F[\cdot]$  (for nonlinear objects) and the input signal  $x(t)$ ;
- it is needed to identify the output signal  $y(t)$ , accordingly using integral macromodels of linear and nonlinear objects:

$$y(t) = \int_0^t K(t, \tau)x(\tau)d\tau, \quad (1)$$

$$y(t) = \int_0^t K(t, \tau)F[x(\tau)]d\tau. \quad (2)$$

In the relevant literature, integral macromodels of the form (1), (2) are known as the Volterra operators [2–11].

The basis of the integral operators' and the Volterra equations' numerical realization is the quadrature method, which consists [12, 13] in the application of quadrature formulas for the approximate calculation of a definite integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i f_i(x_i) + R[f]. \quad (3)$$

where  $x_i$  — fixed abscissas (nodes) of the section  $[a, b]$ , while  $x_i = a$ ,  $x_n = b$ ;  $A_i$  — numerical coefficients or weighting multipliers;  $R[f]$  — residual term (the approximation error). As a rule,  $A_i > 0$ ,  $\sum_a^b A_i = b - a$ .

There are a significant number of quadrature formulas of the form (3), which include the Newton-Cotes formulas (also rectangles, trapeziums, Simpson), Gauss, Chebyshev, etc. [12–14]. However, the use of the quadrature method in the case of arbitrary type kernels is related with the accumulation the number of operations on each discrete step, which in turn leads to the errors accumulation and the decrease in the modeling process speed.

**Aim of the work.** Research of the possibility of improving the quality of dynamic objects simulation by using the quadrature method in the case of using the dividing form kernels.

**Dynamic Objects Simulation.** The traditional approach to ensuring the accuracy of the quadrature method is based on selection of the discretization step and the form of the quadrature formula. For example, the required form of the quadrature formula can be obtained if we divide the integration interval into parts and apply our quadrature formula to each of them separately. Obviously, when dividing the initial section into parts, we should start from the condition that the integral of the resulting curve should be as close as possible to the integral from the function  $f(x)$ . After this, the values of the integral from the function  $f(x)$  on the whole interval  $[a, b]$  is defined as the sum of the found integral values from the function on separate parts of the total section  $[a, b]$ .

Error minimization (increasing precision) of the quadrature formula on the chosen functions class is achieved by choosing the quadrature-shape coefficients and by choosing the integration nodes. Depending on the usage, the nodes  $x_i$  can be selected in different ways. For trapeziums formulas, Simpson and Boole, it is recommended [12] to select equidistant nodes. For the Gauss-Legendre quadrature, the selected nodes should be the «zeros» of definite Legendre polynomials. The smaller the step of dividing a segment is selected  $[a, b]$ , the more precisely result will be obtained, but the number of computational operations increases, which requires additional resources. An important feature of the calculations in this case is *errors accumulation* with an increase of the number of steps, which is defined not so much by the step magnitude and the calculation precision on it, as by the «successful» or «unsuccessful» choice of the replacing

integral method by the final total. Such situation is pertained to the process of modeling objects in real time, when the integration interval (section  $[a, b]$ ) could be large or previously unknown.

Next, we will use the frequently used representations of integral operators in the form:

$$f(x) = \int_a^b K(t, \tau) F[\tau, f(\tau)] d\tau, \quad (4)$$

called Volterra-Hammerstein [15, 16], and the approximation of the integrand expression written as follows:

$$f(x_i) = \int_a^{x_i} K(x_i, \tau) y(\tau) d\tau, \quad x \in [a, b]. \quad (5)$$

It is worth noting that the property of increasing the volume of calculations with increasing the step relates to the case of the kernels with random form. The computation rate increase can be achieved using the degenerate dividing kernels method [17], which feature is the constant calculations amount in the step. Using this feature, we present the Volterra integral operator with a separating kernel:

$$\begin{aligned} \int_a^x K(x, \tau) y(\tau) d\tau &= \int_a^x \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

After approximating the integral (6) and usage of quadrature sums, we obtain:

$$\begin{aligned} &\int_a^{x_i} K(x, \tau) y(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^{x_i} \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^n \beta_i(x_j) y(x_j) = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \left[ \beta_i(x_n) y(x_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(x_j) y(x_j) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(x_n) y(x_n) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^n \beta_i(x_j) y(x_j). \end{aligned} \quad (7)$$

The value  $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^n \beta_i(x_j) y(x_j)$  is known because it's calculated in the previous  $(i-1)$ -s step. Therefore, it remains to calculate the val-

ue of the sum  $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(x_n) y(x_n)$ , that requires an unchanged number of operations at each  $i$ -s step.

The significant part of integral operators and equalities encountered in practice have difference kernels presented in analytical form and having the property of separation.

For macromodels, for example, of the form (2), the quadrature method leads to the following calculated expressions (depending on the structural arrangement of the linear part in the general object structure or the absence of nonlinearity):

$$\tilde{y}(t_i) = \sum_{j=1}^i A_j K(t_i, \tau_j) F[x(\tau_j)], \quad (8)$$

$$\tilde{y}(t_i) = F \left[ \sum_{j=1}^i A_j K(t_i, \tau_j) \right], \quad (9)$$

$$\tilde{y}(t_i) = \sum_{j=1}^i [A_j K(t_i, \tau_j)]. \quad (10)$$

For the case of a degenerate kernel:

$$\tilde{y}(t_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t_i) \sum_{j=1}^i A_j \beta_i(\tau_j). \quad (11)$$

If we introduce a nonlinear dynamic object with input and output signals, accordingly  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  while using a macromodel:

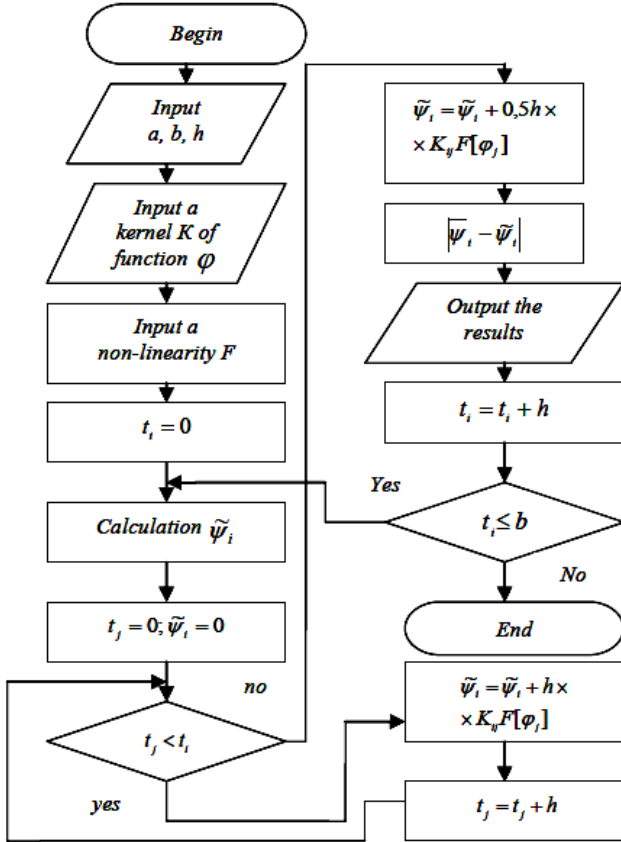
$$\psi(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \int_0^t \beta_i(\tau) F[\varphi(\tau)] d\tau, \quad (12)$$

then, according to the quadrature's method, it's possible to construct an algorithm for implementing the macromodel, shown in Fig.1. The algorithm performs calculations using formula:

$$\psi_i = h \sum_{i=1}^m \alpha_{li} \sum_{j=0}^i \{A_j \beta_{lj} F[\varphi_j]\}, \quad (13)$$

where  $\alpha_{li} = \alpha_i(t_i)$ ;  $\beta_{li} = \beta_i(t_j)$ ;  $h$  — discretization step;  $A_j$  — quadrature formula's coefficients;  $\psi_i = \psi(t_i)$ ,  $\varphi_j = \varphi(t_j)$ .

**Example.** Suppose that on the interval  $[0,1]$  with step  $h = 0,01$  there is a task to implement a nonlinear integral operator.



**Fig. 1.** The algorithm for implementing a macromodel, constructed in accordance with the method of quadratures for a kernel of random form

$$\psi(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \sin^2(\omega\tau) d\tau, \quad (14)$$

where  $a = 0,1$ ;  $\omega = 0,01$ .

The exact value of the function sought is given by:

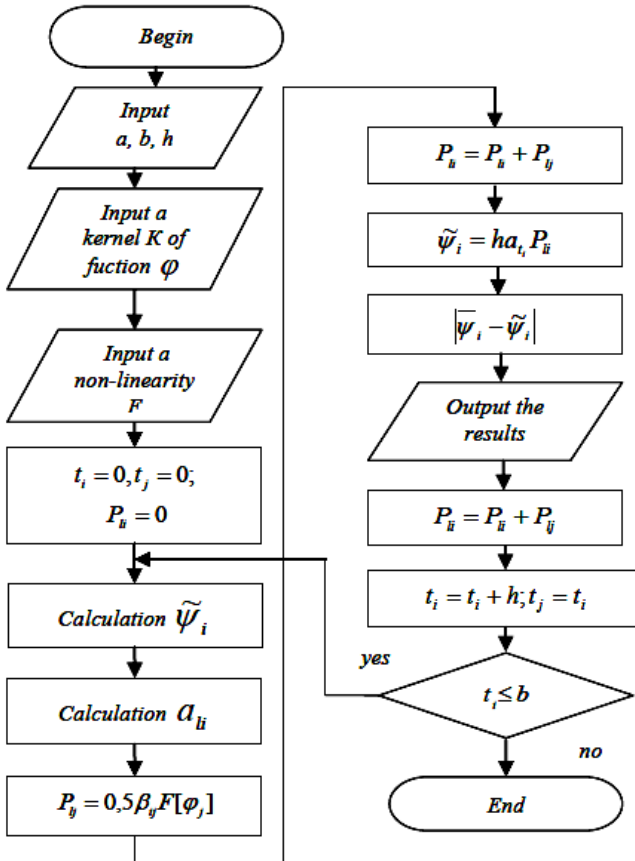
$$\psi(t) = \frac{1}{a^3 + 4\omega^2} \left[ a \sin^2(\omega t) - \omega \sin(2\omega t) \cdot (1 - e^{-at}) \right]. \quad (15)$$

The calculated ratio obtained based on the trapeziums formula for the numerical realization of the operator (12) with a non-divided kernel has the form:

$$\tilde{\psi}_1(t_i) = h \sum_{j=0}^i A_j l^{-a(t_i-t_j)} \cdot \sin^2(\omega t_j). \quad (16)$$

Using the kernel separability property, we obtain:

$$\tilde{\psi}_1(t_i) = h \sum_{l=0}^m l^{-at_i} \sum_{j=0}^i A_j l^{-at_j} \cdot \sin^2(\omega t_j). \quad (17)$$



**Fig. 2.** The algorithm that implements realization of the Volterra

Hammerstein integral operators with a divided kernel

The calculations results are given in Table. 1.

The second column shows the results of exact solution, the 3-rd and 4-th columns represent approximate calculation results  $\tilde{\psi}(t_i)$  by algorithms, shown in Fig. 1 and Fig. 2, respectively.

Table 1

*Exact and approximate solutions of the problems of the form (12)*

$t_1$	$\tilde{\psi}(t_1)$	$\tilde{\psi}_1(t_1)$	$\tilde{\psi}_2(t_1)$	$\tilde{\psi}(t_1) - \tilde{\psi}_1(t_1)$	$\tilde{\psi}(t_1) - \tilde{\psi}_2(t_1)$	$M_1$	$M_2$
0,00	0	0	0	0	0	1	0
0,10	$0,332 \cdot 10^{-5}$	$0,324 \cdot 10^{-5}$	$0,434 \cdot 10^{-5}$	$0,782 \cdot 10^{-6}$	$0,167 \cdot 10^{-6}$	56	6
0,20	$0,265 \cdot 10^{-4}$	$0,263 \cdot 10^{-4}$	$0,266 \cdot 10^{-4}$	$0,161 \cdot 10^{-5}$	$0,336 \cdot 10^{-6}$	112	6
0,30	$0,893 \cdot 10^{-4}$	$0,890 \cdot 10^{-4}$	$0,894 \cdot 10^{-4}$	$0,244 \cdot 10^{-5}$	$0,507 \cdot 10^{-6}$	168	6
0,40	$0,211 \cdot 10^{-3}$	$0,210 \cdot 10^{-3}$	$0,212 \cdot 10^{-3}$	$0,326 \cdot 10^{-5}$	$0,679 \cdot 10^{-6}$	224	6
0,50	$0,411 \cdot 10^{-3}$	$0,409 \cdot 10^{-3}$	$0,413 \cdot 10^{-3}$	$0,408 \cdot 10^{-5}$	$0,857 \cdot 10^{-6}$	280	6
0,60	$0,708 \cdot 10^{-3}$	$0,707 \cdot 10^{-3}$	$0,709 \cdot 10^{-3}$	$0,490 \cdot 10^{-5}$	$0,102 \cdot 10^{-5}$	336	6
0,70	$0,112 \cdot 10^{-2}$	$0,110 \cdot 10^{-2}$	$0,113 \cdot 10^{-2}$	$0,572 \cdot 10^{-5}$	$0,120 \cdot 10^{-5}$	393	6
0,80	$0,167 \cdot 10^{-2}$	$0,160 \cdot 10^{-2}$	$0,168 \cdot 10^{-2}$	$0,653 \cdot 10^{-5}$	$0,138 \cdot 10^{-5}$	448	6
0,90	$0,237 \cdot 10^{-2}$	$0,234 \cdot 10^{-2}$	$0,238 \cdot 10^{-2}$	$0,734 \cdot 10^{-5}$	$0,155 \cdot 10^{-5}$	504	6
1,00	$0,324 \cdot 10^{-2}$	$0,321 \cdot 10^{-2}$	$0,325 \cdot 10^{-2}$	$0,817 \cdot 10^{-5}$	$0,173 \cdot 10^{-5}$	560	6

As can be seen from Table. 1, calculation by the algorithm that implements the expression (13) gives the minimum error. This follows from the fact that the number of arithmetic operations  $M_2$  with increase of the number of the discretization node remains unchanged, while the number of arithmetic operations  $M_1$  at numerical realization of the integral operator on the first algorithm grows.

The quantitative estimation of the solutions' accuracy is given in the Table 2 by calculated ratios of residual terms of the quadrature formula of the form (3), using representation of the Newton-Cotes (for the case when the initial point of the section coincides with the interpolation node).

Table 2

*Residual members of the quadrature Newton-Cotes formula*

$n$	$R[f]$	$n$	$R[f]$
2	$-\left[(1/12)h^3 f''\right]$	7	$-\left[(9/1400)h^9 f^{VIII}\right]$
3	$-\left[(1/90)h^5 f^{IV}\right]$	8	$-\left[(8183/518400)h^9 f^{VIII}\right]$
4	$-\left[(3/80)h^5 f^{IV}\right]$	9	$-\left[(2368/467775)h^{11} f^X\right]$
5	$-\left[(8/945)h^7 f^{VI}\right]$	10	$-\left[(4671/394240)h^{11} f^X\right]$
6	$-\left[(275/12096)h^7 f^{VIII}\right]$	11	$-\left[(673175/163459296)h^{13} f^{XI}\right]$

It should also be noted, that the algorithms shown in Fig. 1 and Fig. 2, have a close computational complexity.



**Conclusion.** A quick-acting algorithm for numerical realization of dynamic macromodels in the form of integral operators with divided kernel is proposed, which provides real-time calculations. The algorithm can serve as a basis for the creating of quick-acting specialized calculators for solving control and monitoring problems as well as for modeling a wide class of dynamic objects and processes. Through the given computational experiments, the algorithm confirms the constructiveness of the proposed approach.

### References:

1. Eikhoff P. Basics of identification management systems / P. Eikhoff. — Moscow : Mir Publ., 1975. — 683 p. (In Russian).
2. Aparzin A. S. Mathematical modeling of nonlinear dynamical systems by Volterra series / A. S. Aparzin, S. V. Soloducha // *Electronnoe modelirovaniye*, — Kyiv, 1999. — № 2. — P. 3–12.
3. Asaubaev K. Sh. Analysis of nonlinear systems described by a number of Volterra / K. Sh. Asaubaev, A. I. Barkin, Yu. S. Popkov // *Avtomatika i telemehanika*. — Moscow, 1976. — № 11. — P. 5–15.
4. Breslavets V. S. Experimental determination nuclear device model Voltaire protection of information channels / V. S. Breslavets, V. O. Kravets, O. A. Serkov // *Systemy obrobky informatsii*. — Kharkiv, 1999. — № 2/5. (In Ukrainian).
5. Brikman M. S. Integral model of modern management theory / M. S. Brikman. — Riga : Zinatie, 1979. — 224 p.
6. Verlan A. F. Methods of mathematical and computer modeling of transducers and systems based on integral equations / A. F. Verlan, M. V. Sagatov, A. A. Sytnik. — Tashkent : Fan, 2011. — 336 p. (In Russian).
7. Verlan A. F. Computer modeling in problems of dynamics of electromechanical systems / A. F. Verlan, V. A. Fedorchuk, V. A. Ivanuk. — Kamianets-Podilskiyi, 2010. — 204 p. (In Ukrainian).
8. Pavlenko V.D. Construction of nonlinear systems models in the form of Volterra kernels using cluster computing technology / V. D. Pavlenko, V. V. Cherevatyi, V. V. Burdeinyi // *Zbirka naukovykh prac*. — Evpaporija : ISDMIT, 2006. — Vol. 1. — P. 159–162.
9. Apartsyn A. S. Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series / A.S. Apartsyn // *EPRI-SEI Joint seminar*. — Beijing, 1991. — P. 117–132.
10. Boyd S. Measuring Volterra kernels / S. Boyd, Y. S. Tang, L. O. Chua // *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. — 1983. — Vol. CAS-30, No. 8. — P. 571–577.
11. Chua L. O. Measuring Volterra Kernels (II) / L. O. Chua, Y. Liao // *Int. J. Circuit Theory and Applications*. — 1989. — Vol. 17, № 2. — P. 151–190.
12. Samarskii A. A. Numerical Methods of Mathematical Physics / A. A. Samarskii, A. V. Gulin. — Moscow : Nauchnyi Mir, 2003. — 316 p. (In Russian).
13. Nikolskii S. M. Quadrature equation / S. M. Nikolskii. — Moscow : Nauka, 1988. — 255 p. (In Russian).
14. Bahvalov N. S. Numerical Methods / N. S. Bahvalov, N. P. Zhitkov, V. M. Kobelkov. — Moscow : BINOM, 2006. — 636 p. (In Russian).
15. Zaluk Z. B. Asymptotic solutions of equations Volterra-Hammerstein / Z. B. Zaluk, S. S. Chistokletova // *Izvestia VUZov. Matematika*. — Moscow, 2002. — № 6. — P. 78–81.

16. Hachatrian H. A. On the nontrivial solvability of Hammerstein-Volterra integral equations / H. A. Hachatrian, S. A. Grygorian // Vladikavkazkii matematicheskii jurnal. — Vladikavkaz, 2012. — Vol. 14, № 2. — P. 57–66.
17. Poljanin A. D., Manzharov A. V. Handbook of Integral Equations / A. D. Poljanin, A. V. Manzharov. — Moscow : Fizmatlit, 2003. — 608 p. (In Russian).

### **РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МАКРОМОДЕЛЕЙ ЯВНОГО ВИДУ ЗАСОБАМИ ШВИДКОДІЮЧИХ АЛГОРИТМІВ**

Розглянуто клас математичних моделей динамічних об'єктів у формі інтегральних макромоделей, що побудовані на принципі «вхід-вихід». Досліджується можливість зменшення помилок та підвищення швидкості процесу моделювання з використанням квадратурних формул на основі інтегральних макромоделей у формі операторів Вольтерра (Вольтерра-Хаммерштейн). Запропоновано конструктивні алгоритми процедур чисельного моделювання, використовуючи метод розчеплення ядер.

**Ключові слова:** макромоделі, інтегральний оператор, квадратурні формули, похибка моделювання, обчислювальний алгоритм, швидкодія.

Отримано: 22.11.2018

УДК 517.946

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.34-47

**А. П. Громик**, канд. техн. наук

Подільський державний аграрно-технічний університет,  
м. Кам'янець-Подільський

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ**

Актуальність теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка інтенсивно розвивається, обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при математичному моделюванні різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки, техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь та геометрії області в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях.

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних об-

ластях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними.

У пропонованій роботі методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) за найбільш загальних припущень побудовано точні аналітичні розв'язки математичних моделей коливних процесів (гіперболічних початково-крайових задач спряження) в необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Одержані розв'язки мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних еволюційних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливальних механічних систем), які описуються циліндричною системою координат.

**Ключові слова:** *математичне моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні та гібридні інтегральні перетворення, матриця впливу, матриця Гріна.*

**Вступ.** Коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, новітніх технологіях, суттєво впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів, будівельних конструкцій при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме лінійне диференціальне рівняння коливаль (хвильове рівняння, рівняння Д'аламбера) гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f(t, P),$$

де  $\Delta_3$  — тривимірний оператор Лапласа у відповідній системі координат (декартовій, циліндричній, сферичній тощо) тривимірного евклідового простору,  $a = \text{const}$ ,  $f$  — деяка наперед задана функція,  $P$  — точка простору.

Зрозуміло, що для адекватного моделювання коливного процесу до складу математичної моделі крім хвильового рівняння потрібно долучити ще певні початкові та крайові умови, а у випадку кусково-однорідних середовищ — умови контакту на поверхнях спряження. Таким чином, математичною моделлю коливного процесу є гіперболічна крайова задача математичної фізики [1]. На цей час досить детально вивчено одновимірні, двовимірні та тривимірні гіперболічні крайові задачі математичної фізики однорідних середовищ. Але у зв'язку з широким застосуван-

ням композитних матеріалів (найпростіший композит має дві точки спряження) у будівництві, техніці, сучасних технологіях як математичні моделі певних процесів виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти модельних рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими [2–4].

Крім методу відокремлення змінних [1, 6] та його узагальнень [5], одним з важливих і ефективних методів дослідження лінійних математичних моделей (лінійних крайових задач математичної фізики) є метод інтегральних перетворень [6], який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших математичних моделей (крайових задач) через їх інтегральне зображення у випадку однорідних середовищ. У той же час, для досить широкого класу задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом їх дослідження виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [7–11].

У цій статті, яка є логічним продовженням [12–13], ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок узагальненої математичної моделі коливного процесу в необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі, побудований методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень при найбільш загальних обмеженнях на вихідні дані.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 = 0, \right.$$

$$\left. R_{n+1} \equiv R < +\infty; \varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty) \right\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1, 6]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; s = 0, 1; j = \overline{1, n+1}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z); s = 0, 1; \quad (4)$$

$$\alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \beta_{22}^{n+1} \geq 0; \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0.$$

одними з крайових умов на гранях клина [7]

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

та умовами спряження [12]

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де  $a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$  — деякі сталі;

$$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{ f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z) \},$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{ g_1^1(r, \varphi, z); g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z) \};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{ g_1^2(r, \varphi, z); g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z) \};$$

$$g_{pj}(t, r, z), \omega_{pj}(t, r, z); (p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1}), g(t, \varphi, z)$$

— задані обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = \{ u_1(t, r, \varphi, z); u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z) \}$$

— шукана двічі неперервно диференційовна функція.

Зауважимо, що:

- 1) у випадку  $\chi_j = 0$  рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням коливань (хвильовим рівнянням, рівнянням Д'Аламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
- 2) якщо  $\alpha_{11}^k = 0, \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0, \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k, \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k, \beta_{22}^k = 0$ , де  $E_1^k, E_2^k$  — модулі Юнга ( $k = \overline{1, n}$ ), то умови спряження (9) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, гіперболічні початково-крайові задачі спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) можна розглядати як узагальнені математичні моделі коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

**Основна частина.** Припустимо, що розв'язки задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [11, 14, 15].

Визначимо скінченні пряме  $F_{m,ik}$  та обернене  $F_{m,ik}^{-1}$  інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної  $\varphi \in (0; \varphi_0)$  за формулами [14]:

$$F_{m,ik} [f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1} [f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \beta_{m,11} &= \frac{\pi m}{\varphi_0}, \quad U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi); \\ \beta_{m,12} &= \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}, \quad U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi); \\ \beta_{m,21} &= \beta_{m,12}, \quad U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi); \\ \beta_{m,22} &= \beta_{m,11}, \quad U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi); \\ \varepsilon_0^{ik} &= 0, \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \quad \text{при } ik = 11, 12, 21; \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ \varepsilon_0^{22} &= \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \quad \text{при } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Безпосередньо (інтегруванням частинами) перевіряється, що для оператора  $F_{m,ik}$  виконується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора Фур'є:

$$F_{m,ik} \left[ \frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{m,11} &= \frac{\pi m}{\varphi_0} \left[ f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0) \right]; \quad \Phi_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}; \\ \Phi_{m,21} &= -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0); \quad \Phi_{m,22} = -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}. \end{aligned}$$

Інтегральний оператор  $F_{m,ik}$ , який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D' = \left\{ (t, r, z) \mid t > 0; r \in I_n^+, z \in (-\infty; +\infty) \right\}$$

розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{jm,ik}}{\partial t^2} - \left[ a_{vj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \\ + \chi_j^2 u_{jm,ik} = G_{jm,ik}(t, r, z), \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (13)$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik} \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}^1(r, z); \quad \frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}^2(r, z), \quad (14)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^s u_{1m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1,m,ik} \Big|_{r=R} = g_{m,ik}(t, z); \quad s = 0, 1 \quad (16)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; \quad j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n}, \quad (17)$$

де

$$G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{jm,ik}(t, r, z) + a_{\phi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z); \quad v_{jm,ik} = a_{\phi j}^{-1} a_{\phi j} \beta_{m,ik}.$$

До двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі  $(-\infty; +\infty)$  щодо змінної  $z$  [15]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\sigma z} dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (18)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma z} d\sigma \equiv g(z), \quad (19)$$

$$F\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (20)$$

Інтегральний оператор  $F$ , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D'' = \{(t, r) | t > 0; r \in I_n^+\}$  розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь В-гіперболічного типу

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t^2} - a_{\phi j}^2 B_{v_{jm,ik}} [\tilde{u}_{jm,ik}] + \\ & + (a_{\phi j}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (21)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}^1(r, \sigma); \quad \frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}^2(r, \sigma), \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s \tilde{u}_{1m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=0} = 0; \quad \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik} \Big|_{r=R} = \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma); \quad s = 0, 1 \quad (23)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) \tilde{u}_{pm,ik} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) \tilde{u}_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; \quad j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n}, \quad (24)$$

де  $B_{v_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2}$  — класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на кусково-однорідному сегменті  $I_n^+$  з  $n$  точками спряження щодо радіальної змінної  $r$  [11]:



$$H_{sn} [f(r)] = \int_0^R f(r)V(r, \lambda_s)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \quad (25)$$

$$H_{sn}^{-1} [\tilde{f}(\lambda_s)] = \sum_{s=1}^{\infty} f(\lambda_s) \frac{V(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \equiv f(r), \quad (26)$$

$$H_{sn} [B_{(m,ik)}[f(r)]] = -\lambda_s^2 \tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r, \lambda_s)\sigma_k r dr + \left. \frac{a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(R, \lambda_s) \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right) \right|_{r=R}. \quad (27)$$

У формулах (25)–(27) беруть участь величини і функції, виписані в [11],  $B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 \Theta(r - R_{j-1}) \Theta(R_j - r) B_{j,m,ik}$  — гібридний диференціальний оператор Бесселя,  $\Theta(x)$  — одинична функція Гевісайда [16].

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2 B_{V_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2 B_{V_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{n+1}^2 B_{V_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}^1(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}^1(r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}^1(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}^2(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}^2(r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}^2(r, \sigma) \end{bmatrix},$$

де

$$q_j^2(\sigma) = a_{z_j}^2 \sigma^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Інтегральний оператор  $H_{sn}$ , який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{sn}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{R_1} \dots V_1(r, \lambda_s) \sigma_1 r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda_s) \sigma_2 r dr \\ \dots \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda_s) \sigma_n r dr & \int_{R_n}^R \dots V_{n+1}(r, \lambda_s) \sigma_{n+1} r dr \end{bmatrix} \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n+1} \left( \frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \\ & = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda_s, \sigma); \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^2(\lambda_s, \sigma),$$

де

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{g}_{jm,ik}^s(\lambda_s, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}^s(r, \sigma) V_j(r, \lambda_s) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad s = 1, 2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що  $\max \{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \dots, q_{n+1}^2(\sigma)\} = q_1^2(\sigma)$  і покладемо всюди  $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma); \quad j = \overline{1, n+1}$ . Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}_{m,ik}}{dt^2} + \Delta^2(\lambda_s, \sigma) \tilde{u}_{m,ik} = \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma), \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda_s, \sigma); \quad \frac{d}{dt} \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda_s, \sigma), \quad (34)$$

де

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma); \quad \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda_s, \sigma),$$

$$\tilde{g}_{m,ik}^s(\lambda_s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^s(\lambda_s, \sigma); \quad \Delta^2(\lambda_s, \sigma) = \lambda_s^2 + a_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2; \quad s = 1, 2.$$

Відомо [11], що єдиним розв'язком задачі (33), (34) є функція

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma) = N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda_s, \sigma) + \frac{d}{dt} N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda_s, \sigma) + \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \left[ \tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma) \right] d\tau, \quad (35)$$

де функція Коші (розв'язуюча функція)

$$N(t, \lambda_s, \sigma) = \frac{\sin(\Delta(\lambda_s, \sigma)t)}{\Delta(\lambda_s, \sigma)}.$$

Оскільки суперпозиція операторів  $H_{sn}$  та  $H_{sn}^{-1}$  є одиничним оператором ( $H_{sn} \circ H_{sn}^{-1} = H_{sn}^{-1} \circ H_{sn} = I$ ), то оператор  $H_{sn}^{-1}$ , як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{sn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента  $[\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)]$ , де функція  $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda_s, \sigma)$  визначена формулою (35).

Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (21)–(24):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) = & \sum_{s=1}^{\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^2(\lambda_s, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^{\infty} N(t, \lambda_s, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}^1(\lambda_s, \sigma) \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) \tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda_s, \sigma) d\tau \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2} + \\ & + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} R}{\alpha_{22}^{n+1}} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t-\tau, \lambda_s, \sigma) V_{n+1}(R, \lambda_s) \tilde{g}_{m,ik}(t, \sigma) d\tau \frac{V_j(r, \lambda_s)}{\|V(r, \lambda_s)\|^2}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$j = \overline{1, n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma)$ , визначених формулами (37), обернені оператори  $F^{-1}$  та  $F_{m,ik}^{-1}$ , і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \quad (38) \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{jr,ik}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z-\xi) g(t, \lambda, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

які визначають єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях  $ik$  (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} P_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) =$$

$$= \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} P_{jp}^{m,ik}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi)$$

та компоненти

$$W_{jr,ik}(t, r, \varphi, \alpha, z) = \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} E_{j,n+1}^{ik}(t, r, R, \varphi, \alpha, z)$$

радіальної матриці Гріна (радіальної функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$P_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^t N(t, \lambda_s, \sigma) \cos(\sigma z) d\sigma \frac{V_j(r, \lambda_s) V_p(\rho, \lambda_s)}{\|V_j(r, \lambda_s)\|^2}.$$

**Зауваження 1.** Аналіз розв'язків (38) в залежності від типу крайових умов на гранях клина  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \varphi_0$  повторює відповідний аналіз в [12].

**Зауваження 2.** У випадку  $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$  формули (38) вказують структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

**Зауваження 3.** Випадок зміни  $\varphi$  в межах  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  зводиться до розглянутого нами заміною  $\varphi' = \varphi - \varphi_1$  ( $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ ).

**Зауваження 4.** Параметри  $\alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$  дозволяють виділяти із формул (38) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні  $r = R$ , крайової умови 1-го роду ( $\alpha_{22}^{n+1} = 0, \beta_{22}^{n+1} = 1$ ), 2-го роду ( $\alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} = 0$ ) та 3-го роду ( $\alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} = h > 0$ ).

**Зауваження 5.** Аналіз розв'язків (38) в залежності від аналітичного виду функцій  $f_j(t, r, \varphi, z), g_j^s(r, \varphi, z), g_{kj}(t, r, z), \varpi_{kj}(t, r, z)$ ,  $j = \overline{1, n+1}, s = 1, 2; k = 1, 4, g(t, \varphi, z)$  проводиться безпосередньо із загальних структур.

**Висновки.** Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні

розв'язки узагальнених математичних моделей коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків з використанням чисельних методів.

### Список використаних джерел:

1. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — Київ : Либідь, 2006. — 424 с.
2. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — Киев : Наук. думка, 2001. — 606 с.
3. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — Киев : Наук. думка, 1998. — 614 с.
4. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — Киев : Наук. думка, 1991. — 432 с.
5. Каленюк П. И. Обобщенный метод разделения переменных / П. И. Каленюк, Я. Е. Баранецкий, З. Н. Нитребич. — Киев : Наук. думка, 1993. — 232 с.
6. Самойленко В. Г. Рівняння математичної фізики / В. Г. Самойленко, І. М. Конет. — Київ : ВПЦ «Київський університет», 2014. — 283 с.
7. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
8. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.
11. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 84 с.
12. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі / А. П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2017. — Вип. 16. — С. 36–52.
13. Громик А. П. Математичне моделювання коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною / А. П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

- НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2018. — Вип. 17. — С. 26-39.
14. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
  15. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
  16. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — Москва : Мир, 1965. — 408 с.
  17. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. — М. : Физматгиз, 1958. — 247 с.
  18. Шиллов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шиллов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

### **MATHEMATICAL MODELING OF OSCILLATING PROCESSES IN UNLIMITED PIECEWISE-HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED SOLID CYLINDER**

The theory of boundary value problems for differential equations with partial derivatives develops intensively and its results are important for the development of many sections of mathematics. Its achievements are applied in the mathematical modeling of various processes and phenomenon of physics, mechanics, biology, medicine, economics, engineering.

It is well known that the complexity of a boundary-value problem significantly depends on the coefficients of equations and the geometry of domain in which the problem is considered. Properties of solutions of boundary value problems for linear, quasilinear, and some classes of nonlinear equations in single-connected domains have been studied in sufficient detail.

However, many important applied problems of thermal physics, thermomechanics, theory of elasticity, theory of electrical circuits, theory of vibrations lead to boundary value problems for differential equations with partial derivatives not only in homogeneous domains when the coefficients of the equations are continuous, but also in piecewise homogeneous and inhomogeneous domains when the coefficients of the equations are piecewise continuous.

In this article the exact analytical solutions of mathematical models of oscillating processes (hyperbolic initial-boundary problem of conjugation) for unlimited piecewise-homogeneous wedge-shaped solid cylinder are obtained by means of the method of integral and hybrid integral transforms, in combination with the method of main solutions (influence matrices and Green's matrices).

The obtained solutions are of algorithmic character, continuously depend on the parameters and data of problem and can be used in further theoretical research and in practical engineering calculations of real processes which are modeled by hyperbolic boundary-value problems that are described by a cylindrical coordinate system (problems of acoustics, hydrodynamics, the theory of vibrations of mechanical systems).

**Key words:** *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence matrix, Green's matrix.*

Отримано: 14.11.2018

УДК 550:531;681.51

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.48-65

**Н. В. Ефименко**, канд. техн. наукНаучно-производственное предприятие «Хартрон-ЮКОМ»,  
г. Запорожье**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА-ГАМИЛЬТОНА  
И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ  
ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

В настоящее время наиболее эффективным способом получения данных о поверхности Земли является спутниковая съемка. При этом к динамическим характеристикам системы управления космическим аппаратом (КА) предъявляются очень жесткие требования. Разворот должен происходить из любого текущего положения в любое заданное, точность ориентации в развернутом положении должна составлять единицы угловых минут, а угловые скорости разворота могут достигать величины 2-3 градуса за секунду. Для обеспечения таких высоких динамических характеристик базовый такт системы управления должен быть не более 100 мс. Это ограничение накладывает ограничения и на алгоритмы переориентации. Они должны быть, с одной стороны, очень простыми, чтобы время, затрачиваемое на расчет управляющего воздействия, было минимальным. С другой стороны, они должны обеспечить высокие динамические характеристики, что невозможно обеспечить в классе простых алгоритмов. Решение задачи синтеза алгоритмов переориентации КА необходимо искать как решение оптимизационной задачи. При решении таких задач, как правило, используется математическая модель углового движения КА, в которой динамика описывается уравнением Эйлера, а кинематика — уравнением для кватерниона. В этом случае достаточно легко получить уравнения двухточечной краевой задачи, но найти аналитическое решение этой задачи не представляется возможным. Решение можно найти только с использованием численных методов, что не применимо при реализации алгоритмов на борту КА. Эти трудности можно обойти, если в качестве модели углового движения КА использовать модель, построенную на основе динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона. В работе этот подход был использован для решения основных задач управления угловым движением КА: задачи стабилизации и задачи терминального управ-



ления. Статья может быть полезной разработчикам систем управления ориентацией КА.

**Ключевые слова:** *параметры Родрига-Гамильтона, космический аппарат, кватернион, ориентация, динамическое уравнение для кватерниона.*

**Условные обозначения и системы координат.** При изложении материала статьи использовались следующие обозначения и системы координат:

- $\omega_A^{AB}$  — вектор угловой скорости вращения базиса  $A$  относительно базиса  $B$ , заданный проекциями на оси базиса  $A$ ;
- $L_{AB} = \begin{pmatrix} \lambda_{AB}^0 \\ \lambda_{AB} \end{pmatrix}$  — векторное представление кватерниона со скалярной частью  $\lambda_{AB}^0$  и векторной частью  $\lambda_{AB} \in R^3$ , задающего переход от базиса  $A$  к базису  $B$ ;
- $C_{BA}$  — матрица перехода от базиса  $A$  к базису  $B$ ;
- $I$  — инерциальная система координат;
- $R$  — опорная система координат, относительно которой осуществляется требуемая ориентация КА, ее вращение относительно инерциальной системы координат  $I$  задается вектором программной угловой скорости, определённым в виде некоторой функции времени  $\omega_R^{RI}(t)$ , для которой существует производная по времени  $\dot{\omega}_R^{RI}(t)$ ;
- $B$  — жестко связанная с корпусом космического аппарата (КА) правая ортогональная система координат;
- $J$  — тензор инерции КА;
- $M_u \in R^3$  — управляющий момент, создаваемый исполнительными органами системы управления КА;
- $M_\theta \in R^3$  — возмущающий момент;
- $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$  — линейный кососимметрический оператор векторного произведения, определяемый равенством  $\Phi(x) \cdot y = x \times y$ .
- $I_n$  — единичная матрица  $n \times n$ .

**Введение.** Успех в решении задач управления движением КА относительно центра масс во многом зависит от выбранной модели движения КА. Математическая модель углового движения КА состоит из двух групп уравнений: динамических уравнений Эйлера и кинематических уравнений, записанных в тех или иных кинематических параметрах (углах Эйлера-Крылова, направляющих косинусах, параметрах Родрига-Гамильтона). В зависимости от того, какие используются кинематические параметры для описания угловой ориентации КА можно выделить следующие виды моделей углового движения:

- динамическое уравнение Эйлера и кинематическое уравнение в направляющих косинусах;
- динамическое уравнение Эйлера и кинематическое уравнение в углах Эйлера-Крылова;
- динамическое уравнение Эйлера и кинематическое уравнение в параметрах Родрига-Гамильтона.

Среди этих моделей самой распространенной является модель, в которой динамика описывается уравнением Эйлера, а кинематика — кинематическим уравнением в параметрах Родрига-Гамильтона. Уравнения этой модели, описывающие относительное движение связанной и опорной систем координат имеют следующий вид:

$$J\dot{\omega}_B^{BR} + (\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) \times J(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}) = M_u + M_e, \quad (1)$$

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_B^{BR})^T \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}. \quad (2)$$

Достоинством модели является отсутствие вычислительных особенностей и минимальная избыточность вектора состояния, недостатком — нелинейность модели, что существенно затрудняет синтез законов управления.

Кроме перечисленных выше моделей углового движения КА, для построения управления можно использовать и модель движения, имеющую вид системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно параметров Родрига-Гамильтона (В. Н. Кошляков [1], Ю. Н. Челноков [2–4]). Однако в моделях, приведенных в этих работах, правые части динамического уравнения Эйлера выражаются непосредственно через параметры Родрига-Гамильтона, что приводит к тому, что модели становятся существенно нелинейными, и их затруднительно использовать для синтеза управления. Эти трудности можно обойти, если при построении модели использовать динамическое уравнение для кватерниона [5]

$$\ddot{\Lambda} = (I_4 - \Lambda \Lambda^T) U - \|\dot{\Lambda}\|^2 \Lambda$$

$$\Lambda \in \Sigma = \{ \Lambda : \|\Lambda\| = 1, \Lambda \in \mathbb{R}^4 \},$$
(3)

описывающее множество всех допустимых управляемых перемещений точки на поверхности сферы с единичным радиусом в четырехмерном пространстве. Уравнение (3) представляет собой частный случай уравнения движения точки по сфере в пространстве  $\mathbb{R}^n$

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \cdot f - X_0 \cdot |\dot{X}_0|^2,$$

которое описывает множество всех допустимых управляемых перемещений точки на поверхности сферы заданного радиуса в  $n$ -мерном пространстве. В работе [6] исследованы свойства этого уравнения и доказаны следующие утверждения:

**Утверждение 1.** Пусть задана нелинейная система дифференциальных уравнений  $X^{(m)} = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(m-1)})$ . Будем рассматривать компоненты вектора  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  как координаты одноименной точки, которая движется в пространстве  $\mathbb{R}^n$  по некоторой траектории, определяемой вектором  $X(t)$ . При этом вектор функция  $X(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  удовлетворяет условию  $\|X(t)\| \neq 0$ . Тогда движение проекции этой точки на единичную сферу в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , определяемое ортом  $X_0(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}$  вектора  $X(t)$ , описывается уравнением

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \cdot f - X_0 \cdot |\dot{X}_0|^2,$$

$$f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 + \alpha X_0,$$

$$\delta = \sqrt{\dot{X}^T \cdot \dot{X}}, \quad \dot{\delta} = X_0^T \cdot \dot{X},$$

в котором переменная  $\alpha(t)$  представляет собой произвольную скалярную функцию времени.

**Утверждение 2.** Пусть на единичной сфере в пространстве  $\mathbb{R}^n$  задана точка  $X_0(t)$ , движение которой описывается уравнением

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \cdot f - X_0 \cdot |\dot{X}_0|^2.$$

Единичному вектору  $X_0(t)$  можно поставить в соответствие вектор  $X(t)$ , изменение координат которого во времени описывается системой уравнений  $\ddot{X}(t) = \Psi$ , где со-

гласно утверждению 1, функция  $\Psi(t)$  имеет вид  $\Psi(t) = \delta f + 2\delta\dot{X}_0 + \alpha X_0$ ,  $\delta = \sqrt{X^T \cdot X}$ . Если в начальный момент времени выполняются соотношения  $X(t_0) = X_0(t_0)$ ,  $\dot{X}(t_0) = \dot{X}_0(t_0)$ , то существует взаимно-однозначное соответствие между векторами  $X_0(t)$  и  $X(t)$ , определяемое выражениями

$$X_0(t) = \frac{X(t)}{\delta}, \quad \dot{X}_0(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{X(t)}{\delta} \right) = (I_n - X_0(t) X_0^T(t)) \frac{\dot{X}(t)}{\delta},$$

$$X(t) = \delta X_0(t), \quad \dot{X}(t) = \delta \dot{X}_0(t) + \delta \dot{X}_0(t).$$

**Утверждение 3.** Пусть на единичной сфере в пространстве  $R^n$  задана точка  $X_0(t)$ , движение которой описывается уравнением  $\ddot{X}_0 = \Theta$ , где ускорение точки  $\Theta$  определяется выражением  $\Theta = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2$ , а вектор  $f$  является вектором управления. Тогда векторы  $\Theta$  и  $f$  связаны соотношением  $f = \Theta + \alpha \cdot X_0$ , где переменная  $\alpha$  — произвольная скалярная функция.

В данной работе с использованием уравнения (3) предлагаются методы решения основных задач управления угловым движением КА: задача стабилизации и задача терминального управления.

**Математическая модель углового движения КА в параметрах Родрига-Гамильтона.** Рассмотрим уравнения (1–2), описывающие динамику относительного углового движения связанной и опорной систем координат. В этой модели в качестве вектора состояния используются вектор относительной угловой скорости  $\omega_B^{BR}$  и кватернион  $\Lambda_{RB}$ , определяющий взаимное положение связанной и опорной систем координат. В работе [6] получена модель, в которой в качестве вектора состояния используется вектор параметров Родрига-Гамильтона (кватернион) и его производная. Уравнение модели имеет следующий вид

$$\dot{\Lambda}_{RB} = (I_4 - \Lambda_{RB} \cdot \Lambda_{RB}^T) \cdot U + \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} M_{\epsilon} - \Lambda_{RB} \cdot \|\dot{\Lambda}_{RB}\|^2, \quad (4)$$

В этом уравнении вектор  $U \in R^4$  является свободной переменной, изменяя которую можно изменять характер углового движения КА. Между системой уравнений (1)–(2) и уравнением (4) существует взаимное соответствие, определяемое выражениями [6]

$$\omega_B^{BR} = 2A(\Lambda_{RB}) \dot{\Lambda}_{RB}, \quad (5)$$

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB}) U + \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}), \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\omega_B^{BI} &= \omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}, \\ \dot{\Lambda}_{BR} &= \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{BR}) \omega_B^{BR},\end{aligned}\quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} \cdot \left( M_u - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J \left( \omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI} \right) \right), \quad (8)$$

где матрица  $A(\Lambda_{RB})$  имеет вид  $A(\Lambda_{RB}) = \begin{pmatrix} -\lambda_{RB} & \lambda_{RB}^0 I_3 & -\Phi(\lambda_{RB}) \end{pmatrix}$ .

Уравнения (1-2) представляют собой модель углового движения, в которой уравнения динамики записаны в пространстве  $R^3$ , а кинематические уравнения записаны в пространстве  $R^4$ . Уравнение (4) представляет собой модель углового движения КА, в которой уравнения динамики и кинематики записаны в пространстве  $R^4$ . Так, как между моделью, определяемой уравнениями (1)–(2) и моделью в виде уравнения (4) существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое выражениями (5)–(8), то можно синтезировать законы управления, используя модель (4), а затем вернуться в пространство  $R^3$  и по формуле (6) найти физически реализуемый управляющий момент  $M_u$ .

**Особенности применения динамического уравнения в параметрах Родрига–Гамильтона в задачах управления ориентацией КА.** Уравнение (4) является нелинейным уравнением, что существенно усложняет процедуру синтеза управления  $U$ . Нелинейность обусловлена тем, что  $\Lambda_{RB}$  представляет собой нормированный кватернион. Для того, чтобы избавиться от нелинейности, перейдем к ненормированному кватерниону. Представим кватернион  $\Lambda_{RB}$  в виде

$$\Lambda_{RB}(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}, \quad (9)$$

где  $X(t) \in R^4$  — векторное представление некоторого ненормированного кватерниона.

Пусть изменение во времени вектора  $X(t)$  описывается уравнением

$$\ddot{X} = \Xi. \quad (10)$$

Согласно выражению (9), для производной по времени от вектора  $\Lambda_{RB}$  справедливо соотношение

$$\dot{\Lambda}_{RB}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{X(t)}{\|X(t)\|} \right) = \left( I_4 - \Lambda_{RB} \Lambda_{RB}^T \right) \frac{\dot{X}(t)}{\|X(t)\|}.$$

С учетом соотношения для производной  $\dot{\Lambda}_{RB}(t)$  и формулы (5) вектор относительной угловой скорости  $\omega_B^{BR}(t)$  можно представить следующим образом:

$$\omega_B^{BR} = \frac{2}{\|X\|^2} A(X) \cdot \dot{X}. \quad (11)$$

Из выражений (9)–(11) следует, что, формируя нужным образом управление  $\Xi(t)$ , можно формировать требуемый характер изменения угловой ориентации и скорости вращения КА. Пусть в начальный момент времени выполняются условия

$$X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0).$$

Тогда согласно утверждению 2 между векторами состояния систем (10) и (4) существует взаимное соответствие, определяемое формулами

$$\Lambda_{RB}(t) = \frac{X(t)}{\|X\|}, \quad \dot{\Lambda}_{RB}(t) = (I_4 - \Lambda_{RB}(t)\Lambda_{RB}^T(t)) \frac{\dot{X}(t)}{\|X\|},$$

$$X(t) = \|X\| \Lambda_{RB}(t), \quad \dot{X}(t) = \frac{d}{dt} (\|X\| \Lambda_{RB}(t) + \|X\| \dot{\Lambda}_{RB}(t)).$$

При этом уравнение (10) можно рассматривать как уравнение углового движения КА, записанное в виде дифференциального уравнения для ненормированного кватерниона. Продифференцировав  $m$  раз вектор  $X$ , дифференциальное уравнение (10) можно записать следующим образом:

$$X^{(m)} = \Psi,$$

где вектор  $\Psi$  — новый вектор управления. При этом вектора  $\Psi$  и  $\Xi$  связаны соотношением  $\Psi = \Xi^{(m-2)}$ .

**Методы управления ориентацией космического аппарата с использованием уравнения вращательного движения КА в параметрах Родрига-Гамильтона.**

**Задача стабилизации.** Под стабилизацией углового движения КА относительно опорной системы координат будем понимать такое угловое движение КА, при котором положение равновесия  $\Lambda_{RB}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  является асимптотически устойчивым. Сформулируем следующую задачу управления: для системы уравнений

$$J \dot{\omega}_B^{BR} + (\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) \times J (\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) + J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}) = M_u$$

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BRT} \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}$$

найти закон управления  $M_u$ , обеспечивающий асимптотическую устойчивость положению равновесия  $\Lambda_{RB}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ .

**Решение задачи стабилизации.** Рассмотрим уравнение относительного движения в параметрах Родрига-Гамильтона

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = \left( I_4 - \Lambda_{RB} \cdot \Lambda_{RB}^T \right) \cdot U - \Lambda_{RB} \cdot \left| \dot{\Lambda}_{RB} \right|^2,$$

Согласно утверждению 3 это уравнение можно представить следующим образом:

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = U(t) + \alpha(t) \Lambda_{RB},$$

где  $\alpha$  — произвольная скалярная функция. Положим ее равной нулю. В результате получим следующее уравнение:

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = U(t). \quad (12)$$

Система (12) представляет собой интегратор второго порядка. Для такого вида уравнений закон управления

$$U = -K_1 E - K_2 \dot{E},$$

$$E = \Lambda_{RB} - \Lambda_{RB}^*, \quad \dot{E} = \dot{\Lambda}_{RB},$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{1i}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{2i}), \quad k_{1i} > 0, \quad k_{2i} > 0,$$

$$A_{RB}^* = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость положению равновесия  $A_{RB}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ . Используя формулу (8), находим физически реализуемый управляющий момент  $M_u$ .

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB})U + \left( \omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) \times J \left( \omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) + J \left( \omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI} \right).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 4.** Для системы уравнений

$$J \dot{\omega}_B^{BR} + \left( \omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) \times J \left( \omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) + J \left( \omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI} \right) = M_u$$

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BRT} \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}$$

закон управления

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB})U + \left( \omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) \times J \left( \omega_B^{RI} + \omega_B^{BR} \right) + J \left( \omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI} \right),$$

где вектор  $U$  определяется следующим образом

$$U = -K_1 E - K_2 \dot{E}, \quad E = \Lambda_{RB} - \Lambda_{RB}^*, \quad \dot{E} = \dot{\Lambda}_{RB},$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{1i}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{2i}), \quad k_{1i} > 0, \quad k_{2i} > 0,$$

$$A_{RB}^* = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость положению равновесия  $A_{RB}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ .

**Пример.** Для КА, находящегося на круговой орбите, моделировался процесс построения инерциальной ориентации. На рис. 1 изображены зависимости от времени углов ориентации. Соответствующие угловые скорости изображены на рис. 2. Как видно из приведенных графиков, параметры углового движения в конце переходного процесса соответствуют режиму инерциальной ориентации. Это подтверждает работоспособность разработанных алгоритмов.

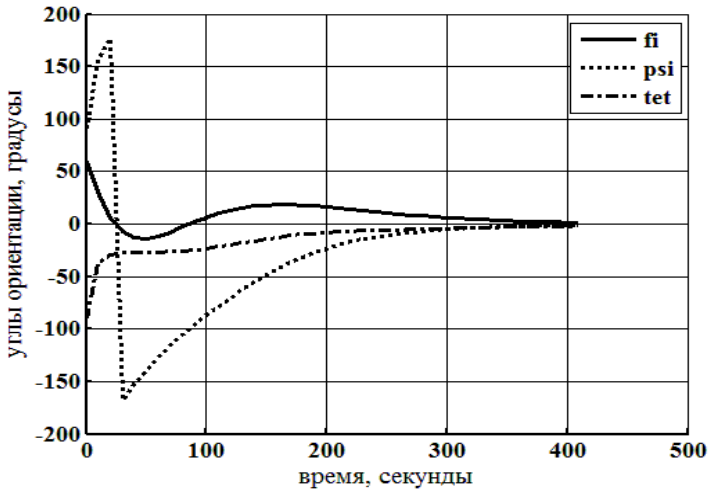


Рис. 1. Углы ориентации

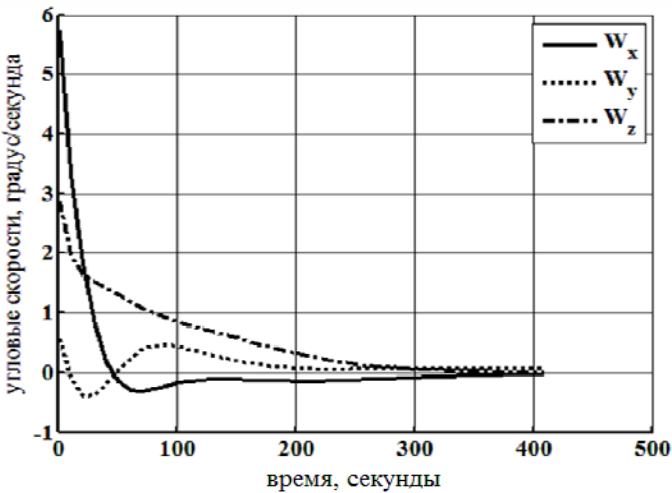


Рис. 2. Угловые скорости



**Задача терминального управления:** для системы уравнений

$$J\dot{\omega}_B^{BR} + (\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) \times J(\omega_B^{RI} + \omega_B^{BR}) + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}) = M_u$$

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BRT} \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}$$

найти закон управления  $M_u(t)$ , обеспечивающий переориентацию КА из текущего углового положения  $\Lambda_{RB}(t_0)$ ,  $\dot{\Lambda}_{RB}(t_0)$  в момент времени  $t_0$  в требуемое угловое положение  $\Lambda_{RB}(t_1)$ ,  $\dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$  в момент времени  $t_1$ . Моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  заданы.

**Решение поставленной задачи.** Для решения задачи воспользуемся моделью углового движения КА в виде динамического уравнения для ненормированного кватерниона

$$X^{(m)} = \Psi. \quad (13)$$

Будем полагать, что для вектора  $X$  и его производных до  $m-1$  порядка включительно заданы граничные условия для фиксированных моментов времени  $t_0$  и  $t_1$ . Причем,

$$X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0).$$

Для заданных граничных условий найдено решение задачи оптимального управления: найти закон управления  $\Psi(t)$ , переводящий систему  $X^{(m)} = \Psi$  из текущего состояния в момент времени  $t_0$  в требуемое состояние в момент времени  $t_1$  и обеспечивающий минимум функционалу  $L(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \|\Psi\|^2 dt$ . Определим программную траекторию разворота (кватернион  $\Lambda_{RB^*}$ ) следующим образом:

$$\Lambda_{RB^*}(t) = \frac{X(t)}{\|X\|}.$$

В этом случае, согласно утверждению 1, для кватерниона  $\Lambda_{RB^*}$  справедливо уравнение

$$\ddot{\Lambda}_{RB^*} = (I_4 - \Lambda_{RB^*} \cdot \Lambda_{RB^*}^T) \cdot U^* - \Lambda_{RB^*} \cdot \|\dot{\Lambda}_{RB^*}\|^2,$$

где  $U^* = \frac{\ddot{X}}{\|X\|} - 2 \frac{1}{\|X\|} \frac{d}{dt} (\|X\|) \dot{\Lambda}_{RB^*}$ .

Управление  $\Psi$  выбрано таким образом, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} X(t_0) &= \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0), \\ X(t_1) &= \Lambda_{RB}(t_1), \quad \dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1). \end{aligned}$$

Так как вектор  $\Lambda_{RB^*}(t)$  является ортом вектора  $X$ , то в момент времени  $t_1$  вектор  $\Lambda_{RB^*}(t)$  и его производная  $\dot{\Lambda}_{RB^*}(t)$  примут заданное значение  $\Lambda_{RB}(t_1)$ ,  $\dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$ . Следовательно, управление  $U^* = \frac{\ddot{X}}{\|X\|} - 2\frac{1}{\|X\|} \frac{d}{dt}(\|X\|) \dot{\Lambda}_{RB^*}$  обеспечивает переориентацию КА из текущего углового положения  $\Lambda_{RB}(t_0)$ ,  $\dot{\Lambda}_{RB}(t_0)$  в момент времени  $t_0$  в требуемое угловое положение  $\Lambda_{RB}(t_1)$ ,  $\dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$  в момент времени  $t_1$ . Так как задача минимизации функционала  $L(t)$  при ограничении (13) имеет аналитическое решение [7], то расчет вектора  $U^*$  не представляет никаких сложностей.

Управление  $U^*$ , построенное таким образом, является программным. При таком управлении КА будет двигаться по некоторой траектории  $\Lambda_{RB}$ , отличной от программной траектории  $\Lambda_{RB^*}$ . Это обусловлено ошибками реализации программного управления и наличием возмущающих моментов, действующих на КА. Для стабилизации углового движения КА относительно программной траектории необходимо управление в виде обратной связи по состоянию. Для нахождения этого управления рассмотрим относительное движение связанной с КА системы координат  $B$  относительно программной системы координат  $B^*$ , положение осей которой относительно опорного базиса  $R$  определяется кватернионом  $\Lambda_{RB^*}$ . В соответствии с уравнением (1–2) система уравнений, описывающая динамику движения базиса  $B$  относительно базиса  $B^*$ , имеет вид

$$J\dot{\omega}_B^{BB^*} + (\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) \times J(\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) + J(\omega_B^{B^*I} \times \omega_B^{BB^*} + \dot{\omega}_B^{B^*I}) = M_u,$$

$$2\dot{\Lambda}_{B^*B} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BB^*T} \\ \omega_B^{BB^*} & -\Phi(\omega_B^{BB^*}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{B^*B},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_B^{B^*I} &= \omega_B^{RI} + \omega_B^{B^*R}, \quad \omega_B^{B^*R} = 2A(\Lambda_{RB^*})\dot{\Lambda}_{RB^*}, \\ \dot{\omega}_B^{B^*I} &= \dot{\omega}_B^{RI} + \dot{\omega}_B^{B^*R}, \quad \dot{\omega}_B^{B^*R} = 2A(\Lambda_{RB^*})U^*. \end{aligned}$$

Представим эту систему в виде дифференциального уравнения второго порядка относительно параметров Родрига-Гамильтона

$$\ddot{\Lambda}_{B^*B} = (I_4 - \Lambda_{B^*B} \cdot \Lambda_{B^*B}^T) \cdot U - \Lambda_{B^*B} \cdot \|\dot{\Lambda}_{B^*B}\|^2,$$

где  $U$  — стабилизирующее управление.

Для нахождения стабилизирующего управления  $U$  воспользуемся утверждением 4. Согласно этому утверждению, закон управления

$$\begin{aligned} U &= -K_1 E - K_2 \dot{E}, \\ E &= \Lambda_{B^*B} - \Lambda_{RB}^*, \quad \dot{E} = \dot{\Lambda}_{B^*B}, \\ \Lambda_{B^*B}^*(t) &= (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \end{aligned}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость положению равновесия

$$\Lambda_{B^*B}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

При этом момент управления, действующий на КА, в соответствии с выражением (6) можно рассчитать по формуле

$$\begin{aligned} M_u &= 2JA(\Lambda_{B^*B})U + (\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) \times \\ &\times J(\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) + J(\omega_{B^*}^{B^*I} \times \omega_B^{BB^*} + \dot{\omega}_{B^*}^{B^*I}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 5.** Пусть вращательное движение КА описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_B^{BB^*} + (\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) \times J(\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) + J(\omega_B^{B^*I} \times \omega_B^{BB^*} + \dot{\omega}_B^{B^*I}) &= M_u, \\ 2\dot{\Lambda}_{B^*B} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BB^*T} \\ \omega_B^{BB^*} & -\Phi(\omega_B^{BB^*}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{B^*B}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение вектор  $X \in R^4$ , движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{X}^{(m)} = \Psi.$$

Для вектора  $X$  и его производных до  $m-1$  порядка включительно определены граничные условия для фиксированных моментов времени  $t_0$  и  $t_1$ . Причем,

$$\begin{aligned} X(t_0) &= \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0), \\ X(t_1) &= \Lambda_{RB}(t_1), \quad \dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1), \end{aligned}$$

Для заданных граничных условий найден вектор управления  $\Psi$ , переводящий точку  $X$  и ее производные до  $m-1$  порядка включительно из положения в момент времени  $t_0$  в положение в момент времени  $t_1$ . Тогда программная траектория разворота (кватернион  $\Lambda_{RB^*}$ ) и программное управление  $U^*$  определяется выражением

$$\Lambda_{RB^*}(t) = \frac{X(t)}{\|X\|}, \quad U^* = \frac{\ddot{X}}{\|X\|} - 2 \frac{1}{\|X\|} \frac{d}{dt} (\|X\|) \dot{\Lambda}_{RB^*}$$

а момент управления

$$M_u = 2JA(\Lambda_{B^*B})U + (\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) \times J(\omega_B^{B^*I} + \omega_B^{BB^*}) + J(\omega_{B^*}^{B^*I} \times \omega_B^{BB^*} + \dot{\omega}_{B^*}^{B^*I}),$$

где

$$U = -K_1 E - K_2 \dot{E},$$

$$E = \Lambda_{B^*B} - \Lambda_{B^*B}^*, \quad \Lambda_{B^*B}^* = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

обеспечивает приведение за фиксированное время  $\tau = t_1 - t_0$  спутника из положения  $\Lambda_{RB}(t_0)$ ,  $\dot{\Lambda}_{RB}(t_0)$  в заданное положение  $\Lambda_{RB}(t_1)$ ,  $\dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$ . При этом положение равновесия  $\Lambda_{B^*B}(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  асимптотически устойчиво.

На основе предложенного способа построения алгоритмов перероентации были реализованы режимы программных поворотов космических аппаратов «Egypstsat-1» и «Січ-2». В КА «Egypstsat-1» для этого использовался алгоритм второго порядка ( $m = 2$ ), а в КА «Січ-2» — алгоритм третьего порядка ( $m = 3$ ). Ниже приводятся результаты летных испытаний этих режимов.

**Результаты летных испытаний режима программных поворотов (РПП) КА «Egypstsat-1».** Приведенные результаты получены при выполнении РПП на витке №443. Полетное задание РПП для этого витка было следующим: развернуться по каналу крена на угол  $+35^\circ$ , по каналу рыскания на угол  $-3^\circ$ , произвести съемку и вернуться в режим орбитальной ориентации. На рис. 3, 4 приведены графики изменения углов ориентации и угловых скоростей в процессе маневров. На рис. 5 приведен график изменения управляющих моментов.

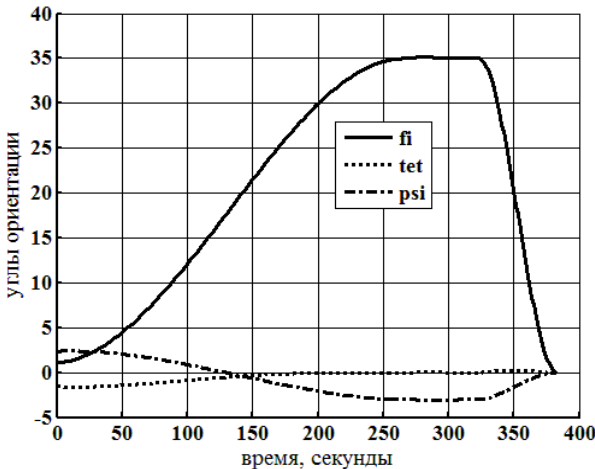


Рис. 3. КА «Egypstsat-1». Виток 443. Трассовая съемка. Углы ориентации

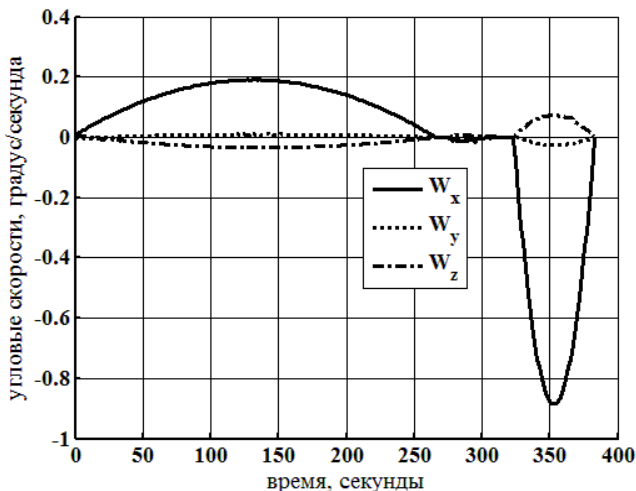


Рис. 4. КА «Egypstsat-1». Виток 443. Трасовая съемка. Угловые скорости

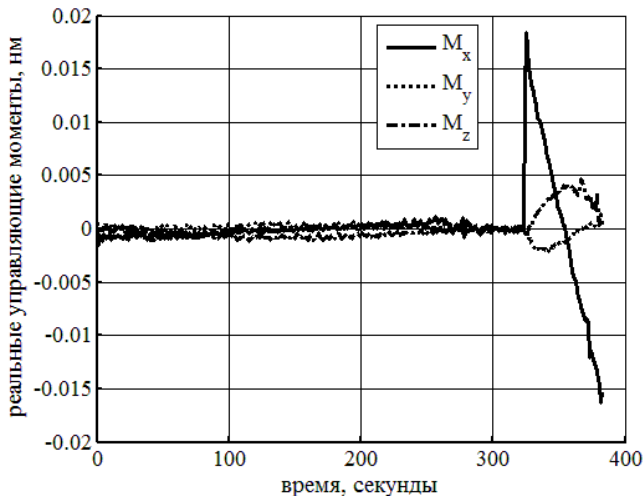


Рис. 5. КА «Egypstsat-1». Виток 443. Трасовая съемка. Управляющие моменты

**Результаты летных испытаний режима программных поворотов КА «Січ-2».** Результаты приведены для витка № 630 (рис. 6–8). Полетное задание при этом было следующим: угол крена  $+1.44882^\circ$ , угол тангажа  $+34.5079^\circ$ , угол рыскания  $-2.01134^\circ$ . На рис. 6,7 приведены графики изменения углов ориентации и угловых скоростей в процессе маневров. На рис. 8 приведен график изменения управляющих моментов.

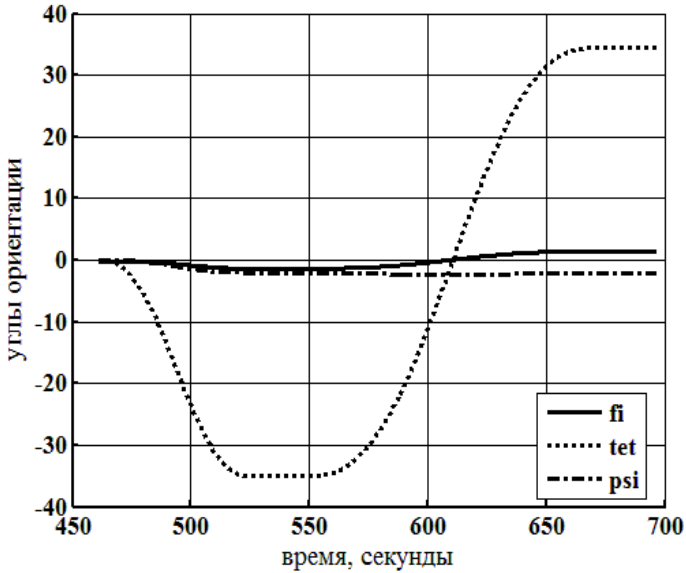


Рис. 6. КА «Січ-2». Виток 630, стереосъемка. Углы ориентации

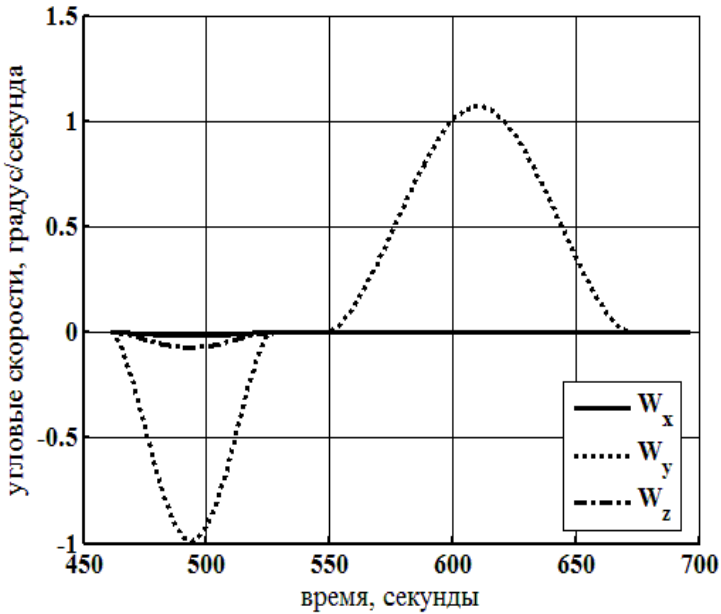


Рис. 7. КА «Січ-2». Виток 630, стереосъемка. Угловые скорости

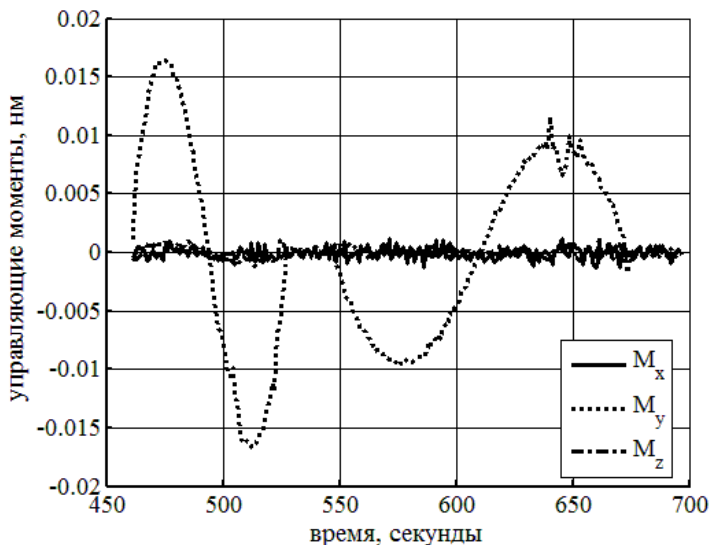


Рис. 8. КА «Січ-2». Виток 630, стереосъемка. Управляющие моменты

**Выводы.** С использованием уравнения движения точки по сфере найдены решения основных задач управления угловым движением КА: задачи стабилизации и задачи терминального управления. При решении задачи терминального управления предложена методика синтеза алгоритмов пространственной переориентации КА за заданный интервал времени которая не накладывает никаких ограничений на класс угловых движений КА. Предлагаемый подход на основе принципа максимума позволяет получить аналитическое решение задачи пространственной оптимальной переориентации космического аппарата. Методика прошла экспериментальную проверку. На базе предложенного подхода были реализованы режимы программных поворотов космических аппаратов «Egypsat-1» и «Січ-2». Лётно-конструкторские испытания этих космических аппаратов показали высокую эффективность предложенной методики. Методика может быть полезной разработчикам систем ориентации КА.

#### Список использованной литературы:

1. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов / В. Н. Кошляков. — Москва : Наука, 1985. — 286 с.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения ошибок, законы и алгоритмы коррекции (стабилизации) / Ю. Н. Челноков // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1994. — № 4. — С. 3–12.

3. Челноков Ю. Н. Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы / Ю. Н. Челноков // Космические исследования. — 1994. — Т. 32, вып. 3. — С. 21–32.
4. Челноков Ю. Н. Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов / Ю. Н. Челноков // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2002. — №1. — С. 3–17; 2002. — №2. — С. 3–17.
5. Кириченко Н. Ф. Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела / Н. Ф. Кириченко, В. Т. Матвиенко // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 5–15.
6. Ефименко Н. В. Математическая модель углового движения КА в параметрах Родрига-Гамильтона и ее свойства / Н. В. Ефименко // Электронное моделирование. — 2018. — Т. 40. — №6. — С. 21–36.
7. Ефименко Н. В. Синтез алгоритмов управления пространственной перерориентацией космического аппарата с использованием динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона / Н. В. Ефименко // Проблемы управления и информатика. — 2015. — №3. — С. 145–155.

### **MATHEMATICAL MODEL OF AN THE ANGULAR MOTION OF A SOLID BODY IN THE PARAMETERS OF THE RODRIG-HAMILTON AND ITS USE IN THE TASKS OF CONTROL SPACECRAFT ORIENTATION**

Currently, the most effective way to obtain data on the Earth's surface is satellite imagery. In this case, the dynamic characteristics of the control system are very stringent requirements. The turn should occur from any current position to any given position, the orientation accuracy in the unfolded position should be units of angular minutes, and the angular rates of turn can reach a value of 2-3 degrees per second. To ensure such high dynamic characteristics, the base clock of the control system should be no more than 100 ms. This restriction imposes restrictions on reorientation algorithms. On the one hand, they should be very simple so that the time spent on calculating the control action is minimal. On the other hand, they must provide high dynamic characteristics, which is impossible to provide in the class of simple algorithms. The solution to the problem of the synthesis of reorientation algorithms for spacecraft must be sought as a solution to the optimization problem. When solving such problems, as a rule, a mathematical model of the angular motion of the spacecraft is used, in which the dynamics are described by the Euler equation and the kinematics by the equation for the quaternion. In this case, it is easy enough to obtain the equations of the two-point boundary value problem, but it is not possible to find an analytical solution of this problem. The solution can only be found using numerical methods, which is not applicable when implementing algorithms onboard the spacecraft. These difficulties can be circumvented using the spacecraft model, built on the basis of the dynamic equa-



tions of the rotational motion of a rigid body in the Rodrigues Hamilton parameters. In this paper, this approach was used to solve the main problems of controlling the angular motion of a spacecraft: stabilization problems and terminal control problems. The article may be useful to developers of spacecraft attitude control systems.

**Key words:** *Rodrig-Hamilton parameters, spacecraft, quaternion, orientation, dynamical equation for the quaternion.*

Отримано: 28.11.2018

UDC 004.94

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.65-73

V. Ivaniuk, Cand. of Eng. Sciences,

V. Ponedilok

Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University

### **METHOD OF RESTORATION OF INPUT SIGNALS OF NONLINEAR DYNAMIC OBJECT WITH DESTRIIBUTED PARAMETERS**

The article deals with the method of signal restoration at the input of a nonlinear dynamic object with distributed parameters. To describe these objects, a universal mathematical model in the form of a Volterra integro-degree series has been chosen. The problem of signal restoration is reduced to the problem of solving the Volterra polynomial equation of the first kind. The numerical implementation of such models is suggested to be carried out using quadrature methods, in particular, the method of trapezoids. In order to increase the stability of the solution in the presence of noise interference in the input data, it is suggested to use the differential regularization operator, which allows the incorrectly set task to be transformed into a class of correct ones. The possibility of applying such an approach is studied in solving the Volterra polynomial integral equation of the second order type, which describes nonlinear dynamic objects with quadratic nonlinearity. The computational formulas for solving this type of equations are given in the article. The received nonlinear second-order algebraic equations after approximation of the initial equation by integral sums are solved by iterative methods with initial approximation in the form of a pre-calculated radical. The developed algorithms are implemented as software modules in the Matlab, with the help of which a number of computational experiments have been carried out. As an example, non-linear dynamic objects that contain static non-linearity of the second order and dynamic links that are typical for objects with distributed parameters have been chosen. Such links are: a semi-integral link, an attenuation link (semi-delay) and a semi-inertial

link. On the basis of applying the equivalent transformations, the macromodels of objects with distributed parameters have been obtained in the form of a polynomial integral Volterra equation of the I kind of the second order with the kernels that describe the above-mentioned components. The results of the computational experiments, presented in the form of graphs, showed that the suggested approach can be effectively used in restoration of signals at the input of nonlinear dynamic objects with distributed parameters.

**Key words:** *signal restoration, nonlinear dynamic objects with distributed parameters, Volterra series, Volterra equation of the first kind, Matlab / Simulink.*

**Introduction.** While solving the problem of signal restoration at the input of nonlinear dynamical systems, there is usually a need to solve Volterra nonlinear equations of the first kind [1, 3, 5, 6]. Applying of integro-degree Volterra series, which is a universal mathematical model for describing nonlinear dynamical system [4],

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, \tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^t K_2(t, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \dots, \quad (1)$$

where  $x(t)$ ,  $y(t)$  — respectively, the input and output signals of the object,  $t$  — time of the transient process,  $K_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$  — Volterra kernel, makes it possible to simplify nonlinear mathematical models by converting them to a quasi-linear type [1, 4]. It also should be noted that the applying of Volterra series will allow to solve the problems of modeling dynamic objects with lumped and distributed parameters based on the same means, because for these objects, mathematical models will differ only in the form of kernels [2, 6].

In general, the problem of restoration can be reduced to the Volterra polynomial integral equations of the 1st kind (1). In the linear variant, we will have a classical form of the integral of Volterra equation of the 1st kind with one kernel  $K_1$  [1, 4]. The invalidity of signal restoration problem requires the applying of indirect approaches to the solving of integral equations of the first kind. The most effective approach to solving these problems is the appliance of regularization methods, the application of which will allow obtaining the sustainable solutions to the problem of restoration [3, 6].

Therefore, the development of new methods for solving Volterra polynomial integral equations of the 1st kind based on regularization algorithms for restoration of input signals of nonlinear dynamic objects, both with lumped and distributed parameters, is an urgent task.

The **aim** of the work is to develop an effective method for solving inverse problems of dynamics of nonlinear objects with distributed parameters by solving Volterra polynomial integral equations of the first kind.

**The main part.** Solving of this problem will be considered on the example of solving the Volterra polynomial integral equation of the 2nd kind:

$$\int_0^t K_1(t, \tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^t K_2(t, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 = y(t). \quad (2)$$

The problem of regenerating a signal that is altered by a nonlinear dynamic object is incorrect, and using of classical methods for solving such problems in the presence of noise interference in signals does not allow obtaining stable solutions with the necessary accuracy. It is suggested to use a differential regularization operator of first kind  $\alpha \frac{dx}{dt}$ , where  $\alpha$  — a parameter of regularization. In this case the solution of Volterra polynomial equation is reduced to solving of the following integro-differential equation:

$$\alpha \frac{dx}{dt} + \int_0^t K_1(t, \tau)x(\tau)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 = y(t). \quad (3)$$

The given problem is suggested to be solved by replacing the integrals in (3) quadrature formulas, which allows to obtain a number of advantages, in particular, the simplicity of implementation and high stability of computational algorithms due to the regularizing properties of choosing the quadrature step [6]. Applying to (3) the method of trapezoids and difference formula of the first kind [1, 3], the following will be received:

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{h} + \frac{1}{2} h K_1(t_i, t_i) x(t_i) + \sum_{j=1}^{i-1} h K_1(t_i, t_j) x(t_j) + \\ & + \frac{1}{2} h K_1(t_i, t_0) x(t_0) + \frac{1}{4} h^2 K_2(t_i, t_0, t_0) x(t_0) x(t_0) + \\ & + \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_0, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_0)) x(t_0) x(t_j) + \\ & + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{g=1}^{i-1} K_2(t_i, t_j, t_g) x(t_j) x(t_g) + \\ & + \frac{1}{4} h^2 (K_2(t_i, t_i, t_0) + K_2(t_i, t_0, t_i)) x(t_0) x(t_i) + \\ & + \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_i, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_i)) x(t_j) x(t_i) + \\ & + \frac{1}{4} h^2 K_2(t_i, t_i, t_i) x(t_i) x(t_i) = y(t_i), \end{aligned} \quad (4)$$

where  $i = \overline{1..n}$ ,  $h = t_i - t_{i-1}$ . The (4) should be rewritten by grouping the summands for the target value  $x(t_i)$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4}h^2K_2(t_i, t_i, t_i)x^2(t_i) + \\
 & + \left( \frac{1}{4}h^2(K_2(t_i, t_i, t_0) + K_2(t_i, t_0, t_i))x(t_0) + \right. \\
 & + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_i, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_i))x(t_j) + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_i) + \frac{\alpha}{h} \right)x(t_i) + \\
 & + \sum_{j=1}^{i-1} hK_1(t_i, t_j)x(t_j) + \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_0)x(t_0) + \\
 & \quad + \frac{1}{4}h^2K_2(t_i, t_0, t_0)x(t_0)x(t_0) + \\
 & \quad + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (K_2(t_i, t_0, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_0))x(t_0)x(t_j) + \\
 & + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{g=1}^{i-1} K_2(t_i, t_j, t_g)x(t_j)x(t_g) - \frac{\alpha}{h}x(t_{i-1}) - y(t_i) = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

$n$  quadratic equations (5) are solved sequentially on the basis of the iterative method, and, for the initial approximation the root of the previous equation is taken [3].

**Software implementation of the method.** On the basis of the suggested method, a software tool for restoration of signals in the form of a program module for solving the Volterra polynomial integral equation of the 1<sup>st</sup> kind of the second order by the method of trapezoids was developed in Matlab environment — a function

```
x=invvolterraSeries2treg(kern,y,t,h,alpha),
```

where `kern` — kernel of Volterra series, which are given as an array of functions; `y` — ordinate vector  $y(t)$ ; `t` — vector of values of time variable  $t$ ; `h` — simulation step, `alpha` — regularization parameter.

**Structural and algorithmic method of obtaining solutions.** Let's consider a dynamic object with non-inertial nonlinearity, which is described by the structural scheme represented in Fig. 1. On a structure diagram  $A(x(t))$  — linear component,  $F(u(t))$  — nonlinear component.

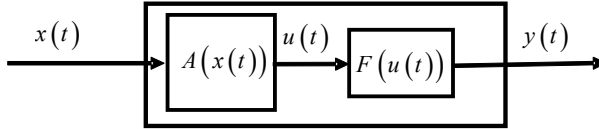


Fig. 1. Structure diagram of object model

For objects with distributed parameters the following basic typical irrational and transcendental links can be distinguished, they are defined by the operator  $A(x(t))$ : semi-integral, semi-inertial, delaying and damping (or semi-delaying) [2]. In table 1 the Volterra operator  $A(x(t))$  for the above links is described.

Table 1

*A set of typical irrational and transcendental units*

Link name	Volterra operator
Semi-integral	$u(t) = \int_0^t \frac{k}{\sqrt{\pi\tau}} x(t-\tau) d\tau$
Semi-inertial	$u(t) = \int_0^t \frac{k}{T} \left( \sqrt{\frac{T}{\pi k}} - e^{\frac{\tau}{T}} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\tau}{T}} \right) x(t-\tau) d\tau$
Delaying	$u(t) = \int_0^t \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau$
Damping (semi-delaying)	$u(t) = \int_0^t 0.5 \sqrt{\frac{T}{\pi\tau^3}} e^{-\frac{T}{4\tau}} x(t-\tau) d\tau$
$k, T$ — constants	

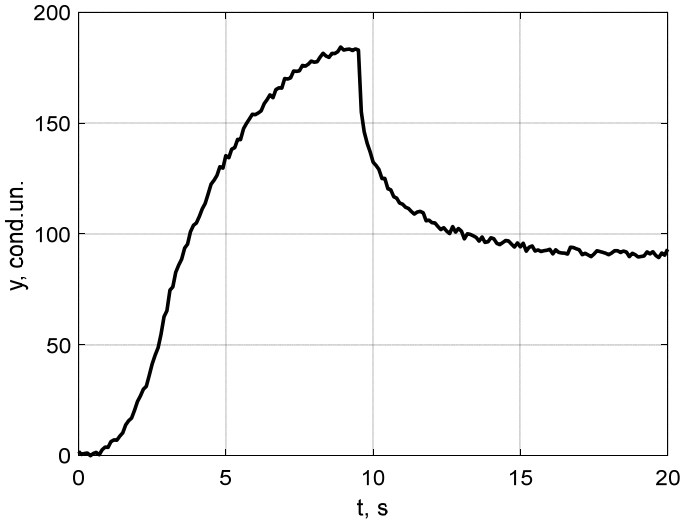
In the case if a non-inertial nonlinear element  $F(u(t))$ , can be represented by a Taylor series or a polynomial, the macromodel in the form of a structural diagram (Fig. 1) is represented by Volterra series (1) [4].

**Computational experiments.** Let's consider the case when the linear part is determined by the semi-integral link, and the nonlinear part has the form:  $F(u(t)) = u + u^2$ . After applying equivalent transformations [4] the macromodel in the form of an integro-degree series Volterra is obtained as a result:

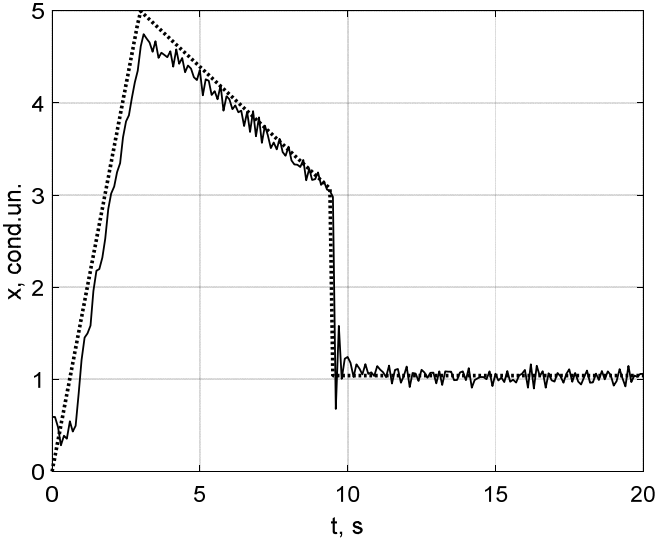
$$y(t) = \int_0^t \frac{k}{\sqrt{\pi\tau}} x(t-\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t \frac{k^2}{\pi\sqrt{\tau_1\tau_2}} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (6)$$

At numerical realization of the received model at the point of zero of kernel are singular, therefore instead of zero point the value of h modeling

step is taken. With the help of the developed software assets, a number of computational experiments have been conducted. In fig. 2 a signal with noise interference is shown, on the basis of which the input signal is restored. In fig. 3 the accurate and restored signals are provided.



**Fig. 2.** Signal on the output of the nonlinear dynamic object (6)



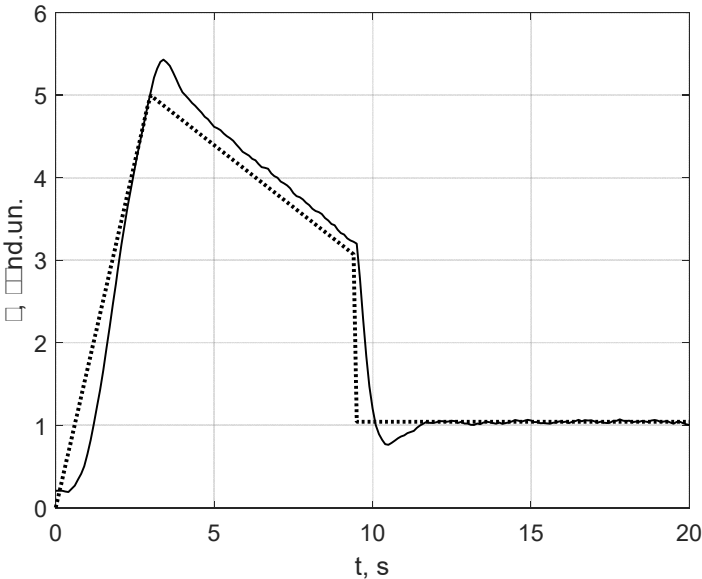
**Fig. 3.** Signal on the output of the nonlinear dynamic object (6)  
(..... — accurate, — — — restored)

In the case when the linear part is determined by the semi-inertial link, the macro-model in the form of the integro-degree Volterra series has the form:

$$y(t) = \int_0^t k \left( \sqrt{\frac{T}{\pi k}} - e^{-\frac{\tau}{T}} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\tau}{T}} \right) x(t-\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \frac{k^2}{T^2} \left( \sqrt{\frac{T}{\pi k}} - e^{-\frac{\tau_1}{T}} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\tau_1}{T}} \right) \left( \sqrt{\frac{T}{\pi k}} - e^{-\frac{\tau_2}{T}} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\tau_2}{T}} \right) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (7)$$

On Fig. 4 the results of signal restoration are given.



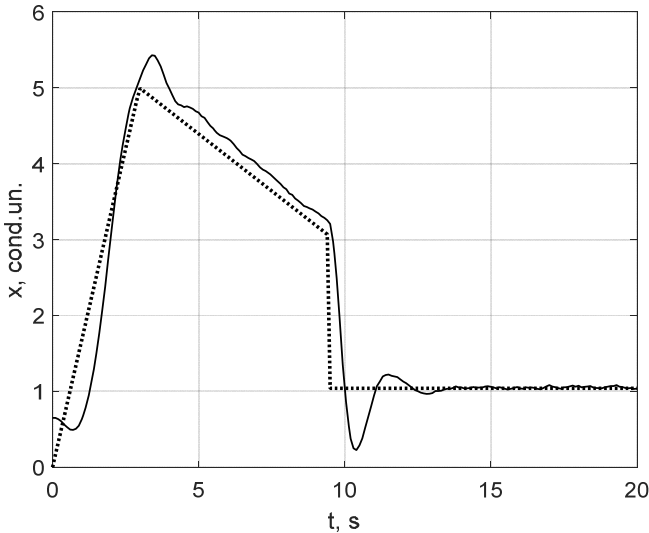
**Fig. 4.** Signal on the output of the nonlinear dynamic object (7)  
(..... — accurate, ——— — restored)

The macro model in the form of the integro-degree Volterra series, providing that the linear part is determined by the link of delay, has the form:

$$y(t) = \int_0^t 0.5 \sqrt{\frac{T}{\pi \tau^3}} e^{-\frac{T}{4\tau}} x(t-\tau) d\tau =$$

$$+ \int_0^t \int_0^t 0.5^2 \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\tau_1^3 \tau_2^3}} e^{-\frac{T(\tau_1+\tau_2)}{4\tau_1\tau_2}} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (8)$$

On Fig. 5 the results of signal restoration are given.



**Fig. 5.** Signal on the output of the nonlinear dynamic object (8)  
(..... — accurate, ———— — restored)

**Conclusions.** The computational experiments have shown that the developed regularization method for solving Volterra polynomial integral equations of the first kind on the basis of on the introduction of a differential regularization operator allows obtaining high accuracy in regenerating of signals at the input of nonlinear dynamic objects with distributed parameters in the presence of noise interference.

### References:

1. Ivaniuk V. A. Integral models of irrational and transcendental links / V. A. Ivaniuk, V. O. Tykhokhod, S. O. Protasov // Mathematical and computer simulation. Series: Engineering sciences : collection of research papers / Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University, V. M. Hlushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University, 2011. — ISSUE 5. — P. 101–109.
2. Ivanyuk V. Solving inverse problems of dynamics of nonlinear objects based on the Volterra series / V. Ivanyuk, V. Ponedilok, J. Sterten // Computational problems of electrical engineering — Lviv : Lviv Polytechnic National University, 2016. — Vol. 6, No. 1. — P. 9–16.
3. Ponedilok V. Regularization Method of Restoration of Input Signals of Non-linear Dynamic Objects that Determined by Integro-Degree Volterra Series / V. Ponedilok // Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences: scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University. — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University, 2018. — ISSUE 17. — P. 133–140.



4. Pupkov K. A. Functional series in the theory of nonlinear systems / K. A. Pupkov, V. I. Kapalin, A.S. Yushchenko. — М. : Nauka, 1976. — 448 p.
5. Solodusha S. V. Simulation of automatic control systems based on Volterra polynomials / S. V. Solodusha // Simulation and analysis of information systems. — 2012. — № 1. — P. 60–68.
6. Verlan A. F. Integral equations: Methods. Algorithms. Programs: Reference book / A. F.Verlan, V. S. Sizikov. — К. : Nauk. dumka, 1986. — 548 p.

### **МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛУ НА ВХОДІ НЕЛІНІЙНОГО ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

У статті розглянуто метод відновлення сигналу на вході нелінійного динамічного об'єкта з розподіленими параметрами. Для опису даних об'єктів обрано універсальну математичну модель у вигляді інтегро-степеневого ряду Вольтерри. Задача відновлення сигналу зводиться до задачі розв'язування поліноміального рівняння Вольтерри першого роду. Чисельну реалізацію таких моделей пропонується здійснювати з використанням квадратурних методів, зокрема, методу трапецій. Для збільшення стійкості розв'язку при наявності шумових завад у вхідних даних запропоновано використання диференціального регуляризаційного оператора, який дозволяє некоректно поставлену задачу перевести у клас коректних. Можливість застосування такого підходу досліджено при розв'язуванні поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри I роду другого порядку, яке описує нелінійні динамічні об'єкти із квадратичною нелінійністю. В статті наведено обчислювальні формули для розв'язання даного типу рівнянь. Отримані нелінійні алгебраїчні рівняння другого порядку після апроксимації вихідного рівняння інтегральними сумами розв'язуються ітераційними методами із початковим наближенням у вигляді попередньо обчисленого кореня. Розроблені алгоритми реалізовано у вигляді програмних модулів в середовищі Matlab, за допомогою яких проведено ряд обчислювальних експериментів. Як приклад, вибрано нелінійні динамічні об'єкти, які містять статичну нелінійність другого порядку та динамічні ланки, які є типовими для об'єктів із розподіленими параметрами. Такими ланками є: напівінтегральна ланка, ланка затухання (напівзапізнення) та напівінерційна ланка. На основі застосування еквівалентних перетворень отримано макромоделі об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри I роду другого порядку із ядрами, які описують вказані вище ланки. Результати обчислювальних експериментів, які наведено у вигляді графіків, показали, що запропонований підхід може ефективно використовуватись при відновленні сигналів на вході нелінійних динамічних об'єктів із розподіленими параметрами.

**Ключові слова:** *відновлення сигналів, нелінійні динамічні об'єкти з розподіленими параметрами, ряди Вольтерри, рівняння Вольтерри I роду, Matlab/Simulink.*

Отримано: 12.11.2018

УДК 539.374:621.78

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.74-90

**О. В. Сікора\***, канд. техн. наук,

**М. В. Дорошенко\***, канд. фіз.-мат. наук,

**В. М. Семерак\*\***, канд. техн. наук,

**Є. Г. Іваник\*\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\*Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич,

\*\*Львівський національний аграрний університет, м. Дубляни,

\*\*\*Національна академія сухопутних військ

імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів

### **ПРОГНОЗНА ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ПІДВИЩЕННЯ ВТОМНОГО ОПОРУ ЕЛЕМЕНТІВ ЗВАРНИХ КОНСТРУКЦІЙ ТЕРМООБРОБКОЮ**

Виконано аналіз впливу на величину граничних залишкових напружень циклу зварних з'єднань. Отримано рівняння для визначення максимальних граничних напружень циклу, підданого обробці зварного з'єднання. Викладена методика розрахунку ефективності повного усунення залишкових напружень термообробкою застосовна не тільки для випадку, коли вихідні залишкові напруження в зварному з'єднанні досягають значення межі текучості матеріалу, але також і для випадку, коли ці напруження не перевищують значення, але вищі за граничну величину початкових залишкових напружень, за яких максимальний рівень напружень в зонах концентраторів зварного з'єднання при циклічному навантаженні досягає значення межі текучості матеріалу.

Отримано залежності для визначення граничних напружень за локальної термообробки металоконструкцій локально-зосередженими тепловими потоками. Встановлено, що зниження вихідного рівня залишкових зварних напружень підвищує границю витривалості стикових з'єднань. На основі розробленого методу оцінки впливу залишкових зварних напружень та їх перерозподілу внаслідок локальної термообробки досліджено залежність граничної величини залишкових напружень від коефіцієнта асиметрії циклу зовнішнього навантаження.

Аналіз отриманих співвідношень та експериментальних даних вказує, що локальна термообробка приводить до суттєвого підвищення граничних напружень і циклічної довговічності зварних з'єднань. Ефективність застосування такого виду зміцнення елементів зварних конструкцій залежить від механічних характеристик матеріалів, параметрів зовнішнього навантаження, типу з'єднань тощо. Найбільший вплив локаль-

на термообробка має на опір втомі зварних з'єднань конструкцій в умовах знакозмінного циклу навантаження.

**Ключові слова:** *термообробка, зварювання, надійність, довговічність, змінне навантаження, втомна міцність, металокопструкції, машини.*

**Вступ.** Однією з основних задач сучасної техніки і практики застосування зварювальних технологій є підвищення надійності і довговічності несучих металокопструкцій машин і споруд. Значна частина промислових зварних металокопструкцій, які знаходять застосування в інженерній практиці, експлуатуються в умовах змінного (зокрема, циклічно-змінного) навантаження. Несуча здатність більшості металокопструкцій (крани, екскаватори, будівельні і дорожні машини, вироби спеціального призначення) визначається головним чином опором втомі елементів зварних з'єднань. Про це свідчать багаточисельні випадки утворення в зонах зварних швів втомних тріщин, що нерідко призводить до передчасного виходу з ладу або катастрофічного руйнування зварних копструкцій [1, 2].

Роль як розтягуючих, так і стискувальних залишкових напружень у механічних процесах з урахуванням втоми, суттєво змінюється залежно як від рівня цих напружень, так і зовнішніх механічних і теплових навантажень, асиметрії циклу, типу з'єднань, фізико-механічних характеристик застосовуваних матеріалів [2–6]. Відсутність надійних і водночас простих і зрозумілих методик розрахунку впливу залишкових напружень на опір втомі зварювальних елементів копструкцій стримує широке впровадження зміцнюючих технологій, заснованих на перерозподілі залишкових напружень.

Підвищення циклічної довговічності зварних металокопструкцій об'єктів машинобудування, автомобілебудування, авіаційній промисловості, які знаходять застосування в інженерній практиці, досягаються шляхом додаткової обробки, одним з основних способів такого зміцнення є термообробка. Цей шлях підвищення надійності і довговічності елементів зварних з'єднань, які експлуатуються в умовах циклічного навантаження, є перспективним та економічно доцільним.

**Постановка проблеми.** Якнайповніше використання технологій локальної термообробки гальмується відсутністю простих інженерних і водночас надійних методів розрахункової оцінки впливу залишкових напружень розтягу і стиску на циклічну довговічність зварних елементів. Тому дана стаття, в якій розглянуто процедуру формування розрахункових методів прогнозування ефективності застосування цього виду обробітку для підвищення опору втомі зварних з'єднань елементів машинобудівних копструкцій є практично важливою і не

втрачає своєї актуальності і донині, незважаючи на досить давню історію висвітлення питань вирішення даної проблеми [2, 6].

Поставимо задачу визначення працездатності елементів зварних металоконструкцій і прогнозування оцінки підвищення опору втомі. Подано варіант методики розрахункової оцінки ефективності підвищення опору втомі зварних металічних з'єднань на основі аналізу напруженого стану з урахуванням залишкових напружень та їх зміни під дією локальної термообробки і циклічного навантаження.

В статті подано метод розрахункової оцінки ефективності заходів підвищення втомі зварних з'єднань, заснованих на перерозподілі залишкових напружень. Метод базується на аналізі напруженого стану в зонах концентраторів зварних елементів з урахуванням залишкових зварних напружень і їх зміни під дією локальної термообробки локально-скерованих джерел нагрівання та циклічного навантаження.

**Аналіз попередніх публікацій.** Дослідження з наукового напрямку підвищення надійності і довговічності елементів зварних конструкцій локальною термообробкою започатковані ще в минулому сторіччі Інститутом електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України в рамках науково-технічної проблеми «Систематизувати і узагальнити дослідження відомих способів і розробити нові конструктивно-технологічні заходи, які забезпечують підвищення несучої здатності зварних конструкцій при одночасному зниженні матеріалоемності; розробити рекомендації з розрахунку зварних металоконструкцій на втому». З цією метою виконано дослідження закономірностей зміни залишкових напружень за умов циклічного навантаження [2–6]. Ці дослідження дали змогу здійснити переоцінку існуючих підходів і по-новому підійти до оцінки впливу залишкових зварних напружень і їх перерозподілу під дією термообробки на величину граничних напружень і циклічну довговічність зварних елементів конструкцій.

Сучасні інженерні конструкції працюють в умовах підвищених температур (900°C і більше). Наприклад, авіаційні двигуни пасажирського лайнера або надзвукового реактивного винищувача, чи двигуни потужної техніки будівельної індустрії, працюють 2–4% свого ресурсу в найбільш тяжконавантаженому режимі, 20–30% в номінальному (експлуатаційному) режимі, решта часу в більш легких режимах [1–3]. В цих умовах міцність конструкційних матеріалів, особливо металів та їх сплавів, суттєво залежить від температури, тривалості та особливості навантаження [4, 5]. В умовах роботи комбінованих режимів (від початку до повної зупинки) застосовують принцип «лінійного сумування пошкоджень», який вперше було висунуто Пальгреном у 1924 р. при оцінці довговічності кулькових підшипників. Для тривалої міцності цей принцип був застосований Робінсоном у 1952 р. як узагальнення експериментальних даних [2].

**Мета статті:** оцінка ефективності підвищення втомного опору елементів зварних конструкцій термообробкою.

**Виклад основного матеріалу.** Міцність конструкційних матеріалів, особливо металів та їх сплавів, суттєво залежить від температури, тривалості та особливостей прикладання зовнішніх теплових навантажень [1–6]. У процесі циклічного навантаження відбувається зміна початкових значень залишкових напружень і тому оцінку опору втомі зварних елементів необхідно виконувати з урахуванням цього чинника [7–11]. Незважаючи на значні здобутки, отримані в цій галузі і висвітлені в низці робіт [2–16], досі не до кінця з'ясовані закономірності зміни залишкових напружень в умовах змінного навантаження залежно від конструктивно-технологічних та експлуатаційних факторів. Ця обставина стримує розвиток методів оцінки опору втомі, заснованих на аналізі напружено-деформованого стану в зонах концентраторів зварних з'єднань.

Метод розрахункової оцінки впливу залишкових зварних напружень на величину граничних циклічних напружень зварних з'єднань передбачає, що амплітуда граничних напружень зварного з'єднання з високим рівнем розтягуючих залишкових напружень  $\sigma_a^{zal}$  визначається залежністю [4]:

$$\sigma_a^{zal} = \frac{\sigma_b - \sigma_T / \alpha_\sigma}{\sigma_b / \sigma_{-1} - 1}, \quad (1)$$

де  $\sigma_{-1}$  — амплітуда граничних напружень зварювального з'єднання без залишкових напружень при симетричному циклі навантаження;  $\sigma_T$  і  $\sigma_b$  — границі текучості і міцності матеріалу відповідно;  $\alpha_\sigma$  — пружний коефіцієнт концентрації напружень зварювального з'єднання.

Величина максимальних граничних напружень  $\sigma_{max}^{zal}$  у цьому випадку залежно від коефіцієнта асиметрії  $R_\sigma$  і середніх напружень  $\sigma_m$  циклу зовнішнього навантаження визначається з рівняння [5]

$$\sigma_{max}^{zal} = \frac{2\sigma_a}{1 - R_\sigma}, \quad (2)$$

$$\sigma_{max}^{zal} = \sigma_a^{zal} + \sigma_m. \quad (3)$$

Графік залежності (2) в координатах  $(\sigma_{max}, \sigma_m)$  є прямою лінією, нахиленою під кутом  $45^\circ$  до координатних осей. Якщо локальна термообробка призводить до повного зняття залишкових зварних напружень, то подавши діаграму граничних напружень з'єднань, що перебувають в умовах локальної термообробки, у вигляді залежностей Гудмена [16]

$$\sigma_{\max} = \frac{2}{(1 - R_{\sigma})\sigma_{-1} + (1 + R_{\sigma})\sigma_b}.$$

З урахуванням (1) отримуємо рівняння для визначення максимальних граничних напружень циклу, підданого обробці зварного з'єднання  $\sigma_{\max}^{обр}$ , за відомим значенням  $\sigma_a^{зал}$

$$\sigma_{\max}^{обр} = \frac{\sigma_b - \sigma_T / \alpha_{\sigma}}{(1 - R_{\sigma})(\sigma_b - \sigma_T / \alpha_{\sigma}) / 2\sigma_a^{зал} + 1} \quad (4)$$

Величина максимальних граничних напружень циклу внаслідок зняття залишкових напружень збільшується від  $\sigma_{\max}^{зал}$  до  $\sigma_{\max}^{обр}$ .

Якщо зовнішнє навантаження характеризується значними за величиною середніми напруженнями циклу (зокрема, від власної ваги конструкції), які залишаються сталими незалежно від рівня змінної складової циклу, то усунення залишкових напружень приведе до підвищення максимальних напружень, які набуватимуть деякого значення  $\sigma_{\max 1}^{обр}$ , але меншого за величину  $\sigma_{\max}^{обр}$ . За фіксованого значення  $\sigma_m$  оцінку ефективності повного зняття залишкових напружень слід здійснювати з використанням залежності (3), а також залежності

$$\sigma_{\max}^{обр} = \frac{\sigma_a^{зал} \cdot \sigma_b + \sigma_m (\sigma_b - \sigma_T / \alpha_{\sigma})}{\sigma_a^{зал} + \sigma_b - \sigma_T / \alpha_{\sigma}} \quad (5)$$

Отримані залежності (2)–(5) вказують на те, що різниця значень границь витривалості зварних з'єднань у вихідному (до термообробки) і по завершенні термомеханічної обробки зменшується. У деякому проміжному стані, за якого

$$R_{\sigma} = R_{\sigma 1}, \text{ або } \sigma_m = \sigma_{m 1},$$

причому

$$R_{\sigma 1} = 1 - \frac{2\alpha_{\sigma}\sigma_a}{\sigma_T}, \quad \sigma_{m 1} = \sigma_T - \alpha_{\sigma}\sigma_a^{зал},$$

спостерігається майже повне співпадіння амплітуд циклічних напружень.

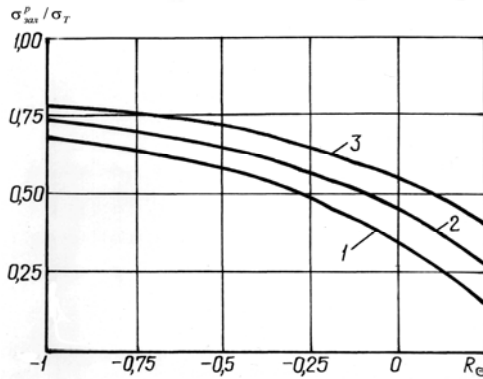
Викладена методика розрахунку ефективності повного усунення залишкових напружень термообробкою застосовна не тільки для випадку, коли вихідні залишкові напруження в зварному з'єднанні досягають значення межі текучості матеріалу, але також і для випадку, коли ці напруження не перевищують значення  $\sigma_T$ , але вищі за граничну величину початкових залишкових напружень  $\sigma_{зал}^p$ , за яких максимальний рівень напружень в зонах концентраторів зварного

з'єднання при циклічному навантаженні досягає значення межі текучості матеріалу ( $\sigma_{\max}^k = \sigma_T$ ). Залежно від асиметрії циклу зовнішнього навантаження величина  $\sigma_n^{зал}$  визначається з співвідношення

$$\sigma_{зал}^p / \sigma_T = 1 - \frac{2\alpha_\sigma \sigma_{зал}^p}{(1 - R_\sigma) \sigma_T}.$$

Графік цієї залежності для різних типів зварних з'єднань з низько вуглецевої сталі подано на рис. 1.

Повне зняття залишкових зварних напружень є частковим випадком сприятливого перерозподілу залишкових напружень в умовах термообробки. В більшості випадків такою обробкою досягається лише часткове усунення розтягуючих залишкових напружень або формування в зонах концентраторів зварних з'єднань залишкових напружень стиску. Якщо рівень залишкових напружень після обробки  $\sigma_{обр}^{зал} \geq \sigma_{зал}^p$ , то такий перерозподіл залишкових напружень не приведе до підвищення втомної міцності зварного елемента; це обумовлюється тим, що в зонах концентраторів зварного з'єднання в умовах циклічного навантаження буде також як в необробленому виробі реалізовано граничний цикл зміни напружень ( $\sigma_{\max}^k = \sigma_T$ ).



**Рис. 1.** Залежність граничної величини залишкових напружень  $\sigma_{зал}^p$  від коефіцієнта асиметрії циклу зовнішнього навантаження.  $R_\sigma$ : крива 1 —

$$\frac{\alpha_\sigma \sigma_a^{зал}}{\sigma_T} = 0,325; \text{ крива 2 — } \frac{\alpha_\sigma \sigma_a^{зал}}{\sigma_T} = 0,27; \text{ крива 3 — } \frac{\alpha_\sigma \sigma_a^{зал}}{\sigma_T} = 0,22$$

Діаграми граничних напружень зварних з'єднань, підданих термообробці, за наявності залишкових розтягуючих або стискуючих

напружень, будуть паралельними аналогічній діаграмі без залишкових напружень [6], що відображено на рис. 1. Різниця значень границь витривалості зварних з'єднань як без залишкових напружень так і з ними, згідно результатів робіт [6; 7], а також за умови фіксації величини середніх напружень циклу  $\sigma_m$  зовнішнього навантаження, не залежить від них, тобто

$$\Delta\sigma_{\max}^{\sigma_m=\text{const}} = \frac{\sigma_{\text{зал}}^{\text{обр}} \cdot \sigma_{-1}}{\alpha_{\sigma} \cdot \sigma_b}. \quad (6)$$

Використовуючи залежність, запозичену з праць [2, 3] отримаємо таке співвідношення:

$$\sigma_{\max}^{\text{обр}} = \sigma_{\max} \left( 1 - \frac{\sigma_{\text{зал}}^{\text{обр}}}{\alpha_{\sigma} \cdot \sigma_b} \right), \quad (7)$$

отримуємо

$$\Delta\sigma_{\max}^{R_{\sigma}=\text{const}} = \frac{\sigma_{\text{зал}}^{\text{обр}} \cdot \sigma_{\max}}{\alpha_{\sigma} \cdot \sigma_b}, \quad (8)$$

Звідси, беручи до уваги залежності (6)–(8), випливає, що відносна зміна меж витривалості під дією залишкових зварних напружень не залежить від асиметрії циклу зовнішнього навантаження, а з підвищенням значення  $R_{\sigma}$  величина  $\Delta\sigma_{\max}^{R_{\sigma}=\text{const}}$  зростає, оскільки зростає також величина  $\sigma_{\max}$ .

Вихідними даними для оцінки ефективності локальної термообробки на основі отриманих залежностей (6)–(8), а також результатів робіт [1–3] є значення границь витривалості зварних з'єднань без залишкових напружень. Якщо такі дані відсутні, а є у наявності значення амплітуди граничних напружень зварних з'єднань з високими залишковими напруженнями  $\sigma_a^{\text{зал}}$ , обумовлених термообробкою [8–15], то на основі залежності, отриманої у праці [2]

$$\sigma_{-1} = \frac{\sigma_b}{(\sigma_b - \sigma_T / \alpha_{\sigma}) / \sigma_a^{\text{зал}} + 1},$$

приходимо до таких рівнянь для визначення границь витривалості зразків, підданих термообробці:

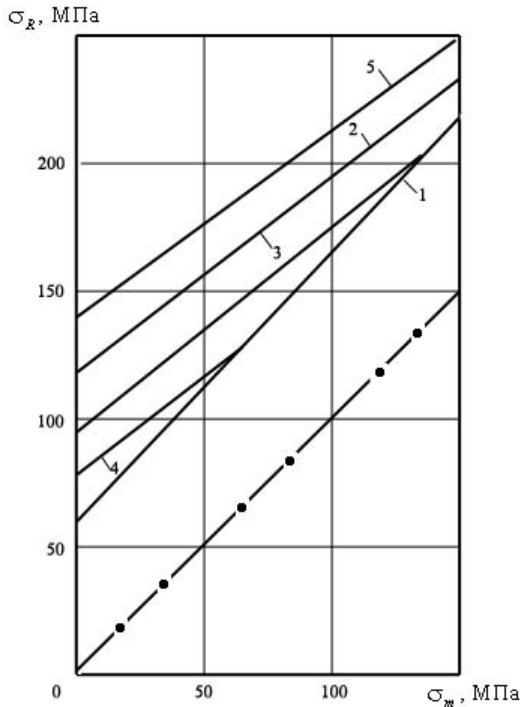
$$\sigma_{\max}^{\text{обр}} = \frac{\sigma_a^{\text{зал}} (\sigma_b - \sigma_{\text{зал}}^{\text{обр}} / \alpha_{\sigma}) + \sigma_m (\sigma_b - \sigma_T / \alpha_{\sigma})}{\sigma_b + \sigma_a^{\text{зал}} - \sigma_T / \alpha_{\sigma}}; \quad (9)$$

$$\sigma_{\max}^{\text{обр}} = \frac{\sigma_b - \sigma_{\text{зал}}^{\text{обр}} / \alpha_{\sigma} \sigma_a^{\text{зал}} + \sigma_m (\sigma_b - \sigma_T / \alpha_{\sigma})}{(1 - R_{\sigma}) \cdot (\sigma_b - \sigma_T / \alpha_{\sigma}) / 2\sigma_a^{\text{зал}} + 1}. \quad (10)$$



За умови  $\sigma_{зал}^{обр} = 0$  рівняння (9) і (10) співпадають з рівняннями, отриманими у роботі [2], які визначають межу витривалості зварних з'єднань у випадку повного зняття залишкових напружень.

Як свідчить аналіз впливу залишкових напружень на величину граничних напружень циклу зварних з'єднань, якщо в умовах постлокальної термообробки рівень залишкових напружень в зонах концентраторів зварного виробу знаходиться у діапазоні  $\sigma_T \leq \sigma_{зал} \leq \sigma_{зал}^{гр}$ , то термообробка не досягла бажаного результату (є неефективною) і амплітуда граничних напружень з'єднання не залежить як від асиметрії циклу зовнішнього навантаження, так і рівня вихідних залишкових напружень (лінія 1, рис. 2).



**Рис. 2.** Діаграма граничних напружень зварного стикового з'єднання:

крива 1 —  $\sigma_{зал} \geq \sigma_{зал}^{гр}$ ; крива 2 —  $\sigma_{зал} = 0$ ; крива 3 —  $\sigma_{зал} = 100$  МПа;

крива 4 —  $\sigma_{зал} = 200$  МПа; крива 5 —  $\sigma_{зал} = -100$  МПа

Якщо зварне з'єднання перебуває в умовах локальної термообробки, причому у зонах концентраторів  $\sigma_{зал}^{обр} = \sigma_{зал}^{гр}$ , і вважати, що

рівень цих напружень не зміниться під дією циклічного навантаження, то величина граничних напружень дається залежністю

$$\sigma_{\max}^{обр} = \begin{cases} \frac{2\sigma_{-1}(\sigma_b - \sigma_{зал}^{обр} / \alpha_\sigma)}{(1 - R_\sigma) \cdot \sigma_b + (1 + R_\sigma) \cdot \sigma_{-1}}, R_\sigma < R_{\sigma_2}, \\ \frac{2(\sigma_b - \sigma_{зал}^{обр} / \alpha_\sigma)}{(1 - R_\sigma) \cdot (\sigma_b / \sigma_{-1} - 1)}, R_\sigma \geq R_{\sigma_2}. \end{cases} \quad (11)$$

У рівнянні (11) позначено:  $R_{\sigma_2} = 1 - \frac{2\alpha_\sigma \sigma_{-1} (\sigma_b - \sigma_T / \alpha_\sigma)}{(\sigma_T - \sigma_{зал}^{обр}) (\sigma_b / \sigma_{-1} - 1)}$ .

Якщо вихідними даними для розрахунку є значення амплітуди граничних напружень зварних з'єднань з високими залишковими напруженнями розтягу  $\sigma_a^{зал}$ , то рівняння (11) набуде вигляду:

$$\sigma_{\max}^{обр} = \begin{cases} \frac{\sigma_b - \sigma_{зал}^{обр} / \alpha_\sigma}{(1 - R_\sigma) \cdot (\sigma_b - \sigma_T / \alpha_\sigma) / 2\sigma_a^{зал} + 1}, R_\sigma < R_{\sigma_2}, \\ \frac{2\sigma_a^{зал}}{1 - R_\sigma}, R_\sigma \geq R_{\sigma_2}, \end{cases} \quad (12)$$

де  $R_{\sigma_2} = 1 - \frac{2\alpha_\sigma \sigma_a^{зал}}{\sigma_T - \sigma_{зал}^{обр}}$ .

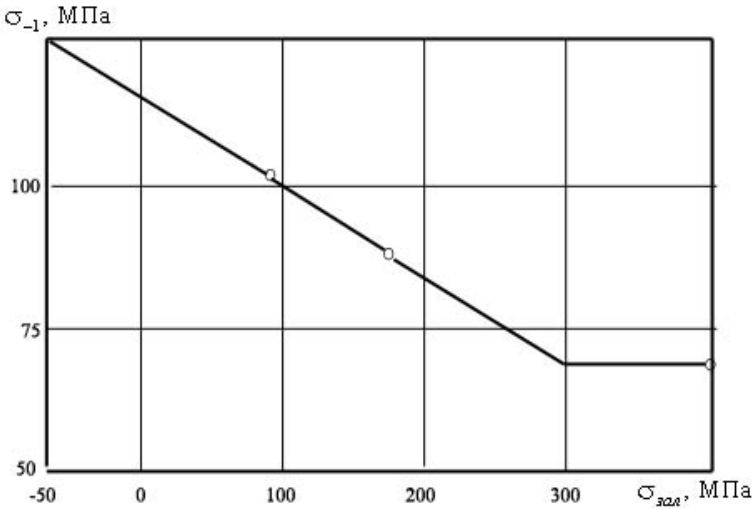
Діаграма граничних станів, побудована у відповідності до залежностей (11), (12), складається з двох ділянок (рис. 2). Перша є лінійною, паралельною аналогічній залежності для зварних з'єднань без залишкових напружень. Ця лінія визначає значення границь витривалості аж до її перетину з лінією граничних напружень з високими розтягуючими залишковими напруженнями.

Апробація отриманих розрахункових залежностей здійснювалась шляхом випробувань зварних стикових з'єднань ( $\alpha_\sigma = 1,32$ ) з низьколегованої сталі 14Г2 ( $\sigma_T = 380$  МПа,  $\sigma_b = 540$  МПа).

Результати втомних випробувань зварних зразків при симетричному циклі навантаження (чистий згин) показали, зниження вихідного рівня залишкових зварних напружень до значення 170 МПа підвищує границю витривалості стикових з'єднань на основі  $N = 2 \cdot 10^6$  циклів від 70 МПа до 90 МПа, що складає 28%. Співставлення експериментальних даних і результатів обрахунку наведено на рис. 3 і показало добру їх відповідність.

Отримані тут залежності відрізняються від класичних, наведених у праці [17], що обумовлюється, по-перше, тим, що аналіз впливу

залишкових напружень зварних з'єднань на опір втомі виконано з урахуванням концентрації напружень на перерозподіл залишкових напружень; по-друге, з отриманих розрахункових залежностей випливає, що зміна межі витривалості за фіксованого значення середніх напружень циклу зовнішнього навантаження складає  $\frac{\sigma_{-1}\sigma_{зал}}{\alpha_{\sigma}\sigma_b}$ , а у роботі [17] вона приймається рівною  $\frac{\sigma_{-1}\sigma_{зал}}{\sigma_b}$ .



**Рис. 3.** Розрахункова залежність межі витривалості зварного стикового з'єднання при симетричному циклі навантаження від рівня залишкових напружень (o — експериментальні дані)

Значення середніх напружень циклу зовнішнього навантаження складає  $\frac{\sigma_{-1}\sigma_{зал}}{\alpha_{\sigma}\sigma_b}$ , а у роботі [17] вона приймається рівною  $\frac{\sigma_{-1}\sigma_{зал}}{\sigma_b}$ .

Нехтування цією обставиною приводить до того, що для стикового з'єднання розрахункова величина зміни межі витривалості під дією залишкових напружень відрізняється від фактичної на 20..40%, а у випадку хрестоподібного з'єднання — більш ніж 100%.

Аналіз результатів втомних випробувань зварних з'єднань у вихідному стані та після термообробки [1; 2] вказує на те, що в умовах багаточиклового навантаження (циклів) похила ділянка кривих втомі досить добре описується залежністю

$$\sigma = A + B \lg N, \quad (13)$$

Графік (13) в півлогарифмічній шкалі системи координат  $(\sigma, \lg N)$  має вигляд прямої лінії.

Рівняння похилої ділянки кривої втоми зварного з'єднання у вихідному стані (за наявності високих розтягуючих залишкових напружень) можна подати у вигляді

$$\lg(N_s / N_1) = \frac{\sigma - \sigma_R^s}{\sigma_2 - \sigma_R^s} \lg(N_2 / N_1), \quad (14)$$

де в залежностях (13), (14) позначено:  $N_s$  — довговічність зварного з'єднання у вихідному стані;  $\sigma$  — рівень максимальних напружень циклу зовнішнього навантаження;  $\sigma_R^s$  — межа витривалості зварного з'єднання у вихідному стані на базі  $N_1 = 2 \cdot 10^6$  циклів;  $\sigma_2$  — обмежена межа витривалості зварного з'єднання у вихідному стані на базі  $N_2 = 2 \cdot 10^5$  циклів.

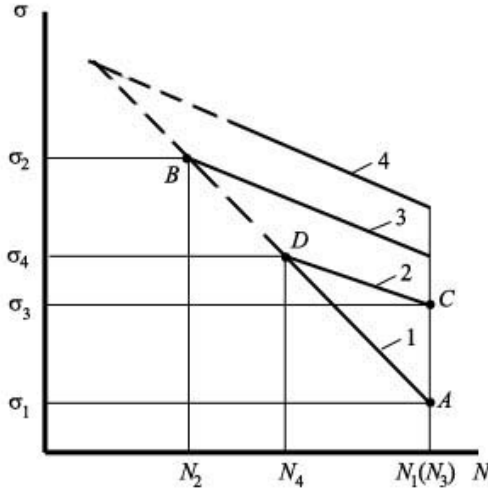
Параметри рівняння похилої ділянки кривої втоми зварного з'єднання у вихідному стані визначаються на основі результатів втомних випробувань крупно масштабних зварних зразків, або невеликих зварних зразків та розрахункових залежностей (13), (14).

Якщо рівень залишкових напружень після локальної термообробки  $\sigma_s$  задовольняє умові  $\sigma_s \geq \sigma_T - \alpha_\sigma \sigma$ , то такий перерозподіл залишкових напружень не приведе до підвищення циклічної довговічності зварного з'єднання на заданому рівні навантаження  $\sigma$ . Це обумовлено тим, що в зонах концентраторів зварного з'єднання як і у випадку необробленого виробу реалізується граничний цикл зміни напружень.

Якщо термообробка обумовлює більш суттєвий перерозподіл залишкових напружень, то це приводить до підвищення циклічної довговічності зварного з'єднання. У цьому випадку в зонах концентраторів обробленого з'єднання реалізується цикл зміни більш сприятливий за асиметрією, ніж це має місце в необробленому зварному з'єднанні.

На основі параметрів кривої втоми зварного з'єднання у вихідному стані визначається циклічна довговічність обробленого з'єднання. Перша точка (точка  $C$  на рис. 4) з координатами  $(N_1, \sigma_R^p)$  характеризує значення межі витривалості термообробленого зварного з'єднання  $\sigma_R^p$  на базі  $N_1 = 2 \cdot 10^6$  циклів.

Величина  $\sigma_R$  визначається за відомим значення межі витривалості зварного з'єднання у вихідному стані на базі залишкових напружень  $\sigma_R$  з використанням залежностей [1, 9, 10]



**Рис. 4.** Похила ділянка кривої втоми зварних з'єднань:  
крива 1 — в стані після завершення зварювання;  
2, 3, 4 — після термообробки за умови  $\sigma_s > 0$ ,  $\sigma_s = 0$  і  $\sigma_s < 0$

$$\sigma_R^p = \frac{\sigma_b - \sigma_s / \alpha_\sigma}{(\sigma_b - \sigma_T / \alpha_\sigma) \sigma_R^s + 1} \quad (15)$$

Координати другої точки  $N_4$  і  $\sigma_4$  (точка  $D$  на рис. 4) визначаються з міркувань: із зростанням рівня зовнішнього навантаження різниця значень довговічності зварних з'єднань у вихідному стані та після термообробки знижується, що обумовлюється тим, що різниця асиметрії циклу в зонах концентраторів зварних з'єднань у вихідному стані та після виконання зміцнюючої термообробки зі збільшенням зовнішнього навантаження буде зменшуватись (рис. 4). Починаючи з деякого рівня навантаження напружений стан в зонах концентраторів зварних з'єднань буде ідентичним.

Величину зовнішнього навантаження за якого рівень залишкових напружень в зонах концентраторів зварних з'єднань у вихідному стані досягне значення таких напружень в сполученні, які визначаються з співвідношення

$$\sigma_s + \alpha_\sigma \sigma_4 = \sigma_T \text{ або } \sigma_4 = (\sigma_T - \sigma_s) / \alpha_\sigma \quad (16)$$

Оскільки довговічність оброблених і необроблених зварних з'єднань за таких напружень, які визначаються з умови (16), будуть рівні між собою, то відповідні цьому рівню напруження значення циклічної довговічності  $N_4$  визначаються підстановкою залежності (16) у співвідношення (13), звідки

$$N_4 = \frac{\sigma_T - \sigma_s + \alpha_\sigma a}{\alpha_\sigma b}. \quad (17)$$

За відомими координатами двох точок  $C$  і  $D$  визначаються параметри похилої ділянки кривої втоми обробленого зварного з'єднання

$$b' = \frac{(\sigma_T - \sigma_s) / \alpha_\sigma - \sigma_R^p}{\lg(N_4 / N_1)}, \quad a' = \sigma_R^p - \frac{(\sigma_T - \sigma_s) / \alpha_\sigma - \sigma_R^p}{\lg(N_4 / N_1)} \lg N_1. \quad (18)$$

Підставляючи вирази (18) в співвідношення (13) дістанемо розрахункову формулу для визначення циклічної довговічності  $N_p$  обробленого зварного з'єднання

$$\lg(N_p / N_1) = \frac{\sigma - \sigma_R^p}{(\sigma_T - \sigma_s) / \alpha_\sigma - \sigma_R^p} \lg(N_4 / N_1) \quad (19)$$

Беручи до уваги залежності (15) і (17) і підставляючи їх у вираз (19) та виконавши необхідні перетворення дістанемо рівняння для визначення циклічної довговічності термообробленого зварного з'єднання на основі параметрів кривої втоми в стані після зварювання

$$\lg(N_p / N_1) = \frac{F_1}{b F_2}, \quad (20)$$

де

$$F_1 = \left\{ \sigma \left[ (\sigma_b - \sigma_T / \alpha_\sigma) / \sigma_R^s \right] - \sigma_b + \sigma_s / \alpha_\sigma \right\} \left[ (\sigma_T - \sigma_s) / \alpha_\sigma - a - b \lg N_1 \right];$$

$$F_2 = \left[ (\sigma_T - \sigma_s) / \alpha_\sigma \right] \left[ (\sigma_b - \sigma_T / \alpha_\sigma) / \sigma_R^s + 1 \right] - \sigma_b + \sigma_s / \alpha_\sigma$$

Введемо позначення

$$Q = \frac{N_p}{N_s}, \quad (21)$$

де  $Q$  — коефіцієнт, який вказує на в скільки раз зростає циклічна довговічність зварного виробу під дією зміцнюючої термообробки при заданому рівні навантаження.

Переписуючи залежність (14) у вигляді

$$\lg(N_s / N_1) = \frac{\sigma - \sigma_R^s}{(\sigma_T - \sigma_s) / \alpha_\sigma - \sigma_R^s} \lg(N_4 / N_1) \quad (22)$$

і підставляючи співвідношення (19) і (22) у вираз (21) та позначивши  $(\sigma_T - \sigma_s) / \alpha_\sigma = \sigma_p$ , приходимо до залежності

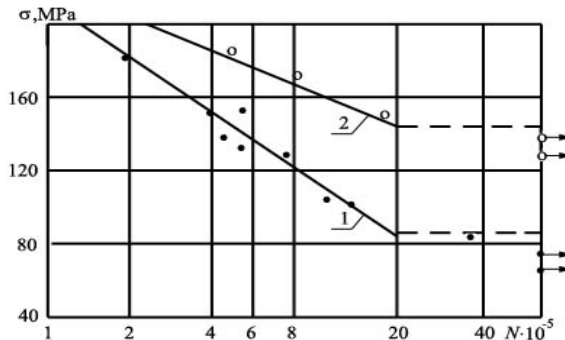
$$\lg Q = \frac{(\sigma_R^p - \sigma_R^s)(\sigma_p - \sigma)}{(\sigma_p - \sigma_R^p)(\sigma_p - \sigma_R^s)} \lg(N_1 / N_4). \quad (23)$$

В області обмеженої довговічності зварних з'єднань у вихідному стані та після термообробки величина  $Q$  буде максимальною за умови  $\sigma = \sigma_R^p$ , внаслідок чого вираз (23) набуде вигляду

$$\lg Q_{\max} = \frac{\sigma_R^p - \sigma_R^s}{\sigma_p - \sigma_R^s} \lg(N_1 / N_4).$$

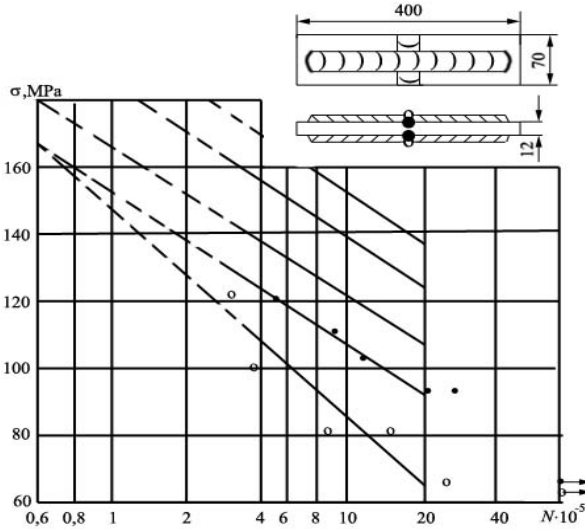
На основі отриманих залежностей (13)–(23) виконано розрахункові оцінки ефективності застосування термічної обробки з метою підвищення циклічної довговічності зварних з'єднань конструкцій, що відображено на рис. 5, рис. 6.

Результати розрахунків згідно залежності (20) показують, що повне усунення залишкових напружень в стиковому з'єднанні з низьколегованої сталі приводить до підвищення циклічної довговічності в 2..3 рази порівняно з довговічністю з'єднання в стані після зварювання, що ілюструється графіками на рис. 5. Часткове усунення залишкових зварних напружень виявляє дещо менший ефект, а саме спостерігається збільшення довговічності в 1,2..2 рази залежно від рівня прикладених напружень. Наведення в зонах зварних швів локальною термообробкою стискуючих залишкових напружень може привести до більш суттєвого підвищення циклічної довговічності зварних з'єднань конструкцій (рис. 6). Співставлення результатів розрахункової оцінки впливу перерозподілу залишкових зварних напружень термообробкою на циклічну довговічність зварних з'єднань в області багаточислового навантаження ( $N > 2.4 \cdot 10^5$  циклів) і результатів втомних випробувань габаритних зварних зразків показало добру їх відповідність, що ілюструється графіками на рис. 5 і рис. 6.



**Рис. 5.** Залежність циклічної довговічності зварного стикового з'єднання від рівня прикладених напружень: 1 — стан після зварювання;

2 — після термообробки за умови  $\sigma_s = 0$  (суцільні криві відповідають даним, отриманим на основі розрахункових залежностей, темні • і світлі о кружечки — експериментальні значення)



**Рис. 6.** Залежність циклічної довговічності зварного стикового з'єднання зі сталі 14Г2 від рівня прикладених напружень: 1 — стан після зварювання; 2, 3, 4, 5 — після термообробки за умови  $\sigma_s = 0$  МПа,  $\sigma_s = 85$  МПа,  $\sigma_s = 170$  МПа і  $\sigma_s = 185$  МПа відповідно (суцільні криві відповідають даним, отриманих на основі розрахункових залежностей, темні • і світлі о кружечки — експериментальні значення).

**Висновки.** Оскільки ефективність локальної термообробки головним чином залежить від величини і характеру розподілу тимчасових температурних полів і напружень, що виникають в зварних конструкціях за дії нерівномірного нагрівання, то невіддале сполучення зварних і тимчасових температурних напружень в процесі термообробки може привести навіть до зростання залишкових. Аналіз отриманих співвідношень та експериментальних даних вказує, що локальна термообробка приводить до суттєвого підвищення граничних напружень і циклічної довговічності зварних з'єднань. Ефективність застосування такого виду зміцнення елементів зварних конструкцій залежить від механічних характеристик матеріалів, параметрів зовнішнього навантаження, типу з'єднань тощо. Найбільший вплив локальна термообробка має на опір втомі зварних з'єднань конструкцій в умовах знакозмінного циклу навантаження. Усунення залишкових зварних напружень термообробкою в умовах асиметричного циклу навантаження приводить до підвищення меж витривалості зварних з'єднань з низько вуглецевої сталі на 30..40%, низьколегованої — на 50..60%, а високоміцної — на 70..100%. При цьому циклічна довговічність оброблених зварних з'єднань при рівні зовнішнього навантаження, близьких до значення



межі витривалості, збільшується в 2..4 рази порівняно з довговічністю з'єднань, які мають високі розтягуючі залишкові напруження.

Отримані результати придатні для використання в інженерній практиці при розробленні рекомендацій з підвищення надійності і циклічної довговічності зварних з'єднань і вузлів різного роду конструкцій та інженерних систем в машинобудуванні, тепло- та атомній енергетиці, автомобільній, авіаційній та космічній галузях.

### Список використаних джерел:

1. Андрейків О. С. Розрахунок залишкового ресурсу відповідальних елементів мостів / О. С. Андрейків, Й. Й. Лучка, І. М. Панько // Зб. наук. праць. Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. — 2001. — Вип. 3. — С. 19–22.
2. Труфяков В. И. Усталость сварных соединений / В. И. Труфяков. — К. : Наук. думка, 1973. — 216 с.
3. Труфяков В. И. Влияние степени концентрации напряжений на формирование остаточных напряжений при многоцикловом нагружении / В. И. Труфяков, О. И. Гуца, Ю. Ф. Кудрявцев // Автоматическая сварка. — 1981. — № 3. — С. 22–25.
4. Труфяков В. И. Влияние остроты концентратора на сварочные остаточные напряжения при многоцикловом нагружении / В. И. Труфяков, О. И. Гуца, Ю. Ф. Кудрявцев // Автоматическая сварка. — 1981. — № 7. — С. 13–16.
5. Кудрявцев Ю. Ф. Некоторые закономерности изменения остаточных напряжений при циклическом нагружении в зависимости от их начального уровня и концентрации напряжений / Ю. Ф. Кудрявцев, О. И. Гуца // Проблемы прочности. — 1986. — № 1. — С. 32–38.
6. Кудрявцев Ю. Ф. Изменение предельных циклических напряжений сварных соединений под действием остаточных напряжений / Ю. Ф. Кудрявцев, П. П. Михеев // Конструкционная прочность и механика разрушения сварных соединений. — Л., 1986. — С. 68–72.
7. Добрянський І. М. Ефективність термообробки зварних пластин рухомими зонами нагріву / І. М. Добрянський, Л. В. Хомляк, Є. Г. Іваник // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів і конструкцій / за заг. ред. Й. Й. Лучка. — Львів : Каменяр, 2007. — Вип. 7. — С. 431–436.
8. Добрянський І. М. Розрахунок залишкових напружень і деформацій у безмежній пластині за дії рухомих нормально-кругових джерел нагріву / І. М. Добрянський, Л. В. Хомляк, Є. Г. Іваник // Машинознавство. — 2008. — № 1. — С. 7–10.
9. Максимович В. Н. О выборе режимов нагрева и охлаждения для понижения остаточных сварочных напряжений в пластинах / В. Н. Максимович, Л. В. Хомляк // Проблемы прочности. — 1983. — № 4. — С. 33–39.
10. Іваник Є. Г. Розрахункова оцінка ефективності підвищення опору втомі зварних з'єднань / Є. Г. Іваник, В. І. Косарчин, В. М. Семерак // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів і конструкцій / за заг. ред. Й. Й. Лучка. — Львів : Каменяр, 2012. — Вип. 9. — С. 131–134.
11. Биргер И. А. Сопротивление материалов : учебное пособие / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. — М. : Наука, 1986. — 560 с.

12. Тальпов Г. Б. Приближенная теория сварочных напряжений / Г. Б. Тальпов — Л. : Изд-во ЛГУ, 1957. — 182 с.
13. Винокуров В. А. Отпуск сварных конструкций для снижения напряжений / В. А. Винокуров. — М. : Машиностроение, 1973. — 215 с.
14. Винокуров В. А. Сварочные деформации и напряжения / В. А. Винокуров. — М. : Машиностроение, 1968. — 236 с.
15. Винокуров В. А. Сварочные деформации и напряжения / В. А. Винокуров. — М. : Машиностроение, 1968.— 236 с.
16. Гатовский К. М. Оценка напряженно-деформированного состояния при стыковой сварке листов больших габаритов / К. М. Гатовский, С. П. Марков, В. С. Налетов // Процессы постройки, сварки и монтажа судов. — Л., 1981. — С. 69–74.
17. Окерблом Н. О. Расчет выносливости сварных конструкций с учетом напряжений, возникающих при сварке / Н. О. Окерблом // Сварочное производство. Тр. ЛПИ. — М. ; Л. : 1958. — № 93. — С. 26–47.

### FORECAST EVALUATION OF EFFICIENCY OF INCREASING OF WELDING PROTECTION OF ELEMENTS OF WELDED CONSTRUCTIONS BY THERMAL PROPERTIES

An analysis of influence on the magnitude of the limiting residual stresses of the cycle of welded joints is performed. An equation for determining the maximum boundary stresses of a cycle subjected to the treatment of a welded joint is obtained. The methodology for calculating the effectiveness of the complete elimination of residual stresses by heat treatment is applicable not only for the case when the output residual stresses in the welded joint reach the value of the material yield strength, but also for the case when these stresses do not exceed the value but above the limit value of the initial residual stresses, in which the maximum stresses in the zones of the weld hubs during cyclic loading reaches the value of the material yield strength.

Dependences were obtained for determining the boundary stresses for local heat treatment of metal structures by locally lumped heat fluxes. It has been established that reducing the output level of residual weld stresses increases the boundary of endurance of joints joints. On the basis of the developed method of estimating the impact of residual weld stresses and their redistribution as a result of local heat treatment, the dependence of the limiting value of residual stresses on the coefficient of asymmetry of the external load cycle was investigated.

The analysis of the obtained correlations and experimental data indicates that the local heat treatment leads to a significant increase in the boundary stresses and cyclic durability of the welded joints. The effectiveness of such a type of strengthening of the elements of welded structures depends on the mechanical characteristics of materials, parameters of external load, type of connections, etc. The greatest influence of local heat treatment is on the resistance of fatigue welded joints of constructions in conditions of an alternating load cycle.

**Key words:** *thermoprocessing, welding, dependable, long-lived, change power, fatigue durability, metal-constructions, machines.*

Отримано: 8.11.2018

УДК 004.942:681.511

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.91-102

**В. А. Федорчук**, д-р техн. наук, професор,

**Ю. В. Канарчук**, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ОДНОВИМІРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Розглянуто задачу комп'ютерного моделювання одновимірних нелінійних об'єктів з розподіленими параметрами. Використано метод прямих для апроксимаційного перетворення базової моделі, що подана у вигляді диференціального рівняння з частинними похідними. В результаті отримано систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Для комп'ютерної реалізації в середовищі Simulink/Matlab диференціальні рівняння подають у вигляді алгебраїчних залежностей простору Лапласа. Шляхом еквівалентних алгебраїчних перетворень в просторі Лапласа математична модель зводиться до вигляду, який зручний для побудови Simulink моделі. Отримана структурна модель складається з підсистем, що реалізують звичайні диференціальні рівняння другого порядку, причому підсистеми з'єднані як за допомогою прямих так і зворотних зв'язків. Це надало моделі властивість оборотності, тобто будь-яка підсистема може бути як об'єктом зовнішнього впливу, так і джерелом даних про зміну параметрів в часі для відповідного перерізу об'єкта, що моделюється. Ще однією позитивною рисою моделі є те, що на рівні підсистем, які відтворюють динаміку просторових ділянок розподіленого об'єкта, можна задавати різні фізичні параметри. Тоді така модель може використовуватись у випадку, коли моделюється неоднорідний розподілений об'єкт, в якому на різних ділянках фізичні параметри відрізняються (наприклад, довгий вал з ділянками різного діаметру чи виготовлений з різних матеріалів). Оскільки фізичні параметри об'єкта, що моделюється, присутні в явному вигляді у підсистемах структурної комп'ютерної моделі, то це надає можливість задавати між ними нелінійні залежності. В роботі описано результати проведених обчислювальних експериментів для випадків лінійного і нелінійного об'єктів з розподіленими параметрами. Експерименти підтвердили ефективність запропонованого підходу до побудови і комп'ютерної реалізації моделей нелінійних об'єктів з розподіленими параметрами.

**Ключові слова:** *комп'ютерна модель, об'єкт з розподіленими параметрами, нелінійний об'єкт.*

**Вступ.** При проектуванні сучасних складних динамічних систем, наприклад мехатронних, виникають задачі удосконалення їх основних характеристик, що призводять до необхідності використання більш

адекватних математичних і комп'ютерних моделей, які, за необхідності, враховують властивість розподіленості параметрів в просторі, а також нелінійні залежності, що притаманні окремим компонентам системи [1]. Крім того, розвиток мікропроцесорної елементної бази та, відповідно, поява високопродуктивних гнучких комп'ютеризованих вбудованих систем автоматичного керування уможливили використання в алгоритмах керування, для більш якісного розрахунку керуючих впливів, комп'ютерних моделей самих об'єктів керування. Це наклало на моделі додаткові вимоги щодо обчислювальної стійкості, при наявності шумових завад у вхідних даних, та забезпечення розрахунків в реальному часі. Коли для задач проектування можуть бути використані існуючі серійні пакети комп'ютерної математики, які базуються на використанні скінченноелементних розв'язувачів [1, 2], чи апарат інтегро-степеневих рядів Вольтерри [3, 4, 7], то для задач автоматизованого керування, контролю та діагностики проблема створення заощадливих щодо обчислень і, в той же час, адекватних комп'ютерних моделей для нелінійних об'єктів з розподіленими параметрами розв'язана далеко не в повній мірі. Перспективним напрямком створення комп'ютерних моделей нелінійних об'єктів з розподіленими параметрами, які б відповідали зазначеним вимогам, є використання апроксимаційних математичних описів первинних моделей з розрахунком на ефективну комп'ютерну реалізацію.

**Задача створення комп'ютерної моделі об'єкта з розподіленими параметрами в лінійній постановці.** Розглянемо одновимірний динамічний об'єкт з розподіленими параметрами, який описується диференціальним рівнянням з частинними похідними

$$m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mu(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (1)$$

$$(m, \mu, k > 0)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \varphi_0(t); & u(x_0 + l, t) = \varphi_l(t); \quad (t_0 \leq t \leq T), \\ u(x, t_0) = \psi_0(x); & u(x, T) = \psi_T(x); \quad (x_0 \leq x \leq x_0 + l), \end{cases} \quad (2)$$

де  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_l(t)$ ,  $\psi_0(x)$ ,  $\psi_T(x)$  — задані функції.

Використовуючи метод прямих до рівнянь (1)-(2), отримаємо систему звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку [6]

$$m_i \ddot{u}_i(t) + \mu_i \dot{u}_i(t) - \frac{k_i}{h^2} [u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)] = f_i(t) + O(h^2), \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

де  $x_i = x_0 + ih$ ,  $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ ,  $h = \frac{l}{n+1}$ ,  $x_i(t) = u(t, x_i)$ .

Знехтувавши у (3) членами  $O(h^2)$  та позначивши через  $U_i(t)$  наближені значення розв'язку  $u(t, x)$  на прямій  $x = x_i$  для їх визначення, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$m_i \ddot{U}_i(t) + \mu_i \dot{U}_i(t) - \frac{k_i}{h^2} [U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)] = f_i(t), \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Використавши граничні умови (2), отримаємо залежності для першого і останнього рівняння системи:

$$\left. \begin{aligned} U_0(t) &= \varphi_0(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_{n+1}(t) &= \varphi_1(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_i(t_0) &= \psi_0(x_i), & U_i(T) = \psi_T(x_i); \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Моделі типу системи (4) можна також отримати безпосередньо із фізичних законів, як це робиться у роботі [5].

Для числової реалізації апроксимаційної моделі (4)-(5) створено Simulink-модель, що зображена на рис. 1.



Рис. 1. Структурна реалізація в Simulink моделі (4)-(5)

Simulink-модель складається з  $n$  блоків, кожен з яких реалізує відповідне диференціальне рівняння системи (4). Особливістю цієї системи рівнянь є те, що кожне із рівнянь пов'язане з двома сусідніми рівняннями через функції  $U_{k+1}(t)$  та  $U_{k-1}(t)$ , тому кожен блок, що реалізує  $k$ -те рівняння, має один вихід  $U(t)$ , та два входи, на які подаються, відповідно,  $U_{k+1}(t)$  та  $U_{k-1}(t)$ . Це зумовлює присутність в моделі прямих і зворотних зв'язків, які дають змогу встановити причинно-наслідкові залежності від першого блоку до останнього і навпаки, тобто Simulink-модель внаслідок цього володіє властивістю оборотності.

Слід зауважити, що рівняння системи (4) описують поведінку дискретних елементів, на які розбивається неперервний протяжний об'єкт з розподіленими параметрами. Наприклад, це може бути протяжний залізничний состав, який складається з різних за масою вагонів, або довгий стержень з різною площею поперечного перерізу тощо. Для протяжного однорідного стержня, який зазнає деформації розтягу-стиску і описується моделлю (1) апроксимаційна модель (4), фактично, відображає систему  $n$  зосереджених мас, зв'язаних між собою пружними зв'язками. При цьому складові моделі (4) мають

конкретний фізичний зміст: перший доданок відображає силу інерції, другий — силу опору руху, третій — силу пружності і т. д. Тому для неоднорідних об'єктів можна змінювати параметри окремих рівнянь моделі, а також у кожне із рівнянь вносити додатково нелінійні залежності, які можна легко реалізувати у відповідній підсистемі Simulink-моделі. Наприклад, якщо сила опору руху для  $k$ -того елемента залежить від квадрату його швидкості, то в Simulink-моделі це відображається співвідношенням, де  $f_k(t) = \xi(\dot{U}_k(t))^2$ ,  $\xi$  — деяка постійна величина. Отримана комп'ютерна модель, завдяки властивості оборотності, дає змогу здійснювати вхідні впливи та отримувати відгуки в будь-яких точках дискретизації лінійно протяжного об'єкта.

**Задача створення комп'ютерної моделі об'єкта з розподіленими параметрами в нелінійній постановці.** Проілюструємо це на прикладі лінійно протяжного розподіленого об'єкта, що складається з ланок, які взаємодіють через механічні з'єднання із зоною нечутливості  $2a$ , яка описується наступною системою:

$$\begin{cases} (x \geq -a) \wedge (x \leq a), & y = 0, \\ x > a, & y = x - a, \\ x < -a, & y = x + a. \end{cases} \quad (6)$$

Для комп'ютерної реалізації нелінійної ланки, що описується системою (6), використаємо в середовищі Simulink блок Dead Zone.

Для побудови Simulink підсистеми, що реалізує окреме рівняння системи (4) запишемо її в еквівалентному поданні, скориставшись перетворенням Лапласа і, замінивши  $U_i$  на  $x_i$ :

$$m_i X_i(p) p^2 - \frac{k_i}{h^2} [X_{i+1}(p) - 2X_i(p) + X_{i-1}(p)] + \mu_i X_i(p) p = F_i(p), \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

де  $X_i(p)$  — зображення функції зміщення  $i$ -го перерізу,  $F_i(p)$  — зображення функції сили, прикладеної до  $i$ -го перерізу.

Проінтегрувавши два рази систему (7), отримаємо:

$$\begin{aligned} m_i X_i(p) - \frac{k_i}{h^2} [X_{i+1}(p) - 2X_i(p) + X_{i-1}(p)] \frac{1}{p^2} + \\ + \mu_i X_i(p) \frac{1}{p} = F_i(p) \frac{1}{p^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} X_i(p) = \frac{k_i}{m_i h^2} [X_{i+1}(p) - 2X_i(p) + X_{i-1}(p)] \frac{1}{p^2} - \frac{\mu_i}{m_i} X_i(p) \frac{1}{p} + \\ + \frac{1}{m_i} F_i(p) \frac{1}{p^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (9)$$

Для  $i$ -го рівняння (9) Simulink підсистема представлена на рис. 2. Якщо в  $i$ -тому перерізі об'єкта знаходиться елемент із зоною нечутливості, то відповідна Simulink підсистема буде мати додатково блок Dead Zone у фрагменті моделі де обчислюється сила пружності, що викликана деформацією ділянки об'єкта  $x = x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}$ . Зображення Simulink підсистеми з нелінійним блоком приведено на рис. 3.

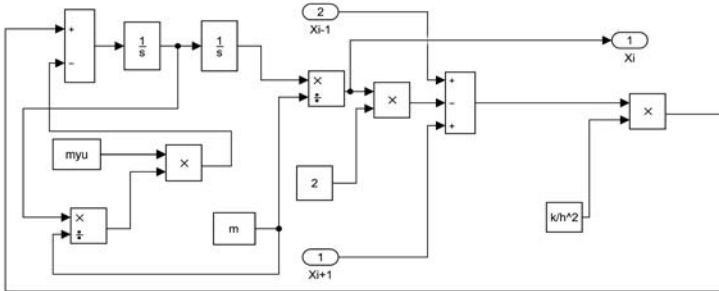


Рис. 2. Simulink підсистема, що реалізує окреме рівняння системи (4)

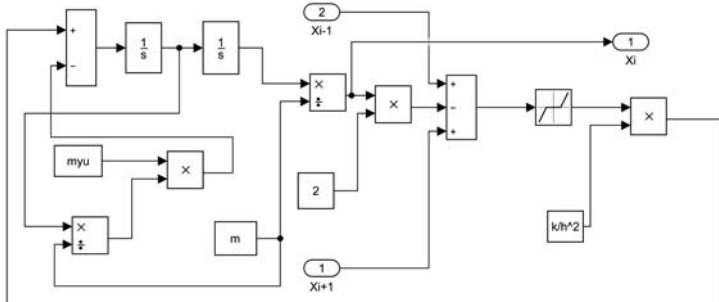


Рис. 3. Simulink підсистема, що реалізує зону нечутливості

Для комп'ютерної реалізації моделі неоднорідного нелінійного об'єкта з розподіленими параметрами скористаємося структурною моделлю, приведеною вище на рис. 1. При умові дискретизації об'єкта, що моделюється, на 80 елементів-підсистем (разом із елементами генерування вхідних сигналів і засобами реєстрації результатів) отримаємо Simulink модель, що приведена на рис. 4.

Оскільки кожна підсистема моделі допускає встановлення індивідуальних параметрів, то модель може відображати неоднорідний розподілений об'єкт, а присутність в моделі нелінійних елементів дає змогу відображати нелінійні властивості об'єкта. Отже, отримана Simulink модель відображає такі властивості об'єкта, як нелінійність, неоднорідність, а також розподіленість параметрів за однією просторовою координатою.

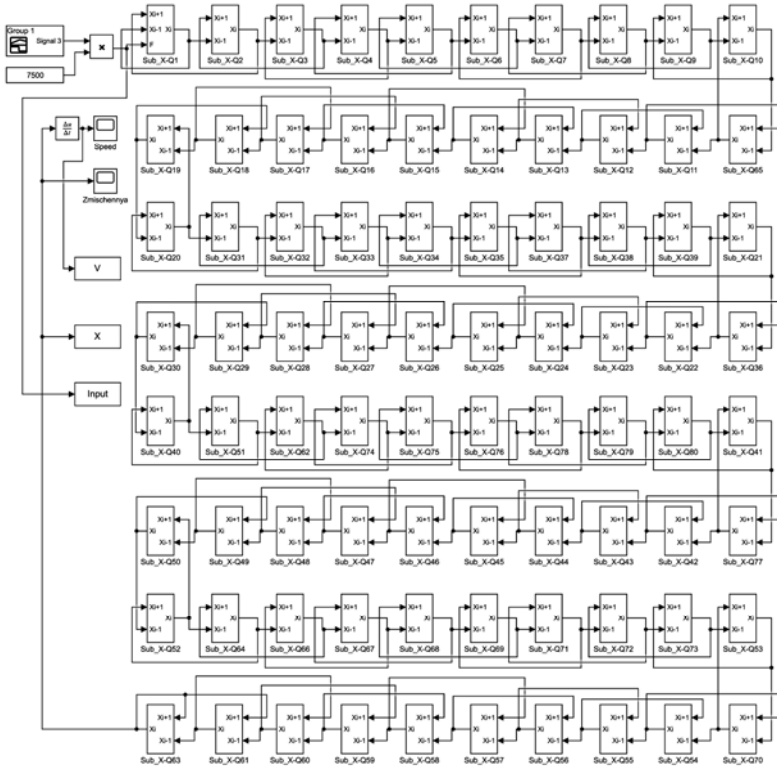


Рис. 4. Simulink модель, що реалізує систему рівнянь (4)

Проведення обчислювального експерименту для випадку лінійного неоднорідного розподіленого об'єкта. Для перевірки працездатності та дослідження розроблених програмних засобів моделювання нелінійних неоднорідних об'єктів з розподіленими параметрами доцільно провести обчислювальні експерименти з параметрами, близькими до реальних практичних задач. Для перевірки правильності отриманих результатів використаємо випадки, для яких можна отримати аналітичні розрахунки.

Нехай об'єкт описується рівнянням з частинними похідними (1) з такими параметрами:  $m = 82500$ ;  $\mu = 0$ ;  $\rho = 7990$ ;  $E = 2.1e11$ ;  $l = 14.5$ ;

$$k = \frac{Em}{rl} = 1.4954e + 11.$$

Вхідним сигналом є функція, графік якої зображено на рис. 5. Амплітуда вхідного сигналу задається константою, яка подається на один із входів блоку множення. Для першого експерименту значення



множника задавалось рівним 8000, що для реального об'єкта означає дію на одну з його сторін силою 8000 Н. На четвертій секунді дія припиняється. Коефіцієнт опору руху  $\mu$  дорівнює нулю, отже приведені параметри можуть описувати ситуацію, коли протяжний об'єкт розділений на 80 фрагментів, кожен з яких має масу 82 т., довжину 14,5 м, коефіцієнт жорсткості  $1.4954e + 11$ .

За допомогою комп'ютерної моделі обчислюється величина швидкості протилежної сторони лінійно протяжного об'єкта. Графік зміни швидкості приведено на рис. 6.

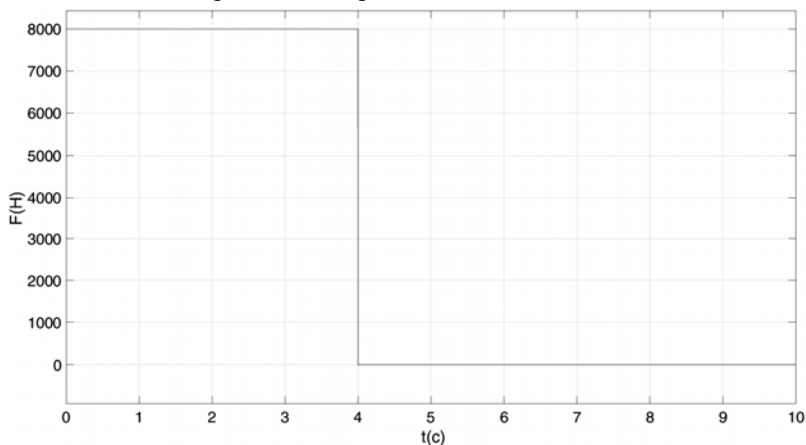


Рис. 5. Графік вхідного сигналу

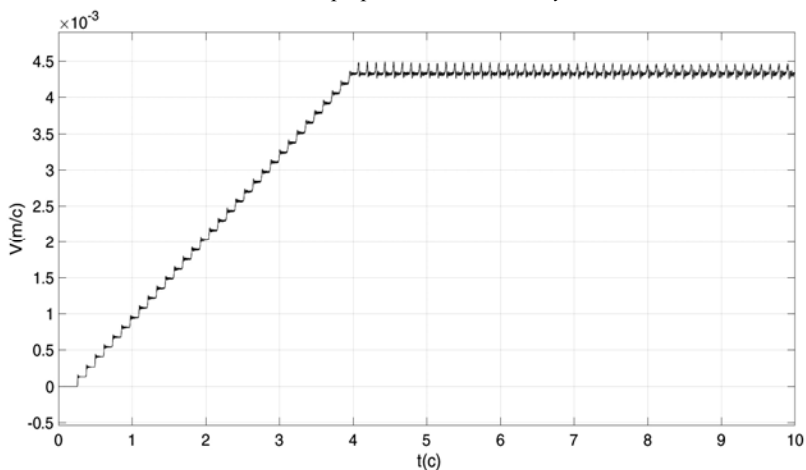
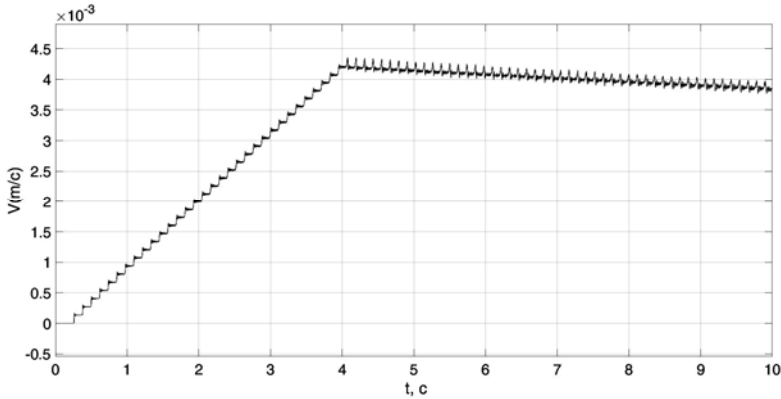


Рис. 6. Графік зміни швидкості на протилежному кінці розподіленого об'єкта без врахування опору руху

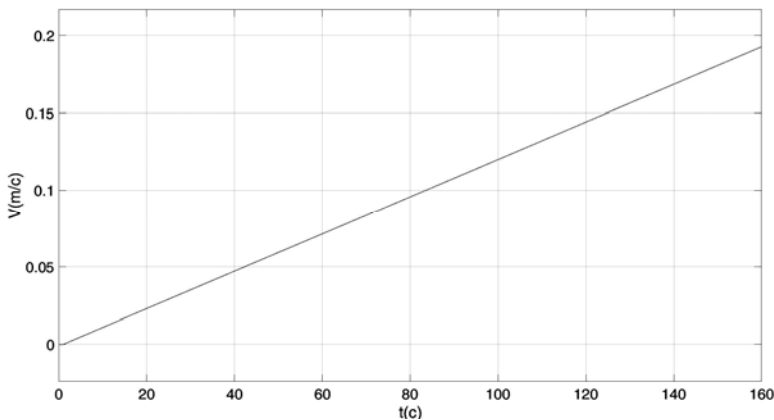
Параметри моделі близькі до випадку, коли об'єктом моделювання є залізничний состав із 80 вагонів, які жорстко з'єднані між собою без люфту. Состав може рухатись по горизонтальній колії без опору руху.

Якщо задати параметр опору руху  $\mu = 1241.2$ , то в результаті отримаємо графік швидкості, що зображений на рис. 7.



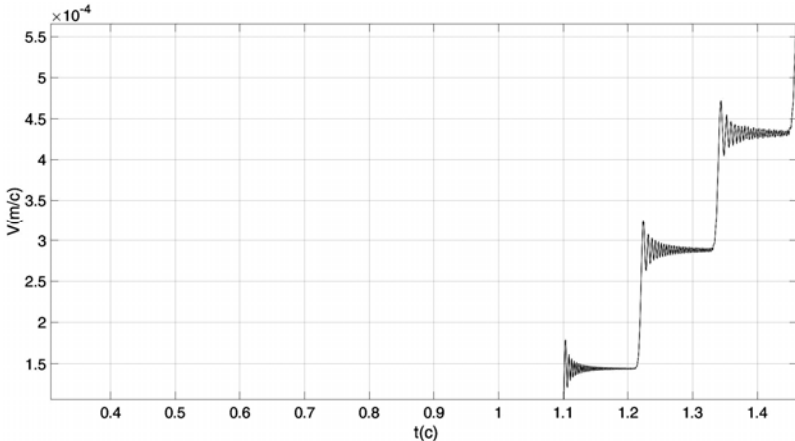
*Рис. 7. Графік зміни швидкості на протилежному кінці розподіленого об'єкта із врахуванням опору руху*

Для перевірки адекватності отриманої комп'ютерної моделі використаємо розрахунок швидкості протилежної від точки прикладання сили сторони розподіленого однорідного об'єкта. Для такого випадку задаємо  $\mu = 0$ ,  $F = 8000$  Н, вхідний сигнал у вигляді одиничного стрибка, помножений на  $F$ . Отримаємо графік швидкості, який зображено на рис. 8.



*Рис. 8. Графік зміни швидкості на протилежному кінці розподіленого об'єкта без врахування опору руху*

Оскільки зміщення на протилежному кінці розподіленого об'єкта відбувається із запізненням, то його слід врахувати при обчисленні часу, протягом якого відбувався рівноприскорений рух. Запізнення обчислюємо геометричним методом, використовуючи масштабований фрагмент графіка швидкості, який подано на рис. 9. Отримуємо такі результати моделювання: Час запізнення сигналу дорівнює 1,1 с, максимальний час моделювання становить 160 с, швидкість на протилежному кінці розподіленого об'єкта дорівнює 0,1928 м/с.

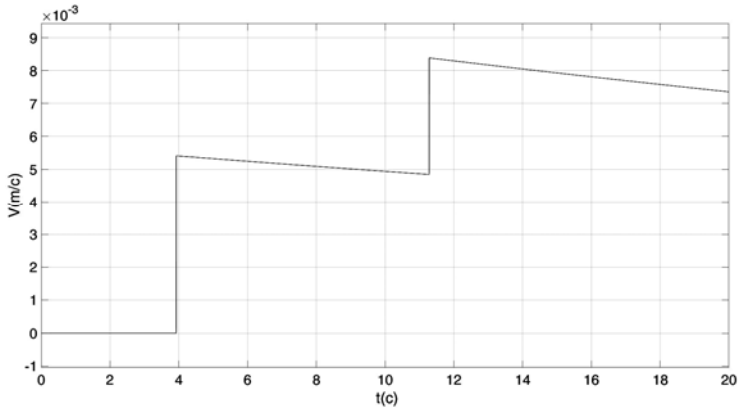


*Рис. 9. Фрагмент графіка зміни швидкості на протилежному кінці розподіленого об'єкта із врахуванням опору руху*

Для перевірки отриманих результатів скористаємося таким розрахунком. Протягом  $160 - 1,1 = 158,9$  с на об'єкт масою  $m \times 80 = 82500 \cdot 80 = 6600000$  кг, діяла сила  $F = 8000$  Н. Тоді розрахована швидкість буде становити  $V = a t$ , де  $a = F/m$ . Отже,  $V = 8000 \cdot 158,9 / 6600000 = 0,1926060$  м/с. Абсолютна похибка становить 0,0002 м/с. Основним джерелом похибки є присутній в обчислювальних схемах для диференціальних моделей ефект Гіббса.

**Проведення обчислювального експерименту для випадку нелінійного неоднорідного розподіленого об'єкта.** Для моделювання нелінійних неоднорідних розподілених об'єктів, які мають у своєму складі елементи із зоною нечутливості, використовуємо розроблену підсистему, яка приведена на рис. 3. Встановимо такі параметри моделі:  $m = 82500$ ;  $\mu = 1241,2$ ;  $\rho = 7990$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ ;  $l = 14,5$ ;  $k = 1,4954 \cdot 10^{11}$ ;  $a = 0,0001$ , де  $a$  — зона нечутливості.

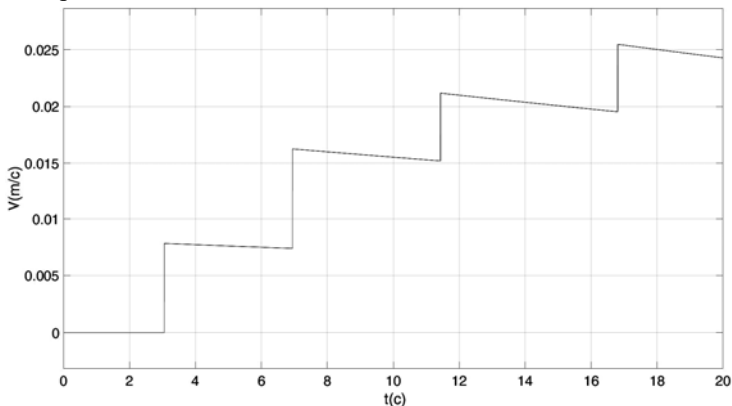
При подачі на вхід моделі сигналу у вигляді стрибка амплітудою 8000 Н, як у попередніх експериментах, отримано результати моделювання, які приведено на рис. 10.



**Рис. 10.** Графік зміни швидкості на протилежному кінці розподіленого нелінійного об'єкта з врахуванням опору руху ( $F = 8000$  Н)

Порівнявши графіки 9 і 10, які відображають поведінку системи при однакових фізичних параметрах, окрім наявності в другій системі зон нечутливості в 0,1 мм, можна зробити висновок, що навіть незначні значення зони нечутливості в 0,1 мм викликають суттєве збільшення часу запізнення сигналу (приблизно на 5,5 с). Причиною такого ефекту є поступова вибірка люфту між складовими елементами лінійно протяжного об'єкта.

Проведемо ще один експеримент, збільшивши у два рази амплітуду вхідного сигналу ( $F = 16000$ ). Результат моделювання приведено на рис. 11.



**Рис. 11.** Графік зміни швидкості на протилежному кінці розподіленого нелінійного об'єкта з врахуванням опору руху ( $F = 16000$  Н)

Із графіка видно, що затримка сигналу скоротилась майже в двічі. Це пояснюється тим, що окрім вибірки люфту, в об'єкті із скінченною швидкістю розповсюджуються сигнали в пружному середовищі і ця

швидкість не залежить від швидкості вибірки люфту. Також введення в модель блоків із зоною нечутливості мінімізувало прояв ефекту Гіббса.

**Висновок.** Отже, проведені обчислювальні експерименти довели працездатність та ефективність запропонованого методу побудови і числової реалізації апроксимаційних моделей одновимірних нелінійних об'єктів з розподіленими параметрами.

#### **Список використаних джерел:**

1. Karnopp D. C. System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems / D. C. Karnopp, D. L. Margolis, R. C. Rosenberg. — NY : Wiley, 2012. — 656 p.
2. Pelz George. Mechatronic Systems: Modeling and Simulation with HDL: Principles of Modeling and Simulation / George Pelz. — NJ : John Wiley & Sons Inc., 2003. — 223 p.
3. Ivanyuk V. The identification of nonlinear dynamical systems as integrated Volterra series based on deterministic signals / V. Ivanyuk, V. Ponedilok // Proceedings of the 5th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE. — Sofia, Bulgaria : University of national and world economy, 2016. — P. 230–238.
4. Ivanyuk V. Solving inverse problems of dynamics of nonlinear objects based on the Volterra series / V. Ivanyuk, V. Ponedilok, J. Sterten // Computational problems of electrical engineering. — Lviv : Lviv Polytechnic National University, 2016. — Vol. 6. — No. 1. — P. 9–16.
5. Navarro-López E. Bit-sticking phenomena in a multi-degree-of-freedom controlled drill string. Exploration and Production / E. Navarro-López // Oil and Gas Review. — 2010. — Vol. 8 (2). — P. 70–75.
6. Верлань А. Ф. Моделі динаміки електромеханічних систем / А. Ф. Верлань, В. А. Федорчук. — Київ : Наук. думка, 2013. — 222 с.
7. Іванюк В. А. Аналітичне подання рядів Вольтерри на основі експериментальних даних / В. А. Іванюк, В. В. Понеділок // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 43–50.

#### **COMPUTER MODELLING OF THE DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL NON-LINEAR OBJECTS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS**

The problem of computer simulation of one-dimensional non-linear objects with distributed parameters is considered. The method of straight lines for approximation transformation of the base model is used. Model is presented in the form of a differential equation in partial derivatives. As a result, a system of second-order ordinary differential equations is obtained. For computer implementation in the Simulink/Matlab environment, differential equations are represented as algebraic dependencies of the Laplace space. By equivalent algebraic transformations in the Laplace space, the mathematical model is reduced to a form that is convenient for building the Simulink model. The resulting structural model consists of subsystems that implement ordinary differential equations of second order, and the subsys-

tems are connected using both direct and inverse relations. This gave the model the property of reversibility, that is, any subsystem can be both an object of external influence and a source of data on the change of parameters in time for the corresponding section of the modelled object. Another positive feature of the model is that at the level of subsystems that reproduce the dynamics of spatial areas of a distributed object, you can set different physical parameters. Then such a model can be used in the case when a non-uniform object is modelled in which physical parameters differ in different areas (for example, a long shaft with areas of different diameters or made of different materials). Since the physical parameters of the simulated object are present in an explicit form in the subsystems of the structural computer model, this makes it possible to specify non-linear dependencies between them. The paper describes the results of the computational experiments performed for the cases of linear and nonlinear objects with distributed parameters. The experiments confirmed the effectiveness of the proposed approach to the construction and computer implementation of models of nonlinear objects with distributed parameters.

**Key words:** *computer model, object with distributed parameters, non-linear object.*

Отримано: 16.11.2018

УДК 004.855

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.102-110

**Е. М. Филоненко,**

**А. Д. Рубан,** аспирант,

**А. А. Фомин,** канд. техн. наук

Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

## **ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ ПРИЗНАКОВ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ**

Информатизация современного образования способствует созданию новых методов разработки учебных курсов, что существенно снижает качество обучения студентов. В настоящей работе предложен метод оценки значимости признаков при анализе качества внедрения дистанционного обучения в высшие учебные заведения с применением нейронной сети.

Представлен алгоритм проведения исследования значимости признаков, состоящий из трех этапов: подготовка данных, нейросетевое моделирование и анализ и интерпретация результатов исследования.

Подготовка данных — самый трудоемкий процесс, требующий максимального сосредоточения со стороны аналитика. В качестве обучающей выборки использованы реальные дан-

ные обучения студентов университета из системы дистанционного обучения Moodle. Данная система активно используется в качестве инструмента ведения учебного процесса в Одесском национальном политехническом университете.

Нейросетевое моделирование заключается в исследовании информативности признаков после обучения нейронной сети. В качестве входов нейронов использовались данные об успеваемости студентов курсов, в качестве выходов — их результирующая оценка за курс.

Информативность каждого признака определяется с помощью матрицы весов, которая формируется после обучения нейронной сети. Благодаря матрице весов можно определить, какой из признаков наиболее информативен, т.е. наиболее значим для исследования. Значения матрицы весов визуализированы с помощью графиков и гистограмм и дают возможность проанализировать результаты исследования и наглядно подтвердить значимость признаков.

Таким образом, решена задача оценки значимости признаков при анализе данных обучения студентов в системе дистанционного обучения Moodle. Определены исследуемые признаки. Сформирована матрица весов признаков. Обосновано предположение о том, что значения весов признаков характеризуют уровень значимости каждого исследуемого признака. Выделены наиболее значимые признаки, которые влияют на качество внедрения дистанционного обучения.

**Ключевые слова:** *многослойная нейронная сеть, множество признаков, информативность, дистанционное обучение.*

**Введение.** В условиях информатизации современного образования появляется необходимость создания наилучших условий внедрения информационных и телекоммуникационных технологий в образовательный процесс учебного заведения. Это в свою очередь способствует актуализации внедрения различных дидактических методов, применяемых в разработке и проектировании систем управления обучением, способных обеспечить продуктивное течение учебного процесса.

Однако невозможно обеспечить продуктивное ведение учебного процесса, используя прогрессивные методы и технологии обучения, не отслеживая при этом прогресс развития обучения. Поэтому, актуальной является задача выделения факторов (признаков), влияющих на качество дистанционного обучения, внедряемого в учебный процесс заведения.

В настоящее время при решении задач анализа качества системы дистанционного обучения (ДО) выполняется лишь процедура наращивания количества признаков с априорной установкой весов признаков [1].

Качественный состав признаков и их сочетаний в рассмотрение, как правило, не берется. В то же время, обладая оперативной информацией о значимости признаков в процессе использования ДО можно су-

цественно усовершенствовать данный метод обучения. В неформальных постановках задачи определение информативных признаков ставит целью определение того, насколько хороши используемые методы ДО.

Целью настоящей работы является повышение качества дистанционного обучения с помощью выделения признаков, характеризующих уровень его внедрения в учебный процесс заведения.

Задачей работы является разработка метода оценки значимости признаков с использованием нейронной сети (НС).

**Обзор литературы.** Методы оценки качества ДО делятся на статические и внутренние. Статические методы основаны на изучении, сопоставлении, сравнении полученных цифровых данных между собой или с образцом, их обобщения, истолкования и формирования научных и практических выводов [2, с. 494]. Достоинства такого подхода заключаются в получении реальной оценки исследуемой ситуации. Недостатками такого подхода являются низкая скорость обработки данных и относительно высокий уровень погрешности. Внутренние методы используют идею анализа получаемых цифровых данных, используя встроенные (или дополнительные) инструменты системы. Например, система дистанционного обучения (СДО) Moodle имеет встроенный инструмент анализа результатов тестирования студентов дистанционных курсов [3]. Достоинствами таких методов является высокая скорость обработки получаемых данных, возможность визуализации и анализа результатов. Недостатком являются отсутствие подробного анализа — по желанию преподавателя имеется возможность внедрить лишь краткие сведения по каждому из исследуемых пунктов.

Ранее решение задачи оценки значимости признаков, характеризующих уровень внедрения ДО в учебный процесс, производилось с помощью инструмента когнитивного моделирования, имеющим название когнитивных карт [4]. В данной работе предложен метод оценки значимости этих признаков с помощью НС.

**Основная часть.** Содержательная постановка задачи оценки значимости признаков заключается в необходимости выделения таких измеряемых признаков, которые в наибольшей степени влияют на качество образования средствами ДО. Таким образом, необходимо определить признаки и их сочетания с наибольшими весами. Вес каждого признака характеризует уровень его значимости при оценке качества образования.

Набор признаков, рассматриваемых в качестве обучающей выборки, можно разделить на несколько категорий:

1. Признаки, непосредственно связанные с дистанционным курсом.
2. Признаки, связанные с обучением студента на курсе.
3. Признаки, характеризующие время, проведенное студентом в качестве авторизованного пользователя.



В общем случае, алгоритм выделения значимых признаков качества дистанционного обучения состоит из следующих этапов (рис. 1).

1. Подготовка данных.
2. Нейросетевое моделирование.
3. Анализ и интерпретация результатов моделирования.

Первый этап решения задачи оценки значимости признаков — подготовка данных.

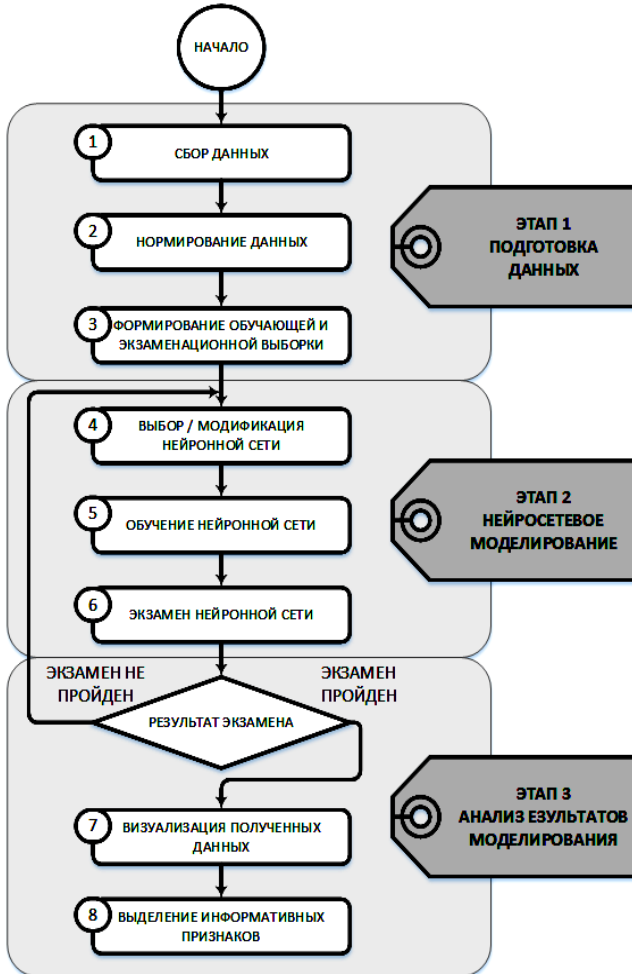
В современных условиях, когда приходится работать с большими массивами реальных данных, подготовка данных становится самостоятельной задачей, которой отводится значительная часть времени и ресурсов. Обычно на практике малое время уделяется подготовке данных, в то время как именно этот этап является важным и критичным шагом в нейросетевом моделировании. От того насколько хорошо подготовлены данные, может зависеть результат использования нейронной сети.

Этап подготовки данных включает такие обязательные действия как сбор данных (шаг 1), нормирование данных (шаг 2) и формирование обучающей и экзаменационной выборок (шаг 3).

Обучающие выборки множества случайным образом формируют три подмножества: обучающее множество (Train Set), составляет 70% от обучающей выборки; контрольное множество (Validation Set) составляет 15% от обучающей выборки; тестовое множество (Test Set) составляет 15% от обучающей выборки [5].

Выбор НС (шаг 4) также является значимым этапом в нейросетевом моделировании, так как от того, какой тип НС будет выбран, в первую очередь будет зависеть, насколько полученные результаты будут приближены к реальности, т.е. выбор НС в первую очередь характеризуется уровнем точности обучения. Для наиболее точного решения на полученных данных тестировались несколько типов нейронных сетей (однослойная и многослойная; на 10, 20, 40, 60 нейронах). В результате экспериментов для решения поставленной задачи была выбрана двуслойная нейронная сеть на 20 нейронов, так как результат ее обучения показал наилучшую точность.

Выбранная НС обучается (шаг 5), а после — подвергается процедуре экзамена. Обучение НС — это процесс, в котором параметры НС настраиваются посредством моделирования среды, в которую эта сеть встроена. В настоящей работе был использован алгоритм обучения НС с учителем, так как именно этот алгоритм дает возможность формировать целевой вектор — вектор выходных параметров — с которым сравнивается работа нейронов НС. Каждый образец целевого вектора подается на входы сети, затем проходит обработку внутри структуры НС, вычисляется выходной сигнал сети, который сравнивается с соответствующим значением целевого вектора, представляющего собой требуемый выход сети.



*Рис. 1. Алгоритм оценки значимости признаков качества ДО с помощью нейронной сети*

Обучившись, НС проходит процедуру экзамена (шаг 6). Под экзаменом понимается определение уровня точности выполняемых вычислений и формирование матрицы весов каждого признака, т.е., определение его информативности. В данной работе обучение проводится на данных, которые не были задействованы в процессе обучения НС.

В результате обучения НС формируется матрица весов  $W$ . Информативность каждого признака определяется на основе матрицы  $W$  по выражению:

$$P_i = \frac{1}{w} \sum_{k=1}^n (w(k, i)), \quad (1)$$

где  $w$  — сформированная матрица весов множества признаков НС,  $i$  — порядковый номер признака,  $n$  — количество нейронов в первом слое НС.

Если в результате обучения НС необходимая точность не достигается, производится модернизация НС (шаг 4): выбирается иной алгоритм обучения, структура НС или другой тип НС.

Определив информативность представленных в подготовленной выборке данных, с помощью инструментов визуализации (шаг 7) можно выделить наиболее информативные признаки (шаг 8), характеризующие уровень значимости применения ДО в учебных заведениях.

Предложенная технология оценки значимости признаков в задачах анализа качества дистанционного обучения апробирована на данных действующей СДО.

В качестве источника представляемых признаков использована база данных СДО Moodle Одесского национального политехнического университета (URL: <http://dl.it-school.com.ua>).

Набор признаков, используемых в исследовании, разделен на три категории:

- 1) количественные признаки: количество тестов, количество электронных материалов, количество оцениваемых заданий;
- 2) оцениваемые признаки: оценка студента за тест, за отдельную попытку теста, оценка за оцениваемое на курсе задание;
- 3) временные признаки: время начала тестирования каждого студента, время, потраченное студентом на прохождение теста.

Для каждой категории имеется возможность экспорта признаков непосредственно из базы данных СДО, используемой в учебном заведении.

С решением задач, предшествующих определению информативных признаков, связаны вопросы упрощения реализуемой системы и повышения качества ее работы и быстродействия.

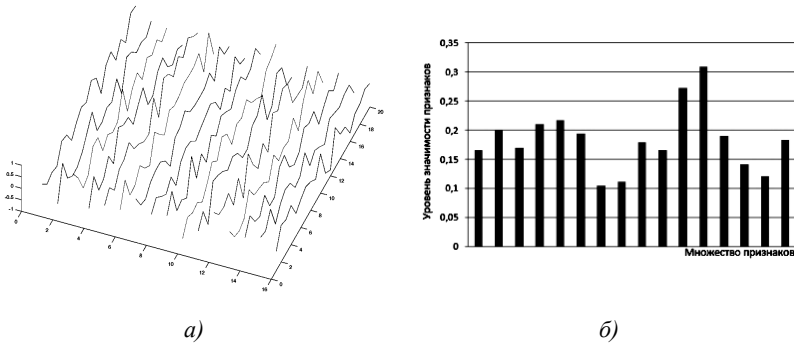
Как было сказано ранее, работе с НС предшествует подготовка данных, которая в большинстве случаев выполняется в ручном режиме. Для определения признаков использовалась возможность экспорта данных обучения студентов на дистанционных курсах непосредственно из СДО Moodle. С помощью экспорта можно получить реальные данные о следующих признаках:

1. Количество теоретических материалов, представленных на курсе.
2. Количество тестов, благодаря которым можно получить данные об успеваемости студента на курсе.
3. Количество практических заданий, которые дают возможность оценить самостоятельность студента и готовность его к выполнению поставленных задач.

4. Итоговая оценка студента за каждый из представленных на курсе тестов.
5. Оценка студента за каждое практическое задание, представленное на курсе.
6. Оценка за каждую попытку студента пройти тестирование (от трех до пяти попыток за тест, каждая из которых считается отдельным признаком).

Всего исследовалось 16 признаков, соответственно выше приведенному списку. После экспорта данных о студентах сформирована сводная таблица данных каждого студента по каждому признаку.

Вместе с входными данными, характеризующими обучение студентов на дистанционном курсе, сформирован целевой вектор выходных значений (показания учителя). Целевой вектор представляет собой суммарное значение всех оценок студента на курсе.



**Рис. 2.** Результат моделирования НС: а — визуализация НС, б — диаграмма оценки значимости признаков

Визуализация полученных результатов представлена на рис.2, а, где показаны связи исследуемых признаков и обучающихся нейронов. Однако оценка значимости признаков благодаря такой визуализации становится проблематичной. Именно поэтому анализ результатов чаще всего проводится с помощью диаграмм (рис.2, б), благодаря которым отчетливо наблюдается уровень значимости каждого из признаков.

**Выводы.** Предложен метод оценки уровня значимости признаков при анализе качества дистанционного обучения с применением двухслойной нейронной сети. Благодаря результатам моделирования нейронной сети на основании данных, полученных путем экспорта из системы дистанционного обучения Moodle, были определены наиболее информативные признаки (имеющие наибольший вес): количество вопросов в тесте (наибольшая значимость), количество попыток прохождения студентом теста, оценка за первую попытку теста коли-

чество практических задач. Эти признаки являются наиболее характерными для определения влияния использования дистанционного обучения на процесс обучения в ВУЗе.

### Список используемой литературы:

1. Дубровин В. И. Оценка значимости признаков на основе многослойных нейронных сетей в задачах диагностики и распознавания / В. И. Дубровин, С. А. Субботин // *Техническая диагностика*. — 2002. — № 1 (3). — С. 66–72.
2. Савюк Л. К. *Правовая статистика : учебник* / Л. К. Савюк. — М. : Юристъ, 2004. — 588 с.
3. Moodle DOCS [Electronic resource]. — Mode of access: [https://docs.moodle.org/-34/en/Main\\_page](https://docs.moodle.org/-34/en/Main_page).
4. Филоненко Е. М. Использование когнитивных карт для выделения факторов успеваемости студентов дистанционной формы обучения / Е. М. Филоненко, А. А. Фомин, В. Д. Павленко // *Сучасні інформаційні технології 2017 (MIT-2017) : матеріали сьомої Міжнародної конференції студентів і молодих науковців*. Одеса : ОНПУ, 2017. — № 2. — С. 150–151.
5. Костиков Д. В. Подготовка исходных данных для задачи интерпретации геофизических исследований скважин с помощью многослойной нейронной сети / Д. В. Костиков, А. Н. Петров, В. Е. Лялин // *Труды Международного симпозиума «Надежность и качество»*. — 2007. — Т. 1. — С. 123–128.
6. Общие подходы к обучению нейронных сетей [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://helpiks.org/6-10671.html>.

### **EVALUATION OF THE FEATURES SIGNIFICANCE BASED ON NEURAL NETWORKS IN TASKS OF THE ANALYSIS OF THE DISTANCE LEARNING QUALITY**

Informatization of modern education contributes to the creation of new methods for the development of educational courses, which significantly reduces the quality of students' education. In this paper, a method for assessing the significance of features when analyzing the quality of the introduction of distance learning in higher education institutions using a neural network is proposed.

An algorithm for carrying out a study of significance of features is presented, consisting of three stages: data preparation, neural network modeling and analysis and interpretation of the results of the study.

As a training sample, the real data of the university students' training from the Moodle distance learning system was used. This system is actively used as a tool for conducting the educational process at the Odessa National Polytechnic University.

Neural network modeling consists in investigating the informative character of the traits after training the neural network. The inputs of neurons were data on the progress of students in the courses, as outputs — their resulting estimate for the course.

The values of the matrix of the weights are visualized with the help of graphs and histograms and enable us to analyze the results of the study and clearly confirm the significance of the signs.

Thus, the task of assessing the significance of characteristics in the analysis of student learning data in the Moodle distance learning system was solved. The assumption that the weights of the features characterize the level of significance of each investigated feature is substantiated. The most significant features that affect the quality of the introduction of distance learning are highlighted.

**Key words:** *multi-layer neural network, many features, informative, distance learning.*

Отримано: 28.11.2018

UDC 004.042;004.5

DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.110-115

**I. E. Furtat\***, Ph. D., Associate Professor,

**Yu. O. Furtat\*\***, Ph. D.

\* National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv,

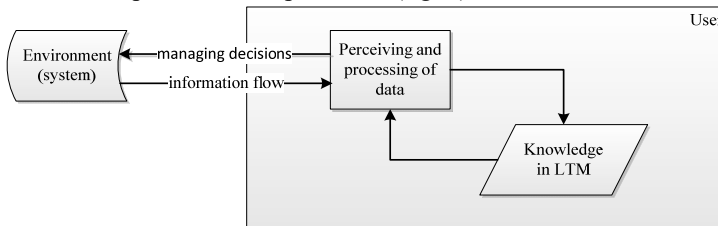
\*\*Pukhov Institute for Modeling in Energy Engineering, NASU, Kyiv

## **BUILDING USER INTERFACE AND DOMAIN MODELS BASED ON THE USERS' COGNITIVE CHARACTERISTICS AND WORK PROCESS SPECIFICS**

The principles of construction and management of the automated systems' UI (responsible for a form of presenting information to the user) and domain (responsible for a structure of presenting information to the user) models are considered as components of the complex of means for managing user's informational interaction with the automated system management means, adapting this interaction to the user's individual characteristics and work process specifics.

**Key words:** *informational interaction, adaptation, domain model, user's cognitive characteristics.*

**Introduction.** User interaction with information in the automated system is conducted through system generating an information flow [1–3] that the user perceives and processes (fig. 1).



**Fig. 1.** *User-system informational interaction scheme*

Based on received information users make some decisions using their own skills and knowledge in long-term memory (LTM), that are transmitted via the user interface to the system, changing its state. Set of UI management elements is determined by the specific workflow tasks and user's characteristics. The flow of information from the system is formed with regard to the user's requests to the system, current workflow step and user interface's output elements through which data will be displayed for the perception and processing of the user. Each of the participants and the elements of information exchange has a number of features, by managing which the process can be adapted to the specific user and the specific situation in the workflow.

**Information flow parameters and adaptation.** Information flow  $I$  from the system can be described as a set of parameters:

$$I = \langle T, F, C, D \rangle, \quad (1)$$

$T$  — pace of presentation,  $F$  — data format,  $C$  — information complexity, its connectivity to other blocks of data,  $D$  — transmitted data.

Pace of presentation is a qualitative characteristic that can be set to  $T = \langle \text{«low»}, \text{«medium»}, \text{«high»} \rangle$ . The pace of presenting information in automated systems can be managed in non-critical situations by changing the flow intensity depending on the acceptable level of information load. The users' optimal rate is determined by their ability to respond quickly to data from the system, and the current level of fatigue and concentration.

Data format  $F$  can be  $\langle \text{«text»}, \text{«graphic»}, \text{«spreadsheets»}, \text{«audio»}, \text{«mixed»} \rangle$ . In general, data format is defined by the user interface's output elements, yet if there is a possibility of changing this set according to users' needs and demands presentation format can also be adapted to the users' characteristics (their cognitive portraits).

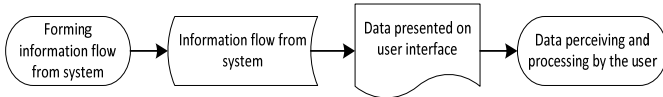
The complexity of information — a complex value, which takes into account the links between data blocks in the domain model, the data links amount involved in presenting current portion of data, its overlapping with the user's knowledge model

$$KM = \left\langle K_i, \left\langle c^j \right\rangle_i \right\rangle, i, j = \overline{1, n} \quad (2)$$

$K_i, i = \overline{1, n}$  — domain data blocks,  $\left\langle c^j \right\rangle_i, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, j \neq i$  —  $i^{\text{th}}$  data block's connection vector.

Parameter  $D$  is a portion of data transferred to the user in the particular workflow episode. This portion may correspond to one domain data block or it may consist of a set of blocks or a part of a single block, depending on the user-system interaction script.

In most modern automated systems user-system interaction is defined by the following algorithm (fig. 2).

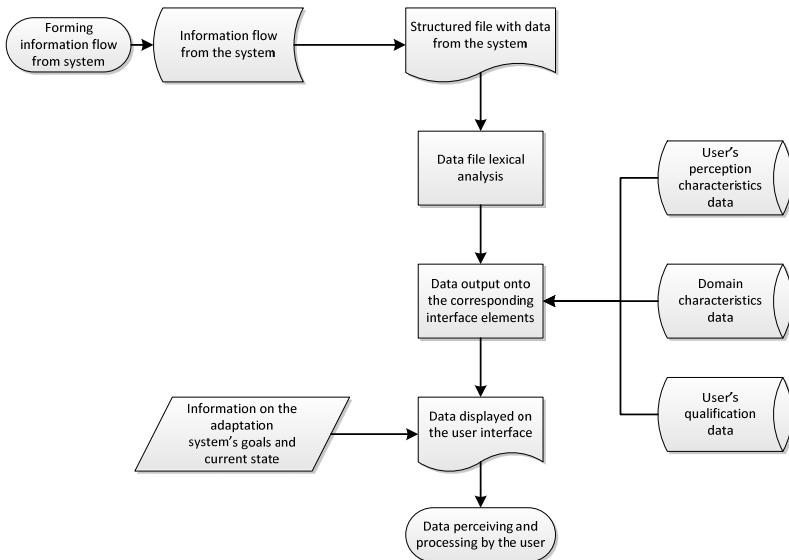


**Fig. 2.** User-system information interaction

To perform information exchange adaptation the algorithm in fig. 1 should be modified to allow consideration of specific users' and workflows' characteristics.

As adaptation criterion the users' cognitive portraits are considered, as adaptation object — data presentation form and pace (information flow characteristics).

If the user-system informational interaction process's adaptation and personalization is considered as controlling parameters of an information flow (1), we obtain a modified information exchange, shown in fig. 3.



**Fig. 3.** Adapted user-system information interaction

Information exchange adaptation and personalizing is performed at the stage of information flow's forming (managing parameters  $T$  and  $C$  of model (1)) and at the stage of data output through user interface (managing parameter  $F$ ). Information flow's parameter  $D$  depends on the specifics of the overall workflow, and on the current users' specific goals.

**Managing data output through personalized user interface.** User interface in automated systems is considered as a set of elements  $UI = \langle E_i \rangle, i = \overline{1, n}$ , each output element



$$E_i = \left\langle \langle x, y \rangle_i^j, T_i, c_i \right\rangle, j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$\langle x, y \rangle_i^j$  — output element's corner coordinates;  $T_i$  —  $i^{\text{th}}$  element's output type;  $c_i$  —  $i^{\text{th}}$  element's weight (importance) for the user.

The set of values of  $T_i$  in model (3) coincides with the set of values of parameter  $F$  in model (1), and it is the type of available output elements which determines the preferred output data format on the information flow's formation stage.

Output element's weight is defined by the workflow's specifics. Critical elements display information, loss of which leads to disruption of the workflow or inability for the user to correctly process information from the system.

Managing output elements' position and type allows creating personalized user interface for adapting the user-system information interaction. Critical output elements output must be present in the user interface, regardless of its adaptation.

Desired output element types are defined by the users' cognitive portraits' characteristics.

Cognitive portrait is a set of user characteristics.

$$CP = \left\langle \langle \langle Cogn_i \rangle, \langle PP_j \rangle, \langle Int_k \rangle \right\rangle, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, p}, \quad (4)$$

$Cogn_i$  — cognitive users' characteristics;  $PP_j$  — physiological characteristics;  $Int_k$  — intellectual characteristics.

Cognitive portrait's characteristics define optimal for on-screen data presentation number, type and relative position of user interface output elements.

**Using domain knowledge model to manage information storage form.** To enable further flexible information interaction adaptation it is advisable to manage not only presentation form, but the pace and intensity of information flow. This requires the ability to manage blocks of information, knowledge system organization, personalized learning programs.

Existing knowledge communications systems can be characterized by four basic components: expert domain knowledge (domain model); user model; expert knowledge of teaching method (interaction script); user-system interface.

Knowledge model (2) performs a dual function. On the one hand it is a source of domain knowledge that is provided to the user in portions, on the other — it sets the desired standard for the users' current knowledge level evaluation. Domain model has an important place in the process of scripting user interaction with the information and in the management of information flow characteristics within decision-making metascript in automated systems. In automated learning systems knowledge models are connected to the discipline's lesson plan, which

provides both the knowledge blocks' contents and the order in which the users access these blocks.

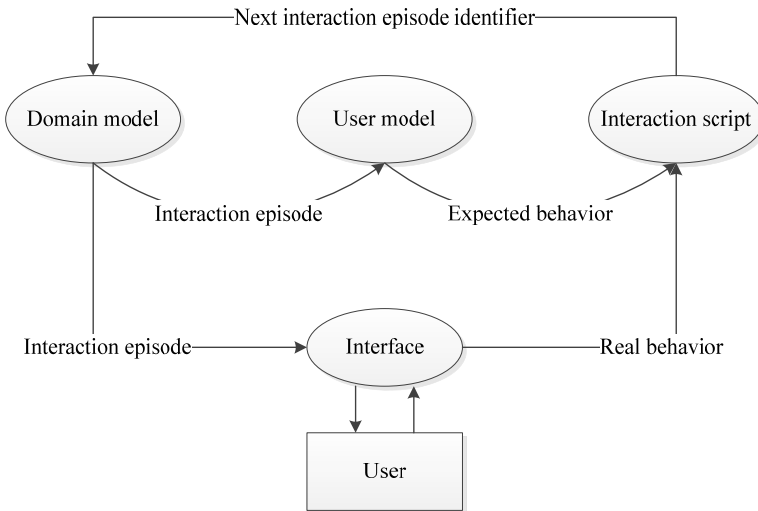
User model is generally an incomplete modified model domain knowledge model (2) and is designed mainly to anticipate users' behavior for its interpretation. The ideal user model must make accurate predictions of the behavior of any user in any domain context. For example, a set of possible responses to a block of data from the system.

With the user model's concept a diagnostic process is often associated — adapting the user model based on the data obtained through user-system dialog. In automated learning systems prior progress checks' results for particular students can be used — providing information regarding learning course segments work should be currently focused on.

Interaction script determines which piece of data and at what time will be transmitted to the user. In the most general case the interaction script is not hard coded and is derived based on the current situation and the deduction method, stored as a set of principles or rules. The adaptation is based on predicting users' responses, generated by user models, users' real reaction and relations between the workflow episodes stored in the domain model.

Interaction scripts may vary in relation to the degree of «freedom» given to the user, and can range between two extremities: full control of all user actions and guiding users through workflow episodes workflow — or complete freedom of user's navigational activity and giving requests-based recommendations.

Fig. 4 illustrates relationship between these four basic concepts of knowledge communication.



**Fig. 4.** Basic concepts of knowledge communication systems

User system interaction's script construction and modification takes into account the interaction script, based on the users' model and their actual behavior when processing previous information blocks taken from the domain model.

**Conclusion.** By using models of user interface, users' cognitive portraits, domain and users' knowledge it is possible to perform flexible adaptation and personalization of user-systems interface. Such adaptation involves modifying not only data presentation, but also data storage and the script of the interaction itself based on the workflow specifics and the users' preferences. This results in fewer mistakes when perceiving and processing information and lower stress levels for the users. When used in the learning process, such adaptation and personalization allow to improve both testing and studying efficiency for each particular student.

### References:

1. Furtat Yu. O. Functional basis of means of the automated systems' user interfaces' adaptation to the user's cognitive characteristics / Yu. O. Furtat // Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences / Scientific digest of V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine and Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University. — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University, 2013. — Iss. 8. — P. 120–131.
2. Gadezka Z. M. Development of object-oriented models of visual attention / Z. M. Gadezka, V. A. Nagornii, I. A. Zhiriakova // Proceedings of International Scientific Conference «Modern management in production and humanitarian activity», 5-6th of April, 2005. — Cherkassy : East-European University of Economics and Management, 2005. — P. 39.
3. Us M. F. Ontological approaches to evaluation of the listener's cognitive level in conditions of «electronic» education / M. F. Us, Z. M. Gadezka, P. A. El-Murr // Modeling and informational technologies. Scientific digest of Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering. — Kyiv, 2006. — Iss. 38. — P. 150–155.

### **ПОБУДОВА КОРИСТУВАЦЬКОГО ІНТЕРФЕЙСУ І МОДЕЛІ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ З ВРАХУВАННЯМ КОГНІТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОРИСТУВАЧА І ОСОБЛИВОСТЕЙ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ**

Для автоматизованих систем розглядаються принципи побудови і управління користувацьким інтерфейсом (відповідає за форму представлення даних користувачу) та моделі предметної області (відповідає за структуру представлення даних користувачу) як складових комплексу засобів управління взаємодією користувача з автоматизованою системою, адаптації цієї взаємодії до персональних характеристик користувача та особливостей робочого процесу.

**Ключові слова:** *інформаційна взаємодія, адаптація, модель предметної області, когнітивні характеристики користувача.*

Отримано: 21.11.2018

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Бомба Андрій Ярославич** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне, [abomba@ukr.net](mailto:abomba@ukr.net)

**Верлань Анатолій Федорович** — доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України, Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ, [a.f.verlan@gmail.com](mailto:a.f.verlan@gmail.com)

**Verlan Andriy** — Ph. D., Associate Professor, Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway, [verlandr@gmail.com](mailto:verlandr@gmail.com)

**Громик Андрій Петрович** — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри математичних дисциплін і моделювання Подільського державного аграрно-технічного університету, м. Кам'янець-Подільський

**Дорошенко Микола Васильович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформатики та інформаційних систем Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, м. Дрогобич, [dornik247@gmail.com](mailto:dornik247@gmail.com)

**Єфименко Микола Володимирович** — кандидат технічних наук, доцент, головний конструктор науково-виробничого підприємства «Хартрон-ЮКОМ», м. Запоріжжя, [nefimenko@gmail.com](mailto:nefimenko@gmail.com)

**Іваник Євген Григорович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, провідний спеціаліст Львівської академії сухопутних військ, м. Львів, [dedykto@ukr.net](mailto:dedykto@ukr.net)

**Іванюк Віталій Анатолійович** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, [wivanyuk@gmail.com](mailto:wivanyuk@gmail.com)

**Канарчук Юрій Валерійович** — аспірант Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

**Малаш Катерина Миколаївна** — аспірант кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне, [katemalash@gmail.com](mailto:katemalash@gmail.com)

**Положаєнко Сергій Анатолійович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих систем управління Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса, [sanp277@gmail.com](mailto:sanp277@gmail.com)

**Понеділок Вадим Віталійович** — старший викладач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, [ponedilok@gmail.com](mailto:ponedilok@gmail.com)

**Рубан Олександр Дмитрович** — аспірант кафедри комп'ютеризованих систем управління Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса, [westsoldierruban@gmail.com](mailto:westsoldierruban@gmail.com)

**Семерак Віктор Михайлович** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики та інженерної механіки Львівського національного аграрного університету, м. Львів, [dedykto@ukr.net](mailto:dedykto@ukr.net)

**Сікора Оксана Володимирівна** — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформатики та інформаційних систем Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, м. Дрогобич, [sikora60@ukr.net](mailto:sikora60@ukr.net)

**Sterten Jo** — Ph. D., Assistant Professor, Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway

**Федорчук Володимир Анатолійович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, [fedvlad@ukr.net](mailto:fedvlad@ukr.net)

**Філоненко Катерина Михайлівна** — студент кафедри комп'ютеризованих систем управління Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса, [katharina.fil@gmail.com](mailto:katharina.fil@gmail.com)

**Фомін Олександр Олексійович** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих систем управління Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса, [fomin.oleksandr@opu.ua](mailto:fomin.oleksandr@opu.ua)

**Фуртат Ірина Едуардівна** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної і промислової теплотехніки теплоенергетичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, [i.e.furtat@gmail.com](mailto:i.e.furtat@gmail.com)

**Фуртат Юрій Олегович** — кандидат технічних наук, науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ, [saodhar@ipme.kiev.ua](mailto:saodhar@ipme.kiev.ua)

## АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

<b>Б</b>		<b>М</b>	
Бомба А. Я.	5	Малаш К. М.	5
<b>В</b>		<b>П</b>	
Верлань А. Ф.	18	Положаєнко С. А.	18
Verlan A.	26	Понеділок В. В.	65
<b>Г</b>		<b>Р</b>	
Громик А. П.	34	Рубан О. Д.	102
<b>Д</b>		<b>С</b>	
Дорошенко М. В.	74	Семерак В. М.	74
<b>Є</b>		Сікора О. В.	74
Єфименко М. В.	48	Sterten J.	26
<b>І</b>		<b>Ф</b>	
Іваник Є. Г.	74	Федорчук В. А.	91
Іванюк В. А.	65	Філоненко К. М.	102
<b>К</b>		Фомін О. О.	102
Канарчук Ю. В.	91	Фуртат І. Е.	110
		Фуртат Ю. О.	110

## ЗМІСТ

<b>Bomba A., Malash K.</b> Modeling of Explosive Processes in Anisotropic Media where Boundary of the Influence Region is Identified.....	5
<b>Верлань А. Ф., Положаенко С. А.</b> Применение эквивалентной модели для оценки состояния систем ...	18
<b>Verlan A. A., Sterten Jo</b> Implementation of Integral Explicit Macromodels by Means of Quick-Acting Algorithms.....	26
<b>Громик А. П.</b> Математичне моделювання коливних процесів у необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі .....	34
<b>Ефименко Н. В.</b> Математическая модель углового движения твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона и ее использование в задачах управления ориентацией космического аппарата .....	48
<b>Ivaniuk V., Ponedilok V.</b> Method of Restoration of Input Signals of Nonlinear Dynamic Object with Distributed Parameters .....	65
<b>Сікора О. В., Дорошенко М. В., Семерак В. М., Іваник Є. Г.</b> Прогнозна оцінка ефективності підвищення втомного опору елементів зварних конструкцій термообробкою .....	74
<b>Федорчук В. А., Канарчук Ю. В.</b> Комп'ютерне моделювання динаміки одновимірних нелінійних об'єктів з розподіленими параметрами .....	91
<b>Филоненко Е. М., Рубан А. Д., Фомин А. А.</b> Оценка значимости признаков на основе нейронных сетей в задачах анализа качества дистанционного обучения.....	102
<b>Furtat I. E., Furtat Yu. O.</b> Building User Interface and Domain Models Based on the Users' Cognitive Characteristics and Work Process Specifics .....	110
<b>Відомості про авторів .....</b>	116
<b>Алфавітний покажчик авторів .....</b>	118

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

## МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Технічні науки

Збірник наукових праць

Випуск 18

---

---

Підписано до друку 18.12.2018 р. Гарнітура «Таймс».  
Папір офісний. Друк різнографічний.  
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 7. Обл.-вид. арк. 7,5.  
Тираж 60. Зам. № 838.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному  
університеті імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.