КАМ’ЯНЕЦЬ-ПОДІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ОГІЄНКА

Вадим ПОНЕДІЛОК
Олеся ФУРТЕЛЬ
Віктор ЩИРБА

ДИСКРЕТНІ СТРУКТУРИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ»

Електронне видання

Кам’янець-Подільський
2022

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.174я73
П56

Рекомендувала вчена рада Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 8 від 30 серпня 2022 р.

Рецензенти:

Теплінський Ю. В. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;

Громяк М. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан фізико-математичного факультету Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Понеділок В.В., Фуртель О.В., Щирба В.С.

П56 Дискретні структури: навчальний посібник для студентів закладів вищої освіти спеціальності «Комп'ютерні науки» [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. 238 с.

Електронна версія посібника доступна за покликанням:

URL: http://elar.kpnu.edu.ua:8081/xmlui/handle/123456789/6686

У посібнику викладено основні поняття, наведено типові приклади задач і методику їх розв'язання та завдання для самостійної роботи з дискретних структур. Він включає розділи «Математичні основи будови комп'ютера», «Множинні структури і бази даних», «Комбінаторні конфігурації» і «Методи аналізу програм на основі графових моделей».

Для студентів закладів вищої освіти, які навчаються за спеціальністю "Комп'ютерні науки".

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.174я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Не дивлячись на те, що навколишній світ є безмежним, ми все-таки можемо оперувати лише обмеженим об’ємом інформації про нього, а отже, ця інформація має дискретну структуру. Наприклад, її можна пронумерувати, розмістити в табличних масивах, подати у вигляді статистичних даних тощо.

Для швидкої обробки інформації дискретної структури неоцінену допомогу надає комп’ютер, який здатний обробляти лише скінчений, а отже, дискретний об’єм даних. Ці дані зберігаються в пам’яті комп’ютера у вигляді двійкового коду, тобто впорядкованого набору нулів та одиниць. Математичний апарат обробки даних дискретної структури одержав назву «Дискретної математики», яку ще іноді називають «Комп’ютерною математикою».

З двійковими кодами нерозривно пов'язаний розділ математичної логіки і особливо булева алгебра. Взагалі кажучи, математичною моделлю комп’ютера є булева функція хоч і досить складна. Це означає, що розробці нових моделей комп’ютера передує детальне дослідження та побудова такої функції. Тому не дивно, що вивчення дискретних структур ми пропонуємо розпочати з математичної логіки як математичної основи будови комп’ютера.

Наступний розділ присвячується вивченню множинних структур, що є основою будови баз даних і продовжується матеріал дослідженням елементів комбінаторних конфігурацій, без яких не обійтися при програмуванні циклічних алгоритмів. Завершується матеріал посібника вивченням графів, які широко використовуються при побудові алгоритмів розв’язання багатьох прикладних програм.

Кожен розділ складається з компактного викладу основних теоретичних положень, прикладів розв’язання типових задач, що закріплюють теоретичні викладки та завдань для самостійної роботи. В кінці посібника міститься розділ «ВІДПОВІДІ. ВКАЗІВКИ. РОЗВ'ЯЗАННЯ», який допоможе переконатися в правильності розв'язання задач самостійно або підкаже яким шляхом її розв'язувати. Наприклад, у відповіді вказано не число 9, а вираз «2+7». Це означає, що для одержання відповіді потрібно до одного даного додати інше.

Навчальний посібник створено згідно із робочою програмою курсу «Дискретні структури» і призначений для використання студентами, які вивчають математичні методи для використання їх у комп'ютерних технологіях, зокрема, напряму підготовки «Комп'ютерні науки».

Вивчення курсу не потребує використання спеціального технічного та програмного забезпечення. Передумови для вивчення дисципліни відсутні. Від читача вимагається лише знання з математики в обсязі шкільної програми.

1. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ БУДОВИ КОМП'ЮТЕРА

1.1. ЛОГІЧНІ СТРУКТУРИ

1.1.1. Теоретичні відомості

Одним з основних понять в математичній логіці є висловлення. Під *висловленням* розуміють розповідне речення, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне. Наприклад: «Київ – столиця України», «Не в кожен трикутник можна вписати коло». Перше висловлення є *істинним*, друге – *хибним*.

Вирази «Студент фізико-математичного факультету», «Котра година?» до висловлень не належать, бо до них немає сенсу ставити питання про те, істинні вони чи хибні.

В математиці висловлення розглядають незалежно від їх конкретного змісту, а лише з погляду істинності чи хибності. Якщо висловлення істинне, то вважають, що значення його істинності дорівнює 1, якщо хибне – 0. Позначають висловлення, як правило, великими латинськими буквами: A, B, C, ... Ці букви називають пропозиційними змінними. Значення істинності висловлення A позначають $p(A)$.

Над висловленнями можна виконувати логічні операції, які дозволяють з вихідних висловлень утворювати нові.

Означення 1. Кон'юнкцією двох висловлень A і B (позначається $A \wedge B$) називається висловлення, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли висловлення A і B істинні одночасно.

В українській мові кон'юнкції відповідає сполучник «і» (а; але; хоч; незважаючи на …). Наприклад, «$5 > 3$ і $5 < 6$».

Означення 2. Диз'юнкцією двох висловлень A і B (позначається $A \vee B$) називається висловлення, яке є хибним тоді і тільки тоді, коли висловлення A і B хибні одночасно.

Диз'юнкції відповідає сполучник «або» (чи; хоч одне з …). Наприклад, «файл можна зберігати на вінчестері або на флешці».

Означення 3. Імплікацією двох висловлень A і B (позначається $A \Rightarrow B$) називається висловлення, яке є хибним тоді і тільки тоді, коли висловлення A – істинне, а B – хибне.

Імплікації відповідає словосполучення «якщо…, то…» (… імплікує …; з … слідує …). Наприклад, «Якщо число ділиться на 6, то воно ділиться на 2».

Означення 4. Еквіваленцією двох висловлень A і B (позначається $A \Leftrightarrow B$) називається висловлення, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли висловлення A і B істинні або хибні одночасно.

Еквіваленції відповідає словосполучення «тоді і тільки тоді». Наприклад, «Трикутник рівнобедрений тоді і тільки тоді, коли кути при його основі рівні».

Означення 5. Запереченням висловлення A (позначається $\overline{A}$) називається висловлення, яке є істинним, коли A – хибне і хибним, коли A – істинне.

Для заперечення використовують частку «не» (словосполучення «неправильно, що…»). Наприклад, запереченням до висловлення «6 ділиться на 2» буде висловлення «6 не ділиться на 2».

Результат логічної операції зручно визначати за допомогою так званої *таблиці істинності*:

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$	$p(\overline{A})$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Означення 6. Логічною формулою називається вираз, який складається з букв, що позначають висловлення, знаків логічних операцій та дужок, які визначають порядок операцій.

Якщо в формулі дужки відсутні, то операції виконуються зліва направо в такій послідовності: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція. Наприклад, у запропонованій нижче формулі послідовність виконання операцій можна занумерувати таким чином:

$$\left(\underset{2}{\overline{A}}\underset{3}{\wedge}\left(B\underset{1}{\vee}C\right)\underset{4}{\Rightarrow}D\right)\underset{6}{\vee}\left(D\underset{5}{\Rightarrow}A\right)\underset{7}{\Leftrightarrow}B\,.$$

Як показує наведений приклад, областю дії оператора може бути не лише одна пропозиційна змінна (для заперечення) чи пара змінних (наприклад, для коньюнкції), але й цілі вирази. Так, шоста операція є диз'юнкцією виразів, визначених на четвертому та п'ятому кроках обчислень.

Підкреслимо, що у розмовній і літературній мові слова та вирази «і», «або», «якщо …, то …» тлумачать по-різному. Наприклад, незрозуміло якій структурі $A\wedge(B\vee C)$ чи $(A\wedge B)\vee C$ відповідає вираз «Я хочу купити книгу про Word і Excel або Access».

Однією з основних задач алгебри висловлень є визначення значення істинності складного виразу в залежності від значень істинності пропозиційних змінних (простих висловлень), що входять до його складу. Визначати значення істинності можна за допомогою таблиці істинності.

Означення 7. Якщо логічна формула (вираз) приймає істинне значення при будь-якому наборі значень істинності простих висловлень, що входять до її складу, то її називають тотожно істинною, або тавтологією, або логічним законом.

Означення 8. Якщо логічна формула приймає хибне значення при будь-якому наборі значень істинності простих висловлень, що входять до її складу, то її називають тотожно хибною, або суперечністю, або фальшю.

Тавтологію позначають T, фальш – F.

Означення 9. Логічна формула, яка не є фальшю, називається виконуваною.

Означення 10. Дві логічні формули називаються рівносильними (логічно еквівалентними), якщо вони приймають однакові значення істинності при кожному наборі значень істинності простих висловлень, що входять до їх складу.

Розділяють рівносильні формули символом «≡». Наведемо ряд прикладів рівносильних формул, які називаються властивостями логічних операцій:

1) $\left.\begin{array}{l} A\wedge A\equiv A \\ A\vee A\equiv A \end{array}\right\}$ – властивості ідемпотентності;

2) $\left.\begin{array}{l} A\wedge B\equiv B\wedge A \\ A\vee B\equiv B\vee A \end{array}\right\}$ – властивості комутативності;

3) $\left.\begin{array}{l} A\wedge(B\wedge C)\equiv(A\wedge B)\wedge C \\ A\vee(B\vee C)\equiv(A\vee B)\vee C \end{array}\right\}$ – властивості асоціативності;

4) $\left.\begin{array}{l} A\wedge(A\vee B)\equiv A \\ A\vee(A\wedge B)\equiv A \end{array}\right\}$ – властивості поглинання;

5) $\left.\begin{array}{l} A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C) \\ A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C) \end{array}\right\}$ – властивості дистрибутивності;

6) $\left.\begin{array}{l} \overline{A\wedge B}\equiv\overline{A}\vee\overline{B} \\ \overline{A\vee B}\equiv\overline{A}\wedge\overline{B} \end{array}\right\}$ – правила де Моргана;

7) $\overline{\overline{A}}\equiv A$ – властивість подвійного заперечення;

8) $A\vee\overline{A}\equiv T$ – властивість виключеного третього;

$A\wedge\overline{A}\equiv F$ – властивість суперечності;

9) $A\vee T\equiv T$, $\quad A\vee F\equiv A$, $\quad T\vee F\equiv T$, $\quad \overline{T}\equiv F$,

$A\wedge T\equiv A$, $\quad A\wedge F\equiv F$, $\quad T\wedge F\equiv F$, $\quad \overline{F}\equiv T$;

10) $A\Rightarrow B\equiv\overline{A}\vee B$;

11) $A\Leftrightarrow B\equiv(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$.

Рівносильність формул можна встановити за допомогою таблиць істинності або за допомогою рівносильних перетворень.

1.1.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Визначити значення істинності висловлення «Якщо число 3221 кратне 111, то воно кратне 37».

Розв'язання. Запропоноване висловлення складається з двох простих висловлень «число 3221 кратне 111» і «число 3221 кратне 37», з'єднаних зв'язкою «якщо ..., то ...», яка відповідає імплікації. Імплікація двох висловлень є хибним висловленням лише в одному випадку, коли перше з них істинне, а друге хибне. В нашому прикладі обидва простих висловлення є хибними, тому дане складне висловлення – істинне.

Приклад 2. Записати логічною формулою висловлення «Неправильно, що число не ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли воно не закінчується цифрою 5».

Розв'язання. Позначимо висловлення «число ділиться на 5» через A, висловлення «число закінчується цифрою 5» – через B. Словам «неправильно», «не» відповідає логічна операція заперечення, а зв'язці «тоді і тільки тоді» – еквіваленція. Отже логічна формула має вигляд: $\overline{\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}}$.

Приклад 3. Скласти таблицю істинності для виразу $(A \vee B) \wedge \overline{A}$.

Розв'язання. Враховуючи порядок виконання операцій, для визначення значення істинності виразу складемо таблицю істинності:

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\overline{A})$	$p((A \vee B) \wedge \overline{A})$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

Приклад 4. Довести, що формула $A \Rightarrow (C \Rightarrow A \vee B)$ є тавтологією.

Розв'язання. Доведення можна проводити двома шляхами:

а) щоб встановити, чи є задана формула алгебри висловлень тавтологією, досить побудувати її таблицю істинності і переконатися, чи складається останній стовпчик побудованої таблиці лише з одиниць:

$p(A)$	$p(B)$	$p(C)$	$p(A\vee B)$	$p(C\Rightarrow A\vee B)$	$p(A\Rightarrow(C\Rightarrow A\vee B))$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

б) переконатись, що задана формула є тавтологією, можна за допомогою ланцюжка рівносильних перетворень:

$$A\Rightarrow(C\Rightarrow A\vee B)\overset{10}{\equiv}\overline{A}\vee\left(\overline{C}\vee(A\vee B)\right)\equiv\overline{A}\vee\overline{C}\vee A\vee B\overset{2}{\equiv}$$

$$\overset{2}{\equiv}\overline{A}\vee A\vee\overline{C}\vee B\overset{2,8}{\equiv}T\vee\overline{C}\vee B\overset{2,9}{\equiv}T\,.$$

(над символами «≡» записано порядкові номери використаних властивостей логічних операцій).

Досить часто тотожню істинність чи хибність формули встановлюють шляхом відшукання контрприкладу (від супротивного).

Приклад 5. Перевірити, чи є тавтологією формула

$$\left(A\Rightarrow\overline{B}\right)\wedge C\wedge\left(B\Rightarrow\overline{C}\right)\wedge(A\Rightarrow D)\Rightarrow D\,.$$

Розв'язання. Припустимо, що формула не є тавтологією. Тоді хоча б на одному наборі вона набуватиме значення 0. Розглянемо цей набір.

Оскільки останньою операцією в формулі є імплікація, то для вибраного набору $p(D) = 0$, а всі кон'юнктивні члени приймають значення 1. Із співвідношень $p(A\Rightarrow D) = 1$ і $p(D) = 0$ одержимо $p(A) = 0$. Далі, $p(C) = 1$, $p(\overline{C}) = 0$ і $p(B\Rightarrow\overline{C}) = 1$. Тому $p(B) = 0$. Нарешті, при отриманих значеннях істинності $p(A) = 0$ і $p(B) = 0$ підтверджується рівність $p(A\Rightarrow\overline{B}) = 1$.

Таким чином, знайдено набір (0, 0, 1, 0), на якому задана формула приймає значення 0 (контрприклад), тобто вона не є тавтологією.

Запис відшукання контрприкладу можна робити так: у самому записі формули, що перевіряється, слід проставити значення істинності в розглядуваному наборі під відповідними символами послідовно. Якщо при цьому не прийшли до суперечності, то контрприклад знайдено. Якщо ж у цьому процесі одержали суперечність, то контрприкладу не існує і формула, що перевіряється, є тавтологією.

Проілюструємо цей запис на прикладі такої формули:

$$\left(\overline{A}\Rightarrow\overline{B}\right)\wedge C\wedge\left(\overline{B}\Rightarrow\overline{C}\right)\wedge\left(A\Rightarrow D\right)\Rightarrow D.$$

$$\left.\begin{matrix}1\quad 1\\ 0\end{matrix}\right\}\;0\quad 1\qquad 0\;\;1\;\;0\qquad 0\;\;1\;\;0\quad\;0\;\;0$$

Одержана суперечність ($p(\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$) дорівнює 1 і 0 одночасно) доводить, що розглянута формула – тавтологія.

Приклад 6. Виконуючи рівносильні перетворення, довести рівносильність $A\vee B\Rightarrow A\equiv B\Rightarrow A$.

Розв'язання. $A\vee B\Rightarrow A\overset{10}{\equiv}\overline{A\vee B}\vee A\overset{6}{\equiv}\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\right)\vee A\overset{5}{\equiv}\left(\overline{A}\vee A\right)\wedge\left(\overline{B}\vee A\right)\overset{2}{\equiv}$

$$\overset{2}{\equiv}\left(A\vee\overline{A}\right)\wedge\left(\overline{B}\vee A\right)\overset{8}{\equiv}T\wedge\left(\overline{B}\vee A\right)\overset{9}{\equiv}\overline{B}\vee A\overset{10}{\equiv}B\Rightarrow A.$$

1.1.3. Задачі для самостійного опрацювання

1. Які з наведених виразів є висловленнями? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

а) Число 15 кратне 3.
б) Число 168 кратне 9.
в) $x^2 < 9$.
г) Кожне дійсне число задовольняє нерівність $x^2 \geq 0$.
д) Чи існує дійсне число, більше за 3 і менше від 9?
е) Ця задача легка.
є) Існує найбільше просте число.
ж) Рівняння $x^2 + 7x + 1 = 0$ має хоча б один дійсний корінь.
з) Розв'язати рівняння $x^2 + 7x + 1 = 0$.
и) Чи правильна велика теорема Ферма?
і)° 1 – просте число.
ї) Хай живе математика!
й)° Сократ сказав: «Я знаю, що я нічого не знаю».

2. Сформулюйте заперечення наступних висловлень; вкажіть значення істинності даних висловлень і їх заперечень.

а) Дніпро впадає в Чорне море.

б) Число 32 не ділиться на 8.

в)° $3 > 5$.

г)° $3 \le 5$.

д)* Всі прості числа непарні.

3. Встановіть, які з висловлень в наступних парах є запереченнями один одного, а які – ні (поясніть чому).

а) $3 < 6$, $3 \ge 6$.

б) $2 < 0$, $2 > 0$.

в) «Натуральне число n парне», «Натуральне число n непарне».

г) «Трикутник ABC прямокутний», «Трикутник ABC тупокутний».

д)* «Всі прості числа непарні», «Існує просте парне число».

е)* «Людині відомі всі види тварин, які існують на Землі», «На Землі існує вид тварин, не відомий людині».

4.° Визначте значення істинності висловлень A, якщо:

а) $A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$ істинне висловлення;

б) $A \vee (2 \cdot 2 = 5)$ істинне висловлення;

в) $A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$ хибне висловлення;

г) $A \vee (2 \cdot 2 = 5)$ хибне висловлення;

д) $A \wedge (2 \cdot 2 = 5)$ хибне висловлення.

5.° Визначте значення істинності висловлень A, B, C і D в запропонованих реченнях, з яких перші два істинні, а останні два хибні:

а) Якщо 4 – парне число, то A.

б) Якщо B, то 4 – непарне число.

в) Якщо 4 – парне число, то C.

г) Якщо D, то 4 – непарне число.

6.° Визначте значення істинності висловлень A, B, C і D в запропонованих реченнях, з яких перші два істинні, а останні два хибні:

а) $A \Leftrightarrow (2 < 3)$;

б) $B \Leftrightarrow (2 > 3)$;

в) $C \Leftrightarrow (2 < 3)$;

г) $D \Leftrightarrow (2 > 3)$.

7. Визначте значення істинності складних висловлень:

а)° 171 кратне 11, але не кратне 7.

б) $-2 > -3$ і $-1/2 > -1/3$.

в) Якщо Саратов розміщений на Неві, то білі ведмеді живуть в Африці.

г)° $-2 > -3$, але $(-2)^2 < (-3)^2$.

д) Якщо $\pi < 3$, то $\pi^2 < 3^2$.
е)° 96 кратне 24 тоді і тільки тоді, коли 96 кратне 8 і 96 кратне 3.
є)° 72 кратне 48 тоді і тільки тоді, коли 72 кратне 8 і 72 кратне 6.
ж) 198 кратне 11 і 18 і не кратне 7.
з)* Неправильно, що хоч одне з чисел 21, 51, 91 є простим.

8. Записати символічно (у вигляді формули) такі складні речення:

а)° Якщо в трикутнику медіана не є висотою і бісектрисою, то цей трикутник не рівнобедрений і не рівносторонній.
б)° Студент Іваненко піде сьогодні на лекцію і піде в кіно або на футбол чи танці.
в) Число 12 є складеним тому і тільки тому, що 7 є простим числом.
г)° Якщо на вулиці мороз, то діти одягають пальта і рукавиці або взувають валянки.
д) Якщо трикутник прямокутний і величина одного з його кутів дорівнює 30^{o}, то протилежна до нього сторона дорівнює половині гіпотенузи.
е) Якщо похідна функція в точці дорівнює нулю і друга похідна цієї функції в цій же точці від'ємна, то дана точка є точкою максимуму цієї функції.
є) Сьогодні я одержу на екзамені оцінку «відмінно» або «добре».

9. Запишіть логічну структуру складних висловлень та оцініть їх істинність:

а) Якщо $7 > 6$, то $7 \geq 6$.
б)° Задане число кратне 10001 тоді і тільки тоді, коли воно кратне 73 і 137.
в) Якщо чотирикутник не є ромбом, то його діагоналі не взаємно перпендикулярні.
г)* Неправильно, що задане число не кратне 15 тоді і тільки тоді, коли воно не кратне 5 і не кратне 3.
д)* 2385 кратне 117 тоді і тільки тоді, коли 2385 кратне 13 і кратне 9, але 2385 не кратне 117 тоді і тільки тоді, коли 2385 не кратне 13 або не кратне 9.

е)° Незважаючи на те що прогноз погоди на сьогодні був «без опадів», випав сильний дощ.

є)* Якщо m і n – дійсні числа, то неправильно, що з того, що не справджується нерівність $m > n$, випливає, що $m < n$.

10. Нехай висловлення «Число a ділиться на 3», «Число b ділиться на 3» і «Сума $a + b$ ділиться на 3» позначено через A, B і C відповідно. Сформулювати висловлення, записане символічною мовою:

а) $A \wedge B \Rightarrow C$;

б) $C \Rightarrow A \wedge B$;

в) $A \wedge C \Rightarrow B$;

г) $\overline{B} \wedge C \Rightarrow \overline{A}$;

д) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B} \vee \overline{C}$;

е)* $\overline{A} \Rightarrow \left(B \Rightarrow \overline{C}\right)$;

є)° $(C \Rightarrow B) \Rightarrow A$;

ж) $C \Leftrightarrow A \vee B$.

11.° Нехай висловлення $A \Rightarrow B$ істинне. Що можна сказати про значення істинності висловлення $\left(\overline{A} \wedge B\right) \Rightarrow \left(\overline{A} \vee B\right)$?

12.° Якщо висловлення $A \Leftrightarrow B$ істинне (хибне), то що можна сказати про значення істинності висловлень:

а) $A \Leftrightarrow \overline{B}$;

б) $\overline{A} \Leftrightarrow B$;

в) $\overline{A} \Rightarrow B$;

г) $B \Rightarrow A$?

13.° Якщо висловлення $A \Rightarrow B$ істинне, а висловлення $A \Leftrightarrow B$ хибне, то що можна сказати про значення істинності висловлення $B \Rightarrow A$?

14.° В кожному з наступних висловлень визначити, чи досить наведеної інформації для того, щоб встановити його значення істинності. Якщо досить, то вказати це значення. Якщо ні, то показати, що можливі і одне, і друге значення істинності:

а) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$, $p(C) = 1$;

б) $A \wedge (B \Rightarrow C)$, $p(B \Rightarrow C) = 0$;

в) $A \vee (B \Rightarrow C)$, $p(B) = 0$;

г) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)$, $p(A) = 1$;

д) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right)$, $p(A) = 1$;

е) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee C)$, $p(A) = 0$.

15. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулах:

а) $A \Rightarrow \overline{B} \vee \left(\overline{A} \Leftrightarrow C\right) \wedge B \vee C$;

б) $\left(A \Rightarrow \left(B \Rightarrow C\right)\right) \Rightarrow \left(\left(A \Rightarrow B\right) \Rightarrow \left(A \Rightarrow C\right)\right)$;

в) $\left(A \wedge \left(B \vee \overline{A}\right)\right) \wedge \left(\left(\overline{B} \Rightarrow C\right) \vee C\right)$;

г) $\left(A \wedge \left(\overline{B} \Rightarrow C\right)\right) \vee \left(\left(\overline{A} \Leftrightarrow C\right) \wedge \overline{B}\right)$;

д) $\left(A \Rightarrow \overline{\left(B \vee C\right) \wedge \overline{D}}\right) \Rightarrow \left(\overline{C} \vee B\right) \wedge C \Leftrightarrow \overline{A}$.

16. Вказати область дії кожного оператора в формулах:

а) $A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{C} \vee \overline{\overline{D}} \wedge B$;

б) $\overline{A \wedge \left(B \vee \overline{C}\right)} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \left(\overline{B} \vee C\right)$;

в) $\left(A \Rightarrow B\right) \wedge \left(B \Rightarrow C\right) \Rightarrow \left(A \Rightarrow B \wedge C\right)$;

г) $\left(B \Rightarrow A \wedge C\right) \wedge \overline{A \vee C \Rightarrow B}$.

17. Знайти значення істинності формул:

а) $\overline{A \Rightarrow C} \wedge \left(\overline{B} \vee \left(\overline{C} \Rightarrow A\right)\right)$ при $p(A)=1$, $p(B)=0$, $p(C)=1$;

б) $\overline{A \Leftrightarrow B} \wedge C \Rightarrow \overline{A} \vee \left(B \Leftrightarrow C\right)$ при $p(A)=0$, $p(B)=1$, $p(C)=0$.

18. Скласти таблиці істинності для формул алгебри висловлень:

а) $\overline{A \Rightarrow \overline{A}} \Leftrightarrow A$;

б) $\left(A \Rightarrow B\right) \wedge A \Rightarrow B \vee A$;

в) $\left(A \Rightarrow B\right) \Rightarrow \left(\left(A \Rightarrow \overline{B}\right) \Rightarrow \overline{A}\right)$;

г) $\overline{A} \vee B \Leftrightarrow A \wedge \overline{C}$;

д) $\left(A \Rightarrow B\right) \Rightarrow \left(\left(B \Rightarrow C\right) \Rightarrow \left(C \Rightarrow A\right)\right)$.

19.° Знайдіть помилки, допущенні при складанні таблиці істинності для формули алгебри висловлень:

а) $A \vee B \Leftrightarrow A \wedge B$

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B \Leftrightarrow A \wedge B)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

б) $A \Rightarrow C \wedge A \vee B$

$p(A)$	$p(B)$	$p(C)$	$p(A \Rightarrow C)$	$p(A \Rightarrow C \wedge A)$	$p(A \Rightarrow C \wedge A \vee B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

в) $A \Rightarrow C \Rightarrow A \wedge B$

$p(A)$	$p(B)$	$p(C)$	$p(A \wedge B)$	$p(C \Rightarrow A \wedge B)$	$p(A \Rightarrow C \Rightarrow A \wedge B)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

20.* Скільки рядків містить таблиця істинності для формули алгебри висловлень $A \Rightarrow B \vee C \vee D$? Не складаючи таблиці істинності, визначити, в скількох рядках її останнього стовпчика буде 1?

21. Виходячи з означення, показати, що запропоновані формули алгебри висловлень є логічно істинними (тавтологіями):

а) $\left(A \Rightarrow \overline{A}\right) \Rightarrow \overline{A}$;   б) $\left(\overline{A} \Rightarrow A\right) \Rightarrow A$;

в) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow B\right)$;

г) $A \wedge B \vee \overline{A} \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \wedge B \vee A \wedge \overline{B}$;

д) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$;

е) $\left((A \Rightarrow B) \wedge \left(A \Rightarrow \overline{B}\right)\right) \Rightarrow \overline{A}$;

є) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))$;

ж) $\overline{B} \vee \overline{C} \vee B \wedge C$;

з) $(A \Rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$;

и) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

22.° Методом від супротивного довести, що вказані форму-ли є тавтологіями:

а) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((D \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$;

б) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C)))$;

в) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((C \Rightarrow D) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow D)))$;

г) $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \Rightarrow (A \vee C \Rightarrow B \vee D)$.

23.° Способом відшукання контрприкладу встановити, чи є запропоновані формули алгебри висловлень логічно істинними:

а) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

б) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C))$;

в) $A \vee B \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D) \Rightarrow C \vee D)$;

г) $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$.

24. Доведіть, що наступні формули виконувані:

а) $\overline{A \Rightarrow \overline{A}}$;

б) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

в) $(A \Rightarrow (B \wedge C)) \wedge \overline{B \vee C \Rightarrow A}$;

г) $\overline{(B \Leftrightarrow \overline{A}) \vee C} \wedge A$;

д) $(A \wedge B) \Rightarrow ((C \vee B) \Rightarrow (B \wedge \overline{B}))$.

25. Переконатися в тому, що формули алгебри висловлень є суперечностями:

а) $\overline{B} \wedge A \wedge (A \Rightarrow B)$;

б) $A \vee B \Leftrightarrow \overline{A} \wedge (B \Rightarrow \overline{B})$;

в) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \wedge (A \Rightarrow B) \wedge A \wedge \overline{C}$;

г) $\overline{\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}}$;

д) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge \overline{A \Rightarrow B \wedge C}$.

26. Визначити, які з формул є виконуваними, тавтологіями чи суперечностями:

а) $A \wedge (B \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}))$;

б) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow B$;

в) $((A \vee \overline{B}) \Rightarrow B) \wedge (\overline{A} \vee B)$;

г) $A \wedge C \vee B \wedge D \Rightarrow (A \vee B) \wedge (C \vee D)$;

д) $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$;

е) $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$;

є) $(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee C) \wedge A \wedge \overline{C}$;

ж) $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \Rightarrow (A \wedge C \Rightarrow B \wedge D)$;

з) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Leftrightarrow D) \Rightarrow (A \vee C \Leftrightarrow B \vee D))$;

и) $(A \Rightarrow B) \wedge A \wedge B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge A$.

27.° Довести чи спростувати твердження:

а) Якщо формула α алгебри висловлень є тавтологією, то $\overline{\alpha}$ є суперечністю.

б) Із двох формул α і $\overline{\alpha}$ алгебри висловлень хоча б одна – логічно істинна.

в) Якщо α і β – тавтології, то $\alpha \wedge \beta$ – також тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

г) Якщо α і β – тавтології, то $\alpha \vee \beta$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

д) Формули α і β є тавтологіями тоді і тільки тоді, коли $\alpha \Rightarrow \beta$ – тавтологія.

е) Якщо формула $\alpha \Leftrightarrow \beta$ – тавтологія, то α і β – тавтології.

є) Якщо α – виконувана формула алгебри висловлень, то $\overline{\alpha}$ є невиконуваною.

ж) Із двох формул α, $\overline{\alpha}$ алгебри висловлень хоча б одна є виконуваною.

з) Якщо α і β – виконувані формули, то $\alpha \wedge \beta$ – також виконувана. Чи правильне обернене твердження?

и) Якщо α і β – виконувані формули, то $\alpha \vee \beta$ – виконувана. Чи є правильним обернене твердження?

і) Якщо $\alpha \Rightarrow \beta$ – виконувана формула, то α і β – виконувані.

ї) Якщо $\alpha \Leftrightarrow \beta$ – виконувана формула, то α і β – виконувані.

28. Перевірити рівносильність формул:

а) $A \wedge A$, $A \vee A$, $A \wedge T$, $A \vee F$ і A;

б) $A \vee (A \wedge B)$, $A \wedge (A \vee B)$ і A;

в) $\overline{A \vee B}$ і $\overline{A} \wedge \overline{B}$;

г) $A \wedge (B \vee C)$ і $A \wedge B \vee A \wedge C$;

д) $A \Rightarrow B$ і $\overline{A} \vee B$;

е) $A \Leftrightarrow B$ і $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;

є) $A \Rightarrow B$ і $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

29. Довести, що $A \equiv B$ тоді і тільки тоді, коли висловлення $A \Leftrightarrow B$ є логічним законом.

30. Виходячи з означення, довести рівносильності:

а) $A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \wedge B \equiv (A \vee B) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right)$;

б) $A \vee B \Rightarrow \overline{B} \equiv \overline{B}$;

в) $(A \Leftrightarrow B) \wedge \left(A \wedge \overline{B} \vee B\right) \equiv A \wedge B$;

г)° $(A \Rightarrow B) \wedge A \wedge B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge A$.

Чи можна «скоротити» обидві частини останньої рівносильності на $A \Rightarrow B$ (тобто чи має місце рівносильність $A \wedge B \equiv A$)?

31.° Виконуючи рівносильні перетворення, довести рівносильності:

а) $A \vee (B \Leftrightarrow C) \equiv (A \vee B) \Leftrightarrow (A \vee C)$;

б) $A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C) \equiv (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$;

в) $A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C) \equiv (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge C)$;

г) $A \Rightarrow (B \vee C) \equiv (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$;

д) $A \Rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$;

е) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

є) $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \equiv \overline{A} \vee B \vee C$;

ж) $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee C$;

з) $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (C \Rightarrow A \wedge B) \equiv (C \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow B)$.

32.° Довести чи спростувати:

а) $\overline{A \Leftrightarrow \overline{B}} \equiv A \wedge B \vee \overline{A} \wedge \overline{B}$;

б) $A \Rightarrow (A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B)$;

в) $A \vee C \Rightarrow B \vee D \equiv (A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow D)$;

г) $A \vee B \vee \overline{C} \Rightarrow A \equiv (B \Rightarrow A) \wedge \left(\overline{A} \Rightarrow C\right)$.

33. Чи є логічно еквівалентними (рівносильними) такі пари тверджень:

а) «Неправильно, що *A* або *B*» і «Неправильно, що *A,* або неправильно, що *B*»;

б) «Неправильно, що *A* і *B*» і «Неправильно, що *A,* і неправильно, що *B*»;

в) «Якщо *A,* то *B*» і «Якщо неправильно, що *A,* то неправильно, що *B*»;

г) «Неправильно, що *A* і *B*» і «Неправильно, що *A*, або неправильно, що *B*»;

д)° «Неправильно, що *A* тоді і тільки тоді, коли *B*» і «*A* тоді і тільки тоді, коли $\overline{B}$ »;

е)° «Неправильно, що *A* тоді і тільки тоді, коли *B*» і «Неправильно, що *A* тоді, коли *B,* і неправильно, що *A* тільки тоді, коли *B*»?

34. Застосовуючи закони де Моргана, замінити твердження логічно еквівалентними:

а) Неправильно, що 247 кратне 17 і кратне 13.

б) Неправильно, що 7 або 11 є дільником числа 782.

в) Неправильно, що 0 і 1 є коренем рівняння $x^5 - 3x + 1 = 0$.

г) Неправильно, що трикутник *ABC* є рівнобедрений або прямокутний.

35. Застосовуючи рівносильні перетворення, спростити формули:

а) $\overline{\overline{A}\vee B}\Rightarrow\left(\left(A\vee B\right)\Rightarrow A\right)$;

б) $\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}\vee\left(\left(A\Rightarrow B\right)\wedge A\right)$;

в) $\left(A\Rightarrow B\right)\wedge\left(B\Rightarrow A\right)\wedge\left(A\vee B\right)$;

г) $\left(A\Rightarrow B\right)\wedge\left(B\Rightarrow\overline{A}\right)\wedge\left(C\Rightarrow A\right)$;

д) $\left(A\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{C}\right)\vee\left(B\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)$;

е) $\overline{\left(A\Rightarrow B\right)\wedge\left(B\Rightarrow\overline{A}\right)}$;

є) $\overline{A\vee\left(A\wedge B\right)}\wedge\overline{A\wedge\left(\overline{A}\vee B\right)\Rightarrow B}$;

ж) $A\wedge B\vee\overline{A}\wedge C\vee A\wedge C\vee A\wedge\overline{B}\vee\overline{C}$;

з) $\left(A\Rightarrow B\right)\vee\left(A\wedge B\right)\vee\overline{A\vee B}$;

и) $\left(A\wedge B\Rightarrow\overline{B}\right)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee B$;

і) $\overline{A\Rightarrow B}\Rightarrow\overline{C\vee A\Rightarrow C\vee B}\vee B$;

ї) $(A\Rightarrow B)\Rightarrow\left(\overline{B}\Rightarrow\overline{A}\right)\vee(A\Rightarrow B)\wedge B$.

36. Відшукайте помилку, допущену при спрощенні виразу:

а) $\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}\vee((A\Rightarrow B)\wedge A)\equiv\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}\vee\left(\left(A\vee\overline{B}\right)\wedge A\right)\equiv A\wedge B\vee A\equiv A;$

б) $\left(\overline{A}\Rightarrow(A\wedge B)\right)\wedge\overline{A\vee B\Rightarrow A}\equiv(A\vee(A\wedge B))\wedge\overline{\overline{A\vee B}\vee A}\equiv$

$\equiv A\wedge\overline{\overline{A\vee B}}\wedge\overline{A}\ \ A\wedge A\vee B\wedge\overline{A}\equiv A\vee B\wedge\overline{A}\equiv A\wedge\overline{A}\vee B\wedge\overline{A}\equiv$

$\equiv F\vee B\wedge\overline{A}\equiv B\wedge\overline{A}$;

в) $\overline{A\vee A\wedge B}\wedge\overline{A\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)\Rightarrow B}\equiv(\overline{A}\wedge\overline{A}\vee\overline{B})\wedge\overline{\overline{A\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)}\vee B}\equiv$

$\equiv(\overline{A}\vee\overline{B})\wedge A\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)\wedge\overline{B}\equiv A\wedge(\overline{A}\vee\overline{B})\wedge\overline{B}\equiv A\wedge\overline{B}$.

37. Рівносильними перетвореннями зведіть наступні формули до такого вигляду, щоб вони містили лише операції заперечення, диз'юнкції і кон'юнкції:

а) $((A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A))\Rightarrow(A\vee B)$;

б) $\left((A\Rightarrow B)\wedge\left(B\Rightarrow\overline{A}\right)\right)\Rightarrow(C\Rightarrow A)$;

в) $\left((A\Leftrightarrow B)\wedge\left(\overline{A}\Leftrightarrow\overline{B}\right)\right)\Rightarrow\left((A\vee B)\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)\right)$;

г) $\left(\left(A\Leftrightarrow\overline{B}\right)\Rightarrow C\right)\Rightarrow\left(A\Leftrightarrow\overline{C}\right)$;

д) $(A\Rightarrow(B\Leftrightarrow C))\Leftrightarrow((A\Rightarrow B)\Leftrightarrow C)$.

38.° Рівносильними перетвореннями зведіть наступні формули до такого вигляду, щоб вони містили лише операції заперечення і кон'юнкції:

а) $(A\vee B)\Rightarrow\left(\overline{A}\Rightarrow C\right)$;

б) $\left(\overline{A}\Rightarrow B\right)\vee\overline{A\Rightarrow B}$;

в) $((A\vee B\vee C)\Rightarrow A)\vee C$;

г) $((A\Rightarrow B)\Rightarrow C)\Rightarrow\overline{A}$;

д) $(A\vee(B\Rightarrow C))\Rightarrow A$.

39.° Рівносильними перетвореннями зведіть наступні формули до такого вигляду, щоб вони містили лише операції заперечення і диз'юнкції:

а) $(A\Rightarrow B)\Rightarrow(B\wedge C)$;

б) $\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\right)\Rightarrow(A\wedge B)$;

в) $\left(\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\right)\vee C\right)\Rightarrow\left(C\wedge\overline{B}\right)$;

г) $\left(\left(A\Rightarrow\left(B\wedge C\right)\right)\Rightarrow\left(\overline{B}\Rightarrow\overline{A}\right)\right)\Rightarrow\overline{B}$;

д) $\left(\left(A\Rightarrow B\right)\wedge\left(B\Rightarrow C\right)\right)\Rightarrow\left(A\Rightarrow C\right)$.

40. За допомогою рівносильних перетворень доведіть, що наступні формули є логічно істинними:

а) $\left(A\Rightarrow\overline{A}\right)\Rightarrow\overline{A}$;

б) $\left(\overline{A}\Rightarrow A\right)\Rightarrow A$;

в) $\left(A\Rightarrow B\right)\Rightarrow\left(A\wedge\overline{B}\Rightarrow B\right)$;

г) $A\wedge B\vee\overline{A}\wedge\overline{B}\vee\overline{A}\wedge B\vee A\wedge\overline{B}$;

д) $A\Rightarrow\left(B\Rightarrow\left(A\wedge B\right)\right)$;

е) $\left(\left(A\Rightarrow B\right)\wedge\left(A\Rightarrow\overline{B}\right)\right)\Rightarrow\overline{A}$;

є) $\left(A\Rightarrow B\right)\Rightarrow\left(\left(B\Rightarrow A\right)\Rightarrow\left(A\Leftrightarrow B\right)\right)$;

ж) $\overline{B}\vee\overline{C}\vee B\wedge C$;

з) $\left(A\Rightarrow\left(B\wedge C\right)\right)\Leftrightarrow\left(\left(A\Rightarrow B\right)\wedge\left(A\Rightarrow C\right)\right)$;

и) $\left(A\Rightarrow\left(B\Rightarrow C\right)\right)\Leftrightarrow\left(B\Rightarrow\left(A\Rightarrow C\right)\right)$.

41. За допомогою рівносильних перетворень доведіть, що наступні формули є суперечностями:

а) $\overline{B}\wedge A\wedge\left(A\Rightarrow B\right)$;

б) $A\vee B\Leftrightarrow\overline{A}\wedge\left(B\Rightarrow\overline{B}\right)$;

в) $\left(A\Rightarrow\left(B\Rightarrow C\right)\right)\wedge\left(A\Rightarrow B\right)\wedge A\wedge\overline{C}$;

г) $\overline{\overline{A\wedge B}\Leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}}$;

д) $\left(A\Rightarrow B\right)\wedge\left(B\Rightarrow C\right)\wedge\overline{A\Rightarrow B\wedge C}$.

1.2. ДВІЙКОВІ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ ТА БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

1.2.1. Теоретичні відомості

Означення 1. Булевою називається функція, яка, як і всі її аргументи, набуває значень лише 0 або 1.

Задають булеві функції таблицею істинності або логічною формулою. Встановлено, що від n змінних можна побудувати 2^{2^n} різних булевих функцій. Так, наприклад, таблицею істинності можна задати 16 різних булевих функцій від двох змінних x_1 і x_2:

x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1

Кожна з цих булевих функцій зображається відповідною формулою: $F_1(x_1; x_2) \equiv 0$ – нуль-функція або фальш; $F_2(x_1; x_2) = x_1 \wedge x_2$ – кон'юнкція; $F_3(x_1; x_2) = \overline{x_1 \Rightarrow x_2}$ – антиімплікація; $F_4(x_1; x_2) = \overline{x_2 \Rightarrow x_1}$ – обернена антиімплікація; $F_5(x_1; x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$ – антидиз'юнкція або стрілка Пірса (позначають $x_1 \downarrow x_2$); $F_6(x_1; x_2) = x_1$; $F_7(x_1; x_2) = x_2$; $F_8(x_1; x_2) = x_1 \Leftrightarrow x_2$ – еквіваленція; $F_9(x_1; x_2) = \overline{x_1 \Leftrightarrow x_2}$ – антиеквіваленція або сума Жегалкіна (позначають $x_1 \oplus x_2$); $F_{10}(x_1; x_2) = \overline{x_2}$; $F_{11}(x_1; x_2) = \overline{x_1}$; $F_{12}(x_1; x_2) = x_1 \vee x_2$ – диз'юнкція; $F_{13}(x_1; x_2) = x_2 \Rightarrow x_1$ – обернена імплікація; $F_{14}(x_1; x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$ – імплікація; $F_{15}(x_1; x_2) = \overline{x_1 \wedge x_2}$ – антикон'юнкція або штрих Шеффера (позначають $x_1 \mid x_2$); $F_{16}(x_1; x_2) \equiv 1$ – одиниця або тавтологія.

Означення 2. Суперпозицією булевих функцій $g_1(x_{11}, x_{12},..., x_{1n_1})$, $g_2(x_{21}, x_{22},..., x_{2n_2}),\dots, g_m(x_{m1}, x_{m2},..., x_{mn_m})$ в булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ називається нова булева функція, яка одержується з функції $f(x_1, x_2,\dots, x_m)$ в результаті підстановки замість змінних $x_1, x_2,\dots, x_m$ відповідно функцій $g_1, g_2,\dots, g_m$.

В булевій логіці діє принцип (його називають принципом суперпозиції), який стверджує, що будь-яку складну функцію можна подати у вигляді суперпозиції елементарних функцій від двох аргументів.

Наприклад: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 \mid x_2) \Rightarrow (x_2 \vee x_3)) \downarrow (\overline{x_3} \wedge x_4) =$
$$= F_5\{F_{14}[F_{15}(x_1, x_2), F_{12}(x_2, x_3)], F_2[F_{11}(x_3, x_4), x_4]\}.$$

Якщо булева функція залежить від багатьох змінних, то задавати і досліджувати її зручніше не таблицею істинності, а аналітично (формулою). При цьому намагаються формулу звести до однієї з нормальних форм.

Означення 3. Елементарною кон'юнкцією називається кон'юнкція пропозиційних змінних та їх заперечень.

Означення 4. Елементарною диз'юнкцією називається диз'юнкція пропозиційних змінних та їх заперечень.

Число пропозиційних змінних в елементарній кон'юнкції (диз'юнкції) називають її *рангом*. Наприклад, $A \wedge \overline{B} \wedge C$ – елементарна кон'юнкція рангу 3; $\overline{A} \vee C \vee D \vee B$ – елементарна диз'юнкція рангу 4. Пропозиційну змінну A можна вважати як елементарною кон'юнкцією, так і диз'юнкцією рангу 1. Формула $A \vee B \wedge C$ не є ні елементарною кон'юнкцією, ні диз'юнкцією.

Означення 5. Диз'юнкція (кон'юнкція) n елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) називається n-членною диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою. Скорочений запис відповідно: днф, кнф.

Наприклад, формула $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \vee A_2 \wedge A_4$ є 2-членною днф, а формула $A_1 \wedge A_2 \wedge (A_3 \vee A_2) \wedge A_4$ є 4-членною кнф.

Нормальні форми (кон'юнктивна і диз'юнктивна) мають різні застосування. Одне з них пов'язане з вирішенням питання про існування алгоритму, який за скінчене число кроків визначає для будь-якої логічної формули, є вона тавтологією, чи ні.

Теорема 1. Логічна формула є тавтологією тоді і тільки тоді, коли кожна елементарна диз'юнкція, що входить до кнф цієї формули, містить хоча б одну пропозиційну змінну разом з її запереченням.

Так, наприклад, формула $((A \Rightarrow B) \vee A) \wedge (B \vee (B \Rightarrow A))$ є тавтологією, оскільки кнф $(\overline{A} \vee B \vee A) \wedge (B \vee \overline{B} \vee A)$, до якої вона зводиться, задовольняє умови попередньої теореми.

Теорема 2. Логічна формула є суперечністю тоді і тільки тоді, коли кожна елементарна кон'юнкція, що входить до днф цієї формули, містить хоча б одну пропозиційну змінну разом з її запереченням.

Розглянуті вище нормальні форми не визначаються однозначно для заданої формули: для тієї самої булевої функції існують істотно різні кнф і днф (звичайно, всі вони рівносильні між собою). Виділимо з класу нормальних форм для даної формули алгебри висловлень певний підклас, члени якого однозначно визначаються за даною формулою (з точністю до порядку запису). Введемо ряд означень.

Означення 6. Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) називається правильною, якщо кожна пропозиційна змінна входить до неї не більше ніж один раз, включаючи також входження змінної під знаком заперечення.

Наприклад, елементарна кон'юнкція $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$ є правильною, а елементарна диз'юнкція $\overline{A} \vee B \vee A$ не є правильною.

Означення 7. Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) називається повною щодо пропозиційних змінних $A_1, A_2, \ldots, A_n$, якщо кожна з цих змінних входить до неї хоча б один раз (або із знаком заперечення, або без нього).

Так, щодо змінних A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 елементарна диз'юнкція $A_2 \vee A_3 \vee \overline{A_1} \vee \overline{A_5} \vee A_4$ є повною, а елементарна кон'юнкція $A_2 \wedge \overline{A_1} \wedge A_5 \wedge A_4$ не є повною.

Означення 8. Досконалою диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою щодо пропозиційних змінних $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається диз'юнктивна (кон'юнктивна) нормальна форма, кожна елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) якої є правильною і повною щодо даного набору пропозиційних змінних. Позначається, відповідно, Ддиф і Дкнф.

Так, днф $\left(A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3\right) \vee \left(\overline{A_1} \wedge A_2\right) \vee \left(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3\right)$ не є Ддиф щодо змінних A_1, A_2, A_3, бо вона містить елементарну кон'юнкцію $\overline{A_1} \wedge A_2$, яка не є повною (не містить змінної A_3). Так само, не є Ддиф і формула $\left(A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3\right) \vee \left(\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \wedge A_1\right)$, оскільки друга елементарна кон'юнкція в ній не є правильною (змінна A_1 входить до неї двічі). Навпаки, днф $\left(A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3\right) \vee \left(\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge A_3\right) \vee \left(\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \overline{A_3}\right)$ є досконалою щодо тих самих пропозиційних змінних. Прикладом Дкнф щодо пропозиційних змінних A_1, A_2, A_3 може служити формула $\left(A_1 \vee A_2 \vee \overline{A_3}\right) \wedge \left(\overline{A_1} \vee A_2 \vee A_3\right)$.

Для того щоб звести логічний вираз, відмінний від тотожнього нуля, до Ддиф, потрібно:

1. Позбутися операцій еквіваленції та імплікації, використовуючи рівносильності $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ і $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$.
2. За допомогою правил де Моргана та властивості подвійного заперечення отримати формулу, в якій кожний символ заперечення стосується лише однієї пропозиційної змінної.
3. Перетворити вираз у днф, використовуючи рівносильність $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
4. Кожну неправильну елементарну кон'юнкцію перетворити в правильну, використовуючи комутативну і асоціативну властивості, властивість суперечності та рівносильності $A \wedge A \equiv A$, $A \wedge F \equiv F$ і $A \vee F \equiv A$.

5. До неповної елементарної кон'юнкції, яка не містить, наприклад, змінної A, приєднати кон'юнктивно тавтологію і замінити її виразом $A \vee \overline{A}$. Після цього розкрити дужки за дистрибутивною властивістю. У разі необхідності цей процес повторювати доти, поки кожна неповна елементарна кон'юнкція не перетвориться в повну.
6. Якщо в остаточній формулі є однакові диз'юнктивні члени, то залишити тільки один з них.

Для того щоб звести логічний вираз, відмінний від тотожньої одиниці, до Дкнф, потрібно:

1. Позбутися операцій еквіваленції та імплікації.
2. За допомогою правил де Моргана та властивості подвійного заперечення отримати формулу, в якій кожний символ заперечення стосується лише однієї пропозиційної змінної.
3. Перетворити вираз у кнф, використовуючи рівносильність $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
4. Кожну неправильну елементарну диз'юнкцію перетворити в правильну, використовуючи комутативну і асоціативну властивості, властивість виключеного третього та рівносильності $A \vee A \equiv A$, $A \vee T \equiv T$ і $A \wedge T \equiv A$.
5. До неповної елементарної диз'юнкції, яка не містить, наприклад, змінної *A*, приєднати диз'юнктивно фальш і замінити її виразом $A \wedge \overline{A}$. Після цього застосувати дистрибутивну властивість. У разі необхідності цей процес повторюється, як і у випадку зведення до Ддиф.
6. Якщо в остаточній формулі є однакові кон'юнктивні члени, то залишити тільки один з них.

Теорема 3. Логічна формула є тавтологією тоді і тільки тоді, коли її Ддиф містить рівно 2^n елементарних кон'юнкцій, де n – число пропозиційних змінних.

Ця теорема дає змогу за даною Ддиф відразу визначити, є вона тавтологією чи ні. Для цього досить підрахувати число диз'юнктивних членів. Так, Ддиф $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge A_3) \vee$ $\vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \overline{A_3})$ не може бути тавтологією, оскільки в ній міститься тільки три диз'юнктивних члени, а для того щоб вона була тавтологією, повинно бути $2^3 = 8$ диз'юнктивних членів, тобто 8 елементарних кон'юнкцій.

Теорема 4. Логічна формула є суперечністю тоді і тільки тоді, коли її Дкнф містить рівно 2^n елементарних диз'юнкцій, де n – число пропозиційних змінних.

Теорема 5. Будь-яку булеву функцію, відмінну від тотожного нуля, можна подати у вигляді Ддиф. Дане представлення єдине (з точністю до порядку членів).

Теорема 6. Будь-яку булеву функцію, відмінну від тотожної одиниці, можна подати у вигляді Дкнф, яка є єдиною (з точністю до порядку членів).

Існує і третя досконала форма – досконала поліноміальна нормальна форма (Дпнф), яку ще називають поліномом Жегалкіна. Побудувати поліном Жегалкіна можна методом невизначених коефіцієнтів або одержати з Ддиф чи Дкнф, використавши, наприклад, формули $a \vee b = a \oplus b \oplus ab$ і $\overline{a} = a \oplus 1$. Одержаний вираз можна спрощувати, якщо розкрити дужки і взаємно скоротити всі однакові доданки, які входять в формулу парне число раз. Подібне спрощення називають мінімізацією логічної формули.

Для днф чи кнф (в тому числі досконалих) більш компактні (мінімальні) вирази можна одержати, використовуючи, наприклад, закони склеювання: $\left(a \wedge \overline{b}\right) \vee (a \wedge b) = a$, $\left(a \vee \overline{b}\right) \wedge (a \vee b) = a$. Так, якщо для Ддиф

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}\right) \vee$$
$$\vee \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

застосувати закон склеювання до першого з другим та другого з четвертим диз'юнктивними членами (звертаємо увагу на те, що одну і ту ж елементарну кон'юнкцію (диз'юнкцію) можна склеювати з іншими елементарними кон'юнкціями (диз'юнкціями) декілька раз, оскільки за рахунок закону ідемпотентності будь-яку з них можна розмножити), то одержимо:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \wedge \overline{x_3}\right) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right).$$

Отриманий вираз буде мінімальною днф (містить найменшу кількість змінних та операцій).

Змінні та їх заперечення часто називають термами. Повний набір з n термів (елементарна диз'юнкція або кон'юнкція n термів) утворює конституенту. В процесі мінімізації деякі терми в конституенті пропадуть. Тоді ту частину диз'юнкта чи кон'юнкта, що залишилася, називають імплікантою.

Як показує наведений вище приклад, імпліканти з'являються в результаті склейки конституент, що відрізняються одним термом. Проте для функцій від багатьох змінних процес склейки може призвести до появи зайвих імпліканти. В деяких випадках мінімальні нормальні форми отримують за допомогою спеціальних методів мінімізації, таких, наприклад, як метод Квайна, метод комбінування індексів чи за допомогою карт Карно. Відмітимо, що в загальному випадку розв'язків за критерієм мінімуму термів може бути декілька.

При побудові досконалих форм обмежуються скінченим числом логічних операцій (диз'юнкцією, кон'юнкцією та запереченням). В зв'язку з цим виникає питання про функціональну повноту.

Означення 9. Система функцій називається функціонально повною, якщо будь-яка булева функція може бути записана у вигляді формули через функції цієї системи.

Означення 10. Говорять, що функція f зберігає 0, якщо $f(0,0,\ldots,0)=0$. Позначають клас всіх булевих функцій, які зберігають нуль, через P_0.

Означення 11. Говорять, що функція f зберігає 1, якщо $f(1,1,\ldots,1)=1$. Позначають клас всіх булевих функцій, які зберігають одиницю, через P_1.

Означення 12. Булева функція називається лінійною, якщо її можна подати у вигляді поліному Жегалкіна першого степеня. Позначають клас всіх булевих лінійних функцій через L.

Означення 13. Булева функція f^* називається двоїстою (спряженою) для функції f, якщо $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \overline{f(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})}$ для будь-яких $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Булева функція називається самодвоїстою (самоспряженою), якщо $f^* = f$. Позначають клас всіх булевих самодвоїстих функцій через S.

Означення 14. Говорять, що функція f монотонна, якщо з нерівностей $x_1 \le y_1$, $x_2 \le y_2$, …, $x_n \le y_n$ випливає, що $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Позначають клас всіх булевих монотонних функцій через M.

З'ясувати питання функціональної повноти можна за допомогою теореми Поста:

Теорема 7. Система булевих функцій функціонально повна тоді і тільки тоді, коли в цій системі є функція, яка не належить класу P_0, є функція, яка не належить класу P_1, є функція, яка не належить класу L, є функція, яка не належить класу S, є функція, яка не належить класу M.

Належність булевих функцій від двох змінних то того чи іншого класу помічено одиницею в наступній таблиці. За її допомогою легко визначити функціонально повну систему функцій від двох змінних.

Клас	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
P_0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
P_1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
L	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
M	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Користуючись поданою таблицею, можна стверджувати, що за теоремою Поста повною буде, наприклад, система із трьох функцій F_2, F_9, F_{16}, тобто система, що складається з функцій: кон'юнкції, суми Жегалкіна та тотожної одиниці.

1.2.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. За допомогою суперпозицій виразити функцію $\wedge$ через функції $\Rightarrow$ і $\bar{\ }$.

Розв'язання. $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \overline{x \Rightarrow \bar{y}}$.

Приклад 2. Довести повноту системи булевих функцій $\{\vee, \bar{\ }\}$.

Розв'язання. Довільну функцію можна подати у вигляді суперпозиції функцій $\wedge$, $\vee$ і $\bar{\ }$ (див. правила зведення до Ддниф чи Дкнф). Далі, за правилами де Моргана, досить легко позбутися кон'юнкції. Отже, формулу вдається виразити через суперпозицію функцій $\vee$ і $\bar{\ }$. Оскільки такі дії можна застосувати до будь-якої булевої функції, то система $\{\vee, \bar{\ }\}$ дійсно є повною.

Приклад 3. Довести, що неможливо за допомогою суперпозицій виразити $\Rightarrow$ через $\wedge$ і $\vee$.

Розв'язання. Для доведення цього факту потрібно виявити таку властивість функцій $\wedge$ і $\vee$, яка зберігається при їх суперпозиції, але якою не володіє функція $\Rightarrow$. Іншими словами, потрібно знайти набір значень аргументів та відповідне значення функції або послідовність таких наборів, для яких зберігається певна закономірність при суперпозиції $\wedge$ і $\vee$, але вона не зберігається при $\Rightarrow$.

Так, кожна з функцій $\wedge$ і $\vee$ зберігає 0, тобто $0 \wedge 0 = 0$ і $0 \vee 0 = 0$. Звідси випливає, що всяка суперпозиція функцій $\wedge$ і $\vee$ буде функцією, яка зберігає 0. Але функція $\Rightarrow$ не зберігає 0, так як $0 \Rightarrow 0 = 1$.

Приклад 4. Звести до кнф формулу $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow \bar{A}$.

Розв'язання. Спочатку потрібно позбутися імплікації та заперечення виразу (див. правила 1 і 2 побудови Дкнф):

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow \bar{A} \equiv \overline{A \wedge B \Rightarrow C} \vee \bar{A} \equiv \overline{\overline{A \wedge B} \vee C} \vee \bar{A} \equiv$$

$$\equiv \left(\overline{\overline{A \wedge B}} \wedge \bar{C}\right) \vee \bar{A} \equiv ((A \wedge B) \wedge \bar{C}) \vee \bar{A}.$$

Тепер, скориставшись двічі дистрибутивною властивістю (див. правило 3 побудови Дкнф), одержимо кнф:

$$((A \wedge B) \wedge \bar{C}) \vee \bar{A} \equiv ((A \wedge B) \vee \bar{A}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{A}) \equiv (A \vee \bar{A}) \wedge (B \vee \bar{A}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{A}).$$

Вираз $(A \vee \bar{A}) \wedge (B \vee \bar{A}) \wedge (\bar{C} \vee \bar{A})$ є кнф заданої формули.

Приклад 5. Звести до днф формулу $A \Leftrightarrow B \wedge C$.

Розв'язання. Використовуючи правила 1 – 3 побудови Ддиф, аналогічно до попередньої задачі, одержимо:

$$A \Leftrightarrow B \wedge C \equiv (A \Rightarrow B \wedge C) \wedge (B \wedge C \Rightarrow A) \equiv \left(\overline{A} \vee (B \wedge C)\right) \wedge \left(\overline{B \wedge C} \vee A\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{A} \vee (B \wedge C)\right) \wedge \left(\overline{B} \vee \overline{C} \vee A\right) \equiv \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge A\right) \vee \left(B \wedge C \wedge \overline{B}\right) \vee$$
$$\vee \left(B \wedge C \wedge \overline{C}\right) \vee (B \wedge C \wedge A).$$

Вираз $\left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge A\right) \vee \left(B \wedge C \wedge \overline{B}\right) \vee \left(B \wedge C \wedge \overline{C}\right) \vee (B \wedge C \wedge A)$ є днф заданої формули.

Приклад 6. З'ясувати, чи є формула $A \Rightarrow A \wedge B$ тавтологією.

Розв'язання. Зведемо задану формулу до кнф:

$$A \Rightarrow A \wedge B \equiv \overline{A} \vee (A \wedge B) \equiv \left(\overline{A} \vee A\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B\right).$$

Перший кон'юнктивний член одержаної кнф містить пропозиційну змінну *A* разом з її запереченням, але другий кон'юнктивний член не містить жодної такої змінної. Отже, згідно теореми 1, задана формула $A \Rightarrow A \wedge B$ не є тавтологією.

Приклад 7. Задана система пропозиційних змінних $\{A, B, C\}$. Звести до Дкнф формулу $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{(A \vee C) \wedge \overline{A}}$.

Розв'язання.

$$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{(A \vee C) \wedge \overline{A}} \equiv \left(\overline{A} \vee B\right) \wedge \left(\overline{A \vee C} \vee \overline{\overline{A}}\right) \equiv \left(\overline{A} \vee B\right) \wedge \left(\left(\overline{A} \wedge \overline{C}\right) \vee A\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{A} \vee B\right) \wedge \left(\overline{A} \vee A\right) \wedge \left(\overline{C} \vee A\right) \equiv \left(\overline{A} \vee B\right) \wedge T \wedge \left(\overline{C} \vee A\right) \equiv \left(\overline{A} \vee B\right) \wedge \left(\overline{C} \vee A\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{A} \vee B \vee F\right) \wedge \left(\overline{C} \vee A \vee F\right) \equiv \left(\overline{A} \vee B \vee \left(C \wedge \overline{C}\right)\right) \wedge \left(\overline{C} \vee A \vee \left(B \wedge \overline{B}\right)\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{A} \vee B \vee C\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{C} \vee A \vee B\right) \wedge \left(\overline{C} \vee A \vee \overline{B}\right).$$

Вираз $\left(\overline{A} \vee B \vee C\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{C} \vee A \vee B\right) \wedge \left(\overline{C} \vee A \vee \overline{B}\right)$ є Дкнф заданої формули.

Приклад 8. Зведенням формули $\overline{A} \wedge C \wedge (B \Rightarrow A)$ до Ддиф визначити, чи є вона тавтологією.

Розв'язання. Скористаємось правилами побудови Ддиф.

$$\overline{A} \wedge C \wedge (B \Rightarrow A) \equiv \overline{A} \wedge C \wedge \left(\overline{B} \vee A\right) \equiv \left(\overline{A} \wedge C \wedge \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge C \wedge A\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{A} \wedge C \wedge \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge A \wedge C\right) \equiv \left(\overline{A} \wedge C \wedge \overline{B}\right) \vee (F \wedge C) \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{A} \wedge C \wedge \overline{B}\right) \vee F \equiv \overline{A} \wedge C \wedge \overline{B}.$$

Вираз $\overline{A} \wedge C \wedge \overline{B}$ є Ддиф для формули $\overline{A} \wedge C \wedge (B \Rightarrow A)$. Вона не може бути тавтологією, оскільки в ній міститься лише один диз'юнктивний член, а, згідно теореми 3, для того щоб задана формула була тавтологією, їх має бути $2^3 = 8$.

Приклад 9. За даним набором значень пропозиційних змінних (0, 1, 1) побудувати елементарну кон'юнкцію, яка приймає значення 1 тільки на цьому наборі значень пропозиційних змінних.

Розв'язання. Оскільки елементарна кон'юнкція $y_1 \wedge y_2 \wedge y_3$ приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$, то кон'юнкція $\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3$ приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли $\overline{x_1} = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, тобто $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Вона і буде шуканою.

Приклад 10. Використовуючи Ддиф, знайдіть формулу, яка приймає значення 1 на таких наборах значень змінних, і тільки на них: $F(0, 0, 0) = F(0, 1, 0) = F(1, 1, 1)$.

Розв'язання. Першу умову задовольняє лише елементарна кон'юнкція $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$, другу – $\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$, третю – $x \wedge y \wedge z$. Тоді формула $F(x, y, z) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z)$ перетворюється в 1, якщо і тільки якщо $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$, або $\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$ перетворюється в 1, або $x \wedge y \wedge z$ перетворюється в 1, тобто якщо і тільки якщо $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, або $(x, y, z) = (0, 1, 0)$, або $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Отже, $F(x, y, z)$ – шукана формула.

Приклад 11. Зобразити у вигляді Ддиф і Дкиф булеву функцію, задану таблицею істинності:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Розв'язання. Знайдемо спочатку Дднф для заданої функції. Виділимо ті набори значень змінних, на яких f набуває значення 1, і утворимо для кожного набору відповідну кон'юнкцію K_i. Такими наборами є перший, другий, четвертий, сьомий рядки таблиці. Відповідні їм кон'юнкції K_i мають вигляд:

$$K_1 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}, \qquad K_4 = \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3,$$

$$K_2 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3, \qquad K_7 = x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}.$$

Їх диз'юнкція набуває вигляду:

$$\left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}\right) \vee \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee \left(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}\right).$$

Вона є шуканою Дднф.

Тепер знайдемо Дкнф заданої функції. Виберемо набори значень змінних, на яких f перетворюється в 0, і утворимо для них відповідні диз'юнкції:

$$D_3 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3, \qquad D_6 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3},$$

$$D_5 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3, \qquad D_8 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}.$$

Шукана Дкнф матиме вигляд:

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

Приклад 12. Методом невизначених коефіцієнтів знайти поліном Жегалкіна для функції $f(x_1, x_2) = (1011)$.

Розв'язання. Вираз $f(x_1, x_2) = (1011)$ – це скорочений запис булевої функції, яка таблицею задається так:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Записуємо шуканий вираз у вигляді полінома з невизначеними коефіцієнтами: $f(x_1, x_2) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_1 \oplus \beta_2 x_2 \oplus \beta_3 x_1 x_2$.

Складаємо рівняння:

$$f(0{,}0) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(0{,}1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(1{,}0) = 0 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(1{,}1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 1.$$

Знаходимо розв'язки цих рівнянь: $\beta_0 = \beta_1 = \beta_3 = 1$, $\beta_2 = 0$. Це і є коефіцієнти шуканого полінома. Таким чином, матимемо:

$$f(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 .$$

Приклад 13. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$.

Розв'язання. Зведемо формулу до такого вигляду, щоб вона містила лише операції кон'юнкції і заперечення, а потім всюди замінимо $\overline{x}$ на $x \oplus 1$ і розкриємо дужки за дистрибутивним законом:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2 = \overline{x_1 \overline{x_2}} = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1 .$$

Приклад 14. Знайти мінімальну днф, якщо Ддиф має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee$$
$$\vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_4}) \vee$$
$$\vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4).$$

Розв'язання. Розглянемо три методи мінімізації:

а) *метод Квайна*

Очевидно, що функція, Ддиф якої має вказаний вигляд, набуває одиничне значення на таких наборах: 0100, 1010, 0110, 1110, 0101, 0011, 1011, 0111.

На першому етапі мінімізації виконаємо спрощення даної Ддиф за допомогою закону склеювання. Спочатку розглянемо всеможливі варіанти склеювання чотирьохчленних елементарних кон'юнкцій з метою одержання трьохчленних. Застосувавши його до 1-го з 3-тім, 2-го з 4-тим, 3-го з 8-мим, 2-го з 7-мим, 6-го з 7-мим, 6-го з 8-мим та 5-го з 8-мим диз'юнктивних членів, отримаємо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee$$
$$\vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_4).$$

При склеюванні одну і туж елементарну кон'юнкцію можна використовувати декілька разів, що ми й зробили з 2-им, 3-ім, 6-им, 7-мим та 8-мим диз'юнктивним членом. Тут лише важливо, щоб не пропустити жодного члену. Якщо яку-небуть елементарну кон'юнкцію ми не використали жодного разу, то її потрібно залишити в формулі без зміни.

До одержаного виразу також можна застосовувати процес склеювання. Наприклад, поєднаємо 1-ий з 7-мим диз'юнктивні члени, отримаємо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee$$
$$\vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3 \wedge x_4).$$

На другому етапі скористаємось поданою нижче таблицею, в якій по вертикалі перераховані всі отримані на першому етапі спрощення імпліканти, а по горизонталі – вихідні конституенти. Одиниця в таблиці стоїть там, де імпліканта «накриває» конституенту.

В деяких стовпцях заповненої таблиці виявилось по дві одиниці, хоча достатньо й однієї. Тому, по можливості, потрібно виключити надлишкові одиниці. Вибір їх здійснюється по мінімальності числа термів (вибрані одиниці затемнені). В результаті виявилось, що можна обійтись лише трьома імплікантами замість шести: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}x_2 \vee x_1x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_3x_4$.

$x_1x_2x_3x_4$	0100	1010	0110	1110	0101	0011	1011	0111
01--	1	0	1	0	1	0	0	1
1-10	0	1	0	1	0	0	0	0
011-	0	0	1	0	0	0	0	0
101-	0	1	0	0	0	0	1	0
-011	0	0	0	0	0	1	1	0
0-11	0	0	0	0	0	1	0	1

Звичайно, що не обов'язково розглядати всеможливі варіанти склеювання, але це дає шанс отримати найкращий розв'язок. Якби ми застосували його до 1-го з 3-тім, 2-го з 4-тим, 5-го з 8-мим та 6-го з 7-мим диз'юнктивним членом, а тоді в одержаному виразі поєднали 1-го з 3-тім, то відразу одержали б дану вище відповідь, але, якби застосували його до 1-го з 3-тім, 2-го з 4-тім, 1-го з 5-тим, 6-го з 7-мим, та 6-го з 8-мим диз'юнктивним членом, то одержали б вираз із 15-и змінних, який не піддається подальшій мінімізації.

б) *метод комбінування індексів*

Складемо таблицю, в стовпцях якої записані можливі поєднання індексів. В останньому стовпчику виписані значення функції.

n	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234	*f*
1	0	0	0	0	00	00	00	00	00	00	000	000	000	000	0000	0
2	0	0	0	1	00	00	01	00	01	01	000	001	001	001	0001	0
3	0	0	1	0	00	01	00	01	00	10	001	000	010	010	0010	0
4	0	0	1	1	00	01	01	01	01	11	001	001	011	011	0011	1
5	0	1	0	0	01	00	00	10	10	00	010	010	000	100	0100	1
6	0	1	0	1	01	00	01	10	11	01	010	011	001	101	0101	1
7	0	1	1	0	01	01	00	11	10	10	011	010	010	110	0110	1
8	0	1	1	1	01	01	01	11	11	11	011	011	011	111	0111	1
9	1	0	0	0	10	10	10	00	00	00	100	100	100	000	1000	0
10	1	0	0	1	10	10	11	00	01	01	100	101	101	001	1001	0
11	1	0	1	0	10	11	10	01	00	10	101	100	110	010	1010	1
12	1	0	1	1	10	11	11	01	01	11	101	101	111	011	1011	1
13	1	1	0	0	11	10	10	10	10	00	110	110	100	100	1100	0
14	1	1	0	1	11	10	11	10	11	01	110	111	101	101	1101	0
15	1	1	1	0	11	11	10	11	10	10	111	110	110	110	1110	1
16	1	1	1	1	11	11	11	11	11	11	111	111	111	111	1111	0

Принцип виключення *i, j*-коду наступний. На перетині *i*-стовпчика, наприклад, з поєднанням індексів 23, та *j*-рядка, наприклад 3-го, знаходиться код 01, що відповідає імпліканті $\bar{x}_2 x_3$. В цьому стовпчику скрізь, де зустрічається код 01, тобто в рядках 3, 4, 11 і 12, ці коди виключаються, оскільки значення функції в 3-му рядку дорівнює нулю. Тепер візьмемо стовпчик з поєднанням індексів 124. Тут в 5-му і 7-му рядках залишено код 010, а в 6-му і 8-му рядках – код 011. Зроблено це тому, що ці коди зустрічаються тільки у рядках зі значенням функції, що дорівнює одиниці. А код 110 цього ж стовпчика зустрічається як при одиничних значеннях функції, так і при нульових. Тому він виключається.

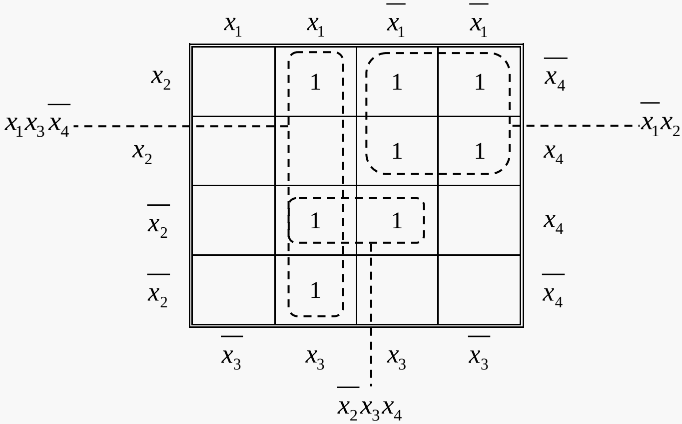
Отже, всі коди на рядках, які закінчуються нульовим значенням функції, виключаються автоматично. Якщо ці коди попадають на рядки, які закінчуються одиничним значенням функції, то вони також не враховуються. Залишаються лише ті коди, які розміщені у рядках з одиничним значенням функції (ці коди затемнені).

Далі для того щоб функція прийняла значення, рівне одиниці, досить того, щоб лише одна яка-небудь імпліканта в рядку набула одиничного значення. Перш за все залишаємо мінімальну імпліканту $\bar{x}_1 x_2$, яка перекриває одиниці в рядках 5, 6, 7 і 8. Далі звертаємось до 4-го і 12-го рядків. Спільним для них є код 011, що відповідає імпліканті $\bar{x}_2 x_3 x_4$. Залишилось розглянути 11-й і 15-й рядки.

Спільною для них є імпліканта $x_1 x_3 \overline{x_4}$. Таким чином, трьома імплікантами ми перекрили всі одиничні значення функції.

в) *метод мінімізаційних карт (карти Карно)*

Заповнена карта Карно для даної функції має вигляд:



Кожна клітинка карти відповідає конституенті. Згідно закону склеювання, дві суміжні конституенти з одиничними значеннями завжди можна об'єднати для отримання відповідної імпліканти. Причому суміжними вважаються і ті, які лежать на границях карти. Які саме одиниці слід об'єднати для отримання підходящої імпліканти, легко визначити візуально. Слід також пам'ятати, що відповідно до закону ідемпотентності одна і та ж одиниця може склеюватися з двома або трьома суміжними одиницями.

Розглянуті методи мінімізації стосувалися Дднф, але на основі принципу двоїстості вони легко можуть бути поширені і на Дкнф.

Приклад 15. За допомогою карт Карно мінімізувати функцію, Дкнф якої має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge$$

$$\wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge$$

$$\wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) .$$

Розв'язання. Складемо мінімізаційну карту для заданої функції:

		$\overline{x_5}$				x_5			
		$\overline{x_4}$		x_4		x_4		$\overline{x_4}$	
		$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$
$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	0	0	0	0				0
	x_2	0	0	0	0				
x_1	x_2				0				0
	$\overline{x_2}$	0					0		0

Аналіз мінімізаційної карти дозволяє виписати мінімальну кнф:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_5}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge$$
$$\wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5).$$

1.2.3. Задачі для самостійного опрацювання

42. Побудувати таблиці значень для наступних булевих функцій:

а) $f(x, y) = ((x \Rightarrow y) \wedge \overline{y}) \Rightarrow \overline{x}$;

б) $f(x, y, z) = ((x \Rightarrow (y \vee z)) \wedge \overline{y \wedge z}) \Rightarrow x$;

в) $f(x, y, z) = \overline{x} \Rightarrow (z \Leftrightarrow (y \oplus (x \wedge z)))$;

г) $f(x, y, z) = (((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$;

д) $f(x, y, z) = ((x \vee \overline{y}) \Rightarrow z) \wedge ((x \mid y) \Leftrightarrow \overline{z})$.

43. Побудувавши таблиці значень, з'ясуйте, чи рівні наступні булеві функції:

а) $f(x, y, z) = ((x \vee y) \vee z) \Rightarrow ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$, $g(x, y, z) = x \Leftrightarrow z$;

б) $f(x,y,z)=(\bar{x}\vee y)\wedge(y\vee z)$,

$g(x,y,z)=(x\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee \bar{z})$;

в) $f(x,y,z)=(x\Rightarrow y)\Rightarrow z$,

$g(x,y,z)=x\Rightarrow(y\Rightarrow z)$;

г) $f(x,y)=((x\oplus y)\Rightarrow(x\vee y))\wedge((\bar{x}\Rightarrow y)\Rightarrow(x\oplus y))$,

$g(x,y)=x\mid y$;

д) $f(x,y,z)=((x\vee\bar{y})\wedge z)\vee(x\wedge\bar{z})\vee(z\wedge(y\vee\bar{z}))$,

$g(x,y,z)=x\vee z$.

44. Покажіть, що додавання по модулю два має такі властивості:

а) $x\oplus y=y\oplus x$;

б) $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$;

в) $(x\oplus y)\wedge z=(x\wedge z)\oplus(y\wedge z)$;

г) $x\oplus x=0$;

д) $x\oplus 0=x$.

45. Покажіть, що:

а) $x\wedge y=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}$; б) $x\oplus y=\overline{\bar{x}\vee y}\vee\overline{x\vee\bar{y}}$;

в) $x\downarrow y=\overline{x\vee y}$; г) $x\mid y=\bar{x}\vee\bar{y}$.

46.° За допомогою суперпозицій виразіть функції $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\oplus$, $\mid$, $\downarrow$ через функції $\wedge$ і $\bar{\ }$.

47.° За допомогою суперпозицій виразіть функції $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\oplus$, $\mid$, $\downarrow$ через функції $\Rightarrow$ і $\bar{\ }$.

48. Покажіть, що:

а) $\bar{x}=x\mid x$;

б) $x\wedge y=(x\mid y)\mid(x\mid y)$;

в) $x\vee y=(x\mid x)\mid(y\mid y)$;

г) $x\Rightarrow y=x\mid(y\mid y)$;

д) $x\Leftrightarrow y=((x\mid(y\mid y))\mid(y\mid(x\mid x)))\mid((x\mid(y\mid y))\mid(y\mid(x\mid x)))$.

49.° За допомогою суперпозицій виразіть булеві функції $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $|$, $\oplus$ через функцію $\downarrow$.

50. Покажіть, що:

а) $\overline{x} = x \oplus 1$;

б) $x \vee y = ((x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1)) \oplus 1$;

в) $x \Rightarrow y = ((x \wedge y) \oplus x) \oplus 1$;

г) $x \Leftrightarrow y = (x \oplus y) \oplus 1$.

51.* Доведіть, що для будь-якої булевої функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має місце співвідношення:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \wedge f(1, x_2, \ldots, x_n)) \vee (\overline{x_1} \wedge f(0, x_2, \ldots, x_n)).$$

52.* Використовуючи співвідношення попередньої задачі, доведіть, що система булевих функцій $\{\wedge, \vee, \overline{}\}$ повна.

53.° Доведіть повноту таких систем булевих функцій:

а) $\{\wedge, \overline{}\}$;

б) $\{\Rightarrow, \overline{}\}$;

в) $\{\,|\,\}$;

г) $\{\downarrow\}$;

д) $\{\oplus, \wedge, 1\}$.

54.* Доведіть, що функції $|$ і $\downarrow$ є єдиними булевими функціями від двох змінних, через кожну з яких можуть бути виражені всі інші булеві функції.

55.° Доведіть, що неможливо за допомогою суперпозицій виразити:

а) $\overline{}$ через $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ і $\Leftrightarrow$;

б) $\wedge$ через $\vee$, $\Rightarrow$;

в) $\wedge$ через $\overline{}$, $\Leftrightarrow$;

г) $\Leftrightarrow$ через $\wedge$, $\vee$.

56.* Доведіть неповноту наступних систем функцій, тобто в кожному випадку вкажіть функцію, яка не виражається за допомогою суперпозицій через функції даної системи:

а) $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$;

б) $\{\overline{}\}$.

57.* Покажіть, що наступні системи булевих функцій незалежні, тобто що жодна з функцій кожної системи не може бути виражена за допомогою суперпозицій через іншу функцію цієї системи:

а) $\{^{-},\Leftrightarrow\}$;

б) $\{^{-},\oplus\}$;

в) $\{\Leftrightarrow,\oplus\}$;

г) $\{\Leftrightarrow,\vee\}$.

58. Для кожної із запропонованих формул зазначити: є вона елементарною кон'юнкцією, елементарною диз'юнкцією чи ні тією, ні другою:

а) $A\vee\overline{C}\vee B$;

б) $A_2\wedge\overline{A_3}\wedge A_5$;

в) $\overline{A}$;

г) $\overline{A_1}\vee A_3\vee\overline{A_3}$;

д) $A\wedge B\vee C$;

е) $(A\vee C)\wedge B$;

є) $A\vee A\vee B$.

59. Визначити, які із запропонованих формул є кнф, днф чи не є нормальними формами:

а) $B\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\vee\overline{A}\wedge B\vee A\wedge\overline{C}\vee D$;

б) $A_1\wedge A_2\vee A_3\wedge\left(\overline{A_4}\vee A_5\right)$;

в) $A\Rightarrow B\vee C$; г) A; д) $\overline{B}$;

е) $\left(A\vee\overline{B}\right)\wedge\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C$.

60. Звести формули до днф:

а) $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)$;

б) $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow\left(A\Rightarrow\overline{C}\right)$;

в) $\left(\overline{A}\Rightarrow B\right)\wedge C\Leftrightarrow(A\Leftrightarrow B)$;

г) $(A\wedge B\Rightarrow C)\Rightarrow\left(\overline{B}\Leftrightarrow C\right)$;

д) $\overline{A\Leftrightarrow B}\wedge\left(A\wedge C\vee\overline{B}\right)$;

е) $\left((A\Rightarrow B)\Rightarrow\left(C\Rightarrow\overline{A}\right)\right)\Rightarrow\left(\overline{B}\Rightarrow\overline{C}\right)$;

є) $(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Rightarrow\left(\left(A\Rightarrow\overline{C}\right)\Rightarrow\left(A\Rightarrow\overline{B}\right)\right)$;

ж) $(A\Leftrightarrow B)\wedge\overline{C\Rightarrow D}$;

з) $\left(\overline{A}\Leftrightarrow\overline{B}\wedge C\right)\Rightarrow\overline{A\wedge D\wedge\overline{B}}$;

и) $\overline{\overline{A}\wedge B}\wedge(C\Rightarrow D)\wedge C$.

61. Звести формули до кнф:

а) $A\wedge B\vee\overline{C}$;

б) $A\wedge\overline{B}\vee C\wedge D$;

в) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \wedge C$;

г) $\overline{A \Rightarrow B \wedge C} \vee B \wedge D$;

д) $(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{D})$;

е) $A \vee \overline{\overline{A} \Rightarrow B}$;

є) $\overline{A \Rightarrow B}$;

ж) $(A \Rightarrow \overline{B} \wedge C) \vee A \wedge D$;

з) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow A \wedge C$;

и) $\overline{A \wedge B \wedge C} \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

62.° Зведенням формули до кнф, з'ясувати, чи є вона тотожно істинною:

а) $A \wedge B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$;

б) $(A \Rightarrow B) \wedge (\overline{A} \Rightarrow B) \Rightarrow B$;

в) $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$;

г) $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

д) $(A \vee C) \wedge (B \vee D) \Rightarrow A \wedge B \vee C \wedge D$.

63.° Зведенням формули до днф, з'ясувати, чи є вона суперечністю:

а) $\overline{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}$;

б) $\overline{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))}$;

в) $(A \Rightarrow B \vee C) \wedge (A \Rightarrow \overline{B \vee C})$.

64. Задана система пропозиційних букв $\{A, B, C\}$. Звести до досконалої диз'юнктивної нормальної форми (Ддннф) формули:

а) $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$;

б) $A \vee B \vee C$;

в) $\overline{A} \wedge B \vee A \wedge C \vee B \wedge \overline{C}$;

г)° $\overline{A} \vee \overline{A \Leftrightarrow \overline{B}} \wedge C$;

д) $\overline{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C)$;

е) $\overline{\overline{A} \wedge B \vee \overline{C}}$;

є)° $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \vee (\overline{B} \wedge (C \vee \overline{B}))$;

ж)° $\overline{(A \Rightarrow B) \Rightarrow \overline{B}} \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge A))$;

з)° $\overline{(A \wedge B) \Rightarrow \overline{A}} \wedge \overline{A \wedge B \Rightarrow \overline{B}}$.

65. Задана система пропозиційних букв $\{A, B, C\}$. Звести до досконалої кон'юнктивної нормальної форми (Дкнф) формули:

а) $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee C) \wedge (B \vee C)$;

б) $(A \vee B) \wedge C$;

в) $(A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C) \wedge \overline{C}$;

г) $(\overline{A} \wedge B) \vee (C \wedge A)$;

д) $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$;

е)° $\overline{\overline{A} \Rightarrow B \wedge \overline{C}}$;

є)° $A \wedge B \Rightarrow \overline{A} \wedge B$;

ж)° $B \Leftrightarrow A \wedge C$;

з)° $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \overline{A})) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{C})$;

и)° $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \overline{C}) \Rightarrow (A \Rightarrow \overline{B}))$.

66. За даним набором значень пропозиційних змінних побудуйте елементарну кон'юнкцію, яка приймає значення 1 тільки на цьому наборі значень пропозиційних змінних:

а) (0, 0);
б) (0, 1);
в) (1, 1);
г) (1, 0, 0);
д) (1, 0, 1, 1).

67. Використовуючи Дднф, знайдіть формулу, яка приймає значення 1 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

а) *F* (0, 0) = *F* (1, 1);
б) *F* (1, 0);
в) *F* (0, 1, 0) = *F* (1, 0, 1) = *F* (1, 1, 1);
г) *F* (0, 1, 1) = *F* (1, 1, 0);
д) *F* (1, 0, 0) = *F* (0, 1, 0) = *F* (0, 0, 1);
е) *F* (0, 1, 1) = *F* (1, 0, 1) = *F* (1, 1, 0) = *F* (1, 1, 1);
є) *F* (0, 1, 0, 1) = *F* (1, 0, 1, 0) = *F* (1, 0, 0, 0) = *F* (1, 1, 1, 0) = = *F* (1, 1, 1, 1).

68. За даним набором значень пропозиційних змінних побудуйте елементарну диз'юнкцію, яка приймає значення 0 тільки на цьому наборі значень пропозиційних змінних:

а) (0, 0);
б) (1, 0);
в) (1, 1);
г) (0, 1, 1);
д) (1, 0, 1);
е) (0, 0, 1);
є) (1, 0, 0, 1);
ж) (0, 1, 0, 0).

69. Використовуючи Дкнф, знайдіть формулу, яка приймає значення 0 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

а) $F\ (0, 1) = F\ (1, 1)$;
б) $F\ (0, 1)$;
в) $F\ (0, 1, 1)$;
г) $F\ (1, 0, 0) = F\ (1, 0, 1)$;
д) $F\ (0, 1, 1) = F\ (0, 0, 0) = F\ (0, 1, 0)$;
е) $F\ (1, 1, 1) = F\ (0, 0, 1) = F\ (1, 1, 0) = F\ (1, 0, 0)$;
є) $F\ (0, 0, 0) = F\ (0, 1, 0) = F\ (1, 1, 1)$;
ж) $F\ (1, 1, 0, 1) = F\ (0, 0, 1, 0) = F\ (1, 0, 1, 0) = F\ (0, 0, 1, 1) =$
$= F\ (0, 0, 0, 0)$.

70. Зобразити у вигляді Ддне булеві функції, задані таблицями

A	B	C	$f_1(A,B,C)$	$f_2(A,B,C)$	$f_3(A,B,C)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0

71. Звести знайдені у попередній задачі Ддне до Дпнф.

72. Зобразити у вигляді Дкнф булеві функції, задані таблицями істинності:

A	B	C	$f_1(A,B,C)$	$f_2(A,B,C)$	$f_3(A,B,C)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

73. Для кожної з наступних формул знайдіть Ддне за допомогою її таблиці істинності:

а) $\overline{A \wedge B} \Rightarrow \overline{A \vee B}$;   б) $A \Rightarrow B$;

в) $(A\wedge B)\vee C$;   г) $(A\Leftrightarrow C)\Rightarrow\left(A\wedge\overline{B}\right)$;

д) $A\vee(B\Rightarrow(C\Leftrightarrow A\wedge B))$;

е) $\left(A\wedge\overline{B}\vee C\right)\wedge D$;

є) $(A\wedge(B\wedge C\vee D))\vee\overline{D}$.

74. Для кожної з наступних формул за допомогою її таблиці істинності знайдіть Дкнф:

а) $\overline{A\wedge B}\Rightarrow\overline{A\vee B}$;

б) $A\Leftrightarrow B$;

в) $(A\vee B)\wedge C$;

г) $\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}\wedge(A\Rightarrow B\wedge C)$;

д) $A\wedge B\wedge C\vee D$;

е) $A\wedge\overline{\overline{B}\wedge(C\Rightarrow(A\Leftrightarrow B))}$;

є) $(A\wedge B)\vee(B\wedge C)\vee(C\wedge D)$.

75.° Зведенням формули до Дднф визначити, чи є вона тотожньо істинною:

а) $(A\vee B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\vee C\Rightarrow B\vee C)$;

б) $(A\wedge B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\wedge C\Rightarrow B\wedge C)$;

в) $(B\wedge C\Rightarrow A)\wedge\left(B\wedge C\Rightarrow\overline{A}\right)$.

76.° Зведенням формули до Дкнф визначити, чи є вона суперечністю:

а) $\left(\overline{A}\vee B\right)\wedge\overline{B}\wedge A$;

б) $(A\Rightarrow B)\wedge\left(\overline{A}\Rightarrow B\right)\wedge A\wedge B$;

в) $(A\Rightarrow B)\wedge\left(A\Rightarrow\overline{B}\right)\wedge A$.

77. Скільки диз'юнктивних членів містить Дднф для булевої функції $f(A,B,C,D)$, яка є тавтологією?

78. Скільки кон'юнктивних членів містить Дкнф для булевої функції $f(A,B,C,D,E)$, яка є суперечністю?

79. Побудувати поліноми Жегалкіна для функцій:

а) $f(x)=\left(x\Rightarrow\overline{x}\right)\Rightarrow\overline{x}$;

б) $f(x_1,x_2)=(x_1\Rightarrow x_2)\Rightarrow x_2$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge\overline{x_2}\vee\overline{x_1}\wedge x_3\vee x_1\wedge x_2$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\mid x_2)\downarrow x_3$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\Rightarrow x_2)\wedge(x_2\downarrow x_3)$;

е) $f(x_1,x_2,x_3)=((x_1\Rightarrow x_2)\vee\overline{x_3})\mid x_1$.

80.° Зобразити поліномом Жегалкіна булеву функцію $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge x_2\wedge\overline{x_3}\vee x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3\vee\overline{x_1}\wedge x_2\wedge x_3\vee\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}$. За видом цього поліному безпосередньо визначити, на яких саме наборах $f(x_1,x_2,x_3)$ набуває значення 1.

81.* Довести твердження: «Якщо $\alpha\oplus x=\beta\oplus x$, де α і β – поліноми Жегалкіна, а x – константа, то $\alpha=\beta$«.

82.° Довести єдиність полінома Жегалкіна, який зображає задану булеву функцію.

83.* Довести твердження: «Дві формули є рівносильними тоді і тільки тоді, коли поліноми Жегалкіна, що їх зображають, збігаються».

84. Методом невизначених коефіцієнтів знайти поліноми Жегалкіна для функцій:

а) $f(x_1,x_2)=(1001)$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=(01101000)$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=(11111000)$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=(01010101)$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=(00101110)$.

85.* Побудувати мінімальні днф (методом Квайна, методом комбінування індексів і методом мінімізаційних карт), якщо відповідні Дднф мають вигляд:

а) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\overline{x_4})\vee$
$\vee(x_1\wedge x_2\wedge\overline{x_3}\wedge x_4)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\overline{x_3}\wedge\overline{x_4})\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3\wedge x_4)\vee$
$\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}\wedge x_4)\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}\wedge\overline{x_4})\vee(\overline{x_1}\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4)\vee$
$\vee(\overline{x_1}\wedge x_2\wedge x_3\wedge\overline{x_4})\vee(\overline{x_1}\wedge x_2\wedge\overline{x_3}\wedge\overline{x_4})\vee(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}\wedge\overline{x_4})$;

б) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_1}\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4)\vee(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge x_3\wedge x_4)\vee$
$\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3\wedge x_4)\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}\wedge x_4)\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}\wedge\overline{x_4})\vee$
$\vee(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}\wedge\overline{x_4})$.

86.* Знайти мінімальну кнф функції $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_3}) \wedge$ $\wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$.

87.* Знайдіть всі монотонні булеві функції від одного і двох аргументів.

88.* Для кожної булевої функції від двох змінних знайдіть двоїсту до неї булеву функцію.

89.* Доведіть, що функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ двоїста для $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо функція $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ двоїста для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

90.* Знайдіть всі самодвоїсті булеві функції від двох змінних.

91.* Доведіть, що якщо булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ самодвоїста, то булева функція $\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ також самодвоїста.

92.° Яких булевих функцій від двох (трьох) змінних більше: лінійних чи нелінійних?

93.° Серед булевих функцій від однієї і двох змінних знайдіть всі функції класу P_0, і всі функції класу P_1.

94.* Доведіть, що серед булевих функцій від n змінних число функцій, які зберігають 0, дорівнює числу функцій, які зберігають 1.

Вказівка. Спочатку покажіть, що якщо функція зберігає 0, то двоїста їй функція зберігає 1, і навпаки.

1.3. ЗАСТОСУВАННЯ АЛГЕБРИ ВИСЛОВЛЕНЬ

1.3.1. Теоретичні відомості

Серед логічних формул особливу роль відіграють тавтології. Значення їх полягає в тому, що кожну з них можна розглядати як логічний закон, тобто правило, яким користуються при утворенні логічно правильних умовиводів.

Зупинимось на деяких з них:

1) $A \vee \overline{A}$ – **закон виключеного третього:** *кожне висловлення A або істинне, або хибне і третього не дано.*

2) $\overline{A \wedge \overline{A}}$ – **закон протиріччя:** *для всякого висловлення A неправильно, що воно може бути одночасно істинним і хибним.*

3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ – **закон контрапозиції:** *якщо B є логічним наслідком A, то заперечення* $\overline{A}$ *є логічним наслідком заперечення* $\overline{B}$.

4) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – **закон силогізму:** *якщо із A слідує B і з B слідує C, то з A слідує C.*

Існує багато інших логічних законів, в тому числі значно складніших. Вони також знаходять своє застосування при доведенні теорем.

Більшість теорем можна сформулювати за допомогою слів «якщо ..., то ...», тобто записати у вигляді імплікації $A \Rightarrow B$ (*A* – умова, *B* – висновок). Із висловлень *A* і *B* та їх заперечень $\overline{A}$, $\overline{B}$ можна утворити такі імплікації (теореми):

1) $A \Rightarrow B$ – *пряма* теорема;
2) $B \Rightarrow A$ – *обернена* теорема;
3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – *протилежна* теорема;
4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – теорема, *обернена до протилежної або протилежна до оберненої.*

Теореми 2), 3), 4) називають *спряженими* з теоремою 1).

В силу закону контрапозиції одночасно істинними або хибними є пряма і обернена до протилежної теореми (те саме стосується протилежної і оберненої теорем).

Найбільш природний і найпоширеніший прямий спосіб доведення теореми $A \Rightarrow B$, який полягає в тому, що з істинності посилки безпосередньо виводиться істинність висновку.

Крім прямих методів доведення часто використовують і непрямі методи. Один із непрямих методів доведення полягає у використанні закону контрапозиції, а саме: щоб довести дану теорему, досить довести протилежну до оберненої. До непрямих методів належить і метод доведення від супротивного. Цей метод полягає в тому, що ми робимо припущення, протилежне висновку теореми. Потім шляхом міркувань, спираючись на аксіоми і вже доведені теореми, приходимо до висновку, що суперечить або умові теореми, або аксіомі, або одній із раніше доведених теорем.

Розглянемо з точки зору алгебри висловлень питання про необхідні і достатні умови при формулюванні теорем. Якщо імплікація $A \Rightarrow B$ істинна, то істинність висловлення *A* називають *достатньою* умовою для істинності *B*, а істинність висловлення *B необхідною* умовою для істинності *A*. Як бачимо, поняття умови для даного висновку не обов'язково збігається з поняттям умови даної теореми.

Умова може бути необхідною для певного висновку і не бути достатньою для нього. Наприклад, рівність відповідних кутів двох трикутників є необхідною умовою рівності цих трикутників (бо з рівності трикутників випливає рівність відповідних кутів), але ця умова не є достатньою для даного висновку, бо з рівності відповідних кутів рівність трикутників не випливає (можна твердити лише, що такі трикутники подібні).

В математичних текстах замість слова «необхідно» використовують також вираз «тільки тоді». Так, наведений вище приклад можна переформулювати таким чином: «Трикутники будуть рівними тільки тоді, коли рівні їх відповідні кути».

Навпаки, умова може бути достатньою певного висновку і не бути необхідною для нього. Наприклад, подільність цілого числа на 100 є достатньою умовою подільності його на 2 і на 5. Проте ця умова не є необхідною для даного висновку, бо з подільності числа на 2 і на 5 не випливає подільність його на 100.

Замість слова «достатньо» вживають також вираз «тоді». Виходячи з цього, наведений приклад можна сформулювати і так: «Ціле число ділиться на 2 і на 5 тоді, коли воно ділиться на 100».

Іноді умова може бути одночасно необхідною і достатньою для даного висновку. Так, рівність відповідних сторін двох трикутників є водночас необхідною і достатньою умовою рівності цих трикутників. Очевидно, що в останньому випадку істинними будуть дві імплікації $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$, а, отже, істинною буде еквівалентність $A \Leftrightarrow B$. У цьому випадку, коли правильними є як пряма, так і обернена теореми, ці дві взаємно обернені теореми можна сформулювати у вигляді однієї теореми, користуючись термінами «необхідно і достатньо» або «тоді і тільки тоді». Наприклад, дві теореми «Якщо трикутник рівнобедрений, то кути при основі рівні» і «Якщо кути при основі рівні, то трикутник рівнобедрений» можна сформулювати у вигляді однієї: «Щоб трикутник був рівнобедреним, необхідно і достатньо, щоб кути при його основі були рівні», або, наприклад, так: «Трикутник буде рівнобедреним тоді і тільки тоді, коли кути при його основі рівні». Такі теореми називають критеріями. Доведення їх завжди складається з двох частин: доведення достатньої умови (прямої теореми) і доведення необхідної умови (оберненої теореми).

1.3.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для кожної з поданих нижче теореми утворити спряжені з ними теореми і з'ясувати, які з них будуть істинними.

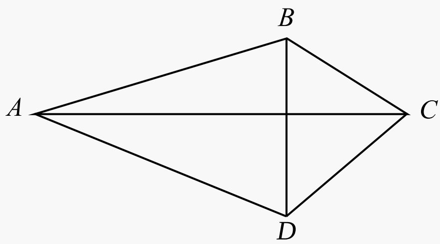
а) «Якщо чотирикутник *ABCD* – ромб, то його діагоналі взаємно перпендикулярні».

Розв'язання. Спряжені теореми будуть формулюватись так:

Обернена теорема. Якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він є ромбом.

Протилежна теорема. Якщо чотирикутник *ABCD* не є ромбом, то його діагоналі не є взаємно перпендикулярними.

Теорема, обернена до протилежної. Якщо діагоналі чотирикутника не є взаємно перпендикулярними, то він не є ромбом.



Сформульовані пряма і обернена до протилежної теореми, як відомо з шкільного курсу геометрії, істинні. Обернена і протилежна теореми – хибні, в чому легко переконатися шляхом наведення контрприкладу: чотирикутник *ABCD* на малюнку не є ромбом, але його діагоналі взаємно перпендикулярні.

б) «Якщо число ділиться на 2 (кратне 2) і ділиться на 5 (кратне 5), то воно ділиться на 10 (кратне 10)».

Розв'язання: Теорему символічно можна сформулювати так: «Якщо $n \vdots 2$ і $n \vdots 5$, то $n \vdots 10$». Умова теореми є складним висловленням, яке можна розбити на два простих: A – «$n \vdots 2$», B – «$n \vdots 5$». Якщо позначити висновок теореми (висловлення «$n \vdots 10$») через C, то символічний запис даної прямої теореми матиме вигляд: $A \wedge B \Rightarrow C$. Утворимо спряжені теореми:

Обернена теорема. $C \Rightarrow A \wedge B$ – «Якщо $n \vdots 10$, то $n \vdots 2$ і $n \vdots 5$».

Протилежна теорема. $\overline{A \wedge B} \Rightarrow \overline{C} \equiv \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right) \Rightarrow \overline{C}$ – «Якщо $n \overline{\vdots}\, 2$ або $n \overline{\vdots}\, 5$, то $n \overline{\vdots}\, 10$».

Теорема, обернена до протилежної. $\overline{C} \Rightarrow \overline{A \wedge B} \equiv \overline{C} \Rightarrow \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right)$ – «Якщо $n \;\bar{\vdots}\; 10$, то $n \;\bar{\vdots}\; 2$ або $n \;\bar{\vdots}\; 5$».

Очевидно, що дана теорема і всі три спряжені з нею теореми є істинними.

При утворенні протилежної і оберненої до протилежної теорем було використано правило де Моргана.

Аналогічно можна утворювати такі комплекти з чотирьох теорем і тоді, коли компоненти A і B прямої теореми $A \Rightarrow B$ мають будь-яку іншу структуру з елементарних висловлень. Головне – виконати правильні відповідні перетворення над компонентами A і B.

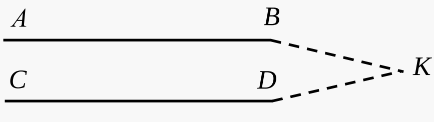
Приклад 2. Дати непрямі доведення поданих нижче теорем.

а) «Якщо ціле число a^2 непарне, то число a також непарне».

Доведення. Введемо позначення: C – «ціле число a^2 непарне», D – «ціле число a непарне». Тоді дану теорему символічно можна записати висловленням $C \Rightarrow D$. Скористаємось законом контрапозиції, тобто замість цієї теореми доведемо теорему $\overline{D} \Rightarrow \overline{C}$. Нехай має місце $\overline{D}$ – «ціле число a парне». Тоді $a = 2n$, $a^2 = 4n^2$, тобто має місце $\overline{C}$ – «ціле число a^2 парне». Отже, теорема $\overline{D} \Rightarrow \overline{C}$ доведена, а звідси випливає істинність теореми $C \Rightarrow D$.

б) «Якщо дві прямі AB і CD паралельні третій прямій MN, то вони паралельні між собою».

Доведення. Запишемо дану теорему формулою алгебри висловлень. Позначимо: A – «пряма AB паралельна прямій MN», B – «пряма CD паралельна прямій MN», C – «пряма AB паралельна прямій CD».



Теорему можна записати так: $A \wedge B \Rightarrow C$.

Припустимо, що має місце $\overline{C}$ – «прямі AB і CD не паралельні». Тоді вони перетинаються в якійсь точці K, яка не лежить на прямій MN. Отже, дістаємо хибне висловлення D – «через точку K, яка не лежить на прямій, можна провести дві прямі AB і CD, паралельні MN», всупереч аксіомі про паралельні. Це означає, що зроблене припущення неправильне, тобто прямі AB і CD паралельні.

Дана теорема доведена методом від супротивного за схемою: $A \wedge B \wedge \overline{C} \Rightarrow 0$.

Приклад 3. Прочитати теорему «Якщо чотирикутник *ABCD* – квадрат, то чотирикутник *ABCD* – ромб» чотирма різними способами, використовуючи вирази «необхідна умова», «достатня умова», «тоді», «тільки тоді».

Розв'язання.

а) Для того, щоб чотирикутник *ABCD* був квадратом, необхідно, щоб він був ромбом.

б) Для того, щоб чотирикутник *ABCD* був ромбом, достатньо, щоб він був квадратом.

в) Якщо чотирикутник *ABCD* – квадрат, тоді *ABCD* – ромб.

г) Чотирикутник *ABCD* є квадратом тільки тоді, коли *ABCD* – ромб.

1.3.3. Задачі для самостійного опрацювання

95. Кожну з поданих нижче теорем записати символічно, утворити всі три спряжені з нею і з'ясувати, які з них будуть істинними.

а) Якщо трикутник *ABC* правильний, то навколо нього можна описати коло.

б) Якщо сума цифр числа *a* ділиться на 9, то це число ділиться на 9.

в) Якщо чотирикутник *ABCD* – прямокутник, то його діагоналі рівні.

г) Якщо паралелограм *ABCD* – ромб, то його діагоналі взаємно перпендикулярні.

д)° Якщо *a* ділиться на *b* і *b* ділиться на *c*, то *a* ділиться на *c* (*a*, *b*, *c* –цілі числа).

е)° Якщо два кути вписані в коло і спираються на одну і ту ж саму дугу, то вони рівні між собою.

є)* Якщо відрізки паралельних прямих містяться між паралельними прямими, то вони рівні між собою.

ж)* Якщо три прямі лежать в одній площині і дві з них перпендикулярні до третьої, то ці дві прямі паралельні.

з)* Якщо ціле число ділиться на 12, то воно ділиться і на 3, і на 4.

и)* Всякий паралелограм з взаємноперпендикулярними діагоналями є ромбом.

96.° Використовуючи закон контрапозиції, доведіть наступні теореми:

а) Якщо mn – непарне число, то m і n непарні (m, n – цілі числа).

б) Якщо дві паралельні прямі перетинаються третьою, то внутрішні різносторонні кути рівні.

в) Якщо дві різні прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.

г) Серед простих чисел немає найбільшого.

97.° Дати непрямі доведення поданих нижче теорем і зазначити, за якими логічними схемами проводяться ці доведення:

а) Два перпендикуляри до однієї прямої не перетинаються.

б) В трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона.

98. Сформулювати подані нижче висловлення, використовуючи зв'язку «якщо..., то...»:

а) A достатньо для B;

б) A необхідно для B;

в) B достатньо для A;

г) B необхідно для A.

99. Виділивши умову і висновок теореми, сформулювати її за допомогою зв'язки «якщо..., то...»:

а) Необхідною властивістю прямокутника є рівність його діагоналей.

б) На 5 діляться ті цілі числа, які закінчуються цифрою 0.

в) Комплексні числа рівні, тільки якщо рівні відповідно їх дійсні і уявні частини.

г) З того, що чотирикутник – ромб, випливає, що кожна з його діагоналей є віссю симетрії.

100. Кожне з поданих нижче висловлень сформулюйте у формі рівнозначності (з використанням зв'язки «... тоді і тільки тоді, коли ...»):

а) Перпендикуляр, проведений до відрізка через його середину, є геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

б) Дві прямі, які паралельні даній прямій і знаходяться по різні сторони від неї на відстані r, є геометричне місце центрів кіл радіуса r, які дотикаються до даної прямої в даній площині.

в)* При додаванні одного і того ж числа m до обох частин рівняння $f(x) = g(x)$ отримуємо нове рівняння, яке має ті ж самі корені, що й вихідне, і не має ніяких інших коренів.

г)* При множенні обох частин нерівності $f(x) > g(x)$ на одне і те ж додатне число m отримуємо нерівність того ж змісту, яка має ту ж саму множину розв'язків, що й вихідна нерівність.

101. Визначити, які з поданих нижче висловлень істинні і які хибні:

а) Наявність атестату зрілості є достатнім для вступу до університету.

б) Наявність атестату зрілості є необхідним для вступу до університету.

в) Для того щоб число p було простим, необхідно і досить, щоб число $p + 1$ було парним.

г) Для того щоб в прямокутному трикутнику катет дорівнював половині гіпотенузи, необхідно і досить, щоб кут, який лежить проти цього катета, дорівнював 30°.

102. Сформулювати необхідну й достатню умову, щоб трикутник був прямокутним.

103. В наступних реченнях на порожніх місцях поставити слова «тоді» або «тоді і тільки тоді» так, щоб одержані висловлення були істинними:

а) $6x = 78$ ..., коли $x = 13$;

б)° сума чотирьох чисел парна ..., коли кожний доданок парний;

в)° сума п'яти чисел більше 100 ..., коли кожний доданок більше 20;

г) число ділиться на 5 ..., коли воно закінчується нулем;

д) паралелограм є ромбом ..., коли його діагоналі взаємно перпендикулярні.

104. Записати за допомогою імплікації зв'язок між A і B. Зазначити, яка умова необхідна, яка достатня і яка – необхідна і достатня.

а) A – «$x^2 + y^2 = 0$», B – «$x = y = 0$»;
б) A – «$xy = 0$», B – «$x = 0$»;
в) A – «$x \vdots 8$», B – «$x \vdots 4$»;
г) A – «$x^3 = x^4$», B – «$x = 1$»;
д) A – «$x \neq y$», B – «$x > y$»;
е) A – « $\sqrt{x} = 2$ «, B – «$x > 3$»;
є)° A – «$\cos x = 0$», B – «$x = \pi/2$ »;
ж)* A – «$a^x = a^y$», B – «$x = y$».
з) A – «даний трикутник рівносторонній», B – «один з кутів трикутника дорівнює 60°».

105.° Дати схеми доведення таких теорем:

а) Для того щоб числа α і β були коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, необхідно і достатньо, щоб $p = -(\alpha + \beta)$, а $q = \alpha\beta$.
б) Для того щоб трикутник був рівнобедреним, необхідно і достатньо, щоб два його кути були рівними.
в) Для того щоб два трикутники були рівними, необхідно і достатньо, щоб три сторони одного трикутника були рівні трьом сторонам другого.
г) Для того щоб пряма, проведена на площині через основу похилої, була перпендикулярна до цієї похилої, необхідно і достатньо, щоб вона була перпендикулярною і до проекції цієї похилої на дану площину.

106. Застосовуючи закон контрапозиції, замінити запропоновані твердження рівносильними:

а) Якщо число n кратне 3 і кратне 5, то n кратне 15.
б) Якщо добуток двох чисел a, b рівний 0, то хоч одне з чисел a, b рівне 0.
в) Якщо добуток двох цілих чисел m, n є непарним числом, то m і n – непарні числа.

1.4. ПРЕДИКАТИ

1.4.1. Теоретичні відомості

Логіка предикатів – це узагальнення логіки висловлень. Під предикатом розуміють функцію (вираз), яка містить невідомі і яка стає висловленням при підстановці замість невідомих конкретних значень. Наприклад, «x – парне число», «$x + y = 5$», «Ця планета найближча до Сонця». Якщо предикат містить одну невідому, то його називають одномісним предикатом, якщо n змінних, то n-місним предикатом. Для n-місного предиката використовують позначення $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Означення 1. Всі значення, які можуть набувати невідомі величини, називаються областю визначення предиката.

Означення 2. Ті значення змінних, при яких предикат перетворюється в істинне (хибне) висловлення, називається областю істинності (хибності) предиката.

Область істинності предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ позначають $P^+(x_1, x_2, ..., x_n)$ або $T(P(x_1, x_2, ..., x_n))$. Область хибності – $P^-(x_1, x_2, ..., x_n)$ або $F(P(x_1, x_2, ..., x_n))$.

Означення 3. Предикат називається тотожно істинним (тотожно хибним), якщо він перетворюється в істинне (хибне) висловлення при будь-яких значеннях змінних з області визначення.

Якщо предикат не є тотожно хибним, то його називають допустимим або виконуваним.

Означення 4. Предикати $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, задані на одній і тій самій області визначення, називаються рівносильними або еквівалентними, якщо їх області істинності співпадають.

Так, предикати $x+2y>5$ і $x>5-2y$ є рівносильними, оскільки їх області визначення (R^2) і області істинності (півплощини) співпадають.

Над предикатами, як і над висловленнями, можна виконувати логічні операції кон'юнкцію, диз'юнкцію, імплікацію, еквіваленцію та заперечення. Так, систему рівнянь чи нерівностей можна трактувати як кон'юнкцію, а їх сукупність – як диз'юнкцію відповідних предикатів. Зміна знаку рівності чи нерівності на протилежний можна інтерпретувати як заперечення предикату. Замінюючи в процесі розв'язування одне рівняння йому рівносильним, ми маємо справу із еквіваленцією предикатів.

Крім того, над предикатами виконують ще дві, специфічні тільки для них, операції. Це операції застосування (навішування) кванторів. Розглянемо два математичних твердження: «Для всіх дійсних чисел $x^2 + 1 > 0$», «Існує таке дійсне число x, що $2x = x$». Вираз «для всіх x» зображають символом $\forall x$, а вираз «існує таке x, що» – символом $\exists x$. Символ $\forall$ називають квантором загальності, а $\exists$ – квантором існування.

Для прикладу розглянемо на множині натуральних чисел предикат $P(x)$ – «x – просте число». Вираз $\forall x P(x)$ прочитається так: «всяке число x – просте» і є хибним висловленням. Вираз $\exists x P(x)$ прочитається так: «існує просте число x» і є істинним висловленням.

Бачимо, що застосування квантора існування або загальності до одномісного предикату приводить до висловлення. Квантор можна застосовувати також до n-місного предикату. В результаті отримується $(n-1)$-місний предикат. Змінну, до якої відноситься квантор, називають *зв'язаною*, решту змінних називають *вільними*.

Відзначимо, що при застосуванні кількох кванторів до одного і того ж предиката від кількох змінних однакові квантори можна переставляти місцями, одержуючи при цьому рівносильні вирази:

$$\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y), \quad \exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y).$$

Зате різні квантори переставляти не можна, бо висловлення $\forall x \exists y P(x,y)$ і $\exists y \forall x P(x,y)$ не рівносильні. Наприклад, для предиката $P(x,y)$ – « $x<y$ « висловлення $\forall x \exists y P(x,y)$ – «для всякого x існує y таке, що $x<y$ « є істинним, а висловлення $\exists y \forall x P(x,y)$ –

«існує y таке, що для всякого x виконується $x < y$ « є хибним, де $x,\ y \in R$.

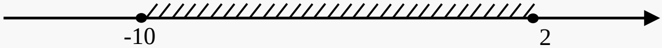
Розглянемо вираз $\overline{\forall x P(x)}$. Якщо він істинний, то вираз $\forall x P(x)$ – хибний. Це означає що знайдеться хоча б одне значення x, для якого предикат $P(x)$ хибний, тобто істинним є вираз $\exists x \overline{P(x)}$. Отже $\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}$. Аналогічно, $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$ або, в інакшому записі, $\overline{\forall} x P(x) \equiv \exists x \overline{P}(x)$ і $\overline{\exists} x P(x) \equiv \forall x \overline{P}(x)$.

Ці рівносильності дають таке *правило побудови заперечення* висловлення з квантором: квантор загальності змінюється на квантор існування і навпаки, а знак заперечення переноситься на вираз, який стоїть за цим квантором.

1.4.2. Приклади розв'язування задач

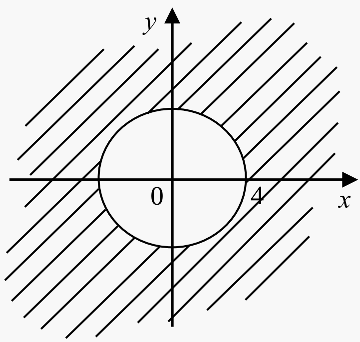
Приклад 1. Зобразити на координатній прямій область істинності одномісного предикату $|x+4| \le 6$, заданого на множині дійсних чисел *R*.

Розв'язання. Областю істинності даного предикату є множина розв'язків нерівності, тобто множина [-10; 2]. Зобразимо отриману множину на числовій прямій:



Приклад 2. Зобразити на координатній площині область істинності двомісного предикату $x^2 + y^2 \ge 16$, заданого на множині дійсних чисел.

Розв'язання. Очевидно, що областю істинності даного предикату є множина всіх тих точок площини, які знаходяться за межами круга радіуса $r = 4$ з центром в початку координат:



Приклад 3. На множині натуральних чисел задані предикати $P(x)$ – «число x – парне» і $Q(x)$ – «число x ділиться на 4». Сформулювати наступні висловлення словами і вказати їх значення істинності:

а) $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$;

б) $\exists x(\overline{P}(x) \vee Q(x))$;

в) $\exists x(P(x) \wedge \overline{Q}(x))$.

Розв'язання. а) Висловлення $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ читається так: «будь-яке натуральне число x – парне і ділиться на 4». Воно хибне.

б) Висловлення $\exists x(\overline{P}(x) \vee Q(x))$ читається так: «існує натуральне число x, яке є непарним або ділиться на 4» і є істинним.

в) Висловлення $\exists x(P(x) \wedge \overline{Q}(x))$ читається так: «існує парне число x, яке не ділиться на 4». Воно істинне.

Приклад 4. Записати символікою логіки предикатів твердження «Всі цілі числа – раціональні, проте деякі раціональні числа є цілими».

Розв'язання. Тут фігурують два предикати: $Z(x)$ – «x – ціле число» і $Q(x)$ – «x – раціональне число». Відповідно до цього задане твердження запишеться символічною мовою логіки предикатів у такому вигляді:

$$\forall x(Z(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(Q(x) \wedge Z(x)).$$

Звертаємо увагу на характерну відмінність між записом загальних та частинних тверджень через квантор загальності і імплікацію та через квантор існування і кон'юнкцію відповідно.

Приклад 5. Висловлення $\forall x, y(x^2 + y^2 > 0)$ задане на множині дійсних чисел. Побудувати висловлення, що є запереченням даного, і вказати його значення істинності.

Розв'язання. Відповідно до правила побудови заперечення висловлення з квантором, маємо:

$$\overline{\forall x, y(x^2 + y^2 > 0)} \equiv \overline{\forall x \forall y(x^2 + y^2 > 0)} \equiv \exists x \overline{\forall y(x^2 + y^2 > 0)} \equiv$$
$$\equiv \exists x \exists y \overline{(x^2 + y^2 > 0)} \equiv \exists x \exists y(x^2 + y^2 \le 0).$$

Висловлення $\exists x, y\left(x^2 + y^2 \le 0\right)$ читається так: «існують дійсні числа x та y такі, що $x^2 + y^2 \le 0$« і є істинним висловленням (при $x = y = 0$), а початкове висловлення $\forall x, y\left(x^2 + y^2 > 0\right)$ є хибним.

Приклад 6. Обґрунтувати, що висловлення $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ і $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ не рівносильні.

Розв'язання. Для обґрунтування розглянемо деякі конкретні приклади предикатів. Нехай $P(x)$ – «x – просте число» і $Q(x)$ – «x – складене число» визначені на множині $N \setminus \{1\}$. Висловлення $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ – «будь-яке число x – просте або складене» є істинним, а висловлення $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ – «будь-яке число x – просте або будь-яке число x – складене» є хибним. Наведений приклад показує, що дані висловлення не рівносильні.

Отже, квантор загальності не дистрибутивний відносно операції диз'юнкції.

Приклад 7. Довести рівносильність $\exists xP(x) \equiv \overline{\forall} x\overline{P}(x)$.

Розв'язання. Згідно з формулою $\overline{\overline{P}}(x) \equiv P(x)$ і правилом побудови заперечення висловлення з квантором, маємо:

$$\exists xP(x) \equiv \overline{\overline{\exists xP(x)}} \equiv \overline{\overline{\exists} xP(x)} \equiv \overline{\forall x\overline{P}(x)} \equiv \overline{\forall} x\overline{P}(x).$$

Приклад 8. Записати висловлення, рівносильне висловленню $\overline{\exists x(A(x) \Rightarrow \forall yB(y))}$, без знаку $\Rightarrow$.

Розв'язання. Використовуючи правило побудови заперечення висловлення з квантором і рівносильності $A(x) \Rightarrow B(x) \equiv \overline{A}(x) \vee B(x)$, $\overline{A(x) \vee B(x)} \equiv \overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x)$, $\overline{\overline{A}}(x) \equiv A(x)$ алгебри предикатів, одержимо:

$$\overline{\exists x(A(x) \Rightarrow \forall yB(y))} \equiv \overline{\exists} x(A(x) \Rightarrow \forall yB(y)) \equiv \forall x\overline{(A(x) \Rightarrow \forall yB(y))} \equiv$$

$$\forall x\left(\overline{\overline{A}(x) \vee \forall yB(y)}\right) \equiv \forall x\left(A(x) \wedge \overline{\forall yB(y)}\right) \equiv \forall x\left(A(x) \wedge \exists y\overline{B}(y)\right).$$

1.4.3. Задачі для самостійного опрацювання

107. Які з виразів є предикатами:

а) «x ділиться на 5» ($x \in N$);

б) «Річка x впадає в Азовське море» (x пробігає множину назв всеможливих рік);

в) « $x^2 + 2x + 4$ « ($x \in R$);

г) « $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ « ($x, y \in R$);

д) «x є братом y» (x і y пробігають множину всіх людей);

е)° «x і y» (x, y пробігають множину всіх студентів даної групи);

є) « $\mathrm{ctg}45^\circ = 1$ «.

108. З наступних речень вибрати предикати, вказати їх область визначення і область істинності:

а) $x + 5 = 1$;

б)° при $x = 2$ виконується рівність $x^2 - 1 = 0$;

в) для всіх чисел x виконується рівність $x + 2 = 2 + x$;

г) існує таке додатне число x, що $x^2 + 1 = 0$;

д) планета x повертається навколо Сонця за один рік.

109.° Для кожного висловлення знайти предикат (одномісний або багатомісний), який перетворюється в дане висловлення при заміні змінних відповідними значеннями:

а) «3 + 4 = 7»;

б) «Віра і Надія – сестри»;

в) «Сьогодні – вівторок»;

г) «Місто Київ знаходиться на берегах річки Дніпро»;

д) « $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ »;

е) Леся Українка – видатна українська поетеса.

110. Знайти області істинності наступних предикатів, заданих над вказаними множинами:

а) «x кратне 3», $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

б) « $x^2 + 4 > 0$ «, $M = R$;

в) « $\sin x > 1$«, $M = R$;

г) « $x^2 + x - 6 = 0$ «, $M = R$.

111. Зобразіть на координатній прямій області істинності наступних заданих на *R* одномісних предикатів:

а) $x<3$;

б) $|x|=4$;

в) $|x|<2$;

г) $|x|>2$;

д) $|x-4|\geq 1$;

е) $|x+3|<2$;

є) $x^2+6x-16\leq 0$;

ж) $x^2\geq 0$;

з) $|x+2|<5$;

и) $|x-1|\leq|2x+4|$.

112. Зобразіть на координатній площині області істинності наступних двомісних предикатів, заданих на множині дійсних чисел *R*:

а) $x=y$;

б) $|x|=|y|$;

в) $x^2+y^2=9$;

г) $x^2+y^2-4x+6y+14=0$;

д) $x^2\leq y$;

е) $y=\dfrac{1}{x}$;

є) $2x+6y<3$;

ж) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$;

з) $xy=0$;

и) $x^2=y^2$.

113. На множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано предикати: $A(x)$ – «число x – просте», $B(x)$ – «$x<3$», $C(x)$ – «$(x-1)(x+2)=0$». Сформулювати їх заперечення. Знайти область істинності кожного з даних предикатів і їх заперечень.

114. Предикати $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ з вправи 111. Прочитати словами наступні предикати і знайти область істинності кожного з них:

а) $A(x)\wedge B(x)$;

б) $B(x)\vee A(x)$;

в) $B(x)\wedge C(x)$;

г) $A(x)\vee C(x)$;

д) $\overline{A}(x)\wedge B(x)$;

е) $\overline{B}(x)\vee C(x)$.

115. Прочитайте наступні висловлення і визначте, які з них істинні, а які хибні, вважаючи, що всі змінні пробігають множину дійсних чисел:

а) $\forall x\exists y\,(x+y=7)$;

б) $\exists y\forall x\,(x+y=7)$;

в) $\exists x \exists y\left(x+y=7\right)$;

г) $\forall x \forall y\left(x+y=7\right)$;

д)° $\left[\forall x \forall y\left(x+y=3\right)\right] \Rightarrow (3=4)$;

е)° $\forall x\left[\left(x^2>x\right) \Leftrightarrow \left((x>1) \vee (x<0)\right)\right]$;

є)° $\forall a\left\{\left[(\exists x)(ax=6)\right] \Leftrightarrow (a \neq 0)\right\}$;

ж)° $\forall b \exists a \forall x\left(x^2+ax+b>0\right)$;

з)° $\forall x\left[\left((x>1) \vee (x<2)\right) \Leftrightarrow (x=x)\right]$;

и) $\exists b \forall a \exists x\left(x^2+ax+b=0\right)$;

і) $\exists a \forall b \exists x\left(x^2+ax+b=0\right)$.

116. З наступних предикатів за допомогою кванторів побудуйте всеможливі висловлення і визначте, які з них істинні, а які хибні ($x \in R$):

а) $x^2+2x+1=(x+1)^2$;

б) $(x-3)(x+3)<x^2$;

в) $e^{|x|}<\ln|x|, \quad x \neq 0$;

г) $\left(x^2+1=0\right) \Rightarrow \left((x=1) \vee (x=2)\right)$;

д) $(x<0) \vee (x=0) \vee (x>0)$;

е) $x^2=25$;

є) $x^2+y^2=16$;

ж)° $x^2=y^2 \Rightarrow x=y$;

з) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$;

и) $|x-y| \leq 3$;

і)° $|x-y| \geq \left||x|-|y|\right|$;

ї) $\sin x=\sin y$.

117. Записати на мові логіки предикатів наступні твердження:

а) Деякі дійсні числа є раціональними.

б) Ні одне просте число не є точним квадратом.

в) Деякі парні числа не діляться на 8.

г) Всяке число, кратне 6, ділиться на 3.

д)° Всі числа, кратні 48, кратні 8 і кратні 6, але не всяке число, кратне 8 і кратне 6, є кратним 48.

е)° Кожний квадрат є ромбом, але не правильно, що всякий ромб є квадратом.

є)° Не існує числа, яке кратне 6 і разом з тим не кратне 3.

118.* Запровадивши відповідні позначення, записати символікою логіки предикатів речення:

а) Друг мого друга – мій друг.

б) Всі студенти, крім студентів 1-го курсу, проходять виробничу практику.

в) Кожний, хто любить математику, любить мислити, а всі ті, що не люблять математики, люблять не всі чудові речі.

г) Або кожний любить декого і ніхто не любить всіх, або хтось любить всіх і є такі, що не люблять нікого.

119.° Нехай $A(x)$ – «x – просте число», $B(x)$ – «x – парне число», $C(x)$ – «x – ціле число», $D(x, y)$ – «x ділиться на y». Сформулювати наступні висловлення словами і вказати їх значення істинності:

а) $\forall x\left(A(x) \Rightarrow \overline{B}(x)\right)$;

б) $\forall x\left(\overline{A}(x) \Rightarrow \forall y\left(A(y) \Rightarrow \overline{D}(x, y)\right)\right)$;

в) $\forall x\left(B(x) \Rightarrow \forall y\left(D(x, y) \Rightarrow B(y)\right)\right)$;

г) $\forall y \forall x\left(C(x) \wedge C(y) \Rightarrow D(x, y)\right)$;

д) $\forall x \exists y\left(C(x) \wedge C(y) \Rightarrow D(x, y)\right)$;

е) $\forall x\left(A(x) \wedge B(x) \Leftrightarrow C(x)\right)$;

є) $\forall x \forall y\left(B(x) \wedge \overline{B}(y) \Rightarrow \overline{D}(x, y)\right)$;

ж) $\exists x \forall y\left(C(x) \wedge C(y) \Rightarrow D(x, y)\right)$.

120.* Використовуючи логічні символи, записати наступні висловлення та їх заперечення:

а) Числа 5 і 12 не мають спільних дільників, відмінних від 1 і -1.

б) Натуральне число, яке ділиться на 6, ділиться на 2 і на 3.

в) Функція $f(x)$ називається обмеженою на відрізку $[a;b]$, якщо існує таке число $M > 0$ (незалежно від x), при якому для всіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$.

г) Для будь-якого натурального числа існує натуральне число, більше за дане.

д) Існує найменше натуральне число.

е) Для всяких цілих x та z існує ціле число y таке, що $x+y=z$.

є) Не існує такого раціонального числа x, що $x^2-2=0$.

121.* Довести такі рівносильності:

а) $\forall xA(x)\equiv\overline{\exists}x\overline{A}(x)$;

б) $\exists x\big(A(x)\vee B(x)\big)\equiv\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$;

в) $\forall xB(x)\Rightarrow\exists xA(x)\equiv\exists x\big(B(x)\Rightarrow A(x)\big)$.

122.° З'ясувати, чи мають місце такі рівносильності. Якщо ні, то навести контрприклади:

а) $\exists x\big(A(x)\wedge B(x)\big)\equiv\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$;

б) $\exists xA(x)\vee\forall xB(x)\equiv\exists x\big(A(x)\Rightarrow B(x)\big)$;

в) $\forall x\big(A(x)\Rightarrow B(x)\big)\equiv\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x)$.

123.* Записати висловлення, рівносильне даному, без знаку $\Rightarrow$:

а) $\overline{\forall x\big(A(x)\Rightarrow\exists yB(y)\big)}$;

б) $\forall xA(x)\wedge\forall yB(y)\Rightarrow\forall xC(x)$;

в) $\forall xA(x)\Rightarrow\exists yB(y)\vee\forall xC(x)$.

2. МНОЖИННІ СТРУКТУРИ І БАЗИ ДАНИХ

2.1. МНОЖИНИ

2.1.1. Теоретичні відомості

Поняття множини є фундаментальним, тобто неозначуваним поняттям. Під множиною розуміють сукупність об'єктів довільної природи, які мають спільну властивість. Наприклад: множина студентів на лекції, множина комп'ютерів в лабораторії, множина парних чисел, множина рівнобедрених трикутників.

Об'єкти, з яких складається множина, називають її елементами. Позначають множини великими, а їх елементи – малими латинськими буквами. Якщо a є елементом множини A, то це символічно записують так: $a \in A$. Вираз $a \notin A$ (або $a \overline{\in} A$) означає, що a не є елементом множини A.

Множина вважається заданою, якщо про кожний об'єкт можна сказати, є він елементом цієї множини, чи ні. Задати множину можна двома способами:

1. *Переліком елементів*. Наприклад, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
2. За допомогою *характеристичної властивості*, яку мають всі елементи даної множини. Наприклад, ту ж множину A можна записати так: $A = \{x|\ x$ – парні натуральні числа першого десятка$\}$ або $A = \{x|\ x \in N,\ x \leq 10$ і $x \vdots 2\}$.

Множина, яка складається з обмеженого числа елементів, називається *скінченною*. Наприклад, множина двоцифрових чисел, множина вершин квадрата.

Для деяких множин існують спеціальні позначення. Так, множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$. Множину натуральних чисел прийнято позначати через N, множину цілих чисел – через Z, множину раціональних чисел – Q, дійсних – R, комплексних – C. Множину натуральних чисел, які менші або рівні числа n, позначають символом M_n.

Означення 1. Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то говорять, що множина A включається в множину B, або множина B включає множину A, або A є підмножиною множини B і позначають $A \subset B$. Іноді використовують позначення $A \subseteq B$, наголошуючи тим самим на можливість співпадання (рівності) множин.

Означення 2. Множини A і B називаються рівними (записують $A = B$), якщо вони складаються з одних і тих же елементів, тобто множина A є підмножиною множини B, а B – підмножиною множини A.

Виходячи з означення підмножини, можна дати і таке означення рівності двох множин:

Означення 3. Множини A і B називаються рівними, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B і навпаки, кожен елемент множини B є елементом множини A.

Звідси отримуємо правило встановлення рівності двох множин:

Для того щоб довести рівність двох множин A і B, потрібно взяти будь-який елемент з множини A і показати, що він належить множині B. Після цього взяти будь-який елемент з множини B і показати, що він належить множині A.

Очевидно, що для будь-якої множини A виконується $A \subseteq A$. Крім того, прийнято вважати, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини A. Порожню множину і множину A називають *невласними* підмножинами множини A.

Встановлено, що для будь-якої n-елементної множини існує 2^n різних підмножин. Множину всіх підмножин множини A називають *булеаном* множини A і позначають $\beta(A)$. Наприклад, для множини $A = \{1, 2, 3\}$ $\beta(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Існують множини, по відношенню до яких всі інші множини є підмножинами. Наприклад, будь-яку геометричну фігуру на площині можна вважати підмножиною множини точок площини, а будь-яке геометричне тіло – підмножиною множини точок в просторі. Такі загальні множини називають *універсальними* і позначають буквою U. З наведених прикладів видно, що поняття універсальної множини залежить від конкретного прикладу. В першому випадку U – площина, а в другому – простір.

Для множин можна ввести ряд операцій, результатом виконання яких також будуть множини.

Означення 4. Об'єднанням множин A і B (позначається $A \cup B$) називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з множин A чи B.

Тобто $A \cup B = \{x | \ x \in A \vee x \in B\}$.

Означення 5. Перетином множин A і B (позначається $A \cap B$) називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множинам A і B одночасно.

Тобто $A \cap B = \{x | \ x \in A \wedge x \in B\}$.

Означення 6. Різницею множин A і B (позначається $A \setminus B$) називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B.

Тобто $A \setminus B = \{x | \ x \in A \wedge x \notin B\}$.

Означення 7. Симетричною різницею множин A і B (позначається $A \Delta B$) називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B, або належать множині B і не належать множині A.

Тобто $A \Delta B = \{x | \ (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$.

Означення 8. Доповненням множини A до універсальної множини U (позначається $\overline{A}$) називається множина всіх елементів універсальної множини, які не належать множині A.

Тобто $\overline{A} = \{x | \ x \in U \wedge x \notin A\}$. Неважко помітити, що $\overline{A} = U \setminus A$.

Для кращого розуміння операцій над множинами іноді користуються спеціальними геометричними схемами, які називаються діаграмами Ейлера-Венна.

Мають місце такі рівності, які називаються властивостями операцій над множинами:

1) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
4) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;
5) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$;
6) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
7) $\overline{\overline{A}} = A$;
8) $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$, $\overline{U} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = U$.

Властивості 1) – 8) доводяться за правилом встановлення рівності двох множин, описаним вище.

Для визначення порядку дій над множинами в теоретико-множинних виразах вводять дужки. Якщо у виразі дужки відсутні, то операції виконуються в такій послідовності: доповнення, перетин, об'єднання, різниця, симетрична різниця.

2.1.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дано множини: $A = \{x \in Z \mid x = 2y,\ y \in Z\}$, $B = \{x \in Z \mid x = 2y - 1,\ y \in Z\}$, $C = \{x \in Z \mid x < 10\}$, Z – універсальна множина. Описати множини: $\overline{A}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{C}$, $A \setminus \overline{B}$, $A \setminus \overline{C}$.

Розв'язання. Оскільки A – множина всіх парних цілих чисел, то $\overline{A}$ є множиною непарних цілих чисел, яка за допомогою характеристичної властивості запишеться так: $\overline{A} = \{x \in Z \mid x = 2y + 1, y \in Z\}$.

Очевидно, що B – це множина непарних цілих чисел. Її об'єднання з множиною A співпаде з множиною всіх цілих чисел Z. Тому $\overline{A \cup B} = \varnothing$.

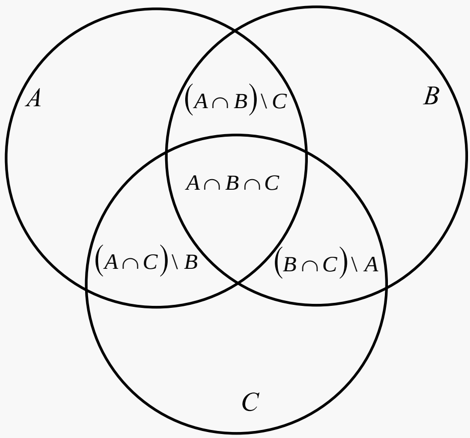
$\overline{C} = \{x \in Z \mid x \geq 10\}$ – множина цілих чисел, які не менші 10.

Множина $\overline{B}$, як і A, складається з усіх парних цілих чисел. Тому $A \setminus \overline{B} = \varnothing$.

Нарешті, $A \setminus \overline{C} = \{x \in Z \mid x = 2y, y \in Z, y < 5\}$ – множина цілих парних чисел, менших 10.

Приклад 2. Серед 58 опитаних студентів факультету 11 знають мову програмування Паскаль і Бейсік, 6 – Бейсік і Сі$^{++}$, 5 – Паскаль і Сі$^{++}$, 3 студенти знають усі ці три мови. Скільки студентів знають лише одну із мов Сі$^{++}$, Паскаль чи Бейсік, якщо їх числа утворюють арифметичну прогресію із різницею 7?

Розв'язання. Нехай A, B і C – множини студентів, які знають Сі$^{++}$, Паскаль і Бейсік відповідно. Побудуємо діаграму Ейлера-Венна для цієї задачі.



За умовою множини $A \cap B \cap C$, $A \cap B$, $A \cap C$ і $B \cap C$ містять відповідно 3, 5, 6, і 11 елементів. Тоді множини $(A \cap B) \setminus C$, $(A \cap C) \setminus B$ і $(B \cap C) \setminus A$ містять відповідно 2, 3 і 8 елементи. Позначимо число елементів множини $(A \setminus B) \setminus C$ через x (тільки Сі$^{++}$), $(B \setminus A) \setminus C$ – через y (тільки Паскаль) і $(C \setminus A) \setminus B$ – через z (тільки Бейсік). $x + y + z + 3 + 8 + 2 + 3 = 58$. Звідси $x + y + z = 42$. Оскільки числа z, x і y утворюють арифметичну прогресію із різницею 7, то $2y = x + z$, $y = 14$, $x = 7$, $z = 21$.

Отже, серед опитаних є 7 студентів, які знають тільки Сі$^{++}$, 14 – тільки Паскаль і 21 – тільки Бейсік.

Приклад 3. Довести, що $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Розв'язання. За означенням рівності двох множин потрібно довести, що мають місце співвідношення: $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (1) і $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ (2).

Для доведення включення (1) треба показати, що довільний елемент x, який належить множині $\overline{A \cup B}$, належить також і множині $\overline{A} \cap \overline{B}$. Якщо $x \in \overline{A \cup B}$, то за означенням доповнення $x \notin A \cup B$, а за означенням об'єднання $x \notin A$ і $x \notin B$. Звідси за означенням доповнення $x \in \overline{A}$ і $x \in \overline{B}$. На підставі означення перетину остаточно маємо: $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. В силу довільності елемента x, робимо висновок, що $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доведемо включення (2). Нехай $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Це означає, що $x \in \overline{A}$ і $x \in \overline{B}$. Звідси випливає, що $x \notin A$ і $x \notin B$. Якщо $x \notin A$ і $x \notin B$, то $x \notin A \cup B$, а, значить, $x \in \overline{A \cup B}$. Оскільки всякий елемент множини $\overline{A} \cap \overline{B}$ належить множині $\overline{A \cup B}$, то $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Порівнюючи включення (1) і (2), маємо рівність: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Приклад 4. Спростити вираз $A \cap B \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$.

Розв'язання. Для зручності спрощень розставимо дужки, враховуючи пріоритет операцій: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Використовуючи властивості операцій над множинами, будемо мати:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \overset{3}{=} A \cap (B \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \overset{8}{=} (A \cap U) \cup$$

$$\cup (\overline{A} \cap B) \overset{8}{=} A \cup (\overline{A} \cap B) \overset{3}{=} (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) \overset{8}{=} U \cap (A \cup B) \overset{8}{=} A \cup B.$$

2.1.3. Задачі для самостійного опрацювання

124. Множини задані за допомогою характеристичної властивості. Задайте їх за допомогою переліку елементів:

а) $A = \{x \mid x \in Z, |x| < 5\}$;

б) $A = \{x \mid x \in Z, -3 < x < 7\}$;

в) $A = \{x \mid x \in N, x < 1\}$;

г) $A = \{x \mid x = 5k, k \in N, x < 6\}$;

д) $A = \{x \mid x \in N, x^2 \le 9\}$;

е) $A = \{x \mid x \in R, x^2 - 8x + 15 = 0\}$;

є) A – множина непарних одноцифрових чисел;

ж) A – множина двоцифрових чисел, які діляться на 10.

125. Множини задані переліком елементів. Записати їх за допомогою характеристичної властивості:

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

б) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

в) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$;

г) $A = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

126. Зобразити на числовій прямій множини:

а) $A = \{x \mid x > 3{,}4\}$;

б) $A = \{x \mid -3{,}5 \le x \le 7{,}5\}$;

в) $A = \{x \mid 3 < x \le 6\}$;

г) $A = \left\{x \,\middle|\, \dfrac{1}{2^{x+1} + 3} < \dfrac{1}{2^{x+2} - 1}\right\}$.

127. Знайти множину розв'язків кожного із даних рівнянь:

а) $4x + 5 = 4(x - 7),\ x \in R$;

б) $x^2 - 9 = 0,\ x \in Z$;

в) $(3x + 16)(x - 3) = 0,\ x \in R^+$;

г) $x^2 - 5 = 0,\ x \in N$;

д) $(x - 1)^{3x-2} = (x - 1)^{5x+4}$;

е) $\sqrt{\left(\sqrt{2} - x\right)^2} = 2$.

128.° Визначити всі можливі співвідношення (рівності, нерівності, включення, строгого включення) між такими множинами геометричних фігур:

A – множина всіх ромбів;

B – множина ромбів, усі кути яких прямі;

C – множина всіх квадратів;

D – множина прямокутників, усі сторони яких рівні;

E – множина всіх прямокутників;

F – множина чотирикутників, усі кути яких прямі.

129. Які з наведених співвідношень є правильними?

а) $1 \in \{1, 2, 3\}$;
б) $1 \in \{\{1, 2, 3\}\}$;
в) $1 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
г) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$;
д) $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
е) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$;
є) $\{1, 2\} \in \{1, 2\}$;
ж) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$;
з) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
и) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$;
і) $a \in \{a\}$;
ї) $a \in \{\{a\}\}$.

130. Які з наведених співвідношень є правильними?

а) $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$;
б) $1 \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$;
в) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;
г) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;
д) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{2, 3\}\}$;
е) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$;
є) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
ж) $\varnothing \subseteq \{1, 2, 3\}$;
з) $\{a\} \subseteq \{a, b\}$;
и) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$.

131. Нехай $A = \{1, 2, \{1\}\}$. Які з наведених співвідношень є правильними?

а) $1 \in A$;
б) $\{1\} \in A$;
в) $\{\{1\}\} \in A$;
г) $\{1\} \subseteq A$;
д) $\{\{1\}\} \subseteq A$;
е) $\{2\} \in A$;
є) $\{2\} \subseteq A$;
ж) $\{\{2\}\} \subseteq A$;
з) $\{1, 2\} \in A$;
и) $\{1, 2\} \subseteq A$;
і) $\varnothing \in A$;
ї) $\varnothing \subseteq A$;
й) $\{\varnothing\} \in A$;
к) $\{\varnothing\} \subseteq A$;
л) $\{\varnothing, 1\} \subseteq A$.

132.° Які з наведених співвідношень є правильними?

а) $\varnothing = \{0\}$;

б) $\varnothing = \{\}$;

в) $\varnothing = \{\{\}\}$;

г) $\varnothing \in \{1\}$;

д) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$;

е) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

є) $\varnothing \subseteq \{1\}$;

ж) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$;

з) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\{\{\varnothing\}\}\}$.

133.° Навести приклад таких множин A, B і C, щоб $A \in B$, $B \in C$ і $A \notin C$.

134.° Навести приклад таких множин A і B, що $A \in B$ і $A \subseteq B$.

135.* Чи існує така одноелементна множина B, що для деякої множини A одночасно виконується $A \in B$ і $A \subseteq B$?

136.° Які з тверджень є правильними?

а) якщо $A \notin B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$;

б) якщо $A = B$ і $B \neq C$, то $A \neq C$;

в) якщо $A \in B$ і не виконується, що $B \subseteq C$, то $A \notin C$;

г) якщо $A \subseteq B$ і $B \in C$, то $A \notin C$;

д) якщо $A \subseteq B$ і $B \in C$, то $A \subseteq C$;

е) якщо $A \in B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

У тих випадках, коли твердження неправильне, разом із контрприкладами побудуйте окремі приклади, для яких воно виконується.

137. Побудувати множину всіх підмножин множини A, тобто її булеан $\beta(A)$:

а) $A = \{3, 5\}$;

б) $A = \{2, \{3\}, \{2, 3\}\}$;

в) $A = \varnothing$.

138.° Визначити:

а) $\beta(\beta(A))$, якщо $A = \{a\}$;

б) $\beta(\beta(A))$, якщо $A = \{b, c\}$;

в) $\beta(\beta(\beta(A)))$, якщо $A = \varnothing$.

139. Зі скількох елементів складається множина A, якщо число всіх її підмножин дорівнює 32?

140. Чи може існувати множина, яка має 127 підмножин? Відповідь обґрунтувати.

141.° Довести, що $A \subseteq B$ тоді і тільки тоді, коли $\beta(A) \subseteq \beta(B)$.

142.* Довести, що співвідношення $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_1$ виконується тоді і тільки тоді, коли $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$.

143.° Довести, що рівність $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$.

144. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ і $A \Delta B$, якщо:

а) $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{8, 7, 3, 1, 4\}$;

б) $A = \{\{1, 2\}, 1, 2, 3\}$, $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, 2\}$;

в) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, b, a\}$;

г) $A = \{\bullet; \lozenge, \square\}$, $B = \{\bullet; \lozenge\}$.

145. Нехай A – множина всіх ромбів, а B – множина всіх прямокутників на площині. З яких елементів складаються множини $A \setminus B$, $B \setminus A$ і $A \cap B$?

146. Якщо U – множина всіх трикутників, A – прямокутні трикутники, B – рівнобедрені трикутники, то що являють собою множини $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \setminus B$?

147. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

а) $A = \{x |\, (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$,
$B = \{x |\, (x^2 - 1)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2 = 0\}$;

б) $A = \{x |\, (x^2 - 8x + 12)(x^2 - 6x + 8) = 0\}$,
$B = \{x |\, (x^2 - 8x + 12)^2 (x^2 - 6x + 8)^2 = 0\}$;

в) $A = \{x |\, (x^2 - 25)^2 + (x^2 - 4)^2 = 0\}$,
$B = \{x |\, (x^2 - 25)(x^2 - 4) = 0\}$.

148. Нехай $A = \{2, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 7\}$ і $C = \{2, 4, 6, 7\}$. Перевірити рівності:

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

149. Нехай N – універсальна множина, A – множина чисел, кратних 3, B – множина чисел, не більших за 6, C – множина парних чисел. Описати за допомогою них такі множини:

а) $\{3, 6\}$;

б) $\{1, 3, 5\}$;

в) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

г) $\{9, 12, 15, 18, \ldots\}$;

д) $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$;

е) $\{7, 8, 9, 10, \ldots\}$.

150. Нехай U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, A = {2, 3, 6}, B = {1, 4, 6, 7} і C = {1, 2, 3, 6}. Визначити:

а) $\overline{A}$;

б) $\overline{B \cup C}$;

в) $A \cap \overline{C}$;

г) $\overline{A \cup C} \cup \overline{A \cup B}$;

д) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B$;

е) $(C \setminus B) \cap (A \setminus \overline{C})$.

151.° Нехай N – універсальна множина і $A = \{n \in N \mid n = 2m, m \in N\}$, $B = \{n \in N \mid n = 2m - 1, m \in N\}$, $C = \{n \in N \mid n = 3m, m \in N\}$. Описати множини:

а) $\overline{A}$;

б) $\overline{B}$;

в) $A \cap B$;

г) $B \cup C$;

д) $B \setminus C$;

е) $A \cap C$;

є) $(B \cup C) \setminus A$;

ж) $A \cap (B \cup C)$.

152.° Нехай Z – універсальна множина і $A = \{n \in Z \mid n = 2m, m \in Z, m > 0\}$, $B = \{n \in Z \mid n = 2m - 1, m \in Z, m > 0\}$, $C = \{n \in Z \mid n \le 7\}$. Описати множини:

а) $\overline{A}$;

б) $\overline{A \cup B}$;

в) $\overline{C}$;

г) $A \setminus \overline{C}$;

д) $C \setminus (A \cup B)$;

е) $(A \setminus C) \Delta (B \setminus \overline{C})$.

153. Зобразити у вигляді діаграм Ейлера-Венна такі множини:

а) $(A \cup B) \cap C$;

б) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

в) $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$;

г) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;

д) $(A \Delta B) \cap C$;

е) $A \setminus (B \Delta C)$;

є) $A \cap \overline{B \setminus C}$;

ж) $\overline{(A \cup B) \setminus C}$.

154. За допомогою діаграм Ейлера-Венна перевірити властивості операцій над множинами.

155. За допомогою діаграм Ейлера-Венна перевірити рівності:

а) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

б) $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$;

в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

д) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

е) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

є) $(\overline{A} \cup B)\cap A = A\cap B$;

ж) $(A\cap B)\cup(A \cap \overline{B}) = A$;

з) $(A\cup B)\cap(A \cup \overline{B}) = A$;

и) $A\Delta B = (A \cap \overline{B})\cup(\overline{A} \cap B)$.

156.° Із 100 студентів першого курсу 6 відмінників, 20 спортсменів, 25 учасників художньої самодіяльності, 3 є відмінниками і спортсменами, 6 – спортсменами й учасниками художньої самодіяльності, 2 відмінники є учасниками художньої самодіяльності, а 1 – відмінником, спортсменом і учасником художньої самодіяльності. Скільки студентів не є ні відмінником, ні спортсменом, ні учасником художньої самодіяльності? Скільки студентів є відмінниками чи спортсменами? (Використайте діаграми Ейлера-Венна).

157.° У звіті про вивчення студентами іноземних мов було написано, що: а) англійську, французьку і німецьку мову вивчають 5 студентів; б) англійську і німецьку – 10; в) англійську і французьку – 8; г) німецьку і французьку – 20; д) англійську – 30; е) німецьку – 23; є) французьку – 50. Знайти помилку в звіті.

158.° За наслідками екзаменаційної сесії зі 100 студентів відмінні оцінки отримали: з алгебри – 18 студентів; з фізики – 13 студентів; з теорії ймовірностей – 20; з алгебри і фізики – 11; з алгебри і теорії ймовірностей – 10; з фізики і теорії ймовірностей – 8, а 70 студентів не отримали жодної відмінної оцінки. Скільки студентів склали сесію на «відмінно»?

159.* (*Задача Льюїса Керрола*). У жорстокому бою 70 зі 100 піратів втратили одне око, 75 – одне вухо, 80 – одну руку і 85 – одну ногу. Яке мінімальне число тих, хто втратив одночасно око, руку, вухо і ногу?

160.* Нехай A і B – довільні множини. Довести, що співвідношення, які розташовані в одному рядку є рівносильними (еквівалентними) між собою, тобто зі справедливості одного з них випливає справедливість всіх інших співвідношень у рядку:

а) $A \subseteq B$, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, $A\cup B = B$, $A\cap B = A$, $A\backslash B = \varnothing$;

б) $A\cap B = \varnothing$, $A \subseteq \overline{B}$, $B \subseteq \overline{A}$;

в) $A \subseteq B$, $\overline{A} \cup B = U$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$;

г) $A\cup B = U$, $\overline{A} \subseteq B$, $\overline{B} \subseteq A$.

161.° Навести приклад множин A і B, які спростовують наступні рівності:

а) $(A\backslash B)\cup B = A$; б) $(A\cup B)\backslash A = B$.

Сформулювати і довести необхідні і достатні умови для виконання цих рівностей.

162.* Довести, що для довільних множин A, B і C виконується:

а) якщо $A\cap B = \varnothing$, то $(A\cup B)\backslash B = A$;

б) якщо $B \subseteq A$ і $C = A\backslash B$, то $A = B\cup C$;

в) якщо $C = A\backslash B$, то $C\cap B = \varnothing$;

г) якщо $A \subseteq B$ і $B\cap C = \varnothing$, то $A\cap C = \varnothing$.

163.* Перевірити (довести або спростувати) справедливість таких тверджень:

а) якщо $A\backslash B = C$, то $A = B\cup C$;

б) якщо $A = B\cup C$, то $A\backslash B = C$;

в) якщо $A\cap B = A$ і $B\cup C = C$, то $A\cup B\cup C = C$;

г) якщо $C \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $(A \cap \overline{B})\cup(B \cap \overline{C}) = A \cap \overline{C}$;

д) якщо $A\cap B \subseteq \overline{C}$ і $A\cup C \subseteq B$, то $A\cap C = \varnothing$;

е) якщо $A \subseteq \overline{B \cup C}$ і $B \subseteq \overline{A \cup C}$, то $B = \varnothing$;

є) якщо $A \subseteq B$, $A\cap C = \varnothing$ і $B\cap C = \varnothing$, то $A = \varnothing$;

ж) якщо $C \subseteq A\cap B$ і $(B\backslash C)\cap A = \varnothing$, то $C = A\cap B$;

з) якщо $A\cap B = \varnothing$ і $B\cap C = \varnothing$, то $A\cap C = \varnothing$;

и) якщо $A \cap \overline{B} = \varnothing$ і $B \cap \overline{C} = \varnothing$, то $A \cap \overline{C} = \varnothing$.

164. Що можна сказати про множини A і B, якщо:

а) $A\cup B = A\cap B$;

б) $A \subseteq \overline{B}$ і $\overline{A} \subseteq B$;

в) $A\cup B = \varnothing$;

г) $A\backslash B = A$;

д) $A\backslash B = \varnothing$;

е) $A\backslash B = B$;

є) $(A\backslash B)\cup(B\backslash A) = A\cup B$;

ж) $A\Delta B = A$;

з) $A\Delta B = U$;

и) $(A\cup B)\Delta A = B$.

165.° Чи існують такі множини A і B, що $(A\backslash B)\cap(B\backslash A) \neq \varnothing$?

166.° Чи існують множини A, B і C, для яких одночасно виконуються такі співвідношення:

а) $C \neq \varnothing$, $A\cap B \neq \varnothing$, $A\cap C = \varnothing$, $(A\cap B)\backslash C = \varnothing$;

б) $C \neq \varnothing$, $A \subseteq B$, $B\cap C \subseteq A$, $A\cap C = \varnothing$;

в) $A \neq \varnothing$, $A\cap B = \varnothing$, $A\cap C = \varnothing$, $A\setminus(B\cup C) = \varnothing$;

г) $A \subseteq B$, $A\cap C = \varnothing$, $(B\setminus C)\cap A = \varnothing$?

167.° Довести, що:

а) $A\setminus(B\setminus C) \subseteq A\cup C$;

б) $(A\setminus C)\setminus(B\setminus A) \subseteq A\setminus C$;

в) $A\setminus C \subseteq (A\setminus B)\cup(B\setminus C)$;

г) $(A\cup B)\setminus(C\cup D) \subseteq (A\setminus C)\cup(B\setminus D)$;

д) $(\overline{A}\cup\overline{B})\Delta(\overline{C}\cup\overline{D}) \subseteq \overline{(\overline{A}\Delta\overline{C})\cap(\overline{B}\Delta\overline{D})}$;

е) $(A\cup B)\Delta(C\cup D) \subseteq (A\Delta C)\cup(B\Delta D)$;

є) $(A\cap B)\Delta(C\cap D) \subseteq (A\Delta C)\cap(B\Delta D)$;

ж) $(A\setminus B)\Delta(C\setminus D) \subseteq (A\Delta C)\setminus(B\Delta D)$;

з) $A\setminus B \subseteq (A\setminus C)\cap(C\setminus B)$;

и) $A\Delta B \subseteq (A\Delta C)\cup(B\Delta C)$.

168.° Довести згідно означення рівності множин:

а) $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

б) $A\setminus(A\setminus B) = A\cap B$;

в) $(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;

г) $A\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus C$;

д) $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\cup(A\cap C)$;

е) $(A\cup B)\setminus C = (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

є) $A\setminus(B\setminus C) = A\setminus((A\cap B)\setminus C)$;

ж) $A\Delta B = (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$;

з) $(A\Delta B)\Delta(A\cup B) = A\cap B$;

и) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

169.° Для яких множин A і B виконується рівність $A\Delta B = A\cap B$?

170.° Використовуючи властивості операцій над множинами, довести рівності:

а) $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C} = U$;

б) $A\cap B\cap C\cap\overline{D}\cup\overline{A}\cap C\cup\overline{B}\cap C\cup C\cap D = C$;

в) $(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D) = (A\cap D)\cup(B\cap C)$;

г) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup C}\cup\overline{\overline{A}\cup B}\cup(\overline{A}\cup C) = U$;

д) $\overline{(A\setminus B)\cap(\overline{A}\cup B)} = U$;

е) $((A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup C))\setminus(\overline{B}\cup C)=\varnothing$;

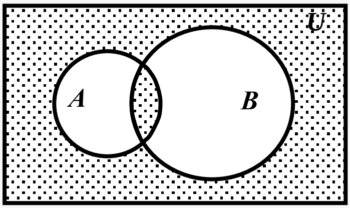
є) $\overline{\overline{A\cup B}\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}=A\cup B$;

ж) $A\cap((\overline{A\cup\overline{B}})\cup(\overline{\overline{A}\cup B}))\cup(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})=A$;

з) $A\cap B\cup A\cap B\cap C\cup A\cap B\cap C\cap D=A\cap B$;

и) $A\cap C\cup B\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap C\cup\overline{B}\cap\overline{C}=U$.

171.* Для довільних множин A і B з універсальної множини U означимо нову операцію $A*B$ за допомогою діаграми Ейлера-Венна. Результатом операції $A*B$ вважатимемо заштриховану область на малюнку:



а) Дати формальне означення для введеної операції.

б) Виразити операцію $A*B$ через основні теоретико-множинні операції.

в) Дослідити властивості операції *. З'ясувати, чи є операція * асоціативною, комутативною, дистрибутивною відносно інших операцій (об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці).

г) Для множин $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{2, 3, 6\}$, $B=\{1, 4, 6, 7\}$ і $C=\{1, 2, 3, 6\}$ обчислити $A*B$, $A*(B\cup C)$ і $(A*B)\cap(A*C)$.

д) Чому дорівнюють множини $A*U$, $A*\varnothing$ і $A*A$?

е) Знайти множини X такі, що $A*X=U$, $A*X=\varnothing$ і $A*X=A$.

172.° Спростити вирази:

а) $A\cap B\cup\overline{A}\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B$;

б) $A\cap\left(A\cup B\right)\cup\overline{A\cap B}$;

в) $\overline{A}\cap B\cup\overline{A}\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap C$;

г) $\overline{A\cup B\cup C}\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup\overline{A\cup\overline{B}}$;

д) $\left(A\cup B\cup C\right)\cap(A\cup B\cup\overline{C})\cap(A\cup\overline{B})\cap\overline{A}$;

е) $\overline{A \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{K}} \cup (\overline{A} \cap B \cap C \cap \overline{K}) \cup \overline{A \cup \overline{B} \cup C}$;

є) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (\overline{B} \cup \overline{C})$;

ж) $(((A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap K) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{K})) \cap B \cap \overline{A} \cap C) \cup (A \cap B)$;

з) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C$;

и) $(A \cap B \cup K \cap C \cup A \cup C) \cap \overline{A} \cup \overline{A \cup C}$.

2.2. ВІДНОШЕННЯ

2.2.1. Теоретичні відомості

Незважаючи на те, що для запису чисел 21 і 12 використовуються множина одних і тих же цифр, дані числа різні. Тут крім набору елементів важливу роль відіграє порядок їх розміщення. Прикладів використання впорядкованих множин можна навести чимало. Під впорядкованою парою (a, b) розуміють двохелементну множину $\{a, b\}$, про яку можна сказати, який елемент стоїть на першому місці, а який – на другому. При цьому елемент a називається першою компонентою впорядкованої пари, а елемент b – другою. Якщо (a, b) і (c, d) впорядковані пари, то $(a, b) = (c, d)$ тоді і тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$.

Аналогічно вводиться впорядкована трійка, четвірка і, взагалі, впорядкована n-ка, тобто впорядкована сукупність n елементів.

Означення 1. Прямим (декартовим) добутком множин A і B (позначається $A \times B$) називають множину всеможливих впорядкованих пар (a, b), де $a \in A$, а $b \in B$.

Тобто $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Наприклад, якщо $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, то

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5)\},$$

$$B \times A = \{(1, 1), (3, 1), (5, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}.$$

Бачимо, що $A \times B \neq B \times A$: для пари $(1, 3) \in A \times B$ не існує рівної пари у множині $B \times A$; зокрема $(1, 3) \neq (3, 1)$ (адже $1 \neq 3$).

Можна розглядати прямий добуток довільної скінченої сукупності множин.

Якщо $A = B$, то $A \times A$ називають декартовим квадратом множини A і позначають A^2. Декартовий добуток множини A на себе n разів, тобто множину $A \times A \times \ldots \times A$, називають n-им декартовим (або прямим) степенем множини A і позначають A^n. Звідси походять позначення R^2, R^3, ..., R^n для площини, тривимірного, ..., n-вимірного простору відповідно.

Означення 2. n-арним (n-місним) відношенням називається всяка підмножина прямого добутку n множин.

Найбільш часто зустрічаються та найбільш вивченими є бінарні (тобто двомісні) відношення. Тому далі розглядатимемо лише їх і скрізь під словом «відношення» розумітимемо бінарне відношення.

Відношення, як і множини, можна позначати великими латинськими буквами. Проте, досить часто їх позначають малими грецькими буквами, підкреслюючи тим самим, що це особливий тип множин. Якщо елемент a перебуває у відношенні ρ з елементом b, то це позначають так: $(a, b)\in\rho$ або $a\,\rho\,b$.

Задавати відношення, як і множини, можна за допомогою характеристичної властивості або за допомогою переліку всіх його елементів. Для прикладу розглянемо множини $A = \{2, 3, 5, 7, 8\}$ і $B = \{1, 3, 5\}$, елементи яких знаходяться у відношенні ρ, якщо їх різниця дорівнює 2. Запишемо це відношення згаданими способами:

1) характеристичною властивістю:

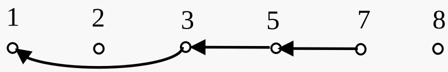
$$\rho = \{(a, b) \mid a\in A,\ b\in B,\ a - b = 2\};$$

2) переліком елементів:

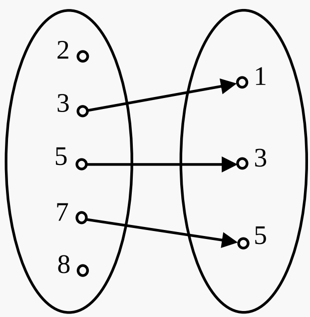
$$\rho = \{(3, 1), (5, 3), (7, 5)\};$$

Крім того, існують спеціальні способи задання відношень:

3) графом (стрілками):



або



4) таблицею:

A	3	5	7
B	1	3	5

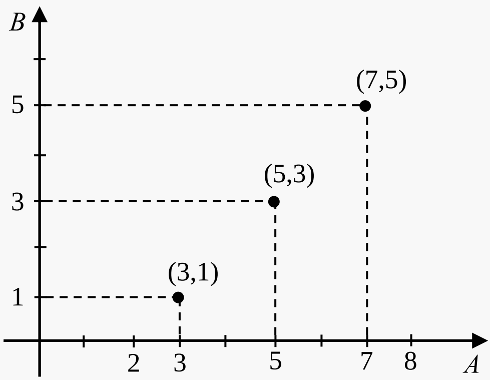
5) матрицею:

а \ *в*	1	3	5
2			
3			
5			
7			
8			

або

а \ *в*	1	3	5
2	0	0	0
3	1	0	0
5	0	1	0
7	0	0	1
8	0	0	0

6) графіком:



Множина перших компонент називається областю визначення відношення, множина других – множиною значень.

В наведеному прикладі областю визначання відношення є множина {3, 5, 7}, а множиною значень – множина {1, 3, 5}.

Над відношеннями можна виконувати всі відомі теоретико-множинні операції. Наприклад, перетином відношень «більше або дорівнює» і «менше або дорівнює» є відношення «дорівнює», об'єднанням відношень «менше» і «більше» є відношення «не дорівнює», доповненням відношення «ділиться на» є відношення «не ділиться на» тощо. Крім того, для відношень можна означити ще дві операції – композицію та інверсію відношень.

Означення 3. Композицією відношень ρ і φ називається відношення $\rho\circ\varphi$, елементами якого є пари (a, b), для кожної з яких існує такий елемент c, що $(a, c)\in\rho$ і $(c, b)\in\varphi$.

Наприклад, якщо

$$\rho = \{(2, 5), (3, 1), (6, 8), (8, 7)\}$$

і

$$\varphi = \{(5, 3), (8, 2), (3, 7), (7, 6)\},$$

то

$$\rho\circ\varphi = \{(2, 3), (6, 2), (8, 6)\},\ \varphi\circ\rho = \{(5, 1), (8, 5), (7, 8)\}.$$

Бачимо, що $\rho\circ\varphi \neq \varphi\circ\rho$.

Означення 4. Відношення ρ^{-1} називається оберненим (інверсним) до відношення ρ, якщо $(b, a)\in\rho^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(a, b)\in\rho$.

Так, якщо $\rho = \{(4, 1), (3, 5), (6, 9)\}$, то $\rho^{-1} = \{(1, 4), (5, 3), (9, 6)\}$. Для відношення «більше або дорівнює» оберненим є відношення «менше або дорівнює», для відношення «ділиться на» – відношення «є дільником».

Розглянемо властивості, за якими класифікують відношення.

Означення 5. Відношення ρ називається рефлексивним на множині A, якщо для будь-якого елементу $a\in A$ пара $(a, a)\in\rho$.

Прикладами рефлексивних відношень є відношення рівності або подібності трикутників, відношення рівності чисел. А відношення подільності на множині цілих чисел не є рефлексивним (так як пара $(0, 0)\notin\rho$ – на нуль ділити не можна).

Означення 6. Відношення ρ називається антирефлексивним на множині A, якщо ні для якого елементу $a\in A$ не виконується співвідношення $(a, a)\in\rho$.

Наприклад, відношення «менше» є антирефлексивним на множині цілих чисел.

Означення 7. Відношення ρ називається симетричним на множині A, якщо для всіх елементів $a, b \in A$ таких, що $(a, b) \in \rho$, виконується співвідношення $(b, a) \in \rho$.

Так, відношення рівності або подібності трикутників є симетричним відношенням, а відношення подільності чисел таким не є (для прикладу, $10 \vdots 5$, але $5 \overline{\vdots} 10$).

Означення 8. Відношення ρ називається антисиметричним на множині A, якщо для всіх елементів $a, b \in A$ таких, що $(a, b) \in \rho$ і $(b, a) \in \rho$ виконується рівність $a = b$.

Прикладом антисиметричного відношення є відношення подільності на множині натуральних чисел. На множині цілих чисел це ж відношення антисиметричним не буде (бо, наприклад, $-5 \vdots 5$ і $5 \vdots -5$, але $5 \neq -5$).

Означення 9. Відношення ρ називається транзитивним на множині A, якщо для будь-яких елементів $a, b, c \in A$ з того, що $(a, b) \in \rho$ і $(b, c) \in \rho$ випливає, що $(a, c) \in \rho$.

Наприклад, транзитивним буде відношення паралельності прямих, якщо вважати, що кожна пряма паралельна сама собі. Відношення перпендикулярності прямих не є транзитивним.

Означення 10. Відношення ρ називається зв'язним (досконалим) на множині A, якщо для будь-яких двох елементів $a, b \in A$ таких, що $a \neq b$ має місце хоча б одне із співвідношень: $(a, b) \in \rho$ або $(b, a) \in \rho$.

Прикладами зв'язного є відношення «більше» або «менше» на числовій осі. Відношення подільності на множині натуральних чисел не є зв'язним, тому що знайдеться два різних елемента a і b, наприклад, 2 і 7, що $a \overline{\vdots} b$, $b \overline{\vdots} a$.

Означення 11. Відношення ρ, задане на множині A, називається відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Так, наприклад, еквівалентними будуть відношення подібності, рівності, задані на множині фігур площини.

З відношенням еквівалентності тісно пов'язане поняття розбиття множини на класи.

Означення 12. Сукупність підмножин множини A називається розбиттям множини на класи, якщо ці підмножини непорожні, взаємно неперерізні і їх об'єднання співпадає з множиною A.

Наприклад, сукупність груп фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського університету є розбиттям множини студентів названого факультету на класи.

Теорема. Всяке відношення еквівалентності, задане на множині A, задає розбиття множини на класи і, навпаки, всяке розбиття множини на класи задає на цій множині відношення еквівалентності.

Означення 13. Класом еквівалентності, породженим елементом a, називається множина тих елементів з множини A, які перебувають у відношення еквівалентності з елементом a.

Символічно можна записати так: $K_a = \{x \mid x \in A$ і $(x, a) \in A\}$.

Означення 14. Сукупність усіх класів еквівалентності за відношенням ρ називається фактор-множиною множини A за відношенням ρ і позначається A/ρ.

Означення 15. Відношення ρ, задане на множині A, називається відношенням порядку, якщо воно антисиметричне і транзитивне.

Якщо відношення порядку ρ – рефлексивне, то його називають нестрогим порядком. Якщо ж відношення порядку ρ – антирефлексивне, то це буде відношення строгого порядку. Відношення порядку називається лінійним, якщо воно зв'язне. Якщо ж відношення порядку незв'язне, то його називають відношенням часткового порядку.

Множина, на якій задано відношення порядку, називається впорядкованою. Залежно від типу відношення порядку вона може бути строго або нестрого впорядкованою, частково або лінійно впорядкованою.

Очевидно, що відношення «менше», задане на множині натуральних чисел, є відношенням строгого лінійного порядку. Відношення подільності, задане на множині натуральних чисел, є відношенням нестрогого часткового порядку. Відношення «менше або рівне» на множинах натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел є відношенням нестрогого лінійного порядку.

2.2.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Довести, що $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

Розв'язання. За означенням рівності множин треба довести, що:

$$A\times(B\cup C) \subseteq (A\times B)\cup(A\times C) \quad (1)$$

$$(A\times B)\cup(A\times C) \subseteq A\times(B\cup C). \quad (2)$$

Доведемо включення (1).

Нехай $x\in A\times(B\cup C)$. Тоді, за означенням прямого добутку двох множин, $x = (a, b)$, $a\in A$ і $b\in(B\cup C)$. Звідси $b\in B$ або $b\in C$. З того, що $a\in A$ і $b\in B$ або $a\in A$ і $b\in C$ випливає, що $(a, b)\in A\times B$ або $(a, b)\in A\times C$. Таким чином, $(a, b) = x\in(A\times B)\cup(A\times C)$.

Доведемо тепер включення (2).

Нехай $x\in(A\times B)\cup(A\times C)$. Тоді $x\in A\times B$ або $x\in A\times C$. А це означає, що $x = (a, b)$ і $a\in A$, $b\in B$ або $a\in A$, $b\in C$. З того, що $b\in B$ або $b\in C$ випливає, що $b\in B\cup C$. Якщо $a\in A$ і $b\in B\cup C$, то $(a, b) = x\in A\times(B\cup C)$.

Порівнюючи (1) і (2), маємо рівність:

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C).$$

Приклад 2. Дано множину дробів $M = \{\frac{a}{b} \mid a, b\in Z, b \neq 0\}$. Задано відношення рівності дробів, а саме: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, якщо $ad = bc$. Довести, що так задане відношення є відношенням еквівалентності.

Розв'язання. Щоб довести, що вказане відношення є еквівалентністю, потрібно перевірити виконання відповідних умов:

1) рефлективність: для будь-якого елемента $\frac{a}{b} \in M$ $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, тому що $ab = ab$ ($a, b \in Z$);

2) симетричність: для будь-яких $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in M$ із співвідношення $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ слідує, що $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ (оскільки за умовою $ad = bc$; звідси $cb = da$, тобто $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$);

3) транзитивність: для будь-яких $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n} \in M$ із співвідношення $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ випливає, що $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Покажемо, що це справді так. За умовою $ad = bc$, $cn = dm$, $b, d, n \neq 0$. Якщо одне з чисел a, c, m дорівнює нулю, то з цих рівностей виходить, що дорівнюють нулю й інші, тобто рівність $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ вірна. Тому нехай $a, c, m \neq 0$. Перемножимо почленно перші дві рівності: $acdn = bcdm$. Поділимо обидві частини на cd. Будемо мати $an = bm$, тобто $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Приклад 3. Нехай на множині $A = \{a \mid a \in N,\ 10 \leq a \leq 20\}$ задано відношення ρ так: елемент a перебуває у відношенні ρ з елементом b, якщо a має таку ж кількість дільників, як і b. Кількість натуральних дільників числа a позначимо через $\tau(a)$. Тоді ρ можна записати у такому вигляді: $\rho = \{(a, b) \mid a, b \in A,\ \tau(a) = \tau(b)\}$. Знайти розбиття множини A на класи за цим відношенням і побудувати фактор-множину A/ρ.

Розв'язання. Легко показати, що це відношення є відношенням еквівалентності. Побудуємо за ним розбиття множини A на класи. Для цього треба побудувати класи еквівалентності. До класу еквівалентності належать числа, які мають однакову кількість натуральних дільників.

Дільники 10: 1, 2, 5, 10.	$\tau(10) = 4$
Дільники 11: 1, 11.	$\tau(11) = 2$
Дільники 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.	$\tau(12) = 6$

Дільники 13: 1, 13. $\tau(13) = 2$
Дільники 14: 1, 2, 7, 14. $\tau(14) = 4$
Дільники 15: 1, 3, 5, 15. $\tau(15) = 4$
Дільники 16: 1, 2, 4, 8, 16. $\tau(16) = 5$
Дільники 17: 1, 17. $\tau(17) = 2$
Дільники 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18. $\tau(18) = 6$
Дільники 19: 1, 19. $\tau(19) = 2$
Дільники 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20. $\tau(20) = 6$

До класу K_{10} належать усі числа з множини A, які мають стільки ж натуральних дільників, скільки і число 10. Тому $K_{10} = \{10, 14, 15\}$. Аналогічно, $K_{11} = \{11, 13, 17, 19\}$, $K_{12} = \{12, 18, 20\}$, $K_{16} = \{16\}$. Інших класів еквівалентності немає, тому що класи еквівалентності, породжені іншими числами, співпадають з виписаними: $K_{13} = K_{11}$, $K_{14} = K_{10}$ і т.д.

Отже, $A/\rho = \{K_{10}, K_{11}, K_{12}, K_{16}\}$.

Приклад 4. Нехай $\{\{2, 3\}, \{4\}, \{1, 5, 6\}\}$ є розбиттям на класи множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Побудувати за даним розбиттям відношення еквівалентності.

Розв'язання. Два елементи перебувають у відношенні еквівалентності, якщо вони належать до одного і того самого класу розбиття. Отже, $\rho = \{(2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (1, 1), (5, 5), (6, 6), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$. Побудоване за даним розбиттям відношення ρ є відношенням еквівалентності, оскільки воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Приклад 5. Показати, що відношення «бути дільником» на множині $\{2, 4, 8, 16\}$ є відношенням нестрогого порядку.

Розв'язання. Щоб довести, що так задане відношення є відношенням нестрогого порядку, необхідно показати, що воно є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним на вказаній множині.

1) рефлексивність: 2 – дільник 2; 4 – дільник 4 і т.д.;
2) антисиметричність: якщо 2 – дільник 4, то 4 не є дільником 2 (бо в противному випадку це б означало, що 2 = 4, що неможливо) і т.д.;
3) транзитивність: якщо 2 – дільник 4, а 4 – дільник 8, то 2 – дільник 8 і т.д.

2.2.3. Задачі для самостійного опрацювання

173. Записати множини $A\times B$, $B\times A$ і A^2, якщо:

а) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$;
б) $A = \{5, 1, 0\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;
в) $A = \{2\}$, $B = \{m, n, k, l\}$.

Обґрунтувати, чому $A\times B \neq B\times A$.

174. Для заданих множин $A = \{1, 2\}$ і $B = \{2, 3, 4\}$ визначити:

а) $(B\backslash A)\times A$;
б) $A\times B\times A$;
в) $A\times(A\cup B)$.

175. Дати геометричну інтерпретацію таких множин:

а)° $[a; b]\times[c; d]$, де $[a; b]$ і $[c; d]$ – відрізки дійсної прямої R;
б) $A\times B$, де $A = \{x \mid x\in R, x \geq 1\}$, $B = \{y \mid y\in R, y < 2\}$.

176.° Довести, що для довільних непорожніх множин A, B, C і D виконується:

а) $A \subseteq B$ і $C \subseteq D$ тоді і тільки тоді, коли $A\times C \subseteq B\times D$;
б) $A = B$ і $C = D$ тоді і тільки тоді, коли $A\times C = B\times D$.

177.° Довести, що для довільних непорожніх множин A і B виконується $(A\times B)\cup(B\times A) = C\times D$ тоді і тільки тоді, коли $A = B = C = D$.

178.* Довести, що:

а) $(A\times B)\cup(B\times A) \subseteq (A\cup B)\times(A\cup B)$. Навести приклад множин A і B, для яких виконується строге включення $(A\times B)\cup(B\times A) \subset (A\cup B)\times(A\cup B)$;
б) $(A\times C)\cup(B\times D) \subseteq (A\cup B)\times(C\cup D)$. Навести приклад множин A, B, C і D, для яких виконується строге включення. Для яких множин A, B, C і D має місце рівність?

179.* Сформулювати і довести необхідні та достатні умови виконання рівності $(A\cup B)\times(A\cup B) = (A\times B)\cup(B\times A)$.

180.° Позначимо через $D = \beta(M)\times\beta(M)\times\beta(M)$, де $M = \{1, 2\}$. Виписати всі трійки $(A, B, C)\in D$ такі, що:

а) $A\cap B \subseteq C$;
б) $A\cap B = C$;
в) $(A\cap B)\cup C = M$;
г) $A\cup B\cup C = M$;
д) $(A\cup B)\backslash C = \varnothing$;
е) $A\cap B \neq B\cap C$.

181.° Довести рівності:

а) $(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D)$;

б) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$;

в) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$;

г) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$;

д) $A\times(B\backslash C) = (A\times B)\backslash(A\times C)$;

е) $(A\backslash B)\times C = (A\times C)\backslash(B\times C)$;

є) $(A\cup B)\times(C\cup D) = (A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$.

182. Задати бінарне відношення «x ділиться на y» на множині M_{10} перших десяти натуральних чисел:

а) характеристичною властивістю;

б) переліком елементів;

в) графіком;

г) графом (стрілками);

д) таблицею;

е) матрицею.

183. Дана множина $A = \{4, 2, 6, 3, 5, -3, 0, -8, -6\}$. Вказати підмножини декартового квадрата A^2, які відповідають відношенням:

а) «a менше b»;

б) «число a протилежне числу b»;

в) «a ділиться на b»;

г) «число a в 2 рази більше, ніж b»;

д) «число a на 2 менше, ніж b».

184. Дано множини $A = \{5, 7, 3\}$ і $B = \{1, -1, 2\}$. Елементи множин A і B перебувають у відношенні ρ.

а) $\rho = \{(a, b) \mid a\in A, b\in B, a - b \,\vdots\, 4\}$;

б) $\rho = \{(a, b) \mid a\in A, b\in B, a + b > 7\}$;

в) $\rho = \{(a, b) \mid a\in A, b\in B, a - b = 2\}$;

г) $\rho = \{(a, b) \mid a\in A, b\in B, a = b + 3\}$.

Записати ці відношення способом переліку. Знайти їх області визначення та значень.

185. Які геометричні фігури зображують відношення:

а) $\rho = \{(x, y)\in R^2 \mid x = y\}$;

б) $\rho = \{(x, y)\in R^2 \mid 0 \le x \le 4\}$;

в) $\rho = \{(x, y)\in R^2 \mid x^2 + y^2 \le 9\}$;

г) $\rho = \{(x, y)\in R^2 \mid |x| + 2|y| = 1\}$;

д) $\rho = \{(x, y)\in R^2 \mid x \ge 0, x + y \le 1, y \le x\}$.

Знайти область визначення і множину значень кожного із відношень.

186.* Нехай на множині всіх людей P означені такі відношення: $F = \{(x,y) \mid x, y \in P$ і x є батьком $y\}$; $D = \{(x, y) \mid x, y \in P$ і x є донькою $y\}$. Описати такі відношення:

а) $F \circ F$;
б) $D \circ D$;
в) $F \circ D$;
г) $D \circ F$;
д) $D \circ F^{-1}$;
е) $F^{-1} \circ D$;
є) $F^{-1} \circ D^{-1}$;
ж) $D^{-1} \circ F$;
з) $D^{-1} \circ D^{-1}$.

187.° На множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$ і $R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$. Знайти відношення X на множині M (або довести, що таке відношення X не існує), для якого виконується:

а) $R_1 \circ X = R_2$;
б) $X \circ R_1 = R_2$;
в) $R_2 \circ X = R_1$;
г) $X \circ R_2 = R_1$;
д) $(R_1 \circ R_2) \circ X = R_1$;
е) $(R_2 \circ R_1) \circ X = R_1$.

188.° На множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$. Знайти такі два відношення T і S на M, що $T \neq S$ і $R \circ T = R \circ S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4)\}$.

189.* Довести, що для довільних відношень виконується:

а) $(R^{-1})^{-1} = R$;
б) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
в) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;
г) $(R_1 \setminus R_2)^{-1} = R_1^{-1} \setminus R_2^{-1}$;
д) $\overline{R^{-1}} = \overline{R}^{-1}$;
е) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$;
є) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

190.* Нехай R_1 і R_2 – відношення на множині M. Довести або спростувати таку рівність: $\overline{R_1 \circ R_2} = \overline{R}_1 \circ \overline{R}_2$.

191.* Довести, що співвідношення $R \circ H = H \circ R = H$ виконується для довільного відношення R тоді і тільки тоді, коли $H = \varnothing$.

192.° Для яких відношень виконується $R^{-1} = \overline{R}$?

193. На множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;
$R_3 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;
$R_5 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$.

Визначити, які з цих відношень є:

а) рефлексивними;
б) антирефлексивними;
в) симетричними;
г) антисиметричними;
д) транзитивними.

Побудувати графіки, графи та матриці заданих відношень.

194. Дати інтерпретацію властивостей відношень за допомогою їхніх матриць, графіків і графів.

195.* Довести, що для довільних рефлексивних відношень R_1 і R_2 відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} і $R_1 \circ R_2$ будуть також рефлексивними.

196.* Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ двох антирефлексивних відношень R_1 і R_2 може не бути антирефлексивним відношенням.

197.° Навести приклад двох антирефлексивних відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$, композиція $R_1 \circ R_2$ яких буде рефлексивним відношенням.

198. В сім'ї четверо дітей: два хлопчика і дві дівчинки. Чи є симетричним на множині дітей цієї сім'ї відношення:

а) «бути сестрою»;
б) «бути братом»;
в) «бути братом або сестрою»;
г) «мати одних і тих же батьків»?

199.* Довести, що для симетричних відношень R_1 і R_2 будуть симетричними і відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1}, $R_1 \circ R_1^{-1}$.

200.° Побудувати два симетричних відношення R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$, композиція яких $R_1 \circ R_2$ не буде симетричним відношенням.

201.° Довести, що транзитивне і антирефлексивне відношення R є антисиметричним.

202.° Навести приклад транзитивних відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ таких, що:

а) $R_1 \circ R_2$ – нетранзитивне;
б) $R_1 \circ R_2$ – транзитивне;
в) $R_1 \cup R_2$ – нетранзитивне;
г) $R_1 \cup R_2$ – транзитивне.

203.* Довести, що об’єднання $R_1 \cup R_2$ транзитивних відношень R_1 і R_2 буде транзитивним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R_1 \circ R_2 \cup R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$.

204. Перевірити, чи є відношення ρ відношенням еквівалентності на множині M_3, якщо:

а) $\rho = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$;
б) $\rho = \{(1, 1), (3, 3), (3, 1), (2, 2)\}$.

205. Нехай A – множина всіх прямих на площині. Чи будуть еквівалентностями на A такі відношення:

а) паралельність прямих;
б) перпендикулярність прямих?

206.° Довести, що обернене відношення до будь-якого відношення еквівалентності є еквівалентністю.

207.° Довести, що перетин довільної скінченої сукупності відношень еквівалентності е еквівалентністю.

208. Чи утворює розбиття на класи:

а) сукупність підмножин $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5\}$ множини M_5?
б) сукупність підмножин рівносторонніх, рівнобедрених, різносторонніх і прямокутних трикутників множини всіх трикутників площини?
в) сукупність підмножин гострих, прямих і тупих кутів множини усіх кутів площини?

209. Скількома способами можна утворити розбиття на класи множини M_3?

210. Дано розбиття множини M_7 на підмножини $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 7\}$, $\{5, 6\}$. Виписати (способом переліку) відповідне цьому розбиттю відношення еквівалентності. Побудувати графік і граф відношення.

211. Записати класи еквівалентності за відношенням ρ, заданим на множині M_4, якщо $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

212. Дано множину $A = \{a \mid a \in N, a \leq 20\}$. Виконати розбиття множини A на класи так, щоб в один і той же клас попали числа, які мають одну й ту ж остачу при діленні на 5. Скільки одержалось класів?

213.° Побудувати найменше відношення еквівалентності ρ' на множині M_5, яке включає задане відношення ρ. Задати розбиття множини на класи за цим відношенням і побудувати фактор-множину M_5/ρ'.

а) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (4, 2), (5, 4)\}$;
б) $\rho = \{(2, 4), (3, 1)\}$;
в) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$;
г) $\rho = \{(2, 4), (3, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 5)\}$;
д) $\rho = \{(2, 2), (3, 3), (5, 1), (3, 4), (2, 5)\}$;
е) $\rho = \{(1, 5), (2, 2), (1, 3), (5, 1), (4, 2)\}$.

214.° Побудувати фактор-множину A/ρ, якщо:

а) $A = Z$ і $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in Z, x - y \vdots 3\}$;
б) $A \neq \varnothing$ і $\rho = A \times A$;
в) A – множина всіх людей, які проживають в Україні і ρ – відношення «проживати в одній області».

215. Які з поданих нижче відношень на множині $\{1, 2, 3\}$ є відношеннями часткового порядку, лінійного порядку:

а) $\{(1, 1), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$;
б) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$;
в) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$;
г) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1)\}$;
д) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$?

216. В множині $A = \{3, 5, 10, 15, 20, 30\}$ задано відношення ρ: «число a кратне числу b». Побудувати граф відношення ρ та з’ясувати, який порядок воно визначає в множині A.

217. В множині $A = \{27 - 3,\ 15 + 8,\ 48 - 2,\ 48 \cdot 2\}$ задано відношення ρ: «значення виразу a менше або рівне значенню виразу b». Побудувати граф відношення ρ та з’ясувати, який порядок воно визначає в множині A.

218.° Довести, що коли ρ є відношенням часткового порядку, то обернене відношення ρ^{-1} також є відношенням часткового порядку.

219. Доповнити відношення $\rho = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 5), (4, 4)\}$ на множині M_5 до нестрогого порядку.

220. Знайти мінімальне доповнення відношення $\rho = \{(6, 2), (3, 5), (5, 1)\}$ на множині M_6 до відношення строгого часткового порядку.

221.* Довести, що перетин двох відношень нестрогого порядку є нестрогим порядком.

222.* Знайти необхідну і достатню умови того, щоб:

а) об'єднання двох відношень строгого порядку було строгим порядком;

б) композиція двох відношень строгого порядку була строгим порядком.

3. КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ

3.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

3.1.1. Теоретичні відомості

На практиці зустрічаються задачі, в яких необхідно підрахувати число всеможливих способів розміщення деяких предметів скінченної множини або число всіх можливих способів виконання певної дії, маючи в арсеналі скінченну множину таких дій. Оскільки при розв'язанні задачі доводиться комбінувати з наборами предметів чи методів, то задачі такого типу називають комбінаторними, а методи їх розв'язку – методами комбінаторного аналізу.

Більшість комбінаторних задач можна розв'язати, використовуючи наступні правила:

Правило суми. Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а інший об'єкт B – іншими n способами, то вибір або A, або B можна здійснити $m + n$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати m способами і після кожної такої вибірки об'єкт B можна вибрати n способами, то вибір пари об'єктів A і B в заданому порядку можна здійснити mn способами.

Якщо позначити через $|A|$ кількість елементів в множині A, то для будь-яких двох скінчених множин A і B має місце співвідношення $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Аналогічну формулу можна одержати для обчислення числа елементів будь-якої скінченної сукупності скінченних множин. Наприклад,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Справедлива загальна теорема.

Теорема. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – деякі скінченні множини, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^k \sum_{1 \le i < j < k \ldots < l \le n} |A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l|.$$

Метод підрахунку за цією формулою, який полягає в послідовному виконанні операцій додавання і віднімання, що чергуються між собою, називається *методом включень і виключень.*

Особливе місце серед комбінаторних конфігурацій займають розміщення, перестановки та комбінації з повторенням та без повторення.

Означення 1. Упорядковані множини, які відрізняються одна від одної лише порядком своїх елементів (тобто можуть бути одержані з однієї і тієї ж множини перестановкою своїх елементів), називаються перестановками.

Число всіх перестановок n-елементної множини позначають P_n і обчислюють за формулою $P_n = n!$.

Означення 2. Розміщенням з n по k елементів називається будь-яка впорядкована k-елементна підмножина n-елементної множини. Число всіх розміщень з n по k елементів позначають A_n^k і обчислюють за формулою

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Загальноприйнято, що елементи в множині розрізняються між собою, тобто вище мова йшла про число перестановок та розміщень без повторень, хоча на цьому окремо не наголошується. Але існують набори (кортежі) елементів, в яких окремі елементи співпадають. Наприклад, повторюються окремі літери в слові «мама», цифри в числі 122 і т.д.

Число всіх розміщень з повторенням з n по k елементів позначають $\overline{A}_n^k$ і обчислюють за формулою $\overline{A}_n^k = n^k$. Наприклад, кількість різних трицифрових чисел, які складаються лише з непарних цифр, обчислюється за формулою $\overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$.

При обчисленні перестановок з повторенням елементи, що співпадають, групують по типах. Тоді число різних перестановок, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, ..., k_m елементів m-го типу, дорівнює $P_n(k_1,k_2,...,k_m) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$. Отже, переставляючи літери в слові «мама», можна утворити $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = \dfrac{24}{4} = 6$ різних слів, а різних чисел, переставляючи цифри в числі 122, можна одержати $\dfrac{3!}{1!\cdot 2!} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Означення 3. Комбінацією з n по k елементів називається будь-яка k-елементна підмножина n-елементної множини. Як бачимо, комбінації відрізняються від розміщення лише тим, що відсутня умова впорядкованості підмножини. Число всіх комбінацій з n по k елементів позначають C_n^k і обчислюють за формулою $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Якщо в комбінації допускається повторення елементів, наприклад, при закупівлі кількох товарів з обмеженого асортименту (тістечок, печива, напоїв), то ми маємо справу з комбінаціями з повторенням. Число всіх комбінацій з повторенням з n по k елементів позначають $\overline{C}_n^k$ і має місце формула $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Комбінаторні конфігурації використовуються також для визначення кількості способів розкладу фіксованого числа предметів на групи (блоки). *Числом Стірлінга другого роду* $S(m, n)$ називається число розбиттів m різних елементів на n блоків, якщо блоки не розрізняються і жоден з блоків не порожній.

Числом Стірлінга першого роду $s(m, n)$ називається кількість способів розбиття m різних елементів на n різних блоків так, щоб жоден з них не був порожнім. Має місце формула $s(m, n) = n!S(m, n)$.

Числа Стірлінга другого роду обчислюються за формулою:

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}[n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m + \ldots +$$

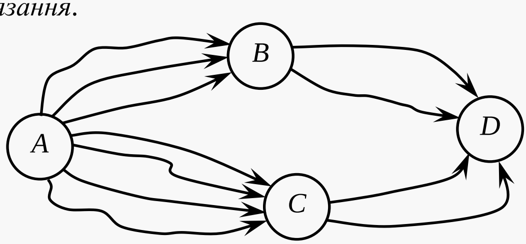
$$+(-1)^k C_n^k (n-k)^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}].$$

Кількість способів розбиття m різних елементів на n різних блоків так, що деякі блоки можуть бути порожніми, дорівнює $\overline{A}_n^m$, а якщо предмети не розрізняються, то маємо $\overline{C}_n^m$ способів. Наприклад, 16 пронумерованих більярдних кульок можна розмісити в 6 лузах $\overline{A}_6^{16}$ способами, а якщо кульки не пронумеровані, то таких способів буде $\overline{C}_6^{16}$.

3.1.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. З пункту A до пункту B ведуть три дороги, з B до D – дві, з A до C – чотири, з C до D – дві дороги. Скількома способами можна потрапити з A до D?

Розв'язання.



Очевидно, що з пункту A до пункту D можна дістатись або маршрутом ABD, або маршрутом ACD. Згідно з правилом добутку, потрапити з A до D через пункт B можна $3 \cdot 2 = 6$ способами (бо, обравши один з трьох можливих способів подорожі з A до B, маємо два можливих способи подорожування з B до D), а через пункт C – $4 \cdot 2 = 8$ способами. За правилом суми число всіх можливих способів подорожі з A до D складає $6 + 8 = 14$.

Приклад 2. Зі 100 студентів третього курсу спецкурс з теорії автоматів хотіли б відвідувати 28 чоловік, спецкурс з комп'ютерної алгебри – 30, систем штучного інтелекту – 42, спецкурси з теорії автоматів і комп'ютерної алгебри – 8, з теорії автоматів і систем штучного інтелекту – 10, з комп'ютерної алгебри і систем штучного інтелекту – 5, а до всіх трьох спецкурсів виявили інтерес 3 студенти. Скільки студентів не виявили інтересу до жодного із запропонованих спецкурсів?

Розв'язання. Якщо A – множина всіх студентів курсу, A_1 – множина студентів, які бажають відвідувати спецкурс з теорії автоматів, A_2 – з комп’ютерної алгебри, A_3 – з систем штучного інтелекту, то $N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)$ – шукане число. Очевидно, що

$$N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = N(A) - N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)\,.$$

$A_1 \cap A_2$ – множина студентів, які бажають відвідувати спецкурси з теорії автоматів і комп’ютерної алгебри; $A_1 \cap A_3$ – множина студентів, які бажають відвідувати спецкурси з теорії автоматів і систем штучного інтелекту; $A_2 \cap A_3$ – множина студентів, які бажають відвідувати спецкурси з комп’ютерної алгебри і систем штучного інтелекту; $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ – множина студентів, які виявили інтерес до всіх трьох спецкурсів. Тоді згідно з формулою включень і виключень отримуємо, що

$$N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = N(A) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) +$$
$$+ N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3) - N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= 100 - 28 - 30 - 42 + 8 + 10 + 5 - 3 = 20\,.$$

Таким чином, число студентів, яких не зацікавив жоден із запропонованих спецкурсів, дорівнює 20.

Приклад 3. На зборах присутні 25 студентів. Скількома способами можна обрати голову зборів, його заступника і секретаря?

Розв’язання. Оскільки потрібно зробити вибірку трьох студентів з 25, то для обчислення числа розв’язків можуть підійти лише формули числа комбінацій або розміщень, причому без повторень, бо один і той самий студент не може виконувати одночасно обов’язки, наприклад, голови і секретаря.

Залишається з’ясувати, чи важливий в даному випадку порядок вибору студентів. Очевидно, що так, бо в залежності від порядку вибору студентів їх обов’язки розподіляються порізному. Тому розв’язок задачі обчислюється за формулою розміщень без повторень:

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800\,.$$

Приклад 4. Скількома способами можна розташувати на полиці 8 книг?

Розв’язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини, тобто числу перестановок з 8 елементів: $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$.

Приклад 5. Четверо студентів складають іспит. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки, якщо відомо, що ніхто з них не отримав незадовільної оцінки?

Розв'язання. Екзаменатор міг поставити кожному з чотирьох студентів одну з трьох оцінок: «Відмінно», «Добре», «Задовільно». Очевидно, що різні студенти можуть отримати однакові оцінки. Тому кількість можливих результатів екзамену дорівнює числу впорядкованих наборів оцінок (розміщень) з повтореннями з 3 (кількості варіантів оцінок) по 4 (кількості оцінок в наборі – кількості студентів): $\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$.

Приклад 6. В скількох точках перетинаються діагоналі опуклого десятикутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

Розв'язання. Кожній точці перетину двох різних діагоналей відповідають чотири вершини десятикутника, а кожним чотирьом вершинам – одна точка перетину (діагоналей опуклого чотирикутника). Таким чином, число всіх точок перетину дорівнює числу способів, якими з десяти вершин можна вибрати чотири вершини. При цьому очевидно, що порядок вибору вершин несуттєвий. Тому отримуємо комбінації з 10 елементів по 4, число яких дорівнює

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210 .$$

Приклад 7. В кондитерському відділі продають 4 різних сортів тістечок. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язання. Покупки вважаються різними лише у випадку, коли відповідні набори тістечок відрізняються своїм складом. Тому порядок вибору тістечок ролі не відіграє. Отже, ми маємо справу з комбінаціями, причому з повтореннями, бо сорти тістечок можуть повторюватись. Тобто число різних покупок рівне:

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 .$$

Приклад 8. Скількома способами можна розкласти 6 однакових білих кульок, 1 чорну, 1 зелену, 1 синю і 1 червону кульки по 3 різних ящиках?

Спочатку виконаємо поділ по ящиках білих кульок. Змоделюємо цей поділ таким чином: додамо до білих кульок ще два однакових кубика і розташуємо їх в ряд, а потім переставимо всіма можливими способами 6 кульок і 2 кубика. Кожній такій перестановці відповідає свій спосіб розподілу кульок по ящиках. В перший ящик попадають всі кульки, починаючи з першої і до першого кубика, в другий – всі кульки, що потрапили між першим і другим кубиками, а в третій – всі кульки, що знаходяться після другого кубика. Зрозуміло, що різним перестановкам відповідають різні способи розподілу. За формулою для перестановок з повтореннями число таких перестановок дорівнює:

$$P_8(6,2) = C_8^2 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28 .$$

Кожна з решти чотирьох кульок може потрапити до будь-якого з трьох ящиків і тому їх, за правилом добутку (або див. задачу про розміщення пронумерованих куль в лузах), можна розкласти 3^4 способами. Використовуючи правило добутку, всього отримуємо $3^4 \cdot 28 = 2268$ способів.

Приклад 9. Скількома способами 3 людини можуть розділити між собою 6 однакових яблук, 1 апельсин, 1 сливу, 1 лимон, 1 грушу, 1 айву і 1 фінік так, щоб кожен отримав по 4 плоди?

Розв'язання. Спочатку розділимо яблука. Так як кожен отримує не більше чотирьох яблук, то з точністю до перестановок цей розподіл можна виконати одним з наступних способів: $6 = 4 + 2 + 0 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 + 0 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2$.

Якщо яблука поділені по схемі 4 + 2 + 0, то потрібно ще вибрати 2 фрукти з 6 для другого, а решту віддати третьому. Це можна зробити C_6^2 способами. Враховуючи можливість перестановок людей, отримуємо $3! \cdot C_6^2$ способів поділу.

При схемі 4 + 1 + 1 потрібно вибрати для другого 3 фрукти з 6 (C_6^3 способів). Так як два чоловіка мають порівну яблук, то число перестановок людей дорівнює $P_3(2,1) = 3$.

При схемі 3 + 3 + 0 потрібно вибрати один фрукт з 6 для першого і один фрукт тих 5, що залишилися, для другого. Тут також можливі 3 перестановки людей.

Аналогічно розглядаються інші схеми. Всього отримуємо $6C_6^2 + 3C_6^3 + 3C_6^1C_5^1 + 6C_6^1C_5^2 + C_6^2C_4^2 = 690$ способів поділу.

3.1.3. Задачі для самостійного опрацювання

223. Є 5 видів конвертів без марок і 4 види марок. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправки листа?

224. В меню їдальні є 7 перших, 9 других і 4 третіх страви. Скількома способами можна вибрати обід з трьох страв (перше, друге і третє)?

225. Міста A і B сполучають 5 доріг, а міста B і C – 3 дороги. Скількома маршрутами можна дістатись з A до C через B і повернутись назад?

226. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятись на гору і спуститись з неї? Дайте відповідь на те ж саме запитання, якщо підняття і спуск відбуваються різними шляхами.

227. У першості України з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі?

228. Скільки є різних двозначних чисел, в десятковому записі яких не зустрічається жодна з цифр 0, 2, 5?

229. Скільки є різних двозначних чисел, в десятковому записі яких не зустрічається жодна з цифр 1, 3, 7?

230. Скільки тризначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожну з цих цифр можна використовувати не більше одного разу?

231. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

а) жодна цифра не повторюється;
б) цифри можуть повторюватись;
в) числа повинні бути непарними;
г)* цифри можуть повторюватись не більше двох разів?

232. В класі вивчають 10 предметів. В понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

233. Скільки є чотиризначних чисел, які діляться на 5? Скільки п’ятизначних чисел мають ту ж властивість?

234. Скільки є чотиризначних чисел, в кожному з яких немає однакових цифр?

235. а) Скільки різних натуральних дільників має число $3^5 \cdot 5^4$?

б) Скільки різних натуральних дільників має число $2^7 \cdot 3^{10} \cdot 7^{15} \cdot 11^9$?

в)° Нехай $p_1, ..., p_n$ – різні прості числа. Скільки дільників має число $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$, де $\alpha_1, ..., \alpha_n$ – деякі натуральні числа?

236.° В селищі мешкає 1500 жителів. Довести, що принаймні два з них мають однакові ініціали.

237.° В книжковому магазині лежать 6 книг з описом текстового редактора, 3 книги з описом електронних таблиць і 4 книги – баз даних. Крім того, є 5 книг, що містять опис текстового редактора і електронних таблиць, і 7 книг, що містять опис текстового редактора і баз даних. Скількома способами можна зробити покупку, яка б включала по одному опису кожного з програмних продуктів?

238.° Скількома способами з 28 костей доміно можна вибрати дві кості так, щоб їх можна було прикласти одну до одної (тобто щоб деяка кількість очок зустрічалась на обох костях)?

239.° Скількома способами можна вибрати дві кості доміно так, щоб:

а) на одній з них було 5 очок, а на другій – 2;
б) в сумі на них було 7 очок?

240.° Скільки є п’ятизначних чисел, які закінчуються двома сімками?

241.° Скільки є шестизначних чисел, які починаються з двох однакових цифр?

242.° Скільки є п’ятизначних чисел, в кожному з яких сусідні цифри різні?

243.° Скільки є п’ятизначних чисел, які діляться на 4 і в записі яких не використовуються цифри 0, 4, 6, 8?

244.° Скільки є шестизначних чисел, в кожному з яких немає однакових цифр, а друга і четверта цифри непарні?

245.* Скільки є шестизначних чисел, в записі яких дві цифри 1 і по одній цифрі 2, 3, 4, 5?

246.* Скільки є семизначних чисел, в записі яких чотири цифри 5 і по одній цифрі 0, 7, 8?

247.* Скільки парних і скільки непарних чисел можна скласти з цифр числа 3694 (кожну цифру можна використовувати не більше одного разу)?

248. Кожен учень у класі вивчає англійську чи французьку мову. Англійську мову вивчають 25, французьку – 27, а ту і другу – 18 чоловік. Скільки учнів у класі?

249. Частина жителів одного міста може розмовляти тільки українською, частина – тільки російською, а решта – як російською, так і українською мовами. Українською мовою розмовляють 85%, а російською – 75% жителів міста. Який процент жителів розмовляє двома мовами?

250. На аркуші паперу накреслили круг площею 78 $см^2$ і квадрат площею 55 $см^2$. Площа перетину круга і квадрата дорівнює 30 $см^2$. Не зайнята кругом і квадратом частина аркуша має площу 150 $см^2$. Знайти площу аркуша.

251.° Кожен студент групи – або дівчина, або білявий, або любить читати детективи. В групі 20 дівчат, з них 12 білявих і одна білява дівчина любить читати детективи. Всього в групі 24 білявих студента, з них 12 люблять читати детективи, а всього студентів (хлопців і дівчат), які люблять читати детективи, 17, з них 6 дівчат. Скільки студентів в групі?

252.° Знайти кількість натуральних чисел, які не перевищують 1000 і не діляться ні на одне з чисел 3, 5 і 7.

253.° Знайти кількість натуральних чисел в межах від 100 до 500, які не діляться ні на одне з чисел 2, 3 і 5.

254.° На першому курсі факультету 95 студентів захоплюються спортом. З них 50 займаються волейболом, 48 – баскетболом, 36 – тенісом, 21 – волейболом і баскетболом, 15 – волейболом і тенісом, 18 – баскетболом і тенісом. Скільки студентів займаються іншими видами спорту, якщо 5 студентів займаються баскетболом, волейболом і тенісом?

255.° 60% студентів факультету читають газету «Математика», 30% – «Інформатика», 20% – «Фізика», 15% – «Інформатика» та «Математика», 5% – «Математика» та «Фізика», 2% – «Інформатика» та «Фізика», 1% – всі ці три газети. Скільки процентів студентів не читають жодної з названих газет?

256.° У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують математичний і фізичний гуртки? Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?

257.° У класі 45 учнів. З них 25 хлопчиків; 30 учнів навчаються на 4 і 5, з них 16 хлопчиків; 28 займаються спортом, з них 18 хлопчиків та 17 учнів, які навчаються на 4 і 5; 15 хлопчиків навчаються на 4 і 5 і в той же час займаються спортом. Показати, що в цій інформації є помилка.

258.* На виставці комп’ютерної техніки були студенти першого та другого курсу. Всі вони в майбутньому або вчителі інформатики, або інженери-програмісти. Хлопців було 16, а майбутніх вчителів інформатики 24. Дівчат-програмістів було рівно стільки, скільки хлопців-інформатиків. Скільки студентів було на виставці?

259. Скільки різних чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3?

260. Скільки існує телефонних номерів, які складаються з п’яти цифр? (Допускається повторення цифр у номері.)

261. Скількома способами можна оббити 6 різних стільців, якщо є 12 видів оббивки?

262. Скільки трицифрових чисел можна записати дев’ятьма цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо цифри в записі числа можуть повторюватись?

263. Скільки трицифрових чисел можна записати п’ятьма цифрами 0, 1, 2, 3, 4, якщо цифри в записі числа можуть повторюватись?

264. Скільки різних чисел можна скласти в двійковій системі числення, використовуючи: а) 8 символів; б) 16 символів?

265. Чи достатньо 7 цифр для надання ідентифікаційного коду кожному громадянину, якщо кількість населення країни становить 20 мільйонів?

266.° Для замикання сейфів використовують секретні замки, які відкриваються лише тоді, коли набрано вірний код. Цей код набирають за допомогою одного або декількох дисків, на які нанесені букви (або цифри). Нехай на диск нанесено 12 букв, а код складається з 5 букв. Скільки невдалих спроб може бути зроблено людиною, яка не знає цього коду?

267.° Скільки існує дев’ятизначних чисел, що починаються з трьох однакових цифр, які далі в записі числа не зустрічаються?

268.° Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 4, 5, 6, в записі яких цифра 5 зустрічається не більше одного разу?

269.° Скільки існує семицифрових чисел, в яких перша цифра співпадає з останньою, а друга – з передостанньою?

270.° Скільки чисел, менших за тисячу, можна написати за допомогою цифр 9, 8, 0?

271. Скількома способами можна розсадити 4 учнів на 25 місцях?

272. Скількома способами можна позначити трикутник, відмічаючи його вершини великими літерами латинського алфавіту?

273. В батька є 5 різних подарунків, які він дає своїм восьми синам так, що кожен отримує або один подарунок, або нічого. Скількома способами це можна зробити?

274. В кімнаті студентського гуртожитку живуть троє студентів. В них є 4 чашки, 5 блюдечок і 6 чайних ложок (всі чашки, блюдці і ложки відрізняються один від одного). Скількома способами вони можуть накрити на стіл для чаювання (кожен отримує одну чашку, одне блюдце і одну ложку)?

275.° Учневі треба здати 4 екзамени на протязі 8 днів. Скількома способами можна скласти графік здачі? Те ж саме запитання, якщо відомо, що останній екзамен повинен складатись на восьмий день.

276.° Скільки словників потрібно видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади із будь-якої з п’яти мов: української, англійської, французької, німецької, італійської – на будь-яку іншу з цих п’яти мов? На скільки більше словників доведеться видати, якщо кількість різних мов дорівнює 10?

277.° Скількома способами можна утворити триколірний прапор, що складається з горизонтальних смуг, якщо є матерія 5 різних кольорів? Те ж саме запитання, якщо одна зі смуг повинна бути жовтою.

278.° В змаганні з гімнастики беруть участь 10 чоловік. Троє суддів повинні незалежно один від одного перенумерувати їх в порядку, який відображає їх успіхи у змаганні на думку суддів. Переможцем вважається той, кого назвуть першим хоча б двоє суддів. В скількох випадках переможець змагання буде визначений?

279.* На літню екзаменаційну сесію відводиться 21 календарний день (допускається здача екзамену у вихідний день). Потрібно так спланувати розклад чотирьох екзаменів, щоб між ними був інтервал не менше трьох днів. Скількома способами це можна зробити?

280. Скількома способами 10 осіб можуть вишикуватись в одну шеренгу?

281. Серед перестановок цифр числа 37849 скільки буде таких, що починаються цифрою 3? Числом 37? Числом 378?

282. Скільки існує перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в яких цифра 3 займає третє місце, а цифра 5 – п’яте?

283.° На зборах повинні виступити п’ятеро осіб: *А, Б, В, Г, Д*. Скількома способами їх можна розташувати в списку ораторів, якщо *Б* не може виступати до того часу, поки не виступить *А*?

284.° На зборах повинні виступити п’ятеро осіб: *А, Б, В, Г, Д*. Скількома способами їх можна розташувати в списку ораторів, якщо *А* повинен виступати безпосередньо перед *Б*?

285.° Скількома способами можна посадити за круглий стіл 5 чоловіків і 5 жінок так, щоб жодні дві особи однієї статі не сиділи поруч?

286.° Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну?

287.° На полиці потрібно розкласти три п’ятитомні збірники творів так, щоб всі томи кожного із збірників творів стояли поруч, хоч і не обов’язково в порядку слідування номерів томів. Скількома способами це можна зробити?

288.° Скількома способами можна переставити букви слова «логарифм» так, щоб на другому, четвертому і шостому місцях стояли приголосні букви?

289.° В купе залізничного вагону є два протилежних дивани по 5 місць в кожному. З 10 пасажирів четверо хочуть сидіти за рухом поїзда, троє – проти руху, решті трьом байдуже, як сидіти. Скількома способами можуть розміститися пасажири?

290.° Скільки існує перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в яких цифра 1 стоїть безпосередньо після цифри 0?

291.° Скільки існує перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в яких цифра 0 займає одне з перших трьох місць, а цифра 1 – одне з останніх чотирьох місць?

292.° Скільки існує перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в яких цифра 0 займає одне з перших п'яти місць, а цифра 1 – одне з перших трьох місць?

293.° Скільки існує перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в яких між цифрами 0 і 1 стоїть рівно три цифри?

294.° Скільки існує перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в яких цифра 0 розміщена лівіше від цифри 1?

295.° Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ..., 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

296.° Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ..., n\}$ так, щоб числа 1, 2, 3 стояли поруч і в порядку зростання?

297.° Скількома способами можна розсадити за п'ятнадцятьма партами 15 хлопчиків і 15 дівчаток так, щоб за кожною партою хлопчик сидів зліва, а дівчинка – справа?

298.* Скількома способами можна розсадити за п'ятнадцятьма партами 15 хлопчиків і 15 дівчаток так, щоб кожний хлопчик сидів за одною партою з дівчинкою?

299.* Скільки існує перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в яких цифра 1 розміщена між цифрами 0 і 2?

300.* Скільки існує перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в яких цифра 0 розміщена лівіше цифр 1, 2, 3, а цифра 1 – лівіше цифри 2?

301.* Скільки можна зробити перестановок з n елементів, у яких дані два елементи не стоять поруч?

302.* Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ..., 6n\}$ так, щоб кожне число, кратне 2, і кожне число, кратне 3, мало номер, кратний 2 і 3?

303. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова «мама»? Напишіть всі ці слова.

304. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви в слові «комбінаторика»? В слові «парабола»? В слові «Міссісіпі»? В слові «прапороносці»?

305. Скільки слів можна утворити з 12 букв: 4 букв *а*, 4 букв *б*, двох букв *в*, двох букв *г*?

306. Визначити число перестановок букв в слові «ракета». Скільки перестановок можна зробити з букв цього слова, щоб перестановки починались а) з букви «р»; б) з букви «р» і закінчувались складом «та»?

307. Скільки сигналів можна скласти, змінюючи порядок семи прапорців: одного червоного, трьох синіх і трьох білих?

308. Скількома способами можна розкласти білі фігури (2 коня, 2 слона, 2 тури, ферзя і короля) на першій лінії шахової дошки?

309. В мами 10 яблук і 5 груш. Кожен день на протязі 15 днів підряд вона видає по одному фрукту. Скількома способами це може бути зроблено?

310. Скільки різних чисел можна дістати, переставляючи цифри в числах: а) 25575; б) 11182288?

311. Скількома способами можна поділити $m + n + s$ предметів на три групи так, щоб в одній було m, в другій n, а в третій s предметів?

312.° Скількома способами можна поселити 6 студентів у 3-х кімнатах: одномісній, двомісній, тримісній?

313.° Скількома способами можна поділити $3n$ різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа одержала n предметів?

314.° Скільки слів з п’яти букв можна утворити з букв *а*, *в*, *с*, якщо відомо, що буква *а* зустрічається в слові не більше двох раз, буква *в* – не більше одного разу, буква *с* – не більше трьох раз?

315.° Нехай є проекти трьох типів. Треба визначити, скільки існує різних планів забудови вулиці 10 будинками, коли відомо, що мають бути три будинки I типу, п’ять будинків II типу і два будинки III типу?

316. На кафедрі математики працює 9 викладачів. Скількома способами можна скласти комісію з трьох чоловік для прийому заборгованостей?

317. Зі складу конференції, на якій присутні 52 людини, потрібно вибрати делегацію, яка складається з 5 чоловік. Скількома способами можна це зробити?

318. В кімнаті n лампочок. Скільки існує різних способів освітлення кімнати, при яких горить рівно k лампочок?

319.° У однієї людини є 7 книг з математики, а у іншої – 9 книг. Скількома способами вони можуть обміняти один з одним по дві книги?

320. У групі 30 студентів. Кожен потиснув руку всім іншим. Скільки зроблено рукостискань?

321.° Танцювальний гурток відвідують 12 юнаків і 15 дівчат. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари для танцю?

322.° В розіграші першості країни з футболу у вищій лізі бере участь 16 команд. Команди, які займуть перше, друге і третє місця, нагороджуються відповідно золотою, срібною і бронзовою медалями, а команди, що зайняли останні 2 місця, залишають вищу лігу. Скількома способами визначаються ці команди?

323. Скількома способами можна утворити з групи, що складається з 15 чоловіків і 9 жінок, комісію, в яку входило б 4 чоловіки і 3 жінки?

324. Скільки утвориться трикутників, вершини яких співпадають з вершинами дванадцятикутника, якщо в ньому провести всі можливі діагоналі?

325.° З колоди у 52 карти вибираються 10 карт. У скількох випадках серед них виявляться всі 4 тузи?

326.° В Англії прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо їй дають не більше трьох імен, а загальне число імен дорівнює 300?

327.° Скільки існує найкоротших маршрутів в лабіринті, що має коридори на зразок ліній зошита в клітинку, від точки $A(0, 0)$ до точки $B(10, 10)$?

328.° Скількома способами можна вибрати з повної колоди карт по дві карти кожної масті при умові, що серед витягнутих карт немає жодної пари однакових, тобто двох королів, двох десяток і т.д.?

329.° П'ятеро дівчат і троє хлопців грають у гру. Скількома способами вони можуть розбитися на дві команди по чотири чоловіка в кожній, якщо в кожній команді повинно бути хоча б по одному хлопцю?

330.° З групи, яка складається з 7 чоловіків і 4 жінок, потрібно вибрати 6 осіб так, щоб серед них було не менше 2 жінок. Скількома способами це можна зробити?

331. Скількома способами при грі в «Спортлото» можна вибрати 5 номерів із 36?

332.° У скількох випадках при грі в «Спортлото» (угадування 5 номерів із 36) будуть правильно вибрані:

а) рівно 3 номери;
б) рівно 4 номери;
в) рівно 5 номерів;
г) не менш як 3 номери.

333.° Для преміювання трьох студентів купили 12 різних книжок. Скільки існує можливих способів розподілу премій по 4 книжки?

334.° Відбувся шаховий турнір, в якому взяли участь кілька шахістів. Кожен зіграв з рештою по одній партії. Всього зіграно 45 партій. Скільки було шахістів?

335.° Два учасники шахового турніру вибули, зігравши тільки по три партії кожен (один з одним вони не грали). Всього зіграно 84 партії. Скільки було учасників спочатку, якщо вони зіграли один з одним тільки по одній партії?

336.° Зі спортивного клубу, що нараховує 30 членів, потрібно утворити команду з 4 чоловік для участі в бігу на 1000 *м*. Скількома способами це можна зробити? Скількома способами можна скласти команду з 4 чоловік для участі в естафеті 100 + 200 + 400 + 800?

337.° Компанія з семи хлопців і десяти дівчат танцює. Якщо в якомусь танці беруть участь всі хлопці, то скільки є варіантів участі дівчат в цьому танці? Скільки є варіантів, якщо враховується лише те, які дівчата залишились незапрошеними? Розв'язати ту ж саму задачу, якщо відносно двох дівчат можна з впевненістю сказати, що вони будуть запрошені на танець?

338.* Скільки діагоналей має опуклий п'ятикутник, семикутник, n-кутник?

339.* Для премій на математичній олімпіаді виділено 3 екземпляри однієї книги, два екземпляри другої і один екземпляр третьої книги. Скількома способами можуть бути вручені премії, якщо в олімпіаді брало участь 20 чоловік і нікому не дають двох книг відразу? Те ж запитання, якщо нікому не дають двох екземплярів однієї і тієї ж книги, але можуть бути вручені дві або три різні книги.

340.* В бібліотеці є підручники з фізики трьох різних авторів, підручники з хімії двох різних авторів і підручники з математики п'яти різних авторів. Яким є найбільше число студентів, котрі взяли не менше, ніж по одній книзі кожного із трьох видів, при умові, що жоден студент не взяв всі книги, однакові з іншим студентом?

341.* Скількома способами можна утворити комісію у складі 3-х осіб, вибираючи їх з 6 подружніх пар так, щоб в комісію не входили члени однієї сім'ї?

342.* В опуклому n-кутнику проведені всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділиться при цьому многокутник?

343.* В скількох шестизначних числах є 3 парні і 3 непарні цифри?

344.* Міжнародна комісія складається з 9 осіб. Матеріали комісії зберігаються в сейфі. Скільки замків повинен мати сейф, скільки ключів до них треба виготовити і як їх розподілити серед членів комісії, щоб доступ до сейфа був можливий тоді і тільки тоді, коли збереться не менше 6 членів комісії? Розглянути задачу також у випадку, коли комісія складається з n осіб, а сейф можна відкрити при наявності m членів комісії.

345. Випишіть всі комбінації з трьох елементів a, $в$, c по 3 з повтореннями.

346. Скількома способами можна скласти букет з 7 квіток, якщо є 9 сортів квітів?

347. Нехай є монети вартістю 1, 2 і 5 коп. Скільки існує різних комбінацій 30 монет (наприклад, набори: 13 монет по 1 коп., 7 – по 2 коп., 10 – по 5 коп.)?

348. В поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок? Скількома способами можна купити 8 листівок? Скількома способами можна купити 8 різних листівок?

349.° Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжина кожного ребра яких є цілим числом від 1 до 10?

350.* Скільки існує трикутників, довжини сторін яких набувають одне з наступних значень: 2 *см*, 4 *см*, 5 *см*, 6 *см*, 7 *см*?

351.* Скільки цілих невід’ємних розв’язків має рівняння:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n?$$

352.* Скільки цілих додатних розв’язків має рівняння:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n?$$

353.* Скільки цілих невід’ємних розв’язків має нерівність:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \le n?$$

354. У студентській групі, яка складається з 25 осіб, при виборі старости за висунену кандидатуру проголосували 12 чоловік, проти – 10, утрималися – 3. Скількома способами могло бути проведене таке голосування?

355. При грі в доміно 4 гравці ділять порівну 28 костей. Скількома способами вони можуть це зробити?

356. У грі в преферанс 32 карти діляться між трьома гравцями по 10 карт кожному, а дві карти кладуться в прикуп. Підрахувати кількість можливих роздач.

357.° Скількома способами можна розподілити 30 робітників на 3 бригади по 10 чоловік в кожній бригаді (бригади не пронумеровані)?

358.° Скількома способами можна розділити колоду з 36 карт пополам так, щоб в кожній пачці було по 2 тузи?

359.* Скількома способами можна роздати 52 карти чотирьом гравцям так, щоб кожен отримав по три карти трьох мастей і чотири карти четвертої масті?

360. Скількома способами можна покласти 10 книг на три полиці?

361. Скількома способами можна розділити 40 яблук між трьома дітьми, якщо всі яблука вважаються однаковими? Те ж запитання, якщо кожна дитина повинна отримати не менше 5 яблук.

362. Поїзд, в якому знаходиться k пасажирів, повинен зробити p зупинок. Скількома способами можуть розподілитися пасажири між цими зупинками? Те ж запитання, якщо враховується лише кількість пасажирів, що вийшли на даній зупинці.

363. 30 чоловік голосують по 5 пропозиціях. Скількома способами можуть розподілитися голоси, якщо кожен голосує лише за одну пропозицію і враховується лише кількість голосів, поданих за кожну пропозицію?

364.° Скількома способами можна розкласти 20 однакових кульок по 6 різних ящиках так, щоб в кожному ящику виявилось не менше двох кульок? Те ж запитання, якщо вимагається, щоб хоча б в одному ящику виявилось не більше 2 кульок.

365.° Скількома способами можна розкласти 15 однакових кульок по 5 різних ящиках так, щоб виявилось не більше двох порожніх ящиків?

366.° Скількома способами можна розділити 8 яблук, 10 груш і 7 слив між 4 хлопчиками? Те ж запитання, якщо кожен повинен отримати хоча б по одному фрукту кожного виду.

367.° Скількома способами можна розділити 10 білих грибів, 15 лисичок і 8 рижиків між 5 дітьми? Те ж запитання, якщо кожен повинен отримати хоча б один гриб кожного сорту.

368.* Скількома способами можна розділити 8 цукерок одного сорту, 10 – другого сорту і 7 – третього сорту між 4 дітьми так, щоб кожен отримав хоча б одну цукерку?

369.* Є 6 різних ящиків, 4 однакові білі кульки і 3 однакові чорні кульки. Скількома способами можна розкласти всі кульки по ящиках так, щоб в кожному була хоча б одна кулька?

370.* Є 10 різних ящиків, 6 однакових білих кульок і 6 однакових чорних кульок. Скількома способами можна розкласти всі кульки по ящиках так, щоб в кожному була хоча б одна кулька?

371. Скількома способами можна розділити 8 різного виду тістечок між 5 людьми?

372. Скількома способами можна розкласти в дві кишені 5 монет різної вартості?

373. Перед початком навчального року відбувається розподіл 7 курсів між 5 членами кафедри, кожен з яких може читати будь-який з цих курсів. Скількома способами можна розподілити навантаження, якщо кожен викладач повинен прочитати хоча б один курс?

374. Скількома способами можна вислати 8 різних фотографій в 5 різних конвертах, якщо висилати порожні конверти не можна?

375. Скількома способами можна розподілити 12 різних фруктів в 5 пакунків так, щоб жоден з них не був порожнім?

376. Скількома способами можна перевезти 10 різних ящиків, використовуючи 3 автомобілі?

3.2. КОМБІНАТОРНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

3.2.1. Теоретичні відомості

В елементарній математиці добре відомі формули скороченого множення:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ці формули можна записати і так:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3.$$

Справедлива рівність

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

яку називають *біномом Ньютона*, а коефіцієнти в цьому розкладі – *біноміальними коефіцієнтами*.

Досить часто використовують такі властивості біноміальних коефіцієнтів:

а) $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$;

б) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

в) $C_0^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

г) $C_0^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

д) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^n$;

е) $C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \ldots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r$.

Наступна теорема є узагальненням біному Ньютона і дає відповідь на те, як розкривати дужки при обчисленні виразу виду $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n$.

Поліноміальна теорема.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \ge 0, \ldots, r_k \ge 0 \\ r_1 + \ldots + r_k = n}} P_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)\, a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}.$$

Метод рекурентних співвідношень дозволяє знаходити значення деякої функції для заданої величини аргументу через значення менших аргументів. Щодо комбінаторики, цей метод дає можливість знаходити розв'язок комбінаторної задачі для n предметів через розв'язок аналогічної задачі з меншим числом предметів за допомогою деякого співвідношення, яке називається *рекурентним співвідношенням.*

Наприклад, для розміщення має місце рекурентна формула $A_n^k = A_{n-1}^k + k\,A_{n-1}^{k-1}$, де $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$, $\forall n$; $A_n^k = 0$ при $n < k$.

Подібне рекурентне співвідношення $S(m, n) = S(m-1, n-1) + nS(m-1, n)$, де $S(m, 0) = 0$ при $m \geq 0$; $S(m, m) = S(m, 1) = 1$; $S(m, n) = 0$ при $n > m$, можна використовувати для обчислення чисел Стірлінга другого роду. Наприклад,

$$S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2(S(2, 1) + \\ + 2S(2, 2)) = 1 + 2(1 + + 2 \cdot 1) = 7.$$

Це означає, що число способів розбиття множини $\{1, 2, 3, 4\}$ на два класи дорівнює сім. Дійсно, такими розбиттями є: $\{1\}$ і $\{2, 3, 4\}$; $\{2\}$ і $\{1, 3, 4\}$; $\{3\}$ і $\{1, 2, 4\}$; $\{4\}$ і $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2\}$ і $\{3, 4\}$; $\{1, 3\}$ і $\{2, 4\}$; $\{1, 4\}$ і $\{2, 3\}$.

Метод твірних функцій узагальнює інші методи комбінаторного аналізу.

Твірною (*продуктивною*) *функцією* (*генератрисою*) послідовності $\{a_n\} = a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ... називається сума степеневого ряду $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, а *експотенціальною твірною функцією* – сума $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$.

Якщо два степеневі ряди мають однакову суму при всіх x з області збіжності, то коефіцієнти при відповідних степенях цих рядів співпадають. Їх можна знайти за формулою $a_n = A^{(k)}(0)/k!$, де $A^{(k)}(x)$ – k-та похідна функції $A(x)$.

Згорткою (*композицією*) *двох послідовностей* $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ називається послідовність $\{c_n\}$, загальний член якої має вигляд $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} +...+ a_nb_0$.

Теорема. Твірна функція згортки двох послідовностей дорівнює добутку твірних функцій цих послідовностей.

3.2.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти вільний член розкладу $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^8$.

Розв'язання. Якщо шуканий член розкладу, згідно формули біному Ньютона,

$$T_{m+1}=C_8^m\left(\sqrt{x}\right)^{8-m}\left(\frac{-3}{\sqrt{x}}\right)^m=(-1)^m C_8^m\cdot 3^m\left(\sqrt{x}\right)^{8-m}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^m,$$

то за умовою

$$\left(\sqrt{x}\right)^{8-m}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^m=x^0 \text{ або } x^{\frac{8-m}{2}}\cdot x^{-\frac{m}{2}}=x^0.$$

Тоді

$$\frac{1}{2}(8-m)-\frac{1}{2}m=0.$$

Звідси $m = 4$.

Таким чином, шуканий член розкладу $T_5=C_8^4\cdot 3^4=5670$.

Приклад 2. В розкладі

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$$

перші три коефіцієнти утворюють арифметичну прогресію. Знайти всі раціональні члени розкладу, не виписуючи ірраціональних.

Розв'язання. Перші три члени розкладу мають вигляд: $\left(\sqrt{x}\right)^n$; $n\left(\sqrt{x}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$; $\frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{2^2\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}$. Тому коефіцієнтами при невідомих будуть числа: 1, $\frac{n}{2}$, $\frac{n(n-1)}{8}$. Ці коефіцієнти повинні утворювати арифметичну прогресію, тобто $\frac{n}{2}-1=\frac{n(n-1)}{8}-\frac{n}{2}$. Розв'язуючи це рівняння відносно n, отримаємо $n = 1$ або $n = 8$.

При $n = 1$ розклад не має раціональних членів.

При $n = 8$ довільний $(k + 1)$-й член має вигляд:

$$C_8^k\left(\sqrt{x}\right)^{8-k}\frac{1}{2^k\left(\sqrt[4]{x}\right)^k}=C_8^k\cdot\frac{1}{2^k}\cdot x^{\frac{8-k}{2}-\frac{k}{4}},$$

де $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Потрібно знайти раціональні члени. Щоб член був раціональним, необхідно і досить, щоб $\frac{8-k}{2}-\frac{k}{4}$, що дорівнює $\frac{16-3k}{4}$, було цілим числом. Отже, $16-3k$ повинно ділитись на 4. А це буде тоді, коли k ділитиметься на 4. Таких значень k три: $k = 0, 4, 8$. Їм відповідають члени $T_1 = x^4$, $T_5=\frac{35}{8}x$, $T_9=\frac{1}{256x^2}$.

Приклад 3. Знайти коефіцієнт при xy^3z у виразі $(x + y + z)^5$.

Розв'язання. Згідно з поліноміальною теоремою шуканий коефіцієнт обчислюється за формулою: $P_5(1,3,1)=\frac{5!}{1!\cdot 3!\cdot 1!}=20$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\frac{A_x^{10}+A_x^9}{A_x^8}=9$.

Розв'язання. *1-й спосіб*. Оскільки вираз A_n^m має зміст лише при $n > m$, то з умови рівняння випливає, що $x > 10$. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-9)+x(x-1)(x-2)\ldots(x-8)}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-7)}=9.$$

Скоротивши на $x(x-1)(x-2)\ldots(x-7)$, отримаємо рівняння $x^2 - 16x + 55 = 0$, звідки $x_1 = 11$, $x_2 = 5$. Як зауважено вище, $x > 10$. Отже, рівнянню $\frac{A_x^{10}+A_x^9}{A_x^8}=9$ задовольняє лише розв'язок $x = 11$.

2-й спосіб. Зручно скористатись рекурентною формулою

$$A_n^k=A_n^{k-1}\left[n-(k-1)\right]:$$

$$\frac{A_x^9(x-9)+A_x^9}{A_x^8}=9;\quad \frac{A_x^8(x-8)(x-9+1)}{A_x^8}=9;\quad (x-8)^2=9,$$

звідки $x-8=\pm 3$, тобто $x_1 = 11$; $x_2 = 5$.

Відповідь. $x = 11$.

Приклад 5. Нехай твірна функція послідовності $\{a_n\}$ дорівнює $A(x)$. Знайти твірну функцію $B(x)$ послідовності

$$\{b_n\} = \{a_0, a_2, a_4, ..., a_{2n} ...\}.$$

Розв'язання. Оскільки $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...,$

$$A(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - ... +(-1)^n a_nx^n + ...,$$

то додавши ці рівності, одержимо

$$A(x) + A(-x) = 2(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ... + a_{2n}x^{2n} + ...) = 2B(x).$$

Отже, $B(x) = (A(x) + A(-x))/2$.

3.2.3. Задачі для самостійного опрацювання

377. Знайти розклад біномів:

а) $(x + 1)^6$;

б) $(x - 2)^8$;

в) $(m^2 + 1)^7$;

г) $(x^2 - 2y)^7$;

д) $\left(\frac{1}{2}a + 2b^2\right)^5$;

е) $\left(\sqrt{x} + y\right)^5$;

є) $\left(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}\right)^7$;

ж) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^5$;

з) $\left(a - \sqrt{1+a}\right)^6$;

и) $\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)^4 + \left(1-\sqrt{x^2-1}\right)^4$.

378. Знайти:

а) восьмий член розкладу біному $(x + 2)^{12}$;

б) четвертий член розкладу біному $\left(x + \sqrt{2}\right)^9$;

в) середній член розкладу біному $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$;

г) два середніх члени в розкладі біному $\left(m^{\frac{1}{3}} - 2n^{\frac{3}{2}}\right)^{17}$.

379.° Знайти:

а) член розкладу $(x + 1)^{12}$, який містить x^6;

б) член розкладу $\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)^{15}$, який містить x^5;

в) член розкладу $\left(m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{4}{3}}\right)^{12}$, який містить $m^{\frac{32}{3}}$;

г) член розкладу $\left(x^{\frac{1}{3}}y^{-1}+x^{-\frac{1}{4}}y\right)^{18}$, який містить x^{-1}.

380.° Знайти:

а) вільний член розкладу $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{9}$;

б) вільний член розкладу $\left(z^{5}+z^{-20}\right)^{1000}$.

381.° Знайти показник степеня біному, якщо:

а) в розкладі $(1+x)^{n}$ коефіцієнт п'ятого члену дорівнює коефіцієнту дев'ятого члену;

б) сума коефіцієнтів першого, другого і третього членів розкладу $\left(x^{-1}+x^{2}\right)^{n}$ дорівнює 46;

в) в розкладі $\left(ax^{-\frac{1}{2}}+xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{n}$ відношення коефіцієнту третього члену до коефіцієнта другого члена дорівнює $\frac{11}{2}$;

г) в розкладі $\left(9x-\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}\right)^{n}$ біноміальний коефіцієнт третього члену дорівнює 105.

382.° Знайти раціональні члени в розкладі біномів, не виписуючи ірраціональних:

а) $\left(3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{2}}\right)^{5}$;

в) $\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$.

б) $\left(\sqrt[4]{x^{3}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$;

383.° Скільки раціональних членів містить розклад $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

384.° Знайти середній член розкладу $\left(\frac{\sqrt[12]{x}}{a}-ax^{-\frac{3}{4}}\right)^m$, знаючи, що коефіцієнт третього члену розкладу дорівнює 66.

385.* В розкладі біному $\left(a^2\sqrt[9]{a^4}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^m$ знайти той член, який містить однакові степені a і b, якщо відомо, що коефіцієнти четвертого і дванадцятого членів розкладу рівні між собою.

386.* В розкладі $\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x^4}\right)^n$ біноміальний коефіцієнт третього члену на 44 одиниці більший від коефіцієнту другого. Знайти вільний член.

387.° Знайти коефіцієнт при x^4 у виразі $x(1-x)^4+$ $+x^2(1+2x)^8++x^3(1+3x)^{12}$, не виписуючи зайвих членів.

388.° Знайти коефіцієнт при x^3 у виразі $(1+x)^3+(1+x)^4+$ $+(1++x)^5+\ldots+(1+x)^{15}$.

389.* В розкладі біному $(1+a)^n$ п'ятий, шостий і сьомий біноміальні коефіцієнти утворюють арифметичну прогресію, знайти n.

390.* В розкладі біному $\left(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^n$ сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 128. Знайти член, який містить a^5.

391.* Деякий член розкладу $(a+5)^n$ має коефіцієнт, який дорівнює 853125, його біноміальний коефіцієнт дорівнює 1365. Знайти показник біному n і номер p цього члену.

392.° При яких значеннях x третій член розкладу $\left(x^{\lg x}+x\right)^5$ дорівнює 100?

393.* Визначити, при якому значенні x шостий член розкладу біному $\left(\sqrt{2^{\lg\left(10-3^x\right)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^m$ дорівнює 21, якщо відомо, що біноміальні коефіцієнти другого, третього і четвертого членів розкладу утворюють відповідно перший, третій і п’ятий члени арифметичної прогресії.

394.* Знайти найбільший член розкладу $\left(1+\sqrt{2}\right)^{50}$.

395.* Знайти x, y і z, якщо відомо, що другий, третій і четвертий члени розкладу $(x+2y)^{z}$ дорівнюють 240, 720 і 1080 відповідно.

396.* Довести, що сума коефіцієнтів в розкладі біному $(5a-4b)^{n}$ не залежить від n і при будь-яких значеннях n дорівнює одиниці.

397.° Довести, що коефіцієнт члену, який містить x^n в розкладі $(1+x)^{2n}$, вдвічі більший за відповідний коефіцієнт в розкладі $(1+x)^{2n-1}$.

398.* Визначити, при якому значенні x різниця між збільшеним в 9 разів третім членом розкладу бінома $\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}\cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^{m}$ і п’ятим членом того ж розкладу дорівнює 240, якщо відомо, що різниця між логарифмом потроєного біноміального коефіцієнта четвертого члена розкладу і логарифмом біноміального коефіцієнта другого члена дорівнює одиниці.

399. Користуючись поліноміальною теоремою, знайти розклади наступних поліномів:

а) $\left(x^2+x+1\right)^5$;

б) $(x-y-z)^3$;

в) $(1-x+xy)^4$.

400.° В розкладі $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^{6}$ знайти вільний член, не виписуючи решти членів.

401.° Знайти коефіцієнт при x^{k} в розкладі поліномів:

а) $\left(1-x+x^2\right)^5$, $k=7$;

б) $\left(5x^2-x-2\right)^7$, $k=3$;

в) $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)^6$, $k=2$;

г) $\left(x^2-x+1\right)^8$, $k=4$.

402. Чому дорівнює коефіцієнт при $x^2y^3z^2$ у виразі $(x+y+z)^7$?

403. Чому дорівнює коефіцієнт при $x_1^3x_2^4x_3^3$ у виразі $(x_1+x_2+x_3)^{10}$?

404.° Знайти:

а) $\dfrac{A_n^3+A_n^5}{A_n^4}$;

б) $\dfrac{A_n^{n-1}-P_n}{C_m^{m-2}}$;

в) $\dfrac{A_{n-1}^{k-1}P_{n-k}}{P_{n-1}}$;

г) $\dfrac{C_{m+n}^nP_n-A_{m+n}^n}{P_n}$;

д) $\dfrac{A_{m+3}^m}{(m+2)A_{m+1}^{m-2}}$;

е) $\dfrac{A_{m+2}^2P_m-2P_{m+1}}{P_{m+1}}$.

405.° Обчислити:

а) $C_8^8+C_9^8+C_{10}^8+C_{11}^8$;

б) C_m^6, якщо відомо, що $C_{2m}^6=C_{2m}^{m+2}$;

в) що більше $A_{10}^nP_{10-n}$ чи P_9 і в скільки разів?

406. Перевірити справедливість рівностей:

а) $\dfrac{A_m^6+A_m^5}{A_m^4}=(m-4)^2$;

б) $C_m^n+C_m^{n-1}=C_{m+1}^n$;

в) $A_m^{m-3}P_3=P_m$.

407. Розв'язати рівняння:

а) $A_x^2=12$;

б) $P_x=24$;

в) $A_{x+2}^3=42x$;

г) $C_x^3=2x$;

д) $C_{x+2}^4=x^2-1$;

е) $30P_x=P_{x+2}$;

є) $C_x^{x-2}=C_x^3$;

ж) $5C_x^3-C_{x+2}^4=0$;

з) $C_x^7-C_x^5=0$;

и) $C_x^{x-2}+2x=9$;

і) $C_{x-1}^{x-2}=x^2-13$;

ї) $A_7^x-xA_7^{x-1}=0$;

й) $P_{x-3}A_x^3=20P_{x-2}$;

к) $C_{x-1}^2+C_x^3=16$;

л) $P_{x+2}=182A_x^{11}P_{x-11}$;

м) $11C_x^3=24C_{x+1}^2$;

н) $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101$;

о) $C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^3$;

п) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$;

р) $5C_{x+1}^3 = 6C_x^4$;

с) $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$;

т) $A_n^x = xA_n^{x-2}$;

у) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$;

ф) $\dfrac{P_{x+6}}{A_{x+4}^{n+4} P_{x-n}} = 240$;

х) $\dfrac{A_{x+2}^{n+2} P_{x-n}}{P_{x-2}} = 360$.

408.° Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} A_x^2 = 272, \\ C_x^y = 136; \end{cases}$

б) $\begin{cases} A_x^y : A_{x+1}^y = \dfrac{2}{5}, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \dfrac{2}{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$

г) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} : A_{2x}^{y-3} = 8, \\ C_{2x}^{y-2} : C_{2x}^{y-3} = \dfrac{8}{3}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-2} = 12, \\ C_x^y : C_x^{y-2} = \dfrac{3}{14}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 9, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1\dfrac{2}{7}. \end{cases}$

409.° Знайти x і y, якщо:

а) $C_{x+2}^y : C_{x+2}^{y+1} : C_{x+2}^{y+2} = 0{,}6 : 1 : 1$;

б) $C_x^{y-1} : \left(C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}\right) : C_x^{y+1} = 3 : 5 : 5$;

в) $C_x^{y-1} : C_x^y : C_x^{y+1} = 2 : 3 : 4$;

г) $C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y : C_{x+1}^{y-1} = 5 : 5 : 3$.

410.° Скільки потрібно взяти елементів, щоб число розміщень з них по 4 було в 6 разів більше, ніж число розміщень з них по 2?

411.° Число розміщень з n елементів по 2 в 6 разів більше числа розміщень з $(n - 5)$ елементів по 2. Знайти n.

412.° Знайти число n елементів, якщо відомо, що C_n^2 складає 16,(6)% від C_{n+2}^4.

413. Знайти твірні функції $A(x)$ і $E(x)$ для послідовності

а) $a_n = a^n$;

б) $a_n = n$;

в) $a_n = n(n-1)$;

г) $a_n = n^2$.

414. Нехай $A(x)$ – твірна функція послідовності $\{a_n\}$. Знайти твірну функцію $B(x)$ послідовності $\{b_n\} = \{a_1, a_3, a_5, ..., a_{2n+1} ...\}$.

415. Нехай $A(x)$ і $B(x)$ – твірні функції послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ відповідно. Виразити $A(x)$ через $B(x)$, якщо

а) $a_n = b_n - b_{n-1}$;

б) $a_n = b_{n+1} + b_{n-1}$;

в) $a_n = b_{n+1} - b_n$;

г) $a_n = n \cdot b_n$;

д) $a_n = n^2 \cdot b_n$;

е) $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i$;

є) $a_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i$.

4. МЕТОДИ АНАЛІЗУ ПРОГРАМ НА ОСНОВІ ГРАФОВИХ МОДЕЛЕЙ

4.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

4.1.1. Теоретичні відомості

Багато задач прикладного характеру зводяться до розгляду сукупності об'єктів, властивості яких описуються зв'язками між ними. В таких випадках зручно дані об'єкти відображати точками, а зв'язки між ними – відрізками прямої чи кривої з кінцями в даних точках. При цьому довжини відрізків і розміщення точок можуть бути довільними.

Означення 1. Непорожня множина точок і множина відрізків, обидва кінці яких належать заданій множині точок, називається ***графом***.

Таке означення графа зручне з ілюстративної точки зору, але мало придатне для строгих математичних викладок. Тому розглядають дещо інший підхід.

Нехай V – деяка непорожня множина, яку ми назвемо *множиною вершин*, $V^{(2)}$ – множина всіх невпорядкованих двохелементних підмножин множини V.

Означення 2. Графом G називається пара множин (V, E), де E – довільна підмножина множини $V^{(2)}$. Множину E називають *множиною ребер* графа G.

Записом $|V|$ позначають кількість вершин графа, а записом $|E|$ – кількість ребер графа.

Як правило, ребра позначаються парами (u,v), де u і v – вершини з V (кінці ребра). У цьому випадку говорять, що ребро (u,v) з'єднує вершини u і v.

Кажуть, що вершини u і v *суміжні*, якщо $(u,v)\in E$, і *несуміжні* – в противному випадку. Вершина u і ребро e називаються *інцидентними*, якщо u є кінцем e, і *неінцидентними* – в противному випадку. Два ребра називаються *суміжними*, якщо вони мають спільну вершину.

Степенем $\rho(u)$ вершини u називається кількість інцидентних їй ребер.

Встановлено, що у будь-якому графі число вершин непарного степеня парне.

Вершина степеня 0 називається *ізольованою*, а вершина степеня 1 – *кінцевою* (*висячою*) вершиною. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, називається *кінцевим*.

Графи, які мають скінченне число вершин та ребер, називаються *скінченними*. Надалі мова йтиме лише про них, хоча деякі поняття та властивості мають місце для довільних графів.

Граф, який містить *кратні ребра*, називається *мультиграфом*.

Псевдограф – мультиграф, який має *петлі* (тобто ребра, що з'єднують вершину саму з собою).

Граф без петель та кратних ребер називають *простим* або *звичайним*.

Граф називається *повним*, якщо будь-які дві його вершини суміжні (тобто $E=V^{(2)}$). Повний граф з n вершинами позначається K_n.

Більш загальними, ніж повні, є регулярні графи. Граф називається *регулярним* або *однорідним*, якщо всі його вершини мають один і той же степінь. Якщо степінь кожної вершини дорівнює r, то граф називається регулярним графом степеня r. Регулярні графи степеня 3 називають також *кубічними графами*.

Граф, всі вершини якого ізольовані, називається *порожнім* або *нуль-графом*. Очевидно, що кожний порожній граф є регулярним графом степеня 0.

Граф називається *двочастковим*, якщо існує таке розбиття множини його вершин на два класи, при якому кінці кожного ребра належать до різних класів. Якщо в двочастковому графі будь-які дві вершини з різних класів суміжні, то такий граф називається *повним двочастковим графом*. Повний двочастковий граф, у якого один клас має m вершин, а другий – n вершин, позначається $K_{m,n}$. Повний двочастковий граф $K_{1,n}$ називається *зірковим графом*.

Інколи в прикладних задачах використовують так звані орієнтовані графи. *Орієнтованим графом* (*орграфом*) G називається пара множин (V,E), де $E \subseteq V \times V$. Інакше кажучи, граф є орієнтованим, якщо всі пари (u,v) впорядковані. Ребра орієнованого графа (орієнтовані ребра) прийнято зображати напрямленими відрізками (стрілками). Про орієнтоване ребро (u,v) кажуть, що воно виходить із вершини u та входить у вершину v, а вершини u і v називають відповідно *початком* та *кінцем* ребра (u,v).

Граф, що має як орієнтовані, так і неорієнтовані ребра, називається *змішаним*.

Кожне неорієнтоване ребро можна розглядати як пару протилежно напрямлених орієнтованих ребер (u,v) та (v,u). Цей підхід дає змогу означити граф через підмножину прямого добутку двох множин, тобто за допомогою бінарного відношення. Але такий підхід не завжди, наприклад, для мультиграфа, є вдалим.

Існує декілька способів задання графів. Як зазначено вище, графи зручно зображати за допомогою рисунка на площині, який називають ще *діаграмою* графа. Вершинам ставляться у відповідність точки площини, ребра зображаються відрізками, які з'єднують відповідні вершини тоді і тільки тоді, коли вони суміжні. Зрозуміло, що діаграма графа змінюватиме свій вигляд в залежності від вибору розміщення відповідних точок на площині.

Граф можна задати переліком елементів множин V і E (теоретико-множинний підхід).

Третій спосіб – задання графів за допомогою матриць. Причому існує декілька видів матриць.

Нехай $G=(V,E)$ – скінчений граф. Занумеруємо всі його вершини натуральними числами від 1 до n. Побудуємо квадратну матрицю розмірності $n \times n$, в якій елемент a_{ij} i-го рядка та j-го стовпця дорівнює 1, якщо вершини u_i та u_j суміжні, і дорівнює 0 у протилежному випадку. Одержану для графа G таким методом матрицю називають *матрицею суміжності* по вершинах або просто матрицею суміжності. Аналогічно можна побудувати матрицю суміжності по ребрах. Між матрицею суміжності і графом існує взаємно однозначна відповідність.

Матрицю можна побудувати іншим методом. Занумеруємо всі вершини графа G числами від 1 до n, а всі його ребра – числами від 1 до m і побудуємо матрицю розмірності $n \times m$, в якій елемент b_{ij} i-го рядка та j-го стовпця дорівнює 1, якщо вершина u_i інцидентна ребру e_j, і дорівнює 0 у протилежному випадку. Таку матрицю називають *матрицею інцидентності* графа G.

Запропонований підхід задання графа за допомогою матриці не може бути універсальним. Для окремих класів графів (мультиграфів, орієнтованих, змішаних) потрібно вносити деякі уточнення. Наприклад, для орієнтованого графа відповідні матриці визначаються таким чином:

Матрицею суміжності A орграфа G буде квадратна матриця, в якій

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \left(u_i, v_j\right) \in E, \\ 0 \ — \ \text{в потилежному випадку.} \end{cases}$$

Матриця суміжності орієнтованого графа несиметрична.

Матрицею інцидентності B орграфа G є матриця, в якій

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } u_i \text{ — початок дуги } e_j, \\ -1, & \text{якщо вершина } u_i \text{ — кінець дуги } e_j, \\ 0, & \text{якщо вершина } u_i \text{ і дуга } e_j \text{ не інцидентні.} \end{cases}$$

Як зазначалось вище, одному і тому ж графу можуть відповідати різні за виглядом діаграми. Тому, щоб розрізняти графи, вводять поняття про їх ізоморфізм.

Графи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називаються *ізоморфними*, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини вершин V_1 на множину вершин V_2, що ребро $(u, v) \in E_1$ тоді і тільки тоді, коли ребро $(\varphi(u),\varphi(v)) \in E_2$. Ізоморфні графи при дослідженні, як правило, не розрізняють.

Граф $G' = (V', E')$ називається *частиною* графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subset V$ і $E' \subset E$. Якщо $V' = V$, то частина графа називається *суграфом*. *Підграфом* графа $G = (V, E)$ називається частина графа з множиною вершин $V' \subset V$, ребрами якої є всі ребра з E, обидва кінці яких належать V'.

На практиці, щоб полегшити дослідження графа, часто вилучають з нього окремі елементи.

Операція вилучення вершини v з графа $G = (V, E)$ полягає у вилученні з множини V елемента *v*, а з множини *E* – всіх ребер, інцидентних *v*.

Операція вилучення ребра e з графа $G = (V, E)$ – це вилучення елемента *e* з множини *E*. При цьому всі вершини зберігаються.

Крім того, для графів можна означити операцію доповнення.

Доповненням графа $G = (V, E)$ називається граф з множиною вершин V, в якому дві вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не суміжні в графі G. Граф, ізоморфний своєму доповненню, називається *самодоповняльним*.

Очевидно, що доповнення повного графа є порожнім графом і, навпаки, доповнення порожнього графа є повним графом. Неважко довести, що доповнення регулярного графа є регулярним графом.

Існують й інші перетворення графів. Вони, наприклад, включають операції об’єднання, перетину, різниці графів тощо, які базуються на теоретико-множинному заданні графу.

4.1.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для графа, заданого матрицею суміжності

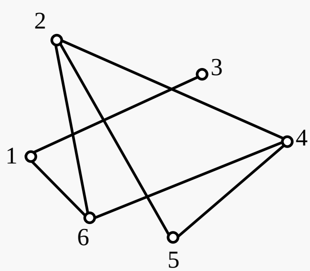
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а) записати множину ребер;
б) зобразити його графічно;
в) побудувати матрицю інцидентності;
г) побудувати доповнення до повного графа.

Розв'язання: Оскільки граф задано матрицею розмірності $6{\times}6$, яка симетрична відносно головної діагоналі, то він має шість вершин і є неорієнтованим.

а) множина ребер складається з невпорядкованих пар натуральних чисел, в яких на першому місці стоїть номер рядка, а на другому – стовпця, на перетині яких в матриці суміжності проставлено одиниці, причому розглядають лише числа над або під головною діагоналлю матриці. Отже, множина ребер $R = \{(1, 3), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6)\}$.

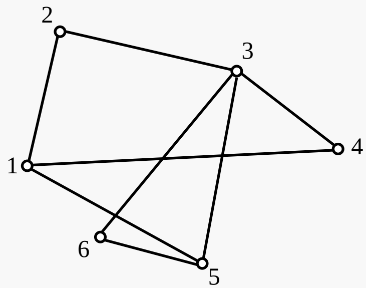
б) нанесемо на площину довільним чином шість пронумерованих вершин і з'єднаємо окремі з них неорієнтованими відрізками (ребрами) відповідно до пункту а). В результаті одержимо зображення:



в) пронумеруємо ребра графа, наприклад, в такому ж порядку, як вони розташовані в множині R, тобто (1, 3) – перше ребро, (1, 6) – друге і т.д. Поставимо у відповідність кожній вершині рядок, а ребру – стовпець матриці з таким же номером. Запишемо на перехресті i-го рядка та j-го стовпця одиницю, якщо i-та вершина та j-те ребро інцидентні, та нуль – в противному випадку. В результаті одержимо матрицю інцидентності графа:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

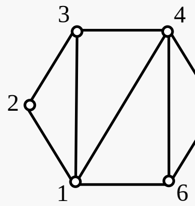
г) розташуємо вершини графа так само як і в пункті б). З'єднаємо неорієнтованими ребрами лише ті вершини, які не з'єднані в заданому графі. В результаті одержимо зображення доповнення до графа:



Приклад 2. Побудувати граф з шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 2, 2, 3, 3, 4, 4.

Розв'язання: Зручно за вершини графа вибрати вершини правильного шестикутника. Тоді сторони та діагоналі служитимуть ребрами графа.

Виберемо дві довільні вершини (наприклад, 1 та 4) і вважатимемо, що саме вони є вершинами найбільшого степеня. Проведемо від них по чотири ребра, наприклад, (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (4, 3), (4, 5), (4, 6). Одержимо зображення графа з шести вершин, в якого степінь вершин 3 та 6 дорівнює двом, а вершин 2 і 5 – одиниці. Якщо збільшити їх степені на одиницю, то задача буде розв'язана. Тому з'єднаємо довільні пари цих вершин між собою (наприклад 2 з 3 і 5 з 6). В результаті одержимо зображення графа:

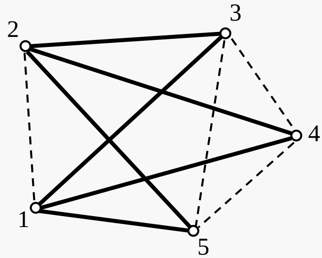


Приклад 3. Яку найменшу кількість ребер потрібно вилучити в повному графі з п'яти вершин, щоб він став повним двочастковим $K_{n,m}$ і чому дорівнює n та m при цьому?

Розв'язання: Оскільки $n + m = 5$, то можливі два випадки: $n = 1$ і $m = 4$ або $n = 2$ і $m = 3$. Вершини одного і того ж класу не є суміжними. Тому в першому випадку потрібно вилучити всі ребра, що з'єднують чотири вершини другого класу між собою (їх буде 6). Одержимо зірковий граф.

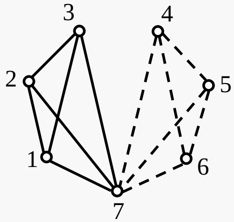
В другому випадку – одне ребро, яке з'єднує дві вершини першого класу та три ребра, що з'єднують три вершини другого класу (разом 4 ребра).

Отже, потрібно вилучити 4 ребра, щоб одержати повний двочастковий граф $K_{2,3}$. На рисунку вершини, які вилучаються, відмічено пунктиром:



Приклад 4. В повному графі з семи вершин знайти два кубічних підграфи, які не перетинаються по ребрах. Чи можуть вони не перетинатися і по вершинах?

Розв'язання: Кубічний граф складається щонайменше з чотирьох вершин. Виберемо в повному графі чотири вершини і ті ребра, обидва кінці яких інцидентні цим вершинам. Утворимо з них граф. Це і буде один з шуканих кубічних підграфів. До інших трьох вершин графа приєднаємо одну з вибраних вершин і утворимо граф з цих вершин та відповідних ребер. Одержимо інший шуканий підграф (його зображення подано пунктиром). Оскільки два побудовані графи мають лише одну спільну вершину, то спільного ребра бути не може. Отже, підграфи не перетинаються по ребрах.



Розбити множину семи вершин повного графа на дві взаємно неперерізні підмножини, які містять щонайменше по чотири вершини, не можливо. Отже, шукані підграфи не можуть не перетинатися по вершинах.

Приклад 5. 7 осіб проводять шаховий турнір в одне коло. У деякий момент виявилося, що рівно два учасники зіграли по дві партії. Довести, що тоді існує ще одна пара учасників, які зіграли однакову кількість партій (можливо, не зіграли жодної).

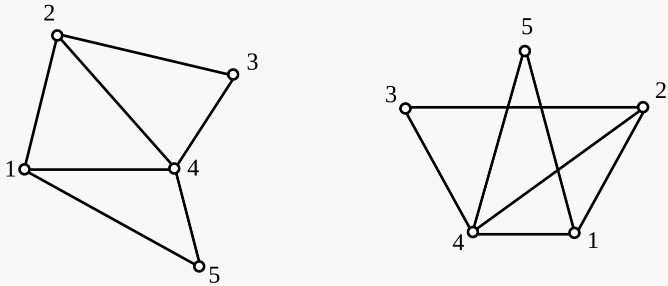
Розв'язання: Змоделюємо задачу за допомогою графа. Кожному учаснику турніру поставимо у відповідність вершину графа і з'єднаємо ребрами ті вершини, що відповідають шахістам, які зіграли партію між собою.

Рівно дві вершини графа матимуть степінь два. Якби решта учасників зіграли різну кількість партій, то степені інших вершин виражалися б наборами різних чисел від нуля до шести, причому двійка в набір входити не може.

Якщо в графі з семи вершин є ізольована вершина, то максимальний степінь будь-якої вершини не може перевищувати 5. Отже, при різній кількості зіграних партій степені виражалися б наборами: 0, 1, 3, 4, 5 або 1, 3, 4, 5, 6. В кожному з цих наборів є рівно три непарних числа, але граф не може мати непарну кількість вершин непарного степеня.

Одержане протиріччя доводить, що решта учасників не може зіграти різну кількість партій. Таким чином, існує ще хоча б одна пара учасників, які зіграли однакову кількість партій (можливо, не зіграли жодної).

Приклад 6. Довести, що графи, зображені на малюнках, ізоморфні.



Розв'язання: Необхідно в першу чергу порівняти число вершин і число ребер на обох малюнках. Якщо розбіжності не виявиться, то далі порівнюють число вершин з однаковими степенями. Якщо і воно співпадає, то намагаються встановити таку взаємно однозначну відповідність між вершинами з однаковими степенями, при якій дві вершини графа на одному малюнку з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли з'єднана ребром відповідна пара вершин графа на другому малюнку.

Якщо знайдено хоча б одну таку взаємно однозначну відповідність, то графи ізоморфні. Якщо ж таку відповідність встановити не можна, або виявлено розбіжності на попередніх етапах, то графи не ізоморфні.

В нашому випадку графи на обох малюнках мають по 5 вершин і 7 ребер. На кожному з них – по 2 вершини степеня 2, по дві вершини степеня 3 і по одній вершині степеня 4. Отже, розбіжностей в кількостях вершин, в тому числі з однаковими степенями, не виявлено.

Залишається тепер виявити існування ізоморфної (взаємно однозначної) відповідності між двома зображеннями. Розпочати побудову відображення краще з вершини степеня 4, оскільки вона єдина. Таким чином, вершина з номером 4 на лівому малюнку переходить у вершину 4 на правому малюнку і навпаки, вершина з номером 4 на правому малюнку переходить у вершину 4 на лівому.

На лівому малюнку є дві вершини степеня 3. Це означає, що може бути два випадки. В першому випадку вершина з номером 2 переходить у вершину з номером 2. Тоді вершина з номером 1 переходить у вершину з номером 1. В другому випадку вершина з номером 2 переходить у вершину з номером 1, тоді вершина з номером 1 переходить у вершину з номером 2.

Виберемо, наприклад, перший випадок. Залишається розглянути вершини з номерами 5 та 3. Знову може бути два випадки. Виберемо, наприклад, випадок, коли вершина з номером 3 переходить у вершину з номером 3, а вершина 5 – у вершину 5.

Тепер потрібно розглянути всі ребра лівого малюнка і перевірити існування відповідних ребер на правому. Наприклад, зліва ми маємо ребро (2, 4) і існує ребро (2, 4) справа. Легко переконатися, що така відповідність має місце для всіх ребер.

Отже, встановлена таким чином відповідність є ізоморфною, тобто графи ізоморфні.

Приклад 7. Перевірити, чи є ізоморфними графи G_1 і G_2, задані своїми матрицями суміжності A_1 і A_2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання: Якщо перестановка деяких рядків (стовпців) з одночасною перестановкою таких же стовпців (рядків) першої матриці приведе до співпадання з другою матрицею, то графи ізоморфні. Дійсно, переставляючи деякий рядок на інше місце, ми фактично вказуємо, в яку вершину переходить вибрана вершина, а співпадання матриць вказує на збереження ребер при відображенні.

Переставимо шостий рядок з другим (одночасно потрібно переставляти і шостий стовпець з другим, щоб зберегти структуру ребер). Одержимо матрицю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Щоб отримати другий рядок матриці A_2, потрібно в одержаній матриці переставити перший та четвертий стовпці (одночасно потрібно переставляти і відповідні рядки). Одержимо таку матрицю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перший рядок (стовпець) і другий стовпець (рядок) одержаної матриці більше переставляти не можна, адже це приведе до розбіжності з другим рядком матриці A_2. Але як би ми не переставляли інші рядки чи стовпці одержаної матриці, співпадання з матрицею A_2 не одержимо, бо в першому стовпці залишиться три одиниці, а перший стовпець матриці A_2 має їх чотири. Це означає, що графи не ізоморфні.

Задачу можна розв'язати і традиційним методом. Наведемо його.

Перевіряємо спочатку співпадання кількості вершин. Оскільки матриці мають однакові розмірності, то графи складаються з однакової кількості вершин.

Степені вершин визначають за числом одиниць у відповідних рядках матриці суміжності. Вершини графа G_1 мають степені 4, 2, 4, 3, 2, 1, а вершини графа G_2 мають степені 4, 1, 3, 4, 2, 2. Отже, кількість вершин з однаковими степенями співпадає.

Для встановлення взаємно однозначної відповідності φ розглядають вершини з однаковими степенями. Графи мають лише по одній вершині степеня один та три. Отже, 6 переходить в 2 і 4 в 3: $\varphi(6) = 2$, $\varphi(4) = 3$.

Графи мають по дві вершини степеня 4. Це означає, що може бути два випадки. В першому випадку вершина з номером 1 переходить у вершину з номером 1. Тоді вершина з номером 3 переходить у вершину з номером 4. В другому випадку навпаки, вершина з номером 1 переходить у вершину з номером 4, тоді вершина з номером 3 переходить у вершину з номером 1.

Графи мають і по дві вершини степеня 2. Це означає, що знову може бути два не залежних від попередніх випадки. В одному випадку вершина з номером 2 переходить у вершину з номером 5. Тоді вершина з номером 5 переходить у вершину з номером 6. В іншому випадку навпаки, вершина з номером 2 переходить у вершину з номером 6, тоді вершина з номером 5 переходить у вершину з номером 5.

Таким чином, можливі лише чотири випадки взаємно однозначної відповідності φ між вершинами:

а) $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 5$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 3$, $\varphi(5) = 6$, $\varphi(6) = 2$;

б) $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 6$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 3$, $\varphi(5) = 5$, $\varphi(6) = 2$;

в) $\varphi(1) = 4$, $\varphi(2) = 5$, $\varphi(3) = 1$, $\varphi(4) = 3$, $\varphi(5) = 6$, $\varphi(6) = 2$;

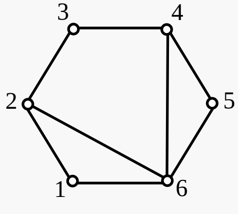
г) $\varphi(1) = 4$, $\varphi(2) = 6$, $\varphi(3) = 1$, $\varphi(4) = 3$, $\varphi(5) = 5$, $\varphi(6) = 2$.

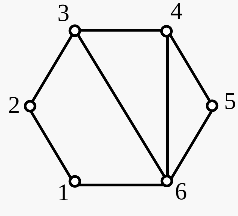
Перевіримо, чи хоча б в одному з цих випадків зберігається зв'язок між вершинами. Наприклад, граф G_1 має ребро (1, 2). При відображенні φ між вершинами в випадку а) одержуємо ребро (1, 5). Таке ребро дійсно існує в графі G_2. Аналогічно перевіряємо всі інші ребра.

Виявилося, що ребро (4, 6) повинно переходити в ребро (3, 2) в кожному із запропонованих варіантів а) – г). Але ребра (3, 2) в графі G_2 не існує. Це означає, що не існує ізоморфного відображення між графами G_1 і G_2 (графи не ізоморфні).

Приклад 8. Побудувати два попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 2, 2, 2, 3, 3, 4.

Розв'язання: Виберемо довільну пару чисел, наприклад, (3, 3) і побудуємо зображення двох графів, в одному з яких вершини вибраних степенів (три) суміжні, а в іншому – ні. Тоді, як би ми не намагалися побудувати взаємно однозначне відображення, вершини степеня три можуть переходити у вершини степеня три, але суміжність між ними втратиться. Тобто графи ізоморфними не будуть. Їх зображення може мати такий вигляд:





4.1.3. Задачі для самостійного опрацювання

416. Нехай задано граф $G = (V,E)$:

а) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$;

б) $V = \{A, B, C, D\}$,
$E = \{(A, B), (A, D), (B, C), (B, D), (C, A), (C, D)\}$;

в) $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3)\}$;

г) $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, c), (b, c), (c, d), (d, a), (d, b)\}$.

Зобразити його графічно, побудувати матриці суміжності та інцидентності.

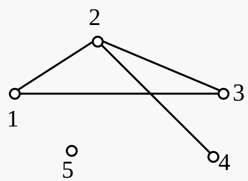
417. Граф задано за допомогою матриці суміжності A.

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

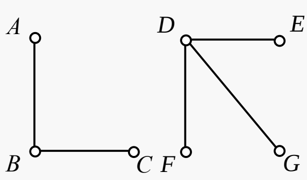
в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Визначити множину ребер графа. Зобразити граф графічно та побудувати його матрицю інцидентності.

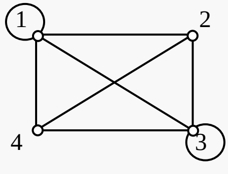
418. Граф задано графічно.



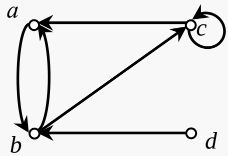
а)



б)



в)



г)

Визначити множину вершин і множину ребер, матриці суміжності та інцидентності графа.

419. Накреслити повний граф з n вершинами, якщо

а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 5$.

420. Чому дорівнює степінь кожної вершини в повному графі з n вершинами, якщо

а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = k$?

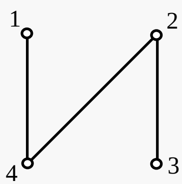
421. Скільки ребер містить повний граф із n вершинами, якщо

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$?

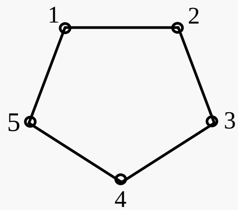
422.° Довести, що повний граф з n вершинами має $n(n\text{-}1)/2$ ребер. Чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює

а) 7; б) 15; в) 18?

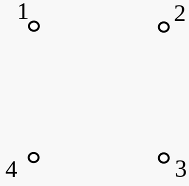
423. Скільки ребер потрібно доповнити до графа, зображеного на малюнку, для того щоб він став повним?



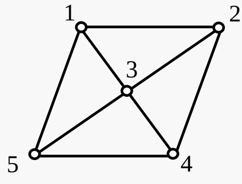
а)



б)



в)



г)

424. Накреслити граф $\overline{G}$**,** який є доповненням графа G, зображеного на малюнку до попередньої задачі.

425.° У графа G чотири вершини; A – одна з його вершин; $\overline{G}$ **–** доповнення графа G. Скільком ребрам належить вершина A в графі $\overline{G}$, якщо в графі G ця вершина:

а) належить одному ребру;
б) належить трьом ребрам;
в) не належить жодному ребру?

426.° Чому дорівнює кількість ребер у графі $\overline{G}$, якщо граф G має n вершин і k ребер?

427.° Граф G задано матрицею суміжності. Як за її допомогою визначити:

а) кількість вершин графа G;
б) кількість ребер графа G;
в) степінь $\rho(v)$ певної вершини v графа G;
г) чи є граф G повним графом;
д) матрицю інцидентності графа?

428.° Чи знайдеться граф з 5 вершинами, у якого одна вершина ізольована, а друга – степеня 4?

429.° Чи знайдеться граф з 5 вершинами, всі степені яких відмінні один від одного, тобто рівні 0, 1, 2, 3, 4?

430.° Накреслити граф з 5 вершинами, у якого рівно дві вершини мають однаковий степінь.

431.* Довести, що в будь-якому графі з n вершинами ($n \geq 2$) завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

432. Скільки вершин з однаковими степенями має доповнення графа G**,** якщо він має рівно дві вершини з однаковими степенями?

433.° Якщо в графі з 5 вершинами рівно дві вершини мають однаковий степінь, то чи можуть вони обидві бути ізольованими або обидві мати степінь 4?

434.° Довести, що в будь-якому графі

$$G(V,E)\ \sum_{v\in V}\rho(v)=2|E|.$$

435.° Чи існує граф із n вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо

а) $n = 10$;
б) $n = 11$;
в) $n = 2k - 1$;
г) $n = 2k$?

436.° Скільки вершин може мати граф, усі вершини якого є кінцевими? Скільки ребер у такому графі?

437.° Довести, що кількість ребер однорідного графа степеня r, який має n вершин, дорівнює $nr/2$.

438.° Чи існує кубічний граф із n вершинами, якщо

а) $n = 100$;
б) $n = 101$;
в) $n = 2k - 1$;
г) $n = 2k$?

439.* Скільки ребер містить повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

440.° Які особливості має матриця суміжності двочасткового графа?

441.* Чи для кожного натурального $k \geq 2$ існує повний двочастковий граф, кількість ребер якого дорівнює k?

442.° Який вигляд має доповнення графа $K_{n,m}$?

443.* Довести, що в довільному графі із шістьма вершинами завжди знайдуться три вершини, які є або попарно суміжними, або попарно несуміжними.

444.° Чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють

а) 2, 3, 3, 4, 4, 4;
б) 2, 2, 2, 4, 5, 5?

Відповідь обґрунтувати.

445.° 30 команд беруть участь в першості з футболу. Кожні дві команди повинні зіграти між собою один матч. Доведіть, що в будь-який момент змагання знайдуться дві команди, що зіграли однакову кількість матчів.

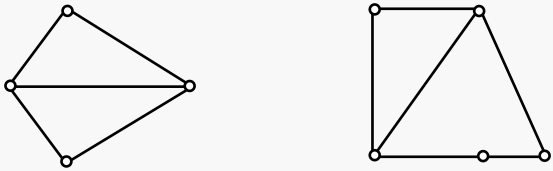
446.° Декілька осіб проводять шаховий турнір в одне коло. У деякий момент виявилось, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії турніру.

447.° 29 команд беруть участь у футбольному турнірі. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів (можливо, не зіграла жодного).

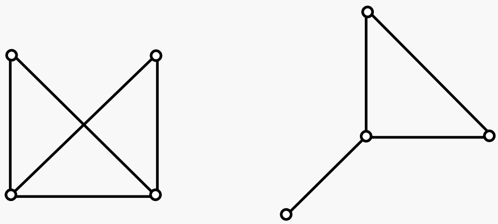
448.* Довести, що всі ізоморфні графи мають однакову кількість вершин і однакову кількість ребер.

449.* Довести, що в ізоморфних графів кількість вершин степеня k однакова для довільного k ($k \geq 0$).

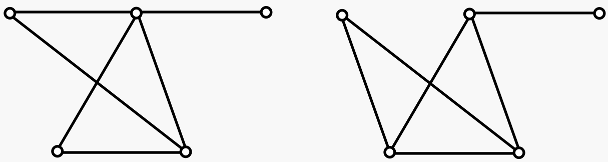
450.° Пояснити, чому пари графів, зображені на малюнку, не є ізоморфними.



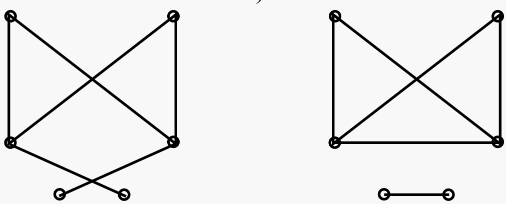
а)



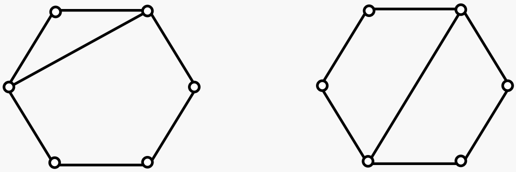
б)



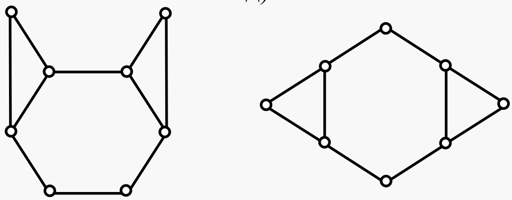
в)



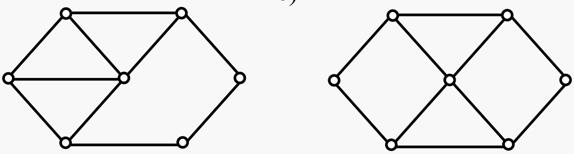
г)



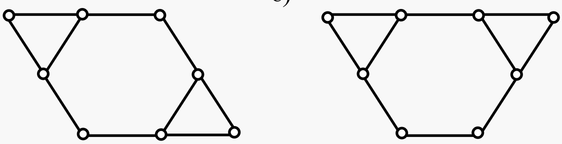
д)



е)

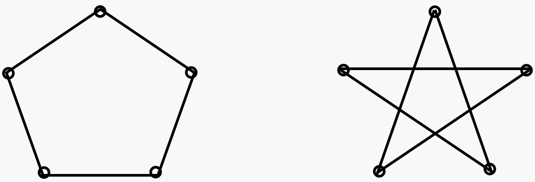


є)

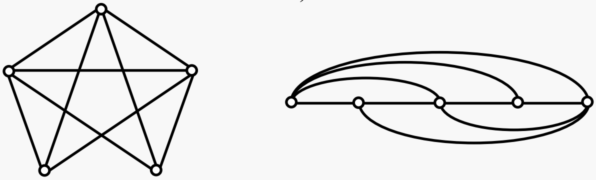


ж)

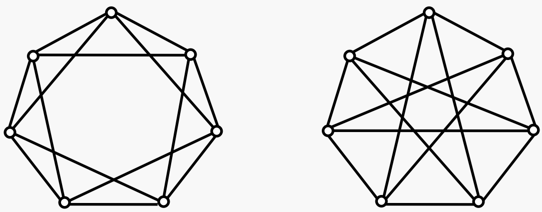
451.° Довести, що пари графів, зображені на малюнку, є ізоморфними.



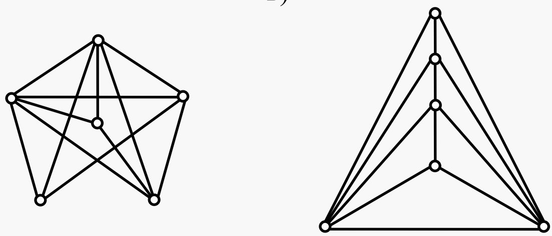
а)



б)

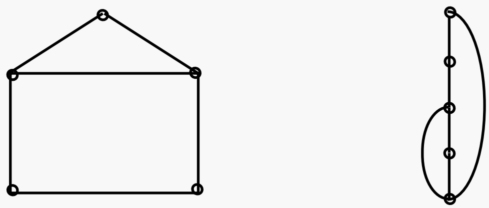


в)

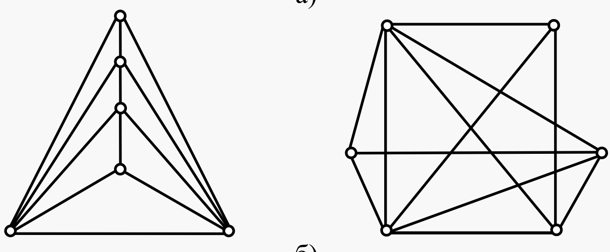


г)

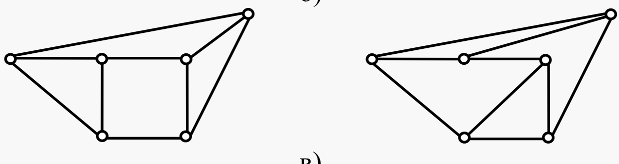
452.° Визначити серед пар графів, зображених на малюнку, пари ізоморфних і пари не ізморфних графів. Відповіді обґрунтувати.



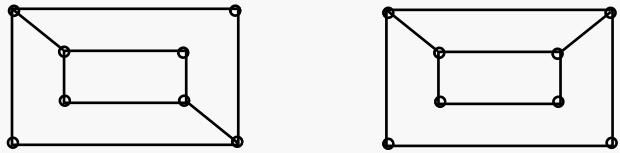
а)



б)



в)



г)

453.* Довести, що графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матрицю суміжності (матрицю інцидентності) одного з цих графів можна одержати з матриці суміжності (матриці інцидентності) іншого за допомогою відповідних перестановок рядків і стовпчиків.

454.* Перевірити, чи є ізоморфними графи G_1 і G_2, задані своїми матрицями суміжності A_1 і A_2.

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

455. Накреслити всі попарно неізоморфні графи з n вершинами для

а) $n = 2$;　　　　в)° $n = 4$;
б)° $n = 3$;　　　　г)* $n = 5$.

456.* Побудувати всі попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 2, 2, 3, 3, 3, 5.

457.* Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають

а) 13 ребер і 6 вершин (дві – непарного степеня);
б) 8 вершин, сума всіх степенів яких не менша від 53;

в) 43 ребра і 10 вершин (дві – парного степеня);

г) n вершин, сума всіх степенів яких не менша від $n(n-1)-3$?

458.* Довести, що кількість вершин будь-якого самодоповнювального графа дорівнює або $4k$ або $4k+1$, $k \in N$. Знайти самодоповнювальні графи з 4 і 5 вершинами?

459.* Довести, що довільний самодоповнювальний граф містить або $4k^2-k$ або $4k^2+k$ ребер, $k \in N$. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість ребер дорівнює 5?

460.° Довести, що самодоповнювальний граф не має ізольованих вершин.

461.* Чи може повний двочастковий граф $K_{n,m}$ бути самодоповнювальним?

462.° Чи є самодоповнювальним граф, зображений на малюнку?

4.2. МАРШРУТИ

4.2.1. Теоретичні відомості

Означення 1. Маршрутом (шляхом) у графі $G = (V, E)$ називається послідовність вершин і ребер v_1, e_1, v_2, e_2, ... , e_{k-1}, v_k така, що кожні два сусідні ребра e_{i-1} та e_i мають спільну вершину v_i.

Маршрути у графах, які не мають кратних ребер, позначають, як правило, лише переліком послідовності вершин. Вершина v_1 називається *початком* шляху, а вершина v_k – *кінцем* шляху. Всі інші вершини цього шляху називаються *внутрішніми* або *проміжними*. Початок або кінець шляху може одночасно виявитися внутрішньою вершиною.

Число ребер маршруту називається *довжиною* цього маршруту. Маршрутом довжини 0 вважається послідовність, що складається з єдиної вершини.

Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні, *простим ланцюгом* – якщо всі його вершини різні (допускається співпадання початкової вершини з кінцевою). Маршрут називається *замкненим* (*циклічним*), якщо $v_1 = v_k$. Замкнений ланцюг називається *циклом*, а замкнений простий ланцюг – *простим циклом*.

Граф, який не має циклів, називається *ациклічним* графом.

Вершини u і v графа G називаються *зв'язаними*, якщо існує маршрут, який з'єднує ці вершини.

Означення 2. Граф називається зв'язним, якщо будь-які дві його вершини є зв'язаними.

Вилучення деяких вершин або ребер може призвести до перетворення зв'язного графа у незв'язний (або до збільшення компонент зв'язності незв'язного графа). Ребро, вилучення якого збільшує кількість компонент зв'язності, називається *мостом*.

Вершина з такою ж властивістю називається *точкою з'єднання* або *розділювальною вершиною*.

Граф називається нероздільним, якщо він зв'язний та не має точок з'єднання. Граф, який має хоча б одну точку з'єднання, є роздільним. Він розбивається на *блоки*, кожний з яких являє собою максимальний нероздільний підграф.

Якщо граф не зв'язний, то існує єдиний спосіб розділу множини його вершин на множини, що не перетинаються, кожна з яких має всі зв'язані між собою вершини та разом з інцидентними їм ребрами утворює зв'язний підграф. Таким чином, незв'язний граф є сукупністю окремих частин (підграфів), які називаються *компонентами зв'язності*.

Відстанню між вершинами u і v зв'язного графа називається довжина найкоротшого маршруту, що з'єднує вершини u і v, і позначається $d(u, v)$.

Очевидно, що введена таким чином відстань задовольняє аксіоми метрики:

1) $d(u,v) \geq 0$; $d(u,v) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u = v$;
2) $d(u,v) = d(v,u)$;
3) $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$.

Ексцентриситетом $e(u)$ вершини u зв'язного графа $G = (V, E)$ називається найбільша з відстаней між вершиною u і всіма іншими вершинами графа G, тобто $e(u) = \max\limits_{v \in V} d(u,v)$.

Діаметром зв'язного графа G (позначається $d(G)$) називається максимальний серед всіх ексцентриситетів вершин графа G. Мінімальний з усіх ексцентриситетів вершин зв'язного графа G називається його *радіусом* і позначається $r(G)$.

Вершина u називається *центральною*, якщо $e(u) = r(G)$. *Центром* графа G називається множина всіх його центральних вершин.

Вершина u називається *периферійною*, якщо $e(u) = d(G)$.

Часто важливим постає питання не про найкоротші маршрути, а про найдовші. *Протяжністю* між вершинами u і v скінченного зв'язного графа G називається довжина найдовшого простого ланцюга, що з'єднує вершини u і v, і позначається $D(u, v)$.

Числом протяжності $E(u)$ вершини u зв'язного графа $G=(V,E)$ називається довжина найдовшого простого ланцюга з кінцем у вершині u, тобто $E(u)=\max\limits_{v\in V} D(u,v)$.

Очевидно, що серед усіх найдовших простих ланцюгів для всіх пар вершин u, v знайдеться такий, довжина якого найбільша. Ця довжина називається *діаметром протяжності* графа і позначається $D(G)$.

Вершини u_0 з найменшим числом протяжності називаються *центрами протяжності*, а довжина відповідних найдовших простих ланцюгів від цих центрів – *радіусом протяжності*, тобто $R(G)=E(u_0)=\min\limits_{u\in V} E(u)$.

Одним з важливих різновидів зв'язних графів є так звані ейлерові і гамільтонові графи.

Означення 3. Цикл, який містить усі ребра графа, називається ейлеровим циклом, а граф, який має такий цикл, – ейлеровим графом.

Теорема Ейлера. Граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин парні.

Ланцюг, який містить усі ребра графа, називається *ейлеровим ланцюгом*.

Щоб у графі існував ейлерів ланцюг, необхідні його зв'язність та парність степенів усіх вершин, окрім початкової і кінцевої. Ці дві вершини повинні мати непарні степені. Дані умови є достатніми для існування ейлерового ланцюга.

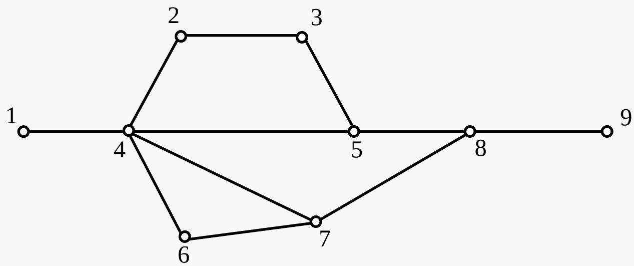
Означення 4. Гамільтоновим циклом називається простий цикл, що проходить через усі вершини графа. Граф, який містить гамільтонів цикл, називається гамільтоновим.

Не зважаючи на певну подібність означень ейлерових і гамільтонових циклів, задачі їх відшукання різко відрізняються за рівнем складності. Пошук простого і вичерпного критерію існування гамільтонового циклу на довільному графі і досі залишається однією з основних невирішених проблем теорії графів.

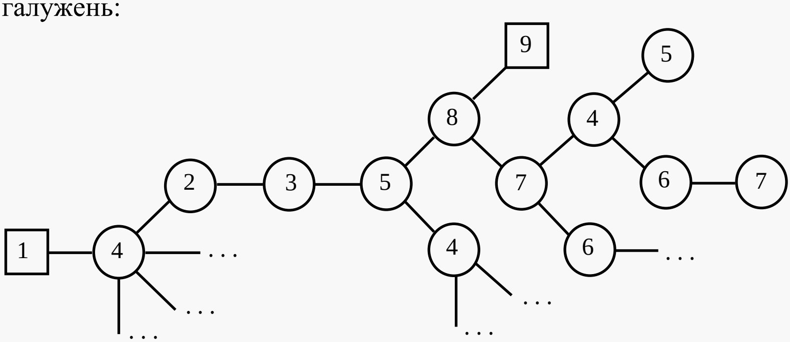
4.2.2. Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Для графа, зображеного на малюнку:

а) знайти всі ланцюги, що ведуть із вершини 1 у вершину 9;
б) знайти всі прості ланцюги, що ведуть із вершини 1 у вершину 9;
в) знайти ланцюг, що веде з вершини 1 у вершину 9 і містить всі вершини графа;
г) перевірити, чи існує в ньому простий ланцюг, що з’єднує вершини 1 і 9, і містить всі вершини графа;
д) знайти цикли, що містять 7 ребер і встановити, які з цих циклів прості?



Розв’язання: а) Для відшукання усіх ланцюгів графа, що з’єднують вершини 1 і 9, використаємо схему всеможливих розгалужень:



Очевидно, що в будь-якому випадку шуканий ланцюг розпочинається з проходження ребра (1, 4). Далі з вершини 4 можемо рухатись до однієї з вершин 2, 5, 6 або 7, тобто на цьому етапі можливі чотири випадки продовження шляху.

Розглянемо перший з них, тобто пройдемо ребро (4, 2). Зрозуміло, що після цього доведеться пройти ребра (2, 3) і (3, 5). З вершини 5 можемо потрапити або у вершину 8, або у вершину 4.

Виберемо, наприклад, вершину 8. Знову можливі два випадки. В першому з них потрапимо у вершину 9 і, таким чином, буде знайдено ланцюг (1, 4, 2, 3, 5, 8, 9). В другому випадку для продовження ланцюга з вершини 8 проходимо по ребру (8, 7). У вершині 7 також можливі два випадки продовження шляху: або у напрямку вершини 4, або у напрямку вершини 6. Пройдемо по ребру (7, 4). З вершини 4 можна потрапити або у вершину 5, або у вершину 6. Інші шляхи (проходження по ребру (4, 1) або по ребру (4, 2)) не беремо до уваги, оскільки рухатись доведеться по вже пройдених ребрах.

Пройшовши по ребру (4, 5), доведеться зупинитись, так як ні ребро (5, 3), ні ребро (5, 8) більше використовувати не можна – вони вже пройдені.

Пройшовши по ребру (4, 6), доведеться пройти і ребро (6, 7). Знову ланцюг обірветься – всі можливі виходи з вершини 7 уже пройдені. Таким чином, пішовши з вершини 7 у напрямку вершини 4, ми розглянули всі можливі випадки продовження ланцюга.

Якщо ж піти з вершини 7 у напрямку вершини 6, тобто пройти по ребру (7, 6), і аналогічно далі продовжити розгляд ребер, то або знайдемо шуканий ланцюг, або він також на якомусь кроці обірветься.

Перебравши всі можливі випадки, одержимо ще 7 ланцюгів: (1, 4, 5, 8, 9), (1, 4, 7, 8, 9), (1, 4, 6, 7, 8, 9), (1, 4, 2, 3, 5, 4, 7, 8, 9), (1, 4, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8, 9), (1, 4, 6, 7, 4, 5, 8, 9), (1, 4, 6, 7, 4, 2, 3, 5, 8, 9).

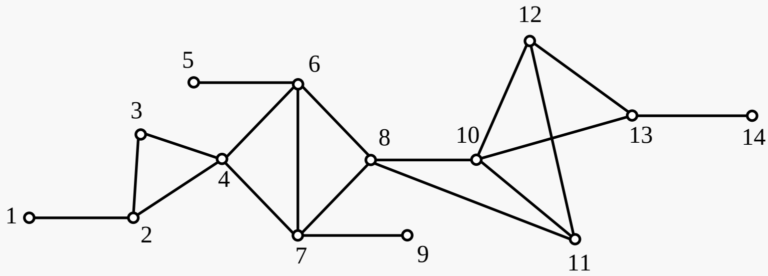
б) Виділимо серед знайдених ланцюгів прості, тобто ті, які проходять через кожну вершину не більше одного разу. Такими будуть ланцюги (1, 4, 2, 3, 5, 8, 9), (1, 4, 5, 8, 9), (1, 4, 7, 8, 9), (1, 4, 6, 7, 8, 9).

в) Граф має два ланцюги, що ведуть з вершини 1 у вершину 9 і проходять через усі вершини: (1, 4, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8, 9) і (1, 4, 6, 7, 4, 2, 3, 5, 8, 9).

г) Жоден із ланцюгів, які проходять через усі вершини графа не є простим, оскільки в кожному випадку доводиться двічі проходити через вершину 4.

д) У графі є два таких цикли: (4, 2, 3, 5, 8, 7, 6, 4) і (4, 2, 3, 5, 4, 7, 6, 4). Лише перший з них є простим, оскільки він не проходить через жодну вершину більше одного разу.

Приклад 2. Для графа G, зображеного на малюнку, визначити відстань між вершинами 3 і 11, ексцентриситети всіх вершин, діаметр, радіус, центральні та периферійні вершини, протяжність між вершинами 3 і 11, числа протяжності всіх вершин, діаметр протяжності, радіус протяжності, центри протяжності.



Розв'язання: Щоб знайти відстань між вершинами, потрібно, згідно означення, знайти довжину найкоротшого маршруту, який з'єднує ці вершини. Очевидно, що між вершинами 3 і 11 є два найкоротших маршрути: (3, 4, 7, 8, 11) і (3, 4, 6, 8, 11). Їх довжина дорівнює 4, тобто $d(3, 11) = 4$.

Знайдемо, наприклад, ексцентриситет вершини 1. Для цього визначимо відстані між вказаною вершиною і всіма іншими вершинами графа та виберемо серед них найбільшу: $d(1, 2) = 1$, $d(1, 3) = d(1, 4) = 2$, $d(1, 6) = d(1, 7) = 3$, $d(1, 5) = d(1, 9) = d(1, 8) = 4$, $d(1, 10) = d(1, 11) = 5$, $d(1, 12) = d(1, 13) = 6$, $d(1, 14) = 7$. Легко бачити, що шуканою є відстань до вершини 14, яка дорівнює 7. Отже, $e(1) = 7$.

Провівши аналогічні дії стосовно усіх інших вершин графа, матимемо: $e(2) = 6$, $e(3) = 6$, $e(4) = 5$, $e(5) = 5$, $e(6) = 4$, $e(7) = 4$, $e(8) = 4$, $e(9) = 5$, $e(10) = 5$, $e(11) = 5$, $e(12) = 6$, $e(13) = 6$, $e(14) = 7$.

Діаметр графа визначається максимальним серед усіх екцентриситетів і тому $d(G) = 7$.

Радіус графа $r(G)$, тобто мінімальний серед усіх ексцентриситетів, дорівнює 4.

Вершини 6, 7 і 8 є центральними, оскільки їх екцентриситети співпадають з радіусом графа ($e(6) = e(7) = e(8) = r(G)$). Крім того, граф має дві периферійні вершини: 1 і 14 (так як $e(1) = e(14) = d(G)$).

Для знаходження протяжності між вершинами 3 і 11 досить знайти довжину найдовшого простого ланцюга, що їх з'єднує.

Таких ланцюгів є два: (3, 2, 4, 7, 6, 8, 10, 12, 11) і (3, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 11). Їх довжина дорівнює 8. Отже, $D(3, 11) = 8$.

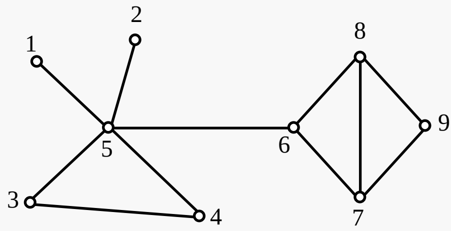
Визначимо число протяжності, наприклад, для вершини 1, тобто знайдемо довжину найдовшого простого ланцюга з кінцем у цій вершині. Таким є ланцюг (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14) довжини 11. Отже, $E(1) = 11$.

Аналогічно для решти вершин знаходимо: $E(2) = 10$, $E(3) = 10$, $E(4) = 8$, $E(5) = 9$, $E(6) = 8$, $E(7) = 8$, $E(8) = 6$, $E(9) = 7$, $E(10) = 7$, $E(11) = 8$, $E(12) = 10$, $E(13) = 10$, $E(14) = 11$.

Найбільше серед усіх чисел протяжності є діаметром протяжності графа, а найменше – радіусом протяжності, тобто $D(G) = 11$, $R(G) = 6$. Вершина з номером 8, в якій досягається найменше число протяжності, є центром протяжності графа.

Приклад 3. У графі, зображеному на малюнку, визначити:

а) розділювальні вершини;
б) мости;
в) блоки.



Розв'язання: а) Виявити розділювальні вершини досить легко, скориставшись означенням. Застосовуючи по-черзі операцію вилучення до кожної з вершин графа, неважко переконатись, лише в двох випадках це призведе до втрати зв'язності у графі. Зокрема, вилучення вершини 5 призводить до утворення чотирьох компонент зв'язності, а вилучення вершини 6 – до утворення двох компонент зв'язності. Отже, ці дві вершини є розділювальними.

б) Легко бачити, що граф має три ребра, а саме (1, 5), (2, 5) і (5, 6), вилучення яких збільшує кількість компонент зв'язності. Тобто граф має три мости. Вилучення будь-якого з цих ребер призведе до утворення двох зв'язних компонент. А вилучення усіх трьох ребер збільшить кількість компонент зв'язності до чотирьох.

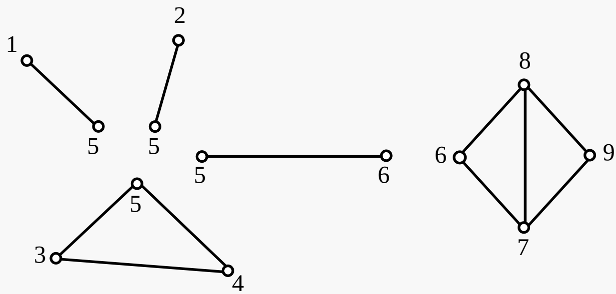
Взагалі кажучи, відшукання мостів у графах з великою кількістю вершин і ребер може перетворитись у досить складну задачу. В багатьох випадках зручно користуватись не означенням моста, як це зробили ми, а однією з наступних ознак:

1) ребро (a, b) є мостом тоді і тільки тоді, коли (a, b) – єдиний шлях, що з'єднує вершини a і b;
2) ребро (a, b) є мостом тоді і тільки тоді, коли знайдуться дві вершини c_1 і c_2 такі, що кожен шлях, що з'єднує їх, містить a і b;
3) ребро (a, b) є мостом тоді і тільки тоді, коли воно не належить жодному циклу.

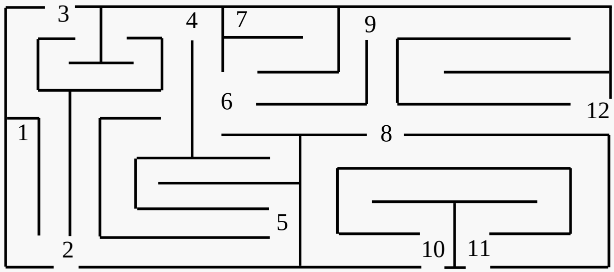
Так, для даного графа, використовуючи першу або третю ознаку, досить легко виявити мости (1, 5) і (2, 5), а міст (5, 6) добре проглядається за всіма трьома ознаками.

в) Розіб'ємо множину ребер графа на 5 підмножин так, як показано на малюнку нижче.

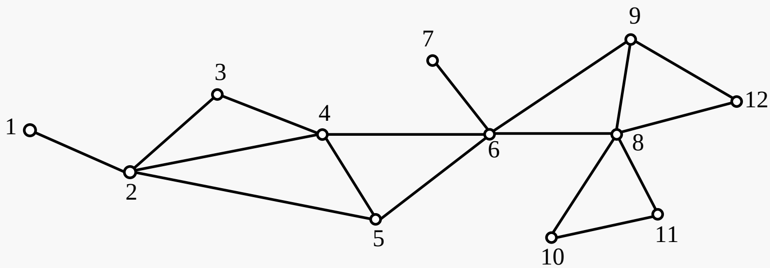
Очевидно, що кожна підмножина є максимальним нероздільним підграфом. Кожне ребро, як і кожна вершина (за виключенням точок з'єднання), належить тільки одній з підмножин. Більше того, тільки одній підмножині належить і кожний простий цикл. Тобто ці підмножини є взаємно неперерізними. Тому так задане розбиття є розбиттям заданого графа на блоки.



Приклад 4. В лабіринті, зображеному на малюнку, знайти маршрут, який з'єднує пункт 2 з пунктом 11.



Розв'язання: Лабіринт, як відомо, складається з входів-виходів, коридорів, їх перехресть і тупиків. Для полегшення пошуку маршруту зображення лабіринту замінюють графом, в якому кожен вхід або вихід, тупик та перехрестя позначають вершинами, а коридори, що їх з'єднує – ребрами. Виходячи з цього, не важко переконатись, що граф, зображений на малюнку, відповідає заданій за умовою схемі лабіринту.



Таким чином, задача про лабіринт зводиться до побудови алгоритму, який би дозволяв відшукати маршрут у відповідному графі від заданої вершини u до заданої вершини v (в даному конкретному випадку від вершини 2 до вершини 11).

Для розв'язання задач такого характеру користуються класичними методами: алгоритмом пошуку (обходу графа) вшир або вглиб. Сформулюємо постановку задачі пошуку та розглянемо обидва методи її розв'язання в загальному випадку, а потім проілюструємо дію одного з них на даній задачі.

Нехай задано граф $G=(V,E)$, $V_0 \subseteq V$ – множину початкових вершин і $V_k \subseteq V$ – множину кінцевих вершин графа G. Необхідно знайти шлях з деякої вершини $u \in V_0$ в одну з вершин $v \in V_k$, тобто знайти послідовність ребер $(u_i, u_{i+1}) \in E$, $i = 1, 2, \ldots, t-1$ таку, що $u_1 = u$ і $u_t = v$. Множина початкових вершин V_0 і (або) множина кінцевих вершин V_k можуть містити тільки по одній вершині.

Для опису алгоритмів нам знадобляться три списки ребер: список відкритих ребер ВІДКР, список закритих ребер ЗАКР і шуканий шлях РОЗВ. Через $S(u)$ будемо позначати множину всіх вершин $v \in V$ таких, що в графі G існує ребро $(u, v) \in E$. Такі вершини v називають синами вершини u, а множину $S(u)$ – множною синів вершини u.

Для зручності опису алгоритму додамо до множини вершин V графа G «порожню» вершину p, а до множини ребер – «порожні» ребра виду (p, u), де $u \in V_0$. При визначенні шляху з V_0 у V_k «порожні» ребра не враховуються.

Алгоритм пошуку вшир наступний:

1. Всі «порожні» ребра розмістити у списку ВІДКР (у довільному порядку).

2. Якщо ВІДКР = ∅, то РОЗВ = ∅ (тобто сформульована задача не має розв'язку) і алгоритм завершує свою роботу.

3. Закрити перше ребро (u, v) з ВІДКР, тобто перенести ребро (u, v) зі списку ВІДКР у список ЗАКР.

4. Якщо вершина v закритого ребра є кінцевою вершиною ($v \in V_k$), то шуканий список РОЗВ (тобто шуканий шлях з V_0 у V_k) міститься серед ребер списку ЗАКР і може бути виділений з нього послідовно, починаючи з останнього закритого ребра шляху. Зауважимо, що при побудові результуючого шляху для кожного з ребер (u, v) списку ЗАКР необхідно вибрати ребро-попередника (w, u) так, що воно є першим ребром з кінцем u у списку ЗАКР. Алгоритм завершує свою роботу.

В противному разі ($v \notin V_k$) перейти до пункту 5.

5. Визначити $S(v)$ – множину синів вершини v останнього закритого ребра, а також множину ребер $R(v) = \{(v, z) | z \in S(v)\}$.

Розмістити у списку ВІДКР усі ребра з множини $R(v)\setminus$ (ВІДКР $\cup$ ЗАКР) після усіх ребер, що вже містяться у цьому списку.

6. Перейти до пункту 2.

Алгоритм пошуку вглиб досить схожий до алгоритму пошуку вшир. Відмінність є лише в пункті 5 і полягає в тому, що в алгоритмі пошуку вшир необхідно розміщувати відповідні ребра після, а в алгоритмі пошуку вглиб – перед усіма ребрами, що знаходяться у списку ВІДКР.

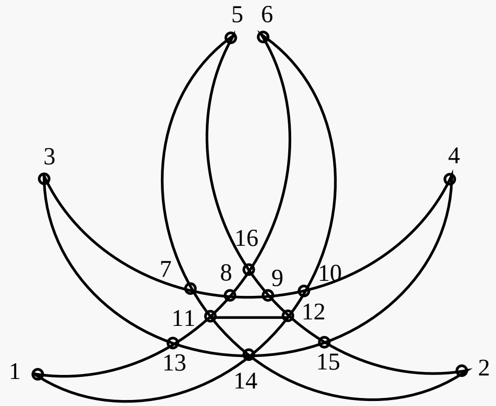
У випадку сформульованої задачі $V_0 = \{2\}$, а $V_k\{11\}$. Подамо хід розв'язання у вигляді таблиці, кожний рядок якої описує результат виконання одного циклічного кроку (пункти 2 – 6) алгоритму. Оскільки список ЗАКР тільки поповнюється на кожному кроці і притому тільки одним ребром, то в таблиці записуємо лише це ребро (не повторюючи всі елементи, які ввійшли до складу ЗАКР на попередніх кроках).

Алгоритм пошуку вшир

Крок	ВІДКР	ЗАКР	v	$R(v)$
0	$(p,2)$			
1	(2,3), (2,4), (2,5)	$(p,2)$	2	(2,3), (2,4), (2,5)
2	(2,4), (2,5), (3,4)	(2,3)	3	(3,4)
3	(2,5), (3,4), (4,5), (4,6)	(2,4)	4	(4,5), (4,6)
4	(3,4), (4,5), (4,6), (5,6)	(2,5)	5	(5,6)
5	(4,5), (4,6), (5,6)	(3,4)	4	
6	(4,6), (5,6)	(4,5)	5	
7	(5,6), (6,7), (6,9), (6,8)	(4,6)	6	(6,7), (6,9), (6,8)
8	(6,7), (6,9), (6,8)	(5,6)	6	
9	(6,9), (6,8)	(6,7)	7	
10	(6,8), (9,8), (9,12)	(6,9)	9	(9,8), (9,12)
11	(9,8), (9,12), (8,12), (8,11), (8,10)	(6,8)	8	(8,12), (8,11), (8,10)
12	(9,12), (8,12), (8,11), (8,10)	(9,8)	8	
13	(8,12), (8,11), (8,10)	(9,12)	12	
14	(8,11), (8,10)	(8,12)	12	
15	(8,10)	(8,11)	11	

Алгоритм завершує свою роботу на п'ятнадцятому кроці. Аналізуючи список ребер ЗАКР від його кінця до початку, будуємо список РОЗВ, тобто знаходимо шуканий шлях: 11, 8, 6, 4, 2. Довжина цього шляху – 4.

Приклад 5. Знайти ейлерів шлях у графі. Чи існує в ньому ейлерів цикл? Чому?



Розв'язання: Згідно теореми Ейлера граф містить ейлерів цикл (тобто є ейлеровим) тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин парні. Якщо перша умова для заданого графа виконується, то друга, очевидно, що ні: вершини 11 і 12 мають непарні степені. Отже ейлеревого циклу у графі не існує.

Натомість, оскільки є рівно дві вершини непарного степеня, то граф містить ейлерів шлях з кінцями у цих вершинах. Відшукаємо один з таких шляхів.

Так як вершини 11 і 12 з'єднані ребром, то вилучимо його. Тоді всі вершини стануть парними. Новий граф, згідно теореми Ейлера, містить ейлерів цикл, початком і кінцем якого може виступати будь-яка вершина. Знайдемо ейлерів цикл, який починається і закінчується у вершині 11.

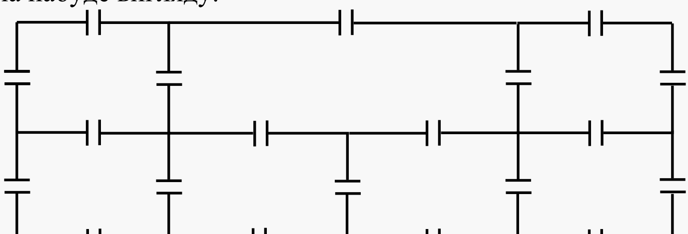
З вершини 11 розпочнемо шлях l по одному з ребер і продовжимо його до повернення у початкову точку, проходячи кожен раз по новому ребру. Отримаємо, наприклад, таку послідовність: (11, 13, 3, 7, 5, 16, 6, 10, 4, 15, 2, 14, 1, 13, 14, 11). Якби цикл l містив усі ребра графа, то він би був шуканим ейлеровим циклом. Але залишились не пройдені ребра. Тоді, очевидно, повинна існувати вершина, що належить знайденому шляху l і ребру, яке не ввійшло до нього. Такою є, наприклад, вершина 15. Так як 15 – вершина з парним степенем, то число ребер, яким вона належить і які не увійшли в шлях l, також парне. Розпочнемо новий цикл *s* з вершини 15 і використаємо лише ребра, що не ввійшли в *l*. Одержимо, наприклад, наступний цикл: (15, 12, 10, 9, 16, 8, 7, 11, 8, 9, 12, 14, 15). Тепер об'єднаємо обидва цикли: з вершини 11 пройдемо по шляху *l* до вершини 15, потім по циклу *s* і, повернувшись в 15, пройдемо по тій частині шляху *l*, яка залишилася, назад до 11: (11, 13, 3, 7, 5, 16, 6, 10, 4, 15, 12, 10, 9, 16, 8, 7, 11, 8, 9, 12, 14, 15, 2, 14, 1, 13, 14, 11).

Бачимо, що знайдений цикл містить усі ребра графа, а, отже, є ейлеровим. В противному випадку довелось би знову виявляти ребра, які не ввійшли в шлях, знаходити нові цикли і приєднувати їх до сформованого шляху. Очевидно, що цей процес скінченний, оскільки скінченними є множини вершин і ребер.

Додамо до знайденого циклу вилучене ребро (11, 12) і отримаємо ейлерів шлях (11, 13, 3, 7, 5, 16, 6, 10, 4, 15, 12, 10, 9, 16, 8, 7, 11, 8, 9, 12, 14, 15, 2, 14, 1, 13, 14, 11, 12) з початком у вершині 11 і кінцем у вершині 12.

Приклад 6. З'ясувати, чи можна провести неперервну замкнену лінію, яка б перетинала усі сторони кожної клітинки зображеної схеми (фігури) рівно один раз.

Розв'язання: Якщо позначити всі місця, у яких лінія повинна перетнути сторони клітинок у вигляді переходів між ними, то схема набуде вигляду:



Очевидно, що задача звелася до відомої задачі про кенігсберзькі мости і може бути сформульована так: з'ясувати, чи існує замкнений маршрут, який би розпочавшись з якоїсь кімнати, проходив по одному разу через усі двері й повертався у початкову точку.

Розв'язавши її, не важко переконатись, що такого маршруту не існує.

Приклад 7. Довести, що в будь-якому гамільтоновому графі немає розділювальних вершин.

Розв'язання: Припустимо, що існує гамільтонів граф, який має розділювальну вершину. Позначимо її a_0. Вона, як відомо, задає розбиття графа на блоки. Для зручності вважатимемо, що граф включає два блоки. Очевидно, що єдиним спільним елементом цих блоків є вершина a_0 і дістатись з одного блоку в інший можна, лише пройшовши через цю вершину.

Розглянемо два можливі випадки відшукання гамільтонового циклу у графі:

1) Розпочнемо маршрут з вершини a_0 і обходу вершин одного з блоків. На деякому кроці (можливо тоді, коли всі вершини першого блоку будуть пройдені) необхідним виявиться перехід до вершин другого блоку. А для цього доведеться вдруге проходити через вершину a_0, що є недопустимим, так як мова йде про побудову гамільтонового циклу.

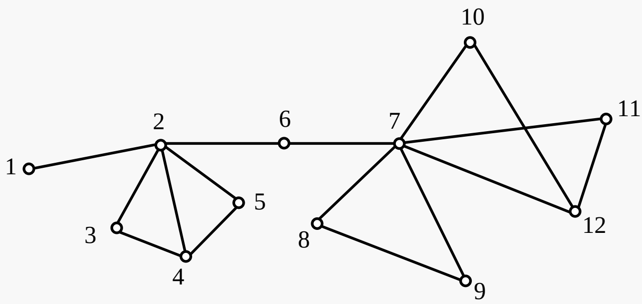
2) Якщо ж розпочати обхід вершин графа з будь-якої іншої вершини першого блоку (відмінної від розділювальної), то матимемо можливість пройти по одному разу через частину або, можливо, через кожну вершину цього блоку, вершину a_0, а далі – кожну вершину другого блоку. Але повернутись назад до першого блоку, щоб завершити цикл, виявиться неможливим, оскільки для цього потрібно вдруге проходити через вершину a_0, чого робити не маємо права.

Розглянуті випадки вичерпують всі можливі способи обходу по одному разу через кожну вершину у так заданому графі. Оскільки, як було показано, ні в першому, ні в другому випадку побудувати гамільтонів цикл не вдасться, можна зробити висновок, що граф, який має розділювальну вершину, не є гамільтоновим.

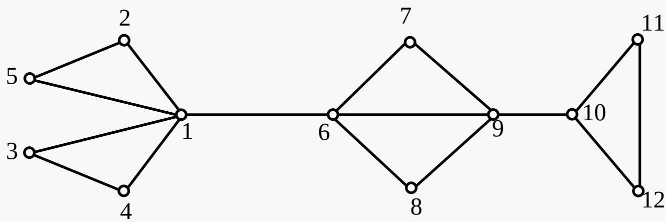
Доведення цього факту легко поширити на графи з довільною кількістю розділювальних вершин і блоків.

4.2.3. Задачі для самостійного розв'язування

463. Для графів, зображених на малюнках,



а)



б)

а) знайти всі ланцюги, що ведуть із вершини 1 у 12;
б) знайти всі прості ланцюги, що ведуть із вершини 1 у 12;
в) знайти ланцюг, що веде з вершини 1 у 12 і містить усі вершини графа;
г) чи існує в графі простий ланцюг, що веде з вершини 1 у 12 і містить усі вершини графа?
д) знайти маршрут у графі, який веде з 1 у 12 і не є ланцюгом;
е) знайти маршрут у графі, який веде з 1 у 12, містить усі вершини графа і не є ланцюгом;
є) знайти який-небудь цикл у графі;
ж) знайти всі прості цикли графа.

464. Описати всеможливі цикли в повному графі з 5-ти вершин, які містять:

а) 4 ребра;
б) 5 ребер;
в) 10 ребер.

Які з цих циклів прості?

465.° Чи існує в графі K_5 цикл довжини 9? Відповідь обґрунтувати.

466. Скільки ребер містить простий цикл з b ($b \geq 3$) вершинами?

467.° Показати, що будь-який замкнений маршрут містить простий ланцюг.

468.* Показати, що довільне ребро, яке входить у цикл графа, входить також у деякий його простий цикл.

469.* Довести, що в графа, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного циклу непарної довжини.

470.* Довести, що будь-який замкнений маршрут непарної довжини містить простий цикл. Чи справедливим є аналогічне твердження для замкнених маршрутів парної довжини?

471.° Довести, що в графі, степені всіх вершин якого більші 1, є цикл.

472.° Довести, що граф є двочастковим тоді і тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

473.* Довести, що граф з n вершинами не є двочастковим, якщо кількість його ребер більша від $n^2/4$.

474.° Довести, що зв'язний граф є простим циклом тоді і тільки тоді, коли кожна його вершина має степінь 2.

475.* Довести, що в зв'язному графі будь-які два прості ланцюги максимальної довжини мають принаймні одну спільну вершину. Чи правильно, що вони завжди мають спільне ребро?

476.* Довести, що в довільному графі з n вершинами і k компонентами зв'язності кількість його ребер m задовольняє такі нерівності: $n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$.

477.° Довести, що зв'язний граф із n вершинами містить не менше ніж $n - 1$ ребро.

478.* Довести, що коли в графі з n вершинами кількість ребер більша ніж $(n - 1)(n - 2)/2$, то граф зв'язний.

479.° Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають

а) 5 вершин, 4 ребра і 2 компоненти зв'язності;
б) 6 вершин, 4 ребра і 3 компоненти зв'язності?

480.° Побудувати всі попарно неізоморфні графи з шістьма вершинами, які мають

а) 4 компоненти зв'язності;
б) одну компоненту зв'язності, 7 ребер і тільки 2 кінцеві вершини.

481.° Яке найменше число ребер потрібно вилучити в повному графі з 5-ти вершин, щоб одержаний граф мав:

а) дві зв'язні компоненти;
б) три зв'язні компоненти?

482.* Довести, що будь-який граф може бути однозначно зображений у вигляді прямої суми своїх зв'язних компонент.

483.° Довести, що для будь-якого графа або він сам, або його доповнення є зв'язним графом.

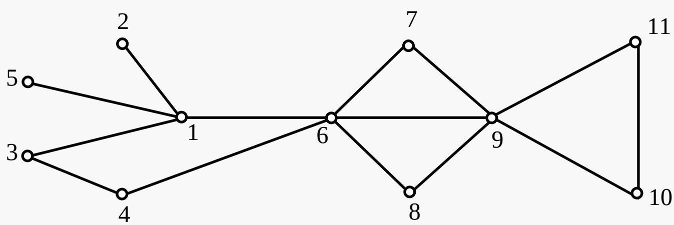
484.* Довести, що коли граф G незв'язний, то граф $\overline{G}$ зв'язний і $d(\overline{G}) \leq 2$.

485.° Позначимо через G' граф, який отримаємо після вилучення зі зв'язного графа $G = (V,E)$ деякого ребра $e \in E$. Довести, що

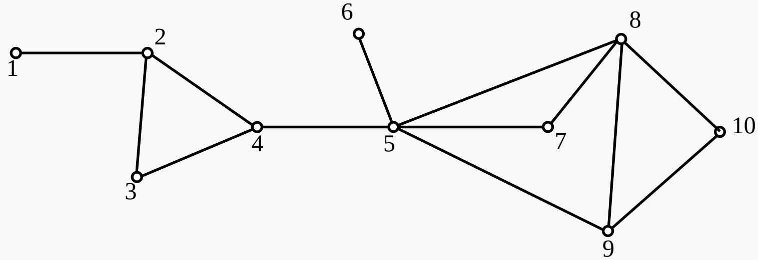
а) граф G' зв'язний, якщо ребро e належить циклу в графі G;
б) граф G' незв'язний, і має тільки дві компоненти зв'язності, якщо ребро e не входить у жодний цикл у графі G.

486. У графах, зображених на малюнках, визначити:

а) усі розділювальні вершини;
б) усі мости;
в) усі блоки.



а)



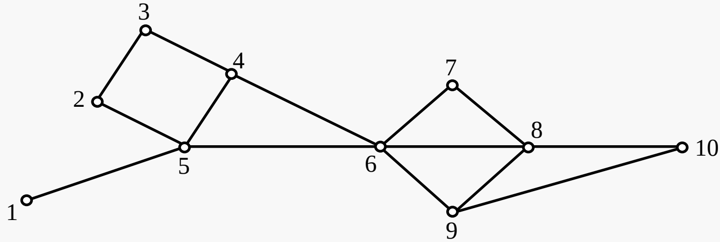
б)

487. Побудувати граф, який має 10 (8) ребер і:

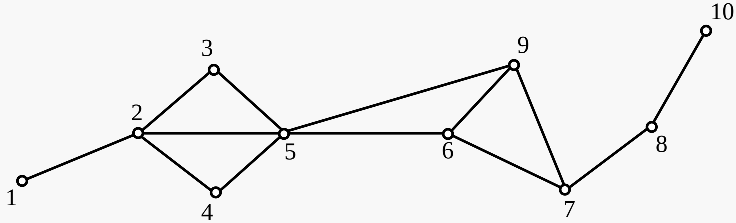
а) всі вони є мостами;
б) жодне з ребер не є мостом;
в) лише два ребра є мостами.

488. Для графів, зображених на малюнках, визначити:

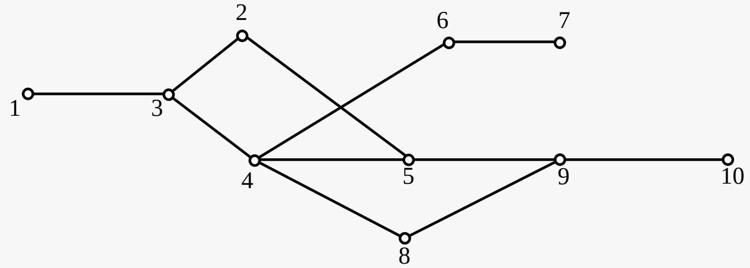
а) відстані $d(1, 10)$, $d(2, 8)$, $d(5, 6)$;
б) ексцентриситети всіх вершин;
в) діаметр $d(G)$;
г) радіус $r(G)$;
д) центральні вершини;
е) центр.



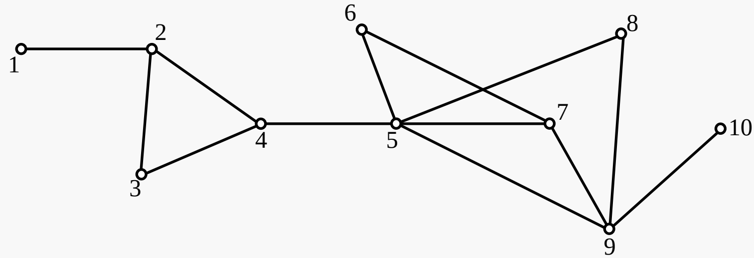
а)



б)



в)



г)

489. Побудувати графи, для яких:

а) $d(G) = 3$; б) $d(G) = 2$.

490. Побудувати графи, для яких:

а) $r(G) = 2$; б) $r(G) = 3$.

491. Визначити радіуси і діаметри для графів правильних многогранників.

492. Визначити діаметри протяжності і радіуси протяжності для графів правильних многогранників.

493.° Побудувати граф, центр якого

а) складається тільки з однієї вершини;
б) складається тільки з двох вершин;
в) складається з трьох вершин і не збігається з множиною всіх вершин;
г) збігається з множиною всіх вершин.

494.* Довести, що для довільного графа G виконується співвідношення $r(G) \le d(G) \le 2r(G)$.

495.° Знайти граф G, в якому

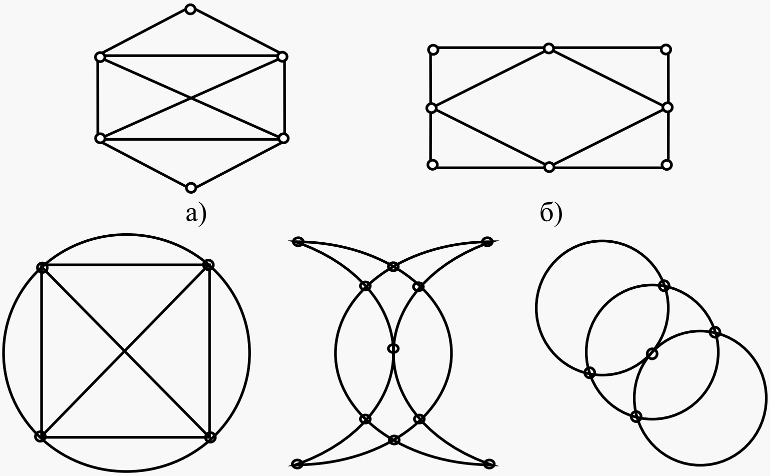
а) $d(G) = r(G)$; б) $d(G) = 2r(G)$.

496.° Довести, що діаметр графа дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли граф повний.

497. Подувати алгоритм пошуку вшир шляху з вершини 5 у вершину 12 для графа, який складається з 12-ти вершин і ребер (1, 2), (3, 4), (4, 5), (3, 5), (2, 3), (5, 6), (2, 6), (2, 4), (5, 8), (5, 7), (3, 7), (3, 6), (8, 7), (6, 9), (6, 10), (9, 10), (6, 7), (7, 10), (9, 11), (10, 11), (11, 12). Побудувати алгоритм пошуку вглиб шляху з вершини 5 у вершину 12 для цього ж графа і порівняти дію та результати обох алгоритмів. Перевірити отримані результати, використовуючи зображення графа.

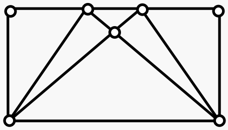
498. Подувати алгоритм пошуку вшир шляху з вершини 3 у вершину 12 для графа, який складається з 12-ти вершин і ребер (1, 2), (1, 3), (3, 4), (3, 5), (2, 3), (3, 6), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (6, 7), (6, 8), (4, 8), (5, 6), (4, 5), (7, 8), (8, 9), (8, 10), (9, 10), (10, 11), (9, 11), (11, 12). Побудувати алгоритм пошуку вглиб шляху з вершини 3 у вершину 12 для цього ж графа і порівняти дію та результати обох алгоритмів. Перевірити отримані результати, використовуючи зображення графа.

499. Чи існують ейлерові цикли у графах, зображених на малюнку? Якщо існують, знайдіть їх.

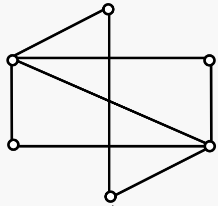


а) б)

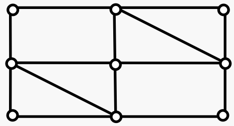
в) г) д)



е)

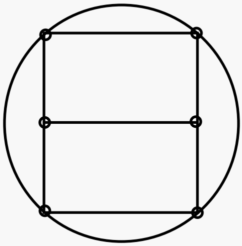


є)

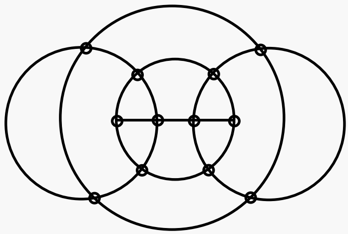


ж)

500. Чи існують ейлерові ланцюги у графах, зображених на малюнку? Якщо існують, знайдіть їх.



а)



б)

501. Зобразіть граф з 8 вершинами, який:

а) містить ейлерів цикл;
б) містить ейлерів ланцюг;
в) не містить ні ейлеревого циклу, ні ейлеревого ланцюга;
г) має простий ланцюг, який містить всі ребра графа.

502.° Визначити, які з повних графів K_n є ейлеровими.

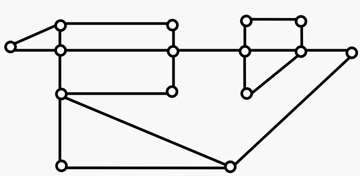
503. В яких правильних многогранниках існує ейлерів цикл? Знайти його.

504.° Для яких значень n і m повний двочастковий граф $K_{n,m}$ є ейлеровим?

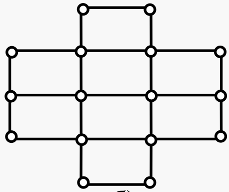
505. Побудувати три попарно неізоморфні графи з десятьма вершинами, які мають ейлерові цикли.

506. Побудувати три попарно неізоморфні графи з вісьмома вершинами, які не мають ейлерових циклів.

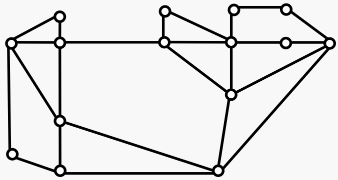
507. На рисунку зображено схеми музеїв, у яких вершинами є зали музеїв, а ребрами – переходи між ними. Визначити, з якого залу потрібно розпочати екскурсію і в якому завершити для того, щоб провести відвідувачів по всіх залах, пройшовши по кожному з переходів один раз. Знайти один із таких маршрутів.



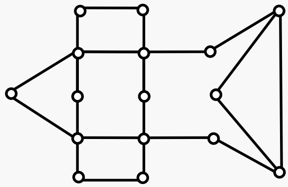
а)



б)

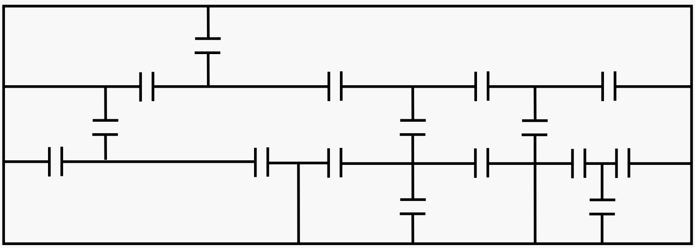


в)

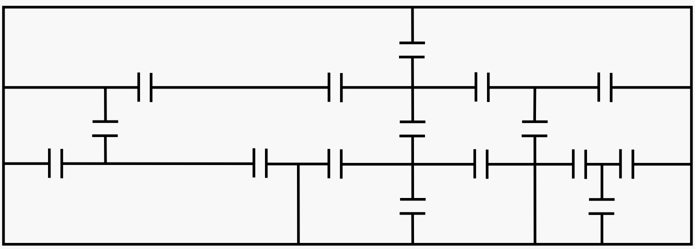


г)

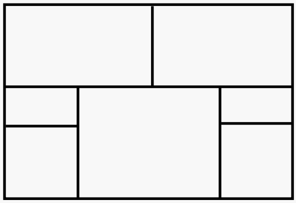
508. На рисунку зображено лабіринт. Знайти у ньому такий маршрут, щоб розпочавши шлях з якоїсь кімнати, пройти по одному разу через усі двері й повернутись у початкову точку.



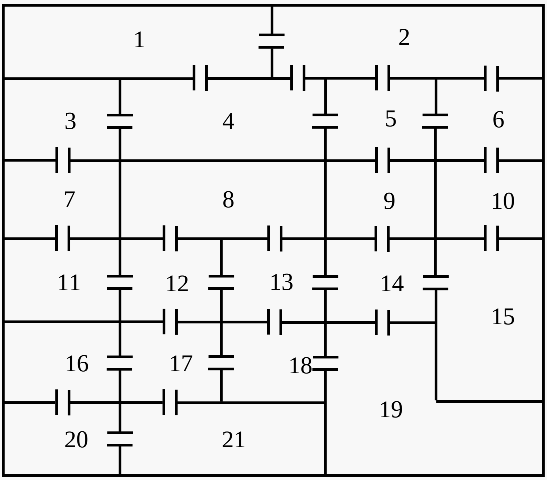
509. На рисунку зображено лабіринт. Чи можна знайти у ньому такий маршрут, щоб розпочавши шлях з якоїсь кімнати, пройти по одному разу через усі двері й повернутись у початкову точку (в іншу точку)?



510. Довести, що неможливо провести, не відриваючи руки, замкнену лінію, яка б перетинала усі сторони клітинок по одному єдиному разу.



511. На малюнку зображено план підземелля, в одній з кімнат якого захований скарб. Для того щоб його знайти, потрібно увійти в одну з крайніх кімнат підземелля, пройти через всі двері, причому точно по одному разу через кожні; скарб схований за тими дверима, які будуть пройдені останніми. В якій кімнаті знаходиться скарб?



512.° Довести, що для довільного зв'язного графа існує циклічний маршрут, який починається з будь-якої вершини і містить усі ребра графа, причому кожне з них двічі.

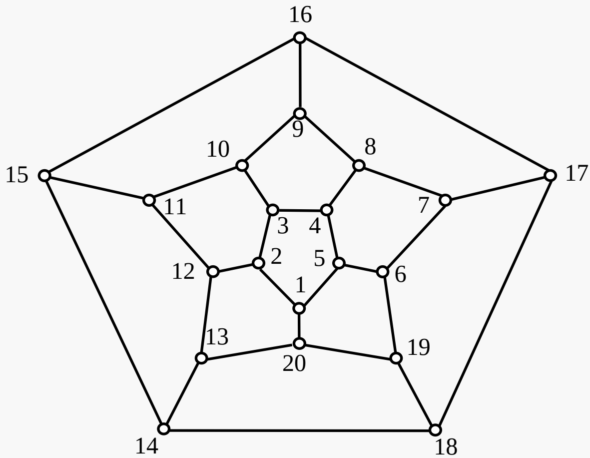
513.° Довести, що для довільного зв'язного графа існує маршрут, який містить усі ребра графа, причому кожне з них не більше двох разів.

514. На малюнку зображено 20 міст (вони довільно пронумеровані) і дороги, що їх з'єднують. Пропонується, розпочавши подорож в місті 1, об'їхати всі решту міст, не заїхавши в жодне місто більше, як один раз. Виписати послідовність міст, в якій можна здійснити таку подорож, якщо:

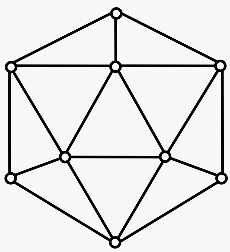
а) завершити подорож потрібно в місті 16;

б)° в першу чергу потрібно заїхати в міста 2, 12, 11 і 10, а повернутися в місто 1;

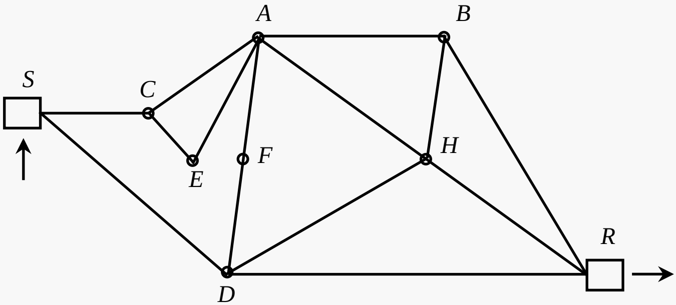
в)° в першу чергу потрібно заїхати в міста 2 і 3, а завершити подорож в місті 18.



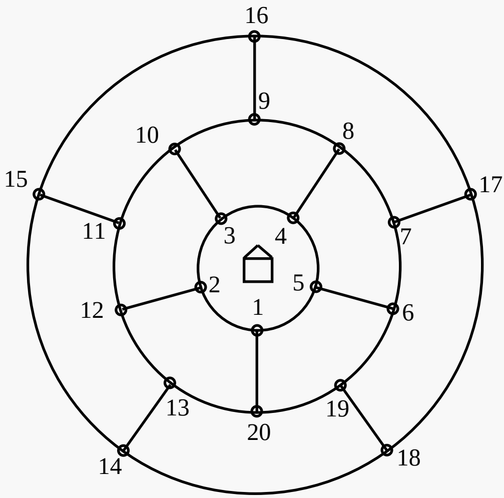
515. Знайти гамільтонів цикл у графі.



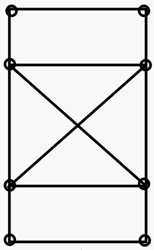
516. В туристичному бюро складаються маршрути подорожей для автотуристів, які повинні проїхати з пункту S в пункт R і по дорозі оглянути всі історико-культурні місця, вказані на малюнку. Допоможіть бюро скласти такий маршрут, щоб туристи в кожен із вказаних пунктів потрапляли не більше одного разу. Чи існує хоча б один такий маршрут? Скільки їх може бути при даній схемі доріг? Випишіть послідовність пунктів для кожного знайденого маршруту.



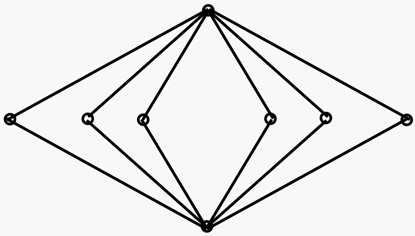
517.° Навколо дому садівник посадив 20 кущів троянд, які пронумерував так, щоб він міг, вийшовши з дому, який знаходився в центрі ділянки, обійти всі троянди, побувавши біля кожної в точності один раз. Одного разу він, зрадивши своїм правилам, полив спочатку троянди під номерами 19, 18, 17 і 16 і ще 6 троянд. Після цього виявилось, що він вже не міг полити решту, не побувавши біля жодної більше одного разу. Які 6 кроків він зробив необережно?



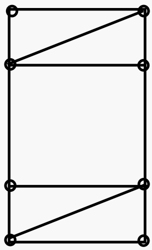
518. Який з графів, зображених на малюнку, є ейлеровим чи гамільтоновим?



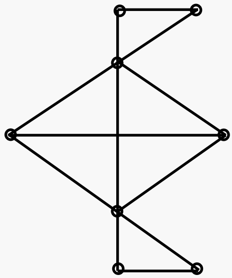
а)



б)



в)



г)

519. Побудувати три попарно неізоморфні графи з вісьмома вершинами, які мають гамільтонові цикли.

520. Побудувати три попарно неізоморфні графи з вісьмома вершинами, які не мають гамільтонових циклів.

521. Знайти гамільтонів цикл в тетраедра та куба.

522.* Довести, що в повному графі K_n існує гамільтонів цикл для довільного $n \geq 3$.

523.* Довести, що в повному двочастковому графі $K_{n,n}$ існує гамільтонів цикл для довільного натурального n.

524.* Для яких значень n і m повний двочастковий граф $K_{n,m}$ є гамільтоновим?

525.° Навести приклади графа, який є ейлеровим, але не є гамільтоновим, а також гамільтонового графа, який не є ейлеровим.

526.* Охарактеризувати графи, в яких ейлерів цикл є одночасно й гамільтоновим.

527.* Охарактеризувати графи, які є одночасно ейлеровими і гамільтоновими.

4.3. ДЕРЕВА ТА ПЛОСКІ ГРАФИ

4.3.1. Теоретичні відомості

Означення 1. Ациклічний зв'язний граф називається деревом, а незв'язний граф, компонентами якого є дерева, – лісом.

Характеристичні властивості дерев розкриває така теорема:

Теорема. Для графа G, який має n вершин, еквівалентні такі твердження:

1) граф G – дерево (ациклічний зв'язний граф);
2) граф G – зв'язний і має $n – 1$ ребро;
3) граф G не має циклів і має $n – 1$ ребро;
4) граф G – зв'язний і кожне його ребро є мостом;
5) будь-які дві вершини графа G з'єднує єдиний простий ланцюг;
6) граф G не має циклів, але введення будь-якого нового ребра призводить до появи рівно одного і притому простого циклу.

Теорема Келі. Число різних дерев, які можна побудувати на n вершинах, дорівнює n^{n-2}.

Встановлено, що кожне дерево з n вершинами єдиним чином визначає послідовність виду $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2})$ (її ще називають послідовністю Келі) і навпаки, кожній послідовності довжини $n – 2$ можна поставити у відповідність єдино можливе дерево. Елементами послідовності (вони можуть повторюватися) є номери вершин дерева. Таким чином, дерева, як особливий вид графів, можна задавати за допомогою послідовностей Келі.

В деяких питаннях важливим є поняття *центра мас* дерева. Візьмемо довільне дерево G і зафіксуємо на ньому вершину v. Позначимо через $E_i = (v, u_i)$ довільне ребро з кінцем v. Кожне ребро E_i і вершина v визначають граф $B_i(v, E_i)$. Його називають гілкою, що визначається вершиною v і ребром E_i. Позначимо через $\nu(B_i)$ кількість ребер в графі B_i, а через $\nu(G)$ – загальну кількість ребер у дереві. Очевидно, що $\nu(G) = \sum_{i=1}^{\rho(v)} \nu(B_i)$. Число $\omega(v) = \max_{i=\overline{1,\rho(v)}} \nu(B_i)$ називається *вагою дерева у вершині* v, а будь-яка гілка B_i, для якої $\nu(B_i) = \omega(v)$, – *гілкою з вагою*. *Центром мас* m_0 називається вершина з найменшою вагою, а $\omega(m_0) = \omega(G)$ – *вагою дерева* G.

Теорема. Скінчене дерево G має один центр мас, якщо $\omega(G) \le \frac{1}{2}\nu(G)$, і два сусідніх центри мас, якщо $\omega(G) = \frac{1}{2}(\nu(G)+1)$.

Кістяковим деревом зв'язного графа G називається будь-яка його частина, що містить усі вершини графа G і є деревом.

Кістяковим лісом незв'язного графа G називається сукупність кістякових дерев зв'язних компонент графа G.

Легко показати, що будь-яке кістякове дерево зв'язного графа є результатом вилучення з G рівно $|E| - |V| + 1$ ребер, а для отримання кістякового лісу з незв'язного графа G, який має k компонент зв'язності, необхідно вилучити $|E| - |V| + k$ ребер.

Число $|E| - |V| + k$ називається *цикломатичним числом* (*циклічним рангом*) графа G і позначається $\gamma(G)$. Цикломатичне число дерева дорівнює 0, а цикломатичне число графа, що має один цикл, дорівнює 1.

Означення 2. Плоским графом називається граф, який можна зобразити на площині без пересічних ребер. Граф називається *планарним*, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу. Про планарні графи кажуть, що вони укладаються на площині або мають плоске укладання.

Жордановою кривою називається неперервна лінія без самоперетинів. *Гранню плоского графа* називається множина точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана жордановою кривою, що не перетинає ребер графа. Замкнений маршрут, що обмежує грань, називається її *межею*.

В ролі грані можна розглядати і частину площини, розміщену «зовні» плоского укладання графа. Таку грань називають *зовнішньою* (для кожного плоского укладання графа вона єдина), а всі інші – *внутрішніми* гранями.

Теорема Ейлера. Для всякого зв'язного плоского графа G, в якого *в, р, г* – відповідно число вершин, ребер і граней, справедливе співвідношення: *в* – *р* + *г* = 2.

Дана формула називається *формулою Ейлера*. Її легко поширити і на незв'язні графи: для довільного плоского графа G з *в* вершинами, *р* ребрами, *г* гранями і *к* компонентами зв'язності *в* – *р* + *г* = *к* + 1.

Теорема. Графи $K_{3,3}$ і K_5 не є планарними.

Якщо додати нові вершини, які розміщені на ребрах графів $K_{3,3}$ і K_5, то нові графи також виявляться не планарними. Перший з отриманих графів називається *графом першого типу*, а другий – *графом другого типу*.

Теорема Понтрягіна-Куратовського. Граф є плоским тоді і тільки тоді, коли він не містить частин графу, що є графами першого або другого типу.

Цілий ряд практичних задач зводиться до задачі розфарбування графа.

Нехай $G=(V,E)$ – довільний граф, а $N_k=\{1,2,...,k\}$. Будь-яка функція *f*: $V \to N_k$, яка ставить у відповідність кожній вершині $v \in V$ деяке натуральне число $f(v) \in N_k$, називається *розфарбуванням графа* G.

Число $f(v)$ називається *кольором* або *номером фарби* вершини v.

Розфарбування називається *правильним*, якщо для будь-яких його суміжних вершин u і v виконується $f(u) \neq f(v)$.

Мінімальне число k, при якому існує правильне розфарбування графа G, називається *хроматичним числом* цього графа і позначається $\chi(G)$.

Якщо $\chi(G) = k$, то граф називається *k-хроматичним*.

Правильне розфарбування графа G при $k = \chi(G)$ називається *мінімальним*.

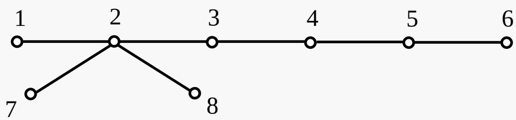
Очевидно, що граф є 1-хроматичним тоді і тільки тоді, коли він порожній, а 2-хроматичним (біхроматичним) – коли він двочастковий. Хроматичне число повного графа K_n дорівнює n.

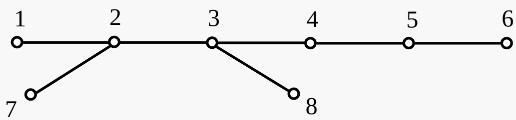
Окреме місце в теорії графів займають дослідження з розфарбування планарних графів. Встановлено, що будь-який плоский граф є 5-хроматичним. Разом з тим, існує так звана гіпотеза чотирьох фарб, яка формулюється так: для правильного розфарбування вершин довільного планарного графа потрібно не більше чотирьох фарб. Остаточного розв'язку цієї задачі (доведення справедливості або хибності гіпотези) досі не знайдено.

4.3.2. Приклади розв'язування задач

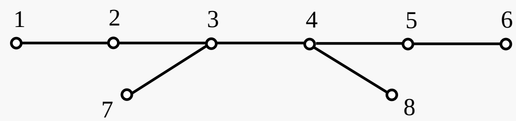
Приклад 1. Побудувати два попарно неізоморфні дерева, які мають 7 ребер і чотири кінцеві вершини.

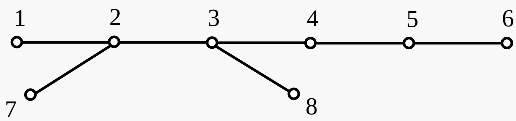
Розв'язання: Очевидно, що дерево з семи ребер, має вісім вершин. Згідно умови задачі, 4 з них – кінцеві, а тому чотири – внутрішні. Очевидно, що дерева, в яких внутрішні вершини мають різні степені, не є ізоморфними, наприклад:





Дерева, в яких внутрішні вершини мають однакові степені, але різну кількість проміжних вершин, між вершинами з однаковими степенями, також не ізоморфні. Наприклад, в зображених нижче графах, між вершинами степеня 1 та 3 в першому зображені є по одній вершині степеня два, а в другому зображені – немає жодної зліва і є дві справа.



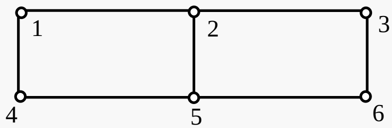


Розглянемо, для прикладу, таку взаємно однозначну відповідність φ між вершинами: $\varphi(2) = 5$, $\varphi(3) = 3$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$ (висячі вершини можна навіть не брати до уваги). Тоді ребро (2, 3) повинно перейти в ребро (5, 3), але такого ребра немає.

Якщо розглянемо таку взаємно однозначну відповідність φ: $\varphi(2) = 4$, $\varphi(3) = 3$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 5$, то ребро (4, 5) повинно перейти в ребро (2, 5), але такого ребра також немає.

Аналогічно можна переконатися, що будь-яка інша взаємно однозначна відповідність не є ізоморфною.

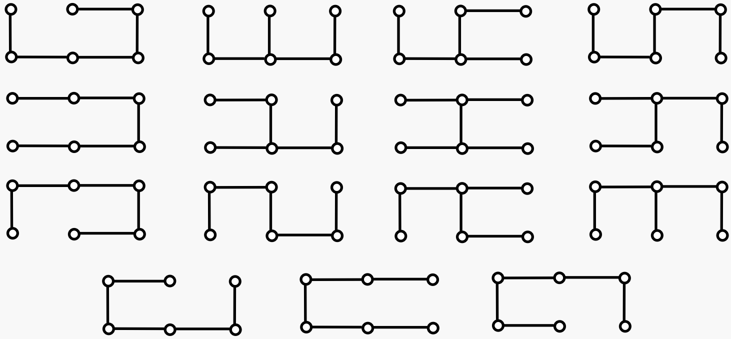
Приклад 2. Побудувати всі кістякові дерева для графа, зображеного на малюнку.



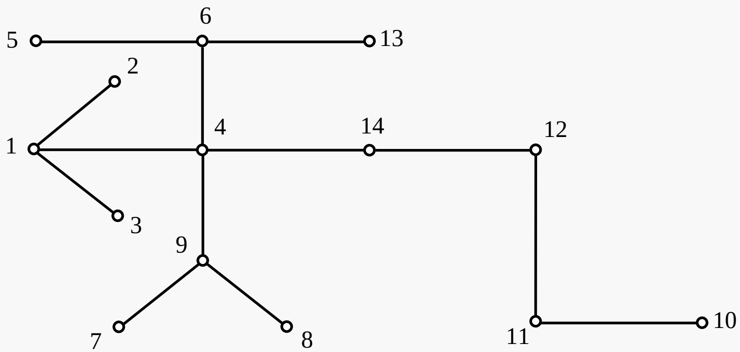
Розв'язання: Граф має 6 вершин і 7 ребер. Дерево з шістьма вершинами має 5 ребер. Отже, для отримання кістякового дерева потрібно вилучити з даного графу 2 ребра так, щоб він не втратив зв'язності. Вилучення ребра не приведе до втрати зв'язності, якщо його вилучати з деякого циклу.

В графі чітко проглядається два цикли (лівий та правий). Вилучаючи по черзі зліва ребра (1, 2), (1, 4), (4, 5), ми маємо кожного разу чотири способи вилучити ребро справа: (5, 2), (2, 3), (3, 6) і (5, 6). Якщо ж зліва вилучити ребро (2, 5), яке є спільним і для правого циклу, то справа буде лише три варіанти вилучення ребра: (2, 3), (3, 6), (5, 6).

Отже всього можна побудувати п'ятнадцять кістякових дерев. Їх зображення мають вид:



Приклад 3. Для дерева, зображеного на малюнку, знайти його центр, вагу дерева в центрі, центр мас та вагу дерева.



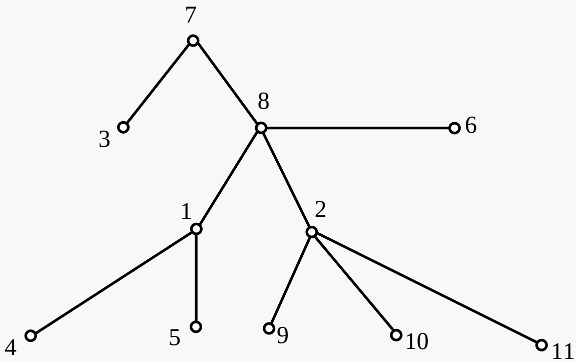
Розв'язання: Найменший ексцентриситет має вершина 14 ($e(14) = 3$). Тому вона – центр дерева.

Гілка $B_1(14, (14, 12))$, що визначається вершиною 14 і ребром (14, 12), має три ребра, а граф $B_2(14, (14, 4))$ – десять. Отже, вага дерева у вершині 14 (центрі дерева) дорівнює десять ($\omega(14) = 10$).

Легко бачити, що $\omega(5) = \omega(13) = \omega(2) = \omega(3) = \omega(7) = \omega(8) = \omega(10) = 13$, $\omega(11) = 12$, $\omega(1) = \omega(6) = \omega(9) = \omega(12) = 11$, $\omega(4) = 4$.

Отже, найменша вага дерева буде у вершині 4 (найважча гілка визначається ребром (4, 14)). Тобто центром маси дерева є вершина 4 і вага дерева дорівнює 4.

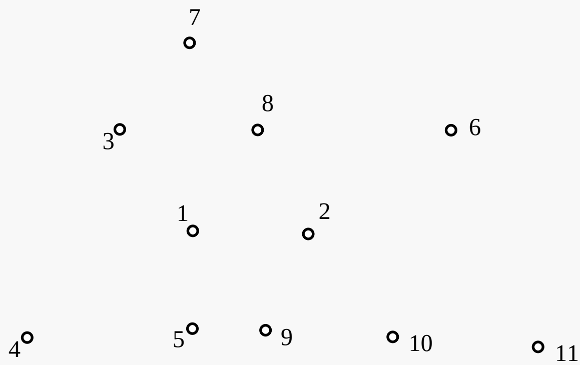
Приклад 4. Записати послідовність Келі для дерева, зображеного на малюнку.



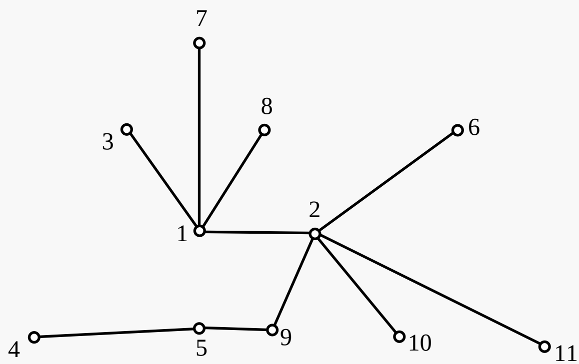
Розв'язання: На першому кроці виберемо висячу вершину з найменшим номером (це вершина 3) і вилучимо її разом із ребром, що їй належить. Запишемо перший елемент послідовності – 7 (7 – це номер вершини отриманого дерева, яка є найближчою до вилученої). Переходимо до наступного кроку алгоритму. Знову вибираємо висячу вершину з найменшим номером. Це вершина 4. Вилучаємо її разом з ребром. Записуємо другий елемент послідовності – 1 (1 – це номер вершини, найближчої до вилученої на другому кроці алгоритму). Повторюючи цю процедуру до тих пір, поки не залишаться дві висячі вершини, зв'язані між собою ребром, отримуємо для даного дерева послідовність (7, 1, 1, 8, 8, 8, 2, 2, 2).

Приклад 5. Побудувати дерево для послідовності (1, 5, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2).

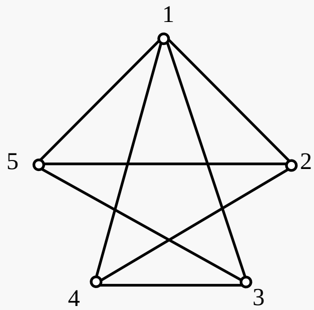
Розв'язання: Очевидно, що дана задача є зворотною до попередньої. Оскільки послідовність місить 9 елементів, а відповідне їй дерево повинно мати на дві вершини більше, то для побудови дерева потрібно відмітити на площині 11 вершин. Зобразимо і пронумеруємо довільним чином ці 11 вершин, наприклад, так, як показано на малюнку:



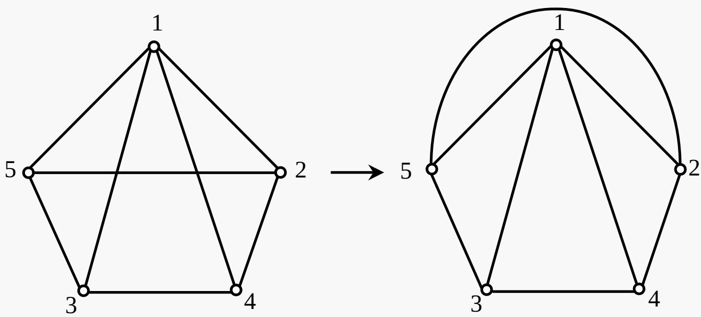
Знайдемо найменше число натурального ряду, яке не зустрічається в заданій послідовності. Це число 3. Відповідно, вершину 3 потрібно з'єднати ребром з вершиною 1, номер якої в заданій послідовності записана першою. Викреслюємо число 1 з послідовності. Число 3 натурального ряду надалі також не береться до розгляду. Наступне число натурального ряду, яке не входить до одержаної послідовності, 4. Тому вершину 4 з'єднуємо ребром з вершиною 5 (наступне число в послідовності). В кінці кінців отримуємо єдино можливе дерево. Воно виявилось таким, як на малюнку.



Приклад 6. Знайти плоске укладання графа, зображеного на малюнку.

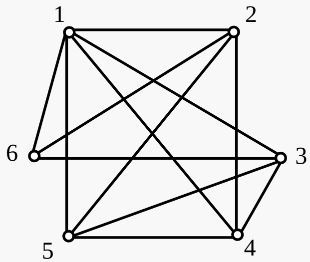


Розв'язання: Розглянемо послідовність ізоморфних перетворень даного графа:



За транзитивністю, заданий граф ізоморфний останньому, який і є його плоским укладанням.

Приклад 7. Перевірити чи граф, зображений на малюнку, планарний.



Розв'язання: Вершини графа легко поділити на дві групи по три вершини в кожній так, щоб кожна з них однієї групи мала ребро з будь-якою вершиною іншої групи: $\{1, 2, 3\}$ та $\{4, 5, 6\}$. Тоді, якщо вилучити ребра, які пов'язують вершини в групі між собою ((1, 2), (1, 3), (5, 4)), то одержимо частину графа, що є графом другого типу. Він не є планарним. Тоді і початковий граф не планарний.

Приклад 8. При якому значенні n хроматичне число n-кутної піраміди дорівнює 4?

Розв'язання: Вершина піраміди має спільне ребро з кожною вершиною основи. Тому для неї при правильному розфарбуванні потрібен окремий колір.

Якщо піраміда має парну кількість бічних граней, то для правильного розфарбовування вершин основи достатньо два кольори, а при непарній кількості – три. Отже, хроматичне число n-кутної піраміди дорівнює 4 при непарному n.

4.3.3. Задачі для самостійного опрацювання

528. Побудувати всі попарно неізоморфні зв'язні графи без циклів із п'ятьма вершинами. Скільки ребер мають ці графи?

529. Побудувати зв'язний граф, який має сім вершин і шість ребер.

530. Чи може зв'язний граф із n вершинами та $n - 1$ ребром мати цикл? Відповідь обґрунтувати.

531. Побудувати всеможливі дерева з чотирма вершинами. Розбити множину дерев з чотирма вершинами на класи за відношенням ізоморфізму.

532.° Побудувати два попарно неізоморфні дерева, які мають:

а) 6 ребер та 3 кінцеві вершини;
б) 6 ребер та 4 кінцеві вершини;
в) 7 ребер та 3 кінцеві вершини;
г) 8 ребер та 3 вершини степеня 3.

533.° Довести, що будь-яке дерево є двочастковим графом. Які дерева є повними двочастковими графами?

534.° Довести, що будь-яке дерево з n вершинами ($n \geq 2$) має принаймні дві кінцеві вершини.

535.° Довести, що дерево має тільки дві кінцеві вершини тоді і тільки тоді, коли воно є простим ланцюгом.

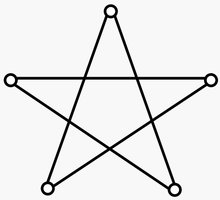
536.° Довести, що в дереві вершина v є розділювальною тоді і тільки тоді, коли $\rho(v) \geq 2$.

537. Яку найбільшу та яку найменшу кількість кінцевих вершин може мати дерево з n вершинами? Яку структуру мають відповідні дерева? Зобразити такі дерева для $n = 9$.

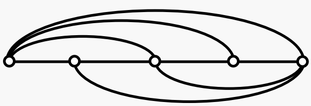
538. Довести, що в дереві кожне ребро є мостом.

539.° Довести, що ліс, який має n вершин і складається з k дерев, містить $n - k$ ребер.

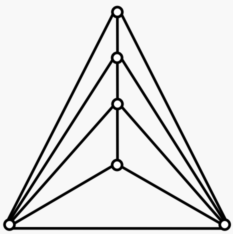
540.° Побудувати кістякові дерева для графів, зображених на малюнку.



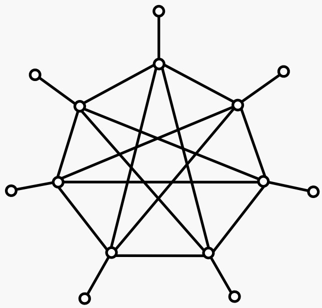
а)



б)

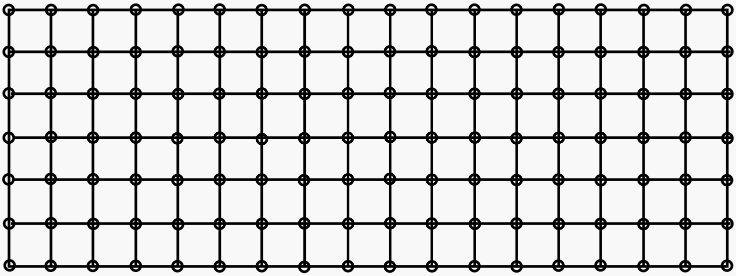


в)

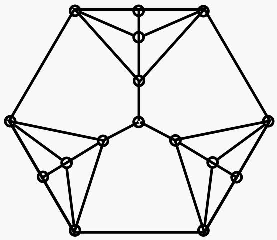


г)

541.° Яку найбільшу кількість ребер можна вилучити з графа, зображеного на малюнку, щоб граф залишився зв’язним?



542. Знайти цикломатичне число для графа, зображеного на малюнку.



543. Побудувати дерево, яке має:

а) один центр і радіус 3;
б) один центр і радіус 4;
в) два центри і радіус 4;
г) два центри і радіус 5.

544.* Довести, що центр будь-якого дерева складається з однієї або з двох суміжних вершин.

545.* Довести, що центр дерева складається з однієї вершини, якщо діаметр дерева парне число, і з двох суміжних вершин, якщо діаметр дерева число непарне.

546.* Довести, що центр дерева належить будь-якому простому ланцюгу максимальної довжини в дереві.

547.* Довести, що в дереві з непарним діаметром будь-які два прості ланцюги максимальної довжини мають принаймні одне спільне ребро.

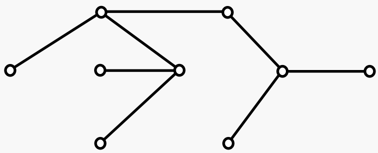
548.° Чи справедливим є твердження: якщо діаметр зв’язного графа G дорівнює k ($k \geq 3$), то для G існує кістякове дерево, діаметр якого також дорівнює k?

549.* Для довільного k ($k > 2$) побудувати граф, діаметр якого дорівнює k, а будь-яке його кістякове дерево має діаметр $2k$.

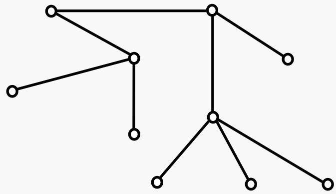
550.* Довести, що для довільного зв'язного графа з діаметром k існує кістякове дерево, діаметр якого не перевищує $2k$.

551.* Довести, що діаметр дерева T з $n + 1$ вершиною дорівнює 2 тоді і тільки тоді, коли $T = K_{1,n}$.

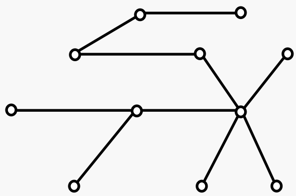
552. Записати послідовність Келі для дерев, зображених на малюнку:



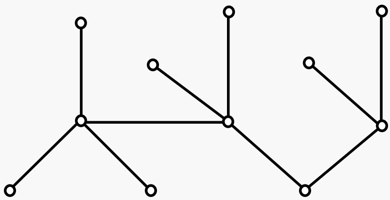
а)



б)



в)



г)

553.° Записати послідовності Келі для представників всеможливих класів ізоморфних дерев з:

а) п'ятьма вершинами; б) шістьма вершинами.

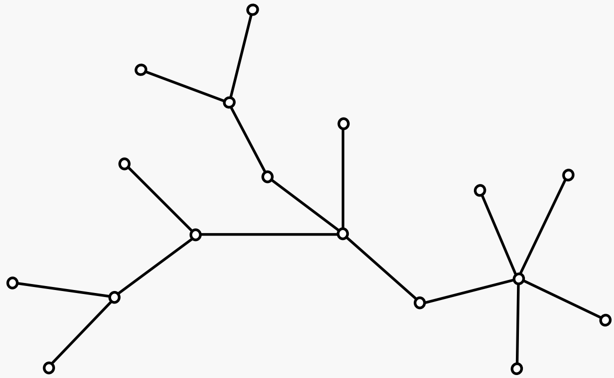
Побудувати відповідні графи.

554. Побудувати дерево для послідовності Келі:

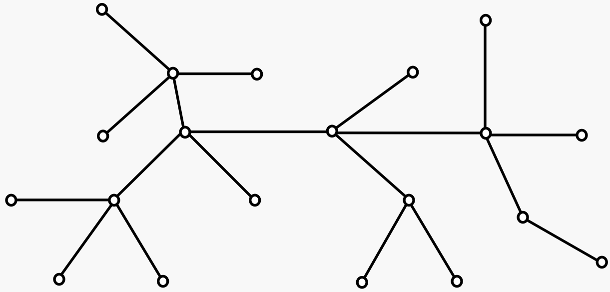
а) (1, 2, 3, 4, 5);
б) (1, 2, 3, 3, 1);
в) (3, 3, 3, 3, 3, 3);
г) (1, 2, 2, 4, 2, 2, 5);
д) (4, 4, 3, 6, 1, 6, 6, 2, 4).

555.° Побудувати довільне дерево з вісьмома (десятьма) вершинами, які є вершинами восьмикутника (десятикутника), що не є зіркою та простим ланцюгом і записати для нього послідовність Келі. Записати послідовність Келі для графа, ізоморфного побудованому, та побудувати його. Знайти центр мас дерева та його вагу.

556. Знайти центр мас та вагу дерев, зображених на малюнку.

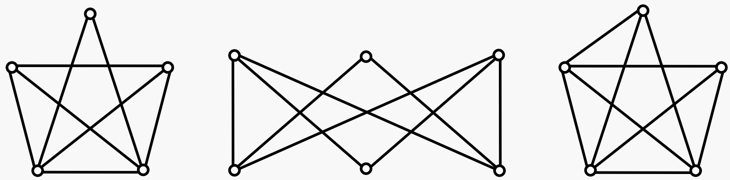


а)



б)

557. Показати, що всі графи, зображені на малюнку, планарні.

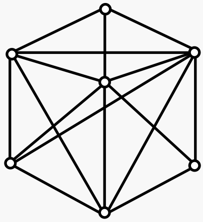


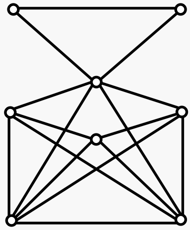
а) б) в)

558. Перевірити, чи справедлива формула Ейлера для графів, зображених на попередньому малюнку.

559. Чи існує граф із чотирма вершинами, що не є планарним?

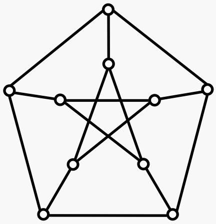
560.° Перевірити чи графи, зображені на малюнку, планарні.

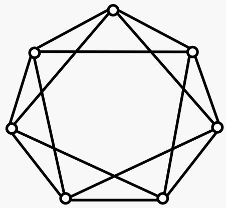




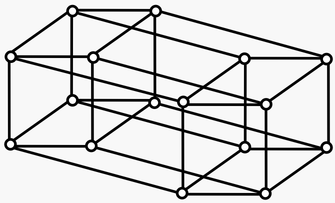
а) б)

561.° Визначити, чи містять графи, зображені на малюнку, частини графів першого або другого роду.





а) б)



в)

562. Довести, що для зв'язного планарного графа G з n вершинами ($n \geq 3$) і m ребрами виконується нерівність $m \leq 3n - 6$.

563.° Довести, що кількість внутрішніх граней довільного плоского графа G дорівнює цикломатичному числу $\gamma(G)$ графа G.

564. Чи існує планарний граф, який має:

а) 7 вершин і 16 ребер; б) 8 вершин і 17 ребер?

565.° Яку найбільшу кількість граней може мати плоский граф із п'ятьма вершинами? Побудувати цей граф.

566.* Чи існує плоский граф із шістьма вершинами, що має 9 граней?

567.* Побудувати всі попарно неізоморфні плоскі графи з шістьма вершинами, що мають 8 граней.

568.* Довести, що для довільного графа G з n вершинами при $n < 8$ виконується твердження: хоча б один із графів G або граф $\overline{G}$ є планарним.

569.° Побудувати граф G із вісьмома вершинами такий, що граф G і його доповнення $\overline{G}$ не є планарними графами.

570.* Довести, що графи G та $\overline{G}$ не можуть бути одночасно планарними, якщо кількість вершин у них не менше 11.

571.° Побудувати планарний граф із вісьмома вершинами, доповнення якого є також планарним графом.

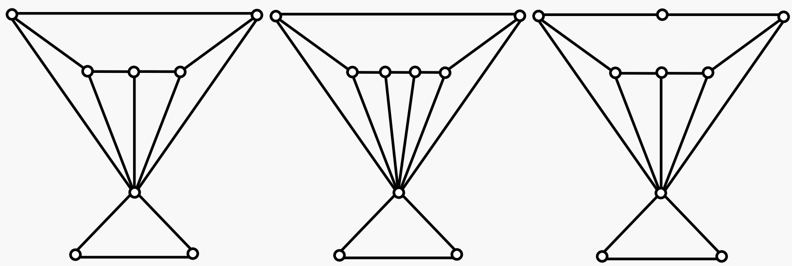
572.* Довести, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не перевищує 5.

573.* Довести, що в будь-якому планарному графі з n вершинами є принаймні чотири вершини, степені яких не перевищують 5 ($n \geq 4$).

574.* Довести, що в будь-якому планарному графі є або вершина степеня менше 3, або грань степеня менше 6.

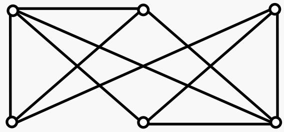
575. Побудувати плоский граф, серед вершин якого знайдеться чотири вершин, степені яких не перевищують 5.

576. Знайти хроматичні числа та мінімальні правильні розфарбування графів, зображених на малюнку.

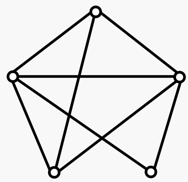


а) б) в)

577. Визначити хроматичні числа графів, зображених на малюнку.



а)



б)

578. Визначити хроматичне число:

а) простого циклу довжини $2k$;

б) простого циклу довжини $2k + 1$, $k \in N$;

в) дерева.

579.* Довести, що для довільного планарного графа G виконується $\chi(G) \le 5$.

580. Побудувати плоский граф G з найменшою кількістю вершин такий, що $\chi(G) = 4$.

581.° Довести, що для правильного розфарбування довільного кубічного графа достатньо чотирьох фарб.

ВІДПОВІДІ. ВКАЗІВКИ. РОЗВ'ЯЗАННЯ

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ БУДОВИ КОМП'ЮТЕРА

Логічні структури

1. а) істинне висловлення;

б) хибне висловлення;

в) не є висловленням;

г) істинне висловлення;

д) не є висловленням;

е) не є висловленням;

є) хибне висловлення;

ж) істинне висловлення;

з) не є висловленням;

и) не є висловленням;

і) хибне висловлення;

ї) не є висловленням;

й) істинне висловлення.

2. а) Дніпро не впадає в Чорне море. Дане висловлення істинне, а заперечення до нього – хибне;

б) Число 32 ділиться на 8. Дане висловлення хибне, а заперечення до нього – істинне;

в) $3 \le 5$. Дане висловлення хибне, а заперечення до нього – істинне;

г) $3 > 5$. Дане висловлення істинне, а заперечення до нього – хибне;

д) Не всі прості числа непарні (або «Існує парне просте число»). Дане висловлення хибне, а заперечення до нього – істинне.

3. а) є; б) не є; в) є; г) не є; д) є; е) є.

4. а) A – істинне; б) C – істинне; в) B – хибне; г) D – хибне; д) E може бути як істинним, так і хибним.

5. а) A – істинне; б) B – хибне; в) C –хибне; г) D – істинне.

6. а) A – істинне; б) B – хибне; в) C –хибне; г) D – істинне.

7. а) хибне; б) хибне; в) істинне; г) істинне; д) істинне; е) істинне; є) хибне; ж) істинне; з) істинне.

8. а) $\bar{A} \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{C} \wedge \bar{D}$; б) Оскільки в реченні дієслово «піде» зустрічається двічі, то цим, очевидно, наголошується на такій структурі речення: $A \wedge (B \vee C \vee D)$, хоча однозначного змісту речення не має. Отже, може бути і така структура: $(A \wedge B) \vee C \vee D$; в) $A \Leftrightarrow B$; г) $A \Rightarrow B \wedge C \vee D$; д) $A \wedge B \Rightarrow C$; е) $A \wedge B \Rightarrow C$; є) $A \vee B$.

9. а) $A \Rightarrow B$, істинне; б) $A \Leftrightarrow B \wedge C$, хибне; в) $A \Rightarrow B$, хибне; г) $\overline{\bar{A} \Leftrightarrow \bar{B} \wedge \bar{C}}$, хибне; д) $(A \Leftrightarrow B \wedge C) \wedge (\bar{A} \Leftrightarrow \bar{B} \vee \bar{C})$, істинне; е) $A \wedge B$, істинне; є) $A \wedge B \Rightarrow \overline{\bar{C} \Rightarrow D}$, істинне.

10. а) «Якщо числа a і b діляться на 3, то сума $a + b$ ділиться на 3»;

б) «Якщо сума чисел $a + b$ ділиться на 3, то числа a і b діляться на 3»;

в) «Якщо число a ділиться на 3 і сума $a + b$ ділиться на 3, то число b ділиться на 3»;

г) «Якщо число b не ділиться на 3, а сума $a + b$ ділиться на 3, то число a не ділиться на 3»;

д) «Якщо число a не ділиться на 3, то число b не ділиться на 3 або сума $a + b$ не ділиться на 3»;

е) «Якщо число a не ділиться на 3, то з того, що число b ділиться на 3 слідує, що сума $a + b$ не ділиться на 3»;

є) «Якщо з того, що сума $a + b$ ділиться на 3 випливає, що число b ділиться на 3, то число a ділиться на 3»;

ж) «Сума $a + b$ ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли число a ділиться на 3 або число b ділиться на 3».

11. Істинне.

12. а) хибне (істинне); б) хибне (істинне); в) істинне, якщо висловлення A істинне і хибне, якщо висловлення A хибне (істинне); г) істинне (істинне, якщо висловлення *A* істинне і хибне, якщо висловлення *A* хибне).

13. Хибне.

14. а) досить, істинне; б) досить, хибне; в) досить, істинне; г) досить, істинне; д) досить, істинне; е) досить, істинне.

15. Відповіді неоднозначні. Розв'язки задачі можуть бути, наприклад, такі:

а) $$A\overset{7}{\Rightarrow}\overset{3}{\overline{B}}\overset{5}{\vee}\left(\overset{1}{\overline{A}}\overset{2}{\Leftrightarrow}C\right)\overset{4}{\wedge}B\overset{6}{\vee}C;$$

б) $$\left(A\overset{2}{\Rightarrow}\left(B\overset{1}{\Rightarrow}C\right)\right)\overset{6}{\Rightarrow}\left(\left(A\overset{3}{\Rightarrow}B\right)\overset{5}{\Rightarrow}\left(A\overset{4}{\Rightarrow}C\right)\right);$$

в) $$\left(A\overset{3}{\wedge}\left(B\overset{2}{\vee}\overset{1}{\overline{A}}\right)\right)\overset{7}{\wedge}\left(\left(\overset{4}{\overline{B}}\overset{5}{\Rightarrow}C\right)\overset{6}{\vee}C\right);$$

г) $$\left(A\overset{3}{\wedge}\left(\overset{1}{\overline{B}}\overset{2}{\Rightarrow}C\right)\right)\overset{8}{\vee}\left(\left(\overset{4}{\overline{A}}\overset{5}{\Leftrightarrow}C\right)\overset{7}{\wedge}\overset{6}{\overline{B}}\right);$$

д) $$\left(A\overset{5}{\Rightarrow}\overset{4}{\overline{\left(B\overset{2}{\vee}C\right)\overset{3}{\wedge}\overset{1}{\overline{D}}}}\right)\overset{10}{\Rightarrow}\left(\overset{6}{\overline{C}}\overset{7}{\vee}B\right)\overset{9}{\wedge}C\overset{11}{\Leftrightarrow}\overset{8}{\overline{A}}.$$

16. а) $$\left(A\wedge\left(\overline{B}\right)\right)\Rightarrow\left(\left(\overline{C}\right)\vee\left(\left(\left(\overline{\overline{D}}\right)\right)\wedge B\right)\right);$$

б) $$\left(\overline{\left(A\wedge\left(B\vee\left(\overline{C}\right)\right)\right)}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\overline{A}\right)\wedge\left(\left(\overline{B}\right)\vee C\right)\right);$$

в) $$\left(\left(A\Rightarrow B\right)\wedge\left(B\Rightarrow C\right)\right)\Rightarrow\left(A\Rightarrow\left(B\wedge C\right)\right);$$

г) $$\left(B\Rightarrow\left(A\wedge C\right)\right)\wedge\left(\overline{\left(\left(A\vee C\right)\Rightarrow B\right)}\right).$$

17. а) 0; б) 1.

19. а) невірно складені другий і третій стовпець таблиці; б) невірний порядок виконання операцій; в) невірний порядок виконання операцій. Він повинен бути таким: $A\overset{2}{\Rightarrow}C\overset{3}{\Rightarrow}A\overset{1}{\wedge}B$.

20. 16; оскільки головною операцією є імплікація, то вираз буде хибним лише в одному випадку, коли висловлення А істинне, а всі інші – хибні.

23. а) істинна; б) хибна при наборі (0, 1, 0); в) істинна; г) хибна при наборах (0, 1, 0) і (0, 0, 0).

26. а) суперечність; б) виконувана; в) виконувана; г) тавтологія; д) тавтологія; е) виконувана; є) суперечність; ж) тавтологія; з) виконувана; и) тавтологія.

32. а) рівносильні; б) рівносильні; в) не рівносильні; г) рівносильні.

33. а) ні; б) ні; в) ні; г) так; д) так; е) ні.

35. а) T; б) $A\vee B$; в) $A\wedge B$; г) $\overline{A}\wedge\overline{C}$; д) $A\vee(B\wedge C)$; е) A; є) F; ж) T; з) $\overline{A}\vee B$; и) T; і) $\overline{A}\vee B\vee\overline{C}$; ї) T.

36. а) не правильна заміна $A\Rightarrow B$ на $A\vee\overline{B}$; б) порушено порядок операцій; повинно бути $A\wedge\overline{\overline{A\vee B}}\wedge\overline{A}\equiv A\wedge(A\vee B)\wedge\overline{A}$; в) на другому кроці невірно застосовано закон де Моргана.

37. а) $\overline{(\overline{A}\vee B)\wedge(\overline{B}\vee A)}\vee A\vee B$;

б) $\overline{(\overline{A}\vee B)\wedge(\overline{B}\vee\overline{A})}\vee\overline{C}\vee A$;

в) $\overline{(\overline{A}\vee B)\wedge(\overline{B}\vee A)\wedge(A\vee\overline{B})\wedge(B\vee\overline{A})}\vee(A\vee B)\wedge(\overline{A}\vee\overline{B})$;

г) $\overline{\overline{(\overline{A}\vee\overline{B})\wedge(B\vee A)}\vee C}\vee(\overline{A}\vee\overline{C})\wedge(C\vee A)$;

д) $\left(\overline{\overline{A}\vee(\overline{B}\vee C)\wedge(\overline{C}\vee B)}\vee\left(\overline{\overline{A}\vee B}\vee C\right)\wedge(\overline{C}\vee\overline{A}\vee B)\right)\wedge$

$\wedge\left(\overline{\left(\overline{\overline{A}\vee B}\vee C\right)\wedge(\overline{C}\vee\overline{A}\vee B)}\vee\overline{A}\vee(\overline{B}\vee C)\wedge(\overline{C}\vee B)\right)$.

38. а) $\overline{\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}\wedge\overline{A}\wedge\overline{C}}$; б) $\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{A\wedge\overline{B}}}$; в) $\overline{\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}}\wedge\overline{A}\wedge\overline{C}}$; г) $\overline{\overline{\overline{A\wedge\overline{B}}\wedge\overline{C}}\wedge A}$; д) $\overline{\overline{\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}}\wedge\overline{A}}$.

39. а) $\overline{\overline{A}\vee B}\vee\overline{\overline{B}\vee\overline{C}}$; б) $A\vee B\vee\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}$; в) $\overline{\overline{A\vee B}\vee C}\vee\overline{\overline{C}\vee B}$; г) $\overline{\overline{\overline{A}\vee\overline{\overline{B}\vee\overline{C}}}\vee B\vee\overline{A}}\vee\overline{B}$; д) $\overline{\overline{A}\vee B}\vee\overline{\overline{B}\vee C}\vee\overline{A}\vee C$.

Двійкові системи числення та булеві функції

46. $x\vee y=\overline{\overline{x}\wedge\overline{y}}$; $x\Rightarrow y=\overline{x\wedge\overline{y}}$; $x\Leftrightarrow y=\overline{x\wedge\overline{y}}\wedge\overline{y\wedge\overline{x}}$;
$x\oplus y=\overline{\overline{x\wedge\overline{y}}\wedge\overline{y\wedge\overline{x}}}$; $x|y=\overline{x\wedge y}$; $x\downarrow y=\overline{x}\wedge\overline{y}$.

47. $x\vee y=\overline{x}\Rightarrow y$; $x\Leftrightarrow y=\overline{(x\Rightarrow y)\Rightarrow\overline{y\Rightarrow x}}$;

$$x\oplus y=(x\Rightarrow y)\Rightarrow\overline{y\Rightarrow x};\ x|y=x\Rightarrow\overline{y};\ x\downarrow y=\overline{\overline{x}\Rightarrow y}.$$

49. $\overline{x}=x\downarrow x$; $x\wedge y=\overline{\overline{x}\vee\overline{y}}=\overline{x}\downarrow\overline{y}=(x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y)$;

$$x\vee y=\overline{\overline{x\vee y}}=\overline{x\downarrow y}=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y);$$

$$x\Rightarrow y=\overline{x}\vee y=(\overline{x}\downarrow y)\downarrow(\overline{x}\downarrow y)=((x\downarrow x)\downarrow y)\downarrow((x\downarrow x)\downarrow y);$$

$$x\Leftrightarrow y=x\Rightarrow y\wedge y\Rightarrow x=\overline{x}\vee y\wedge\overline{y}\vee x=\overline{\overline{\overline{x}\vee y}\vee\overline{\overline{y}\vee x}}=\overline{\overline{x}\vee y}\downarrow\overline{\overline{y}\vee x}=$$

$$=(\overline{x}\downarrow y)\downarrow(\overline{y}\downarrow x)=((x\downarrow x)\downarrow y)\downarrow((y\downarrow y)\downarrow x);$$

$$x|y=\overline{x\wedge y}=\overline{(x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y)}=((x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y))\downarrow((x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y));$$

$$x\oplus y=\overline{x\Leftrightarrow y}=\overline{((x\downarrow x)\downarrow y)\downarrow((y\downarrow y)\downarrow x)}=$$

$$=(((x\downarrow x)\downarrow y)\downarrow((y\downarrow y)\downarrow x))\downarrow(((x\downarrow x)\downarrow y)\downarrow((y\downarrow y)\downarrow x)).$$

58. Елементарна кон'юнкція – б); елементарна диз'юнкція – а), г), є); елементарна кон'юнкція і елементарна диз'юнкція – в); ні те, ні інше – д), е).

59. Кнф – г), д), е); днф – а), г), д); ні те, ні інше – б), в).

60. а) $(\overline{A}\wedge\overline{B})\vee(\overline{A}\wedge C)\vee(B\wedge C)$;

б) $\overline{A}\vee(\overline{C}\wedge B)\vee(\overline{B}\wedge C)$;

в) $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C})\vee(\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C})$;

г) $(B\wedge\overline{C})\vee(C\wedge\overline{B})$;

д) $A\wedge\overline{B}$;

е) $B\vee\overline{C}$;

є) $(A\wedge B\wedge\overline{C})\vee(A\wedge C)\vee\overline{A}\vee\overline{B}$;

ж) $(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\wedge\overline{D})\vee(A\wedge B\wedge C\wedge\overline{D})$;

з) $(\overline{B}\wedge C\wedge A)\vee\overline{A}\vee\overline{D}\vee B$;

и) $(A\wedge D\wedge C)\vee(\overline{B}\wedge D\wedge C)$.

61. а) $\left(A\vee\overline{C}\right)\wedge\left(B\vee\overline{C}\right)$;

б) $(A\vee C)\wedge\left(\overline{B}\vee C\right)\wedge(A\vee D)\wedge\left(\overline{B}\vee D\right)$;

в) $A\wedge\left(C\vee\overline{B}\right)$;

г) $(B\vee A)\wedge(D\vee A)\wedge\left(\overline{B}\vee\overline{C}\vee D\right)$;

д) $\left(B\vee\overline{D}\vee A\right)\wedge\left(B\vee\overline{D}\vee\overline{C}\right)\wedge\left(\overline{A}\vee C\vee\overline{B}\right)\wedge\left(\overline{A}\vee C\vee D\right)$;

е) $A\vee\overline{B}$;

є) $A\wedge\overline{B}$;

ж) $\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee D\right)\wedge\left(\overline{A}\vee C\vee D\right)$;

з) $(A\vee B)\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\right)$;

и) $\overline{A}\vee B$.

62. а) тавтологія; б) тавтологія; в) не є тавтологією; г) не є тавтологією; д) не є тавтологією.

63. а) суперечність; б) суперечність; в) не є суперечністю.

64. а) $(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)$;

б) $(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee$

$\vee\left(B\wedge\overline{A}\wedge C\right)\vee\left(B\wedge\overline{A}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(C\wedge\overline{A}\wedge\overline{B}\right)$;

в) $\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)$;

г) $\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)$;

д) $(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee$

$\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)$;

е) $(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)$;

є) $(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee$

$\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)$;

ж) $\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee$

$\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)$;

и) $(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)$.

65. а) $(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B\vee \overline{C})\wedge(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge(\overline{A}\vee \overline{B}\vee C)$;

б) $(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B\vee \overline{C})\wedge(A\vee \overline{B}\vee C)\wedge(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge(\overline{A}\vee \overline{B}\vee C)$;

в) $(A\vee \overline{B}\vee C)\wedge(A\vee \overline{B}\vee \overline{C})\wedge(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge(A\vee B\vee \overline{C})\wedge$

$\wedge(\overline{A}\vee B\vee \overline{C})\wedge(\overline{A}\vee \overline{B}\vee \overline{C})$;

г) $(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge(\overline{A}\vee \overline{B}\vee C)\wedge(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B\vee \overline{C})$;

д) $(A\vee B\vee C)\wedge(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge(A\vee \overline{B}\vee C)\wedge(A\vee B\vee \overline{C})$;

е) $(\overline{A}\vee B\vee C)\wedge(A\vee \overline{B}\vee C)\wedge(\overline{A}\vee \overline{B}\vee C)\wedge(\overline{A}\vee B\vee \overline{C})\wedge(\overline{A}\vee \overline{B}\vee \overline{C})$;

є) $(\overline{A}\vee \overline{B}\vee C)\wedge(\overline{A}\vee \overline{B}\vee \overline{C})$;

ж) $(A\vee \overline{B}\vee C)\wedge(A\vee \overline{B}\vee \overline{C})\wedge(\overline{A}\vee \overline{B}\vee C)\wedge(\overline{A}\vee B\vee \overline{C})$;

з) $(\overline{A}\vee B\vee \overline{C})\wedge(A\vee B\vee \overline{C})$;

и) Це тавтологія, отже вираз не можна подати у вигляді Дкнф.

66. а) $\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}$; б) $\overline{x_1}\wedge x_2$; в) $x_1\wedge x_2$; г) $x_1\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}$; д) $x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3\wedge x_4$.

67. а) $F(x,y)=(\overline{x}\wedge\overline{y})\vee(x\wedge y)$;

б) $F(x,y)=x\wedge\overline{y}$;

в) $F(x,y,z)=(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z)$;

г) $F(x,y,z)=(\overline{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge\overline{z})$;

д) $F(x,y,z)=(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z})\vee(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z)$;

е) $F(x,y,z)=(\overline{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge z)$;

є) $F(x,y,z,v)=(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z}\wedge v)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z\wedge\overline{v})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}\wedge\overline{v})\vee$

$\vee(x\wedge y\wedge z\wedge\overline{v})\vee(x\wedge y\wedge z\wedge v)$.

68. а) $x_1\vee x_2$; б) $\overline{x_1}\vee x_2$; в) $\overline{x_1}\vee\overline{x_2}$; г) $x_1\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}$; д) $\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}$; е) $x_1\vee x_2\vee\overline{x_3}$; є) $\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3\vee\overline{x_4}$; ж) $x_1\vee\overline{x_2}\vee x_3\vee x_4$.

69. а) $F(x,y)=(x\vee\overline{y})\wedge(\overline{x}\vee\overline{y})$; б) $F(x,y)=x\vee\overline{y}$;

в) $F(x,y,z)=x\vee\overline{y}\vee\overline{z}$;

г) $F(x,y,z)=\left(\overline{x}\vee y\vee z\right)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\right)$;

д) $F(x,y,z)=\left(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\right)\wedge(x\vee y\vee z)\wedge\left(x\vee\overline{y}\vee z\right)$;

е) $F(x,y,z)=\left(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\right)\wedge\left(x\vee y\vee\overline{z}\right)\wedge\left(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z\right)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee z\right)$;

є) $F(x,y,z)=(x\vee y\vee z)\wedge\left(x\vee\overline{y}\vee z\right)\wedge\left(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\right)$;

ж) $F(x,y,z,v)=\left(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{v}\right)\wedge\left(x\vee y\vee\overline{z}\vee v\right)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\vee v\right)\wedge$
$\wedge\left(x\vee y\vee\overline{z}\vee\overline{v}\right)\wedge(x\vee y\vee z\vee v)$.

70. $f_1(A,B,C)=\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)$;

$f_2(A,B,C)=\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)$;

$f_3(A,B,C)=\left(\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)$.

71. $f_1(A,B,C)=1\oplus B\oplus C\oplus ABC$;

$f_2(A,B,C)=1\oplus A\oplus B\oplus BC$; $f_3(A,B,C)=A\oplus B\oplus AC\oplus ABC$.

72. $f_1(A,B,C)=(A\vee B\vee C)\wedge\left(A\vee B\vee\overline{C}\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee C\right)$;

$f_2(A,B,C)=\left(A\vee B\vee\overline{C}\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee C\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee\overline{C}\right)\wedge$
$\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\right)\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)$; $f_3(A,B,C)=(A\vee B\vee C)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee C\right)$.

73. а) $(A\wedge B)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\right)$; б) $\left(\overline{A}\wedge B\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\right)\vee(A\wedge B)$;

в) $(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)$;

г) $\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)$;

д) $(A\wedge B\wedge C)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee$
$\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}\right)$;

е) $\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\wedge D\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\wedge D\right)\vee(A\wedge B\wedge C\wedge D)\vee$
$\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\wedge D\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\wedge D\right)$;

є) $(A\wedge B\wedge C\wedge D)\vee\left(A\wedge B\wedge C\wedge\overline{D}\right)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\wedge D\right)\vee$
$\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\wedge D\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\wedge D\right)\vee\left(A\wedge B\wedge\overline{C}\wedge\overline{D}\right)\vee$
$\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge C\wedge\overline{D}\right)\vee\left(A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\wedge\overline{D}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge C\wedge\overline{D}\right)\vee$
$\vee\left(\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}\wedge\overline{D}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge C\wedge\overline{D}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\wedge\overline{D}\right)$.

74. а) $\left(\overline{A}\vee B\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\right)$; б) $\left(\overline{A}\vee B\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\right)$;

в) $(A\vee B\vee C)\wedge\left(A\vee B\vee\overline{C}\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee C\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee C\right)\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\right)$;

г) $(A\vee B\vee C)\wedge\left(A\vee B\vee\overline{C}\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee C\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)\wedge$

$\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee\overline{C}\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee C\right)\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\right)$;

д) $(A\vee B\vee C\vee D)\wedge\left(A\vee B\vee\overline{C}\vee D\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee C\vee D\right)\wedge$
$\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{C}\vee D\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee C\vee D\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee\overline{C}\vee D\right)\wedge$
$\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\vee D\right)$;

е) $(A\vee B\vee C)\wedge\left(A\vee B\vee\overline{C}\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee C\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{C}\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee C\right)$;

є) $(A\vee B\vee C\vee D)\wedge\left(A\vee B\vee C\vee\overline{D}\right)\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee C\vee D\right)\wedge$
$\wedge\left(A\vee\overline{B}\vee C\vee\overline{D}\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee C\vee D\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee C\vee\overline{D}\right)\wedge$
$\wedge\left(A\vee B\vee\overline{C}\vee D\right)\wedge\left(\overline{A}\vee B\vee\overline{C}\vee D\right)$.

75. а) так; б) ні; в) ні.

76. а) так; б) ні; с) так.

77. 16.

78. 32.

79. а) $f(x)=1$; б) $f(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2\oplus x_1x_2$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_3\oplus x_1x_3$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\oplus x_1x_2x_3$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=1\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2x_3$;

е) $f(x_1,x_2,x_3)=1\oplus x_1\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3$.

80. $f(x_1,x_2,x_3)=1\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3$; на тих наборах, в яких нуль зустрічається непарне число раз.

84. а) $f(x_1,x_2)=1\oplus x_1\oplus x_2$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2x_3$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2x_3$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=1\oplus x_3$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=x_2\oplus x_3\oplus x_1x_2\oplus x_2x_3$.

87. $f(x)=0$; $f(x)=x$; $f(x)=1$; $f(x,y)=0$; $f(x,y)=x$; $f(x,y)=y$; $f(x,y)=x\wedge y$; $f(x,y)=x\vee y$; $f(x,y)=1$.

88. $F_1^* = F_{16}$; $F_2^* = F_{12}$; $F_3^* = F_{13}$; $F_4^* = F_{14}$; $F_5^* = F_{15}$; $F_6^* = F_6$; $F_7^* = F_7$; $F_8^* = F_9$; $F_9^* = F_8$; $F_{10}^* = F_{10}$; $F_{11}^* = F_{11}$; $F_{12}^* = F_2$; $F_{13}^* = F_3$; $F_{14}^* = F_4$; $F_{15}^* = F_5$; $F_{16}^* = F_1$.

90. F_6; F_7; F_{10}; F_{11}.

92. Від двох змінних можна побудувати $2^{2^2} = 16$ різних булевих функцій, а від трьох змінних – $2^{2^3} = 256$. Від двох змінних існує 8 поліномів Жегалкіна першого степеня: 0,1, x, $1 \oplus x$, y, $1 \oplus y$, $x \oplus y$, $1 \oplus x \oplus y$, а від трьох змінних – 16 (до кожної з попередніх функцій додати нуль або третю змінну z). Отже, існує однакова кількість лінійних і нелінійних функцій від двох змінних (по 8), а від трьох змінних нелінійних функцій більше, ніж лінійних (на 240).

93. До класу P_0 належать функції від однієї змінної $f(x) = 0$; $f(x) = x$ та функції від двох змінних: F_1; F_2; F_3; F_4; F_6; F_7; F_9; F_{12}. До класу P_1 належать функції від однієї змінної $f(x) = x$; $f(x) = 1$ та функції від двох змінних: F_2; F_6; F_7; F_8; F_{12}; F_{13}; F_{14}; F_{16}.

Застосування алгебри висловлень

95. д) введемо позначення: *A* – «*a* ділиться на *b*», *B* – «*b* ділиться на *c*», *C* – «а ділиться на *c*». Тоді дану теорему можна подати символічно $A \wedge B \Rightarrow C$. Протилежна теорема запишеться так: «Якщо *a* не ділиться на *b* або *b* не ділиться на *c*, то *a* не ділиться на *c*». Обернена: «Якщо *a* ділиться на *c*, то знайдеться таке число *b*, що *a* ділиться на *b* і *b* ділиться на *c* «. Обернена до протилежної: «Якщо *a* не ділиться на *c*, то немає такого числа *b*, щоб *a* ділилося на *b* і *b* ділилося на *c* «. Пряма і обернена до протилежної теореми істинні, а протилежна і обернена хибні.

96. а) обернена до протилежної теорема запишеться так: «Якщо m або n парне число, то їх добуток також парне число». Для її доведення подайте парний співмножник у вигляді добутку $2k$, де k – ціле число.

б) обернену до протилежної теорему можна записати так: «Якщо при перетині двох прямих, що лежать в одній площині, третьою прямою внутрішні різносторонні кути не рівні, то ці прямі не паралельні». При доведенні цієї теореми можна перейти до розгляду внутрішніх односторонніх кутів і використати побудову трикутника за стороною та прилеглими кутами.

в) обернена до протилежної теорема запишеться так: «Для будь-яких двох прямих, що перетинаються, не існує жодної прямої, паралельної обом цим прямим». Для доведення цієї теореми краще скористатися методом від супротивного, що призведе до заперечення аксіоми про існування і єдність прямої, яка проходить через задану точку паралельно до заданої прямої.

г) обернена до протилежної теорема запишеться так: «Якщо множина обмежена, то вона не є множиною простих чисел». Нехай *M* – деяка множина натуральних чисел і існує таке $m \in N$, що $a < m$ для будь-якого $a \in M$. Оскільки число $m!+1$ більше за m, то воно не належить *M*. З іншої сторони, це число не ділиться на жодне з чисел (крім хіба що 1) з множини *M*. Тоді або воно просте, або існує просте число p ($p \notin M$) таке, що $m!+1$ ділиться на p. Отже, *M* не містить всі прості числа. В силу довільності множини *M* теорема має місце для будь-якої обмеженої множини натуральних чисел.

97. Обидві теореми можна довести методом контрапозиції.

98. а) якщо *A*, то *B*; б) якщо *B*, то *A*; в) якщо *B*, то *A*; г) якщо *A*, то *B*.

99. а) якщо чотирикутник є прямокутником, то його діагоналі рівні;

б) якщо число закінчується цифрою 0, то воно ділиться на 5;

в) якщо дійсні і уявні частини комплексних чисел рівні, то ці числа рівні;

г) якщо чотирикутник – ромб, то кожна з його діагоналей є віссю симетрії.

100. а) точка рівновіддалена від кінців відрізка тоді і тільки тоді, коли вона належить перпендикуляру, проведеному до відрізка через його середину;

б) точка буде центром кола радіуса r, яке дотикається до даної прямої в даній площині тоді і тільки тоді, коли вона належить одній з двох прямих, які паралельні даній прямій і знаходяться по різні сторони від неї на відстані r;

в) нове рівняння має ті ж самі корені, що й вихідне рівняння $f(x) = g(x)$, і не має ніяких інших коренів тоді і тільки тоді, коли воно одержується з вихідного шляхом додавання до обох частин одного і того ж числа m;

г) нерівність того ж змісту, яка має ту ж саму множину розв'язків, що й вихідна нерівність $f(x) > g(x)$, одержується тоді і тільки тоді, коли обидві частини вихідної нерівності помножити на одне і те ж саме додатне число.

101. а) хибне; б) істинне; в) хибне; г) істинне.

102. Трикутник є прямокутним тоді і тільки тоді, коли сума квадратів двох його сторін дорівнює квадрату третьої сторони.

103. а) … тоді і тільки тоді, …; б) … тоді, …; в) … тоді, …; г) … тоді, …; д) … тоді і тільки тоді, … .

104. а) $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$ (*A* є необхідною і достатньою умовою для *B*);

б) $B \Rightarrow A$ (*B* є достатньою умовою для *A*);

в $A \Rightarrow B$ (*B* є необхідною умовою для *A*);

г) $B \Rightarrow A$ (*B* є достатньою умовою для *A*);

д) $B \Rightarrow A$ (*A* є необхідною умовою для *B*);

е) $A \Rightarrow B$ (*A* є достатньою умовою для *B*);

є) $B \Rightarrow A$ (*B* є достатньою умовою для *A*);

ж) $B \Rightarrow A$ (*A* є необхідною умовою для *B*);

з) $A \Rightarrow B$ (*A* є достатньою умовою для *B*).

106. а) якщо число n не кратне 15, то n не кратне 3 або 5;

б) якщо кожне з чисел a, b не дорівнює 0, то їх добуток не рівний 0;

в) якщо хоча б одне з цілих чисел m, n є парним числом, то їх добуток mn є парним числом.

Предикати

107. Предикатами є вирази а), б), г), д).

108. а) область визначення – множина всіх чисел, область істинності – $x = -4$; д) область визначення – множина всіх планет Сонячної системи, область істинності – планета Земля; б), в), г) – не є предикатами.

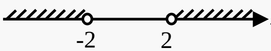
109. Прикладами предикатів можуть бути такі вирази:

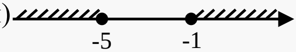
а) $x + y = z$; б) «*x* і *y* – сестри»; в) «Сьогодні день – *x*»;

г) «Місто *x* знаходиться на берегах річки *y*»;

д) «$\sin x = \frac{1}{2}$»; е) «*x* – видатна українська поетеса».

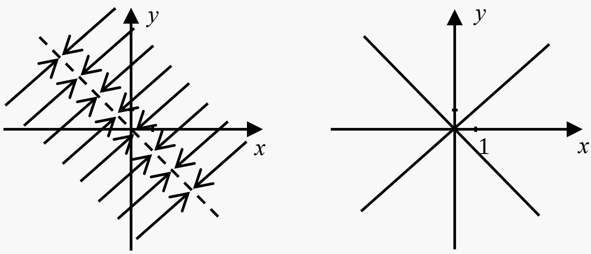
110. а) $I = \{3, 6, 9\}$; б) $I = R$; в) $I = \varnothing$; г) $I = \{-3, 2\}$.

111. г) 

; и) 

.

112.



д) и)

113. $\overline{A(x)}$ – «число x – не просте», $T(A(x)) = \{2, 3, 5\}$, $T\left(\overline{A(x)}\right) = \{1, 4\}$; $\overline{B(x)}$ – «$x \geq 3$», $T(B(x)) = \{1, 2\}$, $T\left(\overline{B(x)}\right) = \{3, 4, 5\}$;

$\overline{C(x)}$ – «$(x-1)(x+2) \neq 0$», $T(C(x)) = \{1\}$, $T\left(\overline{C(x)}\right) = \{2, 3, 4, 5\}$.

114. а) «число *x* – просте і $x < 3$», $T = \{2\}$;

б) «$x < 3$ або *x* – просте число», $T = \{1, 2, 3, 5\}$;

в) «$x < 3$ і $(x-1)(x+2) = 0$», $T = \{1\}$;

г) «число *x* – просте або $(x-1)(x+2) = 0$», $T = \{1, 2, 3, 5\}$;

д) «число *x* – не просте і $x < 3$», $T = \{1\}$;

е) «$x \geq 3$ або $(x-1)(x+2) = 0$», $T = \{1, 3, 4, 5\}$.

115. а), в), д), е), є), з), и) – істинні; б), г), ж), і) – хибні.

116. а) $\forall x\left[x^2+2x+1=(x+1)^2\right]$ – істинне,

$\exists x\left[x^2+2x+1=(x+1)^2\right]$ – істинне;

ж) $\forall x\forall y\left[x^2=y^2 \Rightarrow x=y\right]$ – хибне, $\exists x\exists y\left[x^2=y^2 \Rightarrow x=y\right]$ – істинне, $\exists x\forall y\left[x^2=y^2 \Rightarrow x=y\right]$ – хибне, $\forall x\exists y\left[x^2=y^2 \Rightarrow x=y\right]$ – істинне.

117. а) $\exists x(R(x)\wedge Q(x))$; г) $\forall x(A(x)\Rightarrow B(x))$;

е) $\forall x(K(x)\Rightarrow R(x))\wedge \overline{\forall x(R(x)\Rightarrow K(x))}$.

118. а) $\forall x\forall y[D(x,a)\wedge D(y,x)\Rightarrow D(y,a)]$; б) $\forall x\left[\overline{P(x)}\wedge A(x)\right]$;

в) $\forall x[L(x,m)\Rightarrow L(x,g)]\wedge \forall x\left[\overline{L(x,m)}\Rightarrow \exists r\overline{L(x,A(r))}\right]$;

г) $\forall x\exists yA(x,y)\wedge \forall x\exists y\overline{A(x,y)}\vee \exists x\forall yA(x,y)\wedge \exists x\forall y\overline{A(x,y)}$.

119. а) «всі прості числа – непарні» – хибне;

б) «кожне не просте число не ділиться на всі прості числа» – істинне;

в) «яке б парне число ми не взяли, кожне число, яке ділиться на нього, – парне» – істинне;

г) «кожне ціле число ділиться на кожне ціле число» – хибне;

д) «для будь-якого цілого числа існує таке ціле число, на яке воно ділиться» – істинне;

е) «будь-яке число є парним простим тоді і тільки тоді, коли воно ціле» – хибне;

є) «будь-яке парне число не ділиться на будь-яке непарне число» – хибне;

ж) «існує ціле число, яке ділиться на будь-яке ціле число» – хибне.

120. а) $\bar{\exists} x((x\neq 1\vee x\neq -1)\wedge 5\vdots x\wedge 12\vdots x)$,

$\exists x((x\neq 1\vee x\neq -1)\wedge 5\vdots x\wedge 12\vdots x)$;

б) $\forall x(x\in N\wedge x\vdots 6\Rightarrow x\vdots 2\wedge x\vdots 3)$, $\exists x\left(x\in N\wedge x\vdots 6\wedge\left(\overline{x\vdots 2}\vee\overline{x\vdots 3}\right)\right)$;

в) $\exists M\forall x(M>0\wedge x\in[a;b]\wedge|f(x)|\leq M\Rightarrow f(x)\in O)$,

$\forall M\exists x(M>0\wedge x\in[a;b]\wedge|f(x)|>M\Rightarrow f(x)\notin O)$;

г) $\forall a\left(a \in N \Rightarrow \exists b\left(b \in N \wedge a < b\right)\right)$,

$\exists a\left(a \in N \Rightarrow \forall b\left(b \in N \wedge a \geq b\right)\right)$;

д) $\exists a\left(a \in N \Rightarrow \forall b\left(b \in N \wedge a \leq b\right)\right)$,

$\forall a\left(a \in N \Rightarrow \exists b\left(b \in N \wedge a > b\right)\right)$;

е) $\forall x \forall z\left(x \in Z \wedge z \in Z \Rightarrow \exists y\left(y \in Z \wedge x + y = z\right)\right)$,

$\exists x \exists z\left(x \in Z \wedge z \in Z \Rightarrow \forall y\left(y \in Z \wedge x + y \neq z\right)\right)$;

є) $\overline{\exists} x\left(x \in Q \wedge x^2 - 2 = 0\right)$, $\exists x\left(x \in Q \wedge x^2 - 2 = 0\right)$.

121. В прикладах б) і в) розгляньте чотири випадки: коли $A(x)$ істинне і $B(x)$ істинне; коли $A(x)$ істинне, а $B(x)$ хибне; коли $A(x)$ хибне, а $B(x)$ істинне; коли $A(x)$ хибне і $B(x)$ хибне.

122. а) якщо позначити через $A(x)$ – «натуральне число x – парне», а через $B(x)$ – «натуральне число x – непарне», то лівий вираз «існує натуральне число, яке є одночасно парним і непарним» буде хибним висловленням, а правий вираз «існує парне натуральне число і існує непарне натуральне число» – істинним;

б) в ролі контрприкладу може бути будь-який тотожньо істинний предикат $A(x)$ разом з будь-яким тотожньо хибним предикатом $B(x)$;

в) якщо позначити через $A(x)$ – «натуральне число x – парне», а через $B(x)$ – «натуральне число x ділиться на три», то лівий вираз «всі парні натуральні числа діляться на три» буде хибним висловленням, а правий вираз «якщо всі натуральні числа парні, то всі натуральні числа діляться на три» – істинним.

МНОЖИННІ СТРУКТУРИ І БАЗИ ДАНИХ

Множини

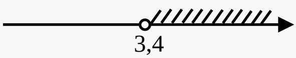
124. а) $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;

б) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; в) $A = \varnothing$;
г) $A = \{5\}$; д) $A = \{1, 2, 3\}$;
е) $A = \{3, 5\}$; є) $A = \{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$;
ж) $A = \{-90, -80, -70, -60, -50, -40, -30, -20, -10, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$.

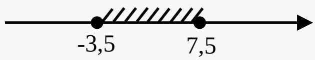
125. а) $A = \{x \mid x \in N, x < 6\}$; б) $A = \{x \mid x \in Z, |x| < 4\}$;

в) $A = \{x \mid x = 3k, k \in N, k < 7\}$; г) $A = \{x \mid x = k^2, k \in N, k < 7\}$.

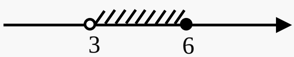
126.



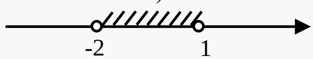
а)



б)



в)



г)

127. а) $\varnothing$; б) $\{-3, 3\}$; в) $\{3\}$; г) $\varnothing$; д) $\{-3, 1, 2\}$;
е) $\{\sqrt{2}-2, \sqrt{2}+2\}$.

128. $B \subset A$; $C \subset A$; $D \subset A$; $B = C$; $B = D$; $B \subset E$; $B \subset F$; $C = D$; $C \subset E$; $C \subset F$; $D \subset E$; $D \subset F$; $E = F$.

129. а), д), ж), и), і).

130. в), г), е), ж), з).

131. а), б), г), д), є), и), ї).

132. б), е), є), ж).

133. $A = \{\varnothing\}$; $B = \{\{\varnothing\}\}$; $C = \{\{\{\varnothing\}\}\}$.

134 $A = \{1\}$; $B = \{1, \{1\}\}$.

135. $A = \varnothing$; $B = \{\varnothing\}$.

136. а) твердження неправильне при $A = \{1\}$, $B = \varnothing$, $C = \{1, \{1\}\}$, але правильне при $A = \{1\}$; $B = \{2\}$, $C = \{3\}$;

б) твердження правильне;

в) твердження неправильне при $A = \{1\}$, $B = \{1, \{1\}\}$, $C = \{\{1\}\}$, але правильне при $A = \{1\}$, $B = \{1, \{1\}\}$, $C = \varnothing$;

г)-д) твердження неправильне при $A = \{1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{\{1\}\}$, але правильне при $A = \varnothing$, $B = \{1\}$, $C = \{1, \{1\}\}$;

е) твердження неправильне при $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$, $C = \{\{1\}\}$, але правильне при $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$, $C = \{1, \{1\}\}$.

137. а) $\beta(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$;

б) $\beta(A) = \{\varnothing, \{2\}, \{\{3\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{2, \{3\}\}, \{2, \{2, 3\}\}, \{\{3\}, \{2, 3\}\}, \{2, \{3\}, \{2, 3\}\}\}$;

в) $\beta(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

138. а) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}\}$;

б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \{\{b, c\}\}, \{\varnothing, \{b\}\}, \{\varnothing, \{c\}\}, \{\varnothing, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{c\}\}, \{\{b\}, \{b, c\}\}, \{\{c\}, \{b, c\}\}, \{\varnothing, \{b\}, \{c\}\}, \{\varnothing, \{b\}, \{b, c\}\}, \{\varnothing, \{c\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}, \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}\}$;

в) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

139. З п'яти.

140. Ні, оскільки рівняння $2n = 127$ не має розв'язків на множині натуральних чисел.

144. а) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, $A \cap B = \{1, 3, 7\}$, $A \backslash B = \{2\}$, $B \backslash A = \{4, 8\}$, $A \Delta B = \{2, 4, 8\}$;

б) $A \cup B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, $A \cap B = \{2, \{1, 2\}\}$, $A \backslash B = \{1, 3\}$, $B \backslash A = \{\{1, 3\}\}$, $A \Delta B = \{1, 3, \{1, 3\}\}$;

в) б) $A \cup B = \{a, b, c\}$, $A \cap B = \{a, b, c\}$, $A \backslash B = \varnothing$, $B \backslash A = \varnothing$, $A \Delta B = \varnothing$;

г) $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \backslash B = \{□\}$, $B \backslash A = \varnothing$, $A \Delta B = \{□\}$.

145. $A \backslash B$ – з ромбів, в яких кути не прямі; $B \backslash A$ – з прямокутників, в яких суміжні сторони не рівні; $A \cap B$ – з квадратів.

146. $A \cap B$ – рівнобедрені прямокутні трикутники; $A \cap \overline{B}$ – прямокутні трикутники з нерівними катетами; $\overline{A} \cap \overline{B}$ – різносторонні не прямокутні трикутники; $A \backslash B$– прямокутні трикутники з нерівними катетами.

147. а) $A \cup B = \{-3, -1, 1\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \backslash B = \{-3, -1\}$, $B \backslash A = \varnothing$;

б) $A \cup B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2, 4, 6\}$, $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \varnothing$;

в) $A \cup B = \{-5, -2, 2, 5\}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{-5, -2, 2, 5\}$.

148. Всі рівності є правильними.

149. а) $A \cap B$; б) $B \setminus C$; в) B; г) $A \cap \overline{B}$; д) $\overline{C}$; е) $\overline{B}$.

150. а) $\{1, 4, 5, 7\}$; б) $\{5\}$; в) $\varnothing$; г) $\{4, 5, 7\}$; д) $\{1, 4, 5, 6, 7\}$; е) $\{2, 3\}$.

151. а) $\overline{A} = B$;

б) $\overline{B} = A$;

в) $A \cap B = \varnothing$;

г) $B \cup C = \{n \in N \mid n = 2m - 1 \vee n = 6m,\ m \in N\}$;

д) $B \setminus C = \{n \in N \mid n = 6m - 5 \vee n = 6m - 1,\ m \in N\}$;

е) $A \cap C = \{n \in N \mid n = 6m,\ m \in N\}$; є) $(B \cup C) \setminus A = B$;

ж) $A \cap (B \cup C) = A \cap C$.

152. а) $\overline{A} = \{n \in Z \mid n \le 0 \vee (n = 2m - 1,\ m \in Z,\ m > 0)\}$;

б) $\overline{A \cup B} = \{n \in Z,\ n \le 0\}$;

в) $\overline{C} = \{n \in Z \mid n > 7\}$;

г) $A \setminus \overline{C} = \{2, 4, 6\}$;

д) $C \setminus (A \cup B) = \{n \in Z,\ n \le 0\}$;

е) $(A \setminus C) \Delta (B \setminus \overline{C}) = \{1, 3, 5, 7, n \in Z \mid n = 2m,\ m \in Z,\ m > 3\}$.

156. 59 студенти не є ні відмінниками, ні спортсменами, ні учасниками художньої самодіяльності, а 23 студенти є відмінниками чи спортсменами.

157. Оскільки англійську, французьку і німецьку мову вивчають 5 студентів, англійську і німецьку – 10, а німецьку і французьку – 20, то німецьку мову повинно вивчати щонайменше 25 студентів, а не 23, як подано у звіті.

158. 8.

159. 10.

161. а) $B \subseteq A$; б) $A \cap B = \varnothing$.

163. Справедливими є твердження в), г), д), ж), и).

164. а) $A = B$; б) $A = \overline{B}$; в) $A = \varnothing$ і $B = \varnothing$; г) $A \cap B = \varnothing$;

д) $A \subseteq B$; е) $A = \varnothing$ і $B = \varnothing$; є) $A \cap B = \varnothing$; ж) $B = \varnothing$;

з) $B = \overline{A}$; и) $A \cap B = \varnothing$.

165. Ні.

166. а) ні; б) $A = B$, $A \cap C = \varnothing$; в) ні; г) $A = \varnothing$.

169. $A = \varnothing$ і $B = \varnothing$.

171. б) $A*B = \overline{A \Delta B}$; в) асоціативна, комутативна, дистрибутивна відносно об’єднання;

г) $A*B = \{5, 6\}$; $A*(B \cup C) = \{2, 3, 5, 6\}$; $(A*B) \cap (A*C) = \{5, 6\}$;

д) $A*U = A$, $A*\varnothing = \overline{A}$, $A*A = U$;

е) $X = A$, $X = \overline{A}$ і $X = U$ відповідно.

172. а) $\overline{A} \cup B$; б) U; в) $\overline{A}$; г) $\overline{A}$; д) $\varnothing$; е) $\overline{A} \cap B$; є) U;

ж) $A \cap B$; з) $\overline{B}$; и) $\overline{A}$.

Відношення

173. а) $A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$, $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$, $A^2 = \{(a, a), (b, a), (c, a), (a, b), (b, b), (c, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$;

б) $A \times B = \{(5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8), (5, 10), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (0, 8), (0, 10)\}$, $B \times A = \{(2, 5), (4, 5), (6, 5), (8, 5), (10, 5), (2, 1), (4, 1), (6, 1), (8, 1), (10, 1), (2, 0), (4, 0), (6, 0), (8, 0), (10, 0)\}$, $A^2 = \{(5, 5), (5, 1), (5, 0), (1, 5), (1, 1), (1, 0), (0, 5), (0, 1), (0, 0)\}$;

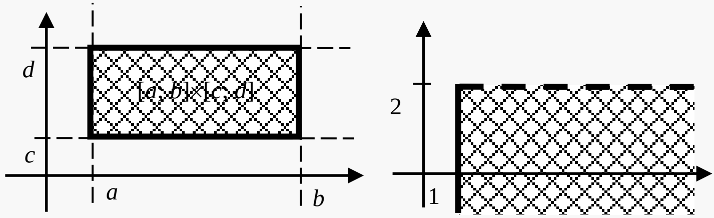
в) $A \times B = \{(2, m), (2, n), (2, k), (2, 1)\}$, $B \times A = \{(m, 2), (n, 2), (k, 2), (1, 2)\}$, $A^2 = \{(2, 2)\}$.

174. а) $\{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$;

б) $\{(1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (1, 4, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 4, 1), (2, 4, 2)\}$;

в) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.

175.



а) б)

178. а) $A = \{1\}$, $B = \{2\}$;

б) рівність має місце, якщо $(A \subseteq B \wedge \wedge C \subseteq D) \vee$
$\vee (B \subseteq A \wedge D \subseteq C)$.

179. $A = B$.

180. а) ({1, 2}, {1,2}, {1, 2}), ({1}, {1,2}, {1, 2}), ({2}, {1,2}, {1, 2}), (∅, {1,2}, {1, 2}), ({1, 2}, {1}, {1, 2}), ({1}, {1}, {1, 2}), ({2}, {1}, {1, 2}), (∅, {1}, {1, 2}), ({1, 2}, {2}, {1, 2}), ({1}, {2}, {1, 2}), ({2}, {2}, {1, 2}), (∅, {2}, {1, 2}), ({1, 2}, ∅, {1, 2}), ({1}, ∅, {1, 2}), ({2}, ∅, {1, 2}), (∅, ∅, {1, 2}), ({1}, {1,2}, {1}), (∅, {1,2}, {1}), ({1, 2}, {1}, {1}), ({1}, {1}, {1}), ({2}, {1}, {1}), (∅, {1}, {1}), ({1}, {2}, {1}), (∅, {2}, {1}), ({1, 2}, ∅, {1}), ({1}, ∅, {1}), ({2}, ∅, {1}), (∅, ∅, {1}), ({2}, {1,2}, {2}), (∅, {1,2}, {2}), ({2}, {1}, {2}), (∅, {1}, {2}), ({1, 2}, {2}, {2}), ({1}, {2}, {2}), ({2}, {2}, {2}), (∅, {2}, {2}), ({1, 2}, ∅, {2}), ({1}, ∅, {2}), ({2}, ∅, {2}), (∅, ∅, {2}), (∅, {1,2}, ∅), ({2}, {1}, ∅), (∅, {1}, ∅), ({1}, {2}, ∅), (∅, {2}, ∅), ({1, 2}, ∅, ∅), ({1}, ∅, ∅), ({2}, ∅, ∅), (∅, ∅, ∅).

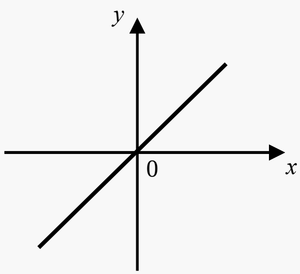
182. а) $\rho = \{(a, b) | \ a \in M_{10}, b \in M_{10}, \ a \vdots b \}$;

б) $\rho = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1), (10, 1), (2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (10, 2), (3, 3), (6, 3), (9, 3), (4, 4), (8, 4), (5, 5), (10, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10)\}$.

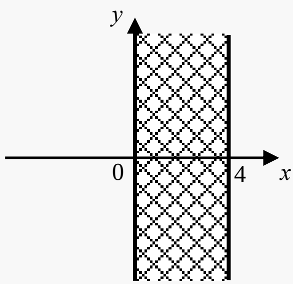
183. б) $\rho = \{(-6, 6), (6, -6), (-3, 3), (3, -3), (0, 0)\}$.

184. а) $\rho = \{(5, 1), (7, -1), (3, -1)\}$; б) $\rho = \{(7, 1), (7, 2)\}$;
в) $\rho = \{(3, 1)\}$; г) $\rho = \{(5, 2)\}$.

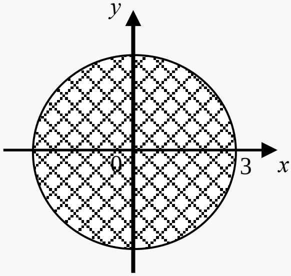
185.



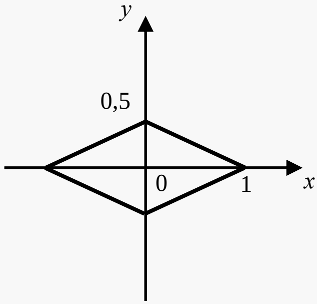
а)



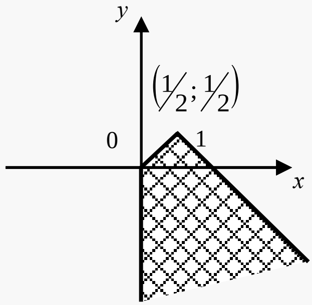
б)



в)



г)



д)

187. а) такого відношення X не існує, оскільки в жодному випадку неможливо отримати пару (1, 2). Дійсно, якщо $(1, 2)\in R_2$, то потрібно з R_1 використати пару (1, 1) або (1, 3). В першому випадку X повинна належати пара (1, 2). Якби це було так, то за допомогою пари $(3, 1)\in R_1$ і $(1, 2)\in X$ одержали б, що $(3, 2)\in R_2$. Це суперечить умові задачі. В другому випадку X повинна належати пара (3, 2). Якби це було так, то за допомогою пари $(3, 3)\in R_1$ і $(3, 2)\in X$ знову одержали б, що $(3, 2)\in R_2$. А це не так;

б) такого відношення X не існує, оскільки неможливо отримати пару (1, 2);

в) не можна тримати пару (2, 4);

г) не можна отримати пару (1, 1);

д) не можна тримати пару (2, 4);

е) не можна отримати пару (2, 3).

188. $T = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4)\}$, $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 4)\}$.

190. Нехай $R_1 = R_2 = \{(4, 4)\}$ задані на множині M_4. Тоді $(4, 4) \notin \overline{R_1 \circ R_2}$. Але, оскільки $(4, 1) \in \overline{R_1}$ і $(1, 4) \in \overline{R_2}$, то $(4, 4) \in \overline{R_1} \circ \overline{R_2}$.

192. Антирефлексивне, антисиметричне і зв'язне.

193. а) R_1, R_2, R_4; б) R_5; в) R_1, R_3; г) R_2, R_5; д) R_1.

197. $R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$, $R_2 = \{(2, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

198. а) ні; б) ні; в) так; г) так.

200. $R_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $R_2 = \{(1, 3), (3, 1)\}$.

202. а) $R_1 = \{(1, 4), (2, 3)\}$, $R_2 = \{(4, 2), (3, 3)\}$;
б) $R_1 = \{(1, 1)\}$, $R_2 = \{(1, 1)\}$;
в) $R_1 = \{(1, 4), (2, 3)\}$, $R_2 = \{(4, 2), (3, 3)\}$;
г) $R_1 = \{(1, 1)\}$, $R_2 = \{(1, 1)\}$.

204. а) так; б) ні.

205. а) так, якщо вважати, що кожна пряма паралельна сама собі; б) ні.

208. а) так; б) ні; в) так.

209. П'ятьма.

210. $\rho = \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (3, 4), (4, 3), (2, 2), (7, 7), (2, 7), (7, 2), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5)\}$.

211. $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \{2, 3\}$, $K_3 = \{4\}$.

212. $K_0 = \{5, 10, 15, 20\}$, $K_1 = \{1, 6, 11, 16\}$, $K_2 = \{2, 7, 12, 17\}$, $K_3 = \{3, 8, 13, 18\}$, $K_4 = \{4, 9, 14, 19\}$.

213. а) $\rho' = \{(1, 1), (1, 2), (4, 2), (5, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$, $K_1 = \{1, 2, 4, 5\}$, $K_3 = \{3\}$, $M_5/\rho' = \{K_1, K_3\}$;

б) $\rho' = \{(2, 4), (3, 1), (2, 2), (4, 4), (4, 2), (1, 1), (3, 3), (1, 3), (5, 5)\}$, $K_1 = \{1, 3\}$, $K_2 = \{2, 4\}$, $K_5 = \{5\}$, $M_5/\rho' = \{\{K_1, K_2, K_5\}\}$;

в) $\rho' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 4), (5, 5)\}$, $K_1 = \{1, 2, 3\}$, $K_4 = \{4\}$, $K_5 = \{5\}$, $M_5/\rho' = \{\{K_1, K_4, K_5\}\}$;

г) $\rho' = \{(2, 4), (3, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 5), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$, $K_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M_5/\rho' = \{\{K_1\}\}$;

д) $\rho' = \{(2, 2), (3, 3), (5, 1), (3, 4), (2, 5), (1, 1), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (5, 2), (4, 3)\}$, $K_1 = \{1, 2, 5\}$, $K_3 = \{3, 4\}$, $M_5/\rho' = \{\{K_1, K_3\}\}$;

е) $\rho' = \{(1, 5), (2, 2), (1, 3), (5, 1), (4, 2), (1, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 3), (3, 1), (3, 5), (2, 4)\}$, $K_1 = \{1, 3, 5\}$, $K_2 = \{2, 4\}$, $M_5/\rho' = \{\{K_1, K_2\}\}$.

214. а) $A/\rho = \{\{3k, k \in Z\}, \{3k + 1, k \in Z\}, \{3k + 2, k \in Z\}\}$;

б) $A/\rho = \{A\}$; в) $A/\rho = \{A_1, A_2, \ldots, A_{25}\}$, де A_1 – множина жителів Вінницької області, A_2 – Волинської області, …, A_{25} – Чернігівської області.

215. а) лінійного порядку; б) не є відношенням порядку; в) часткового порядку; г) не є відношенням порядку; д) лінійного порядку.

216. Частковий нестрогий порядок.

217. Нестрогий лінійний порядок.

219. $\tilde{\rho} = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5), (2, 5), (3, 1), (3, 5)\}$.

220. $\tilde{\rho} = \{(3, 1)\}$.

КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ

Основні поняття

223. $5 \cdot 4 = 20$.

224. $7 \cdot 9 \cdot 4 = 252$.

225. $5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 225$.

226. $7 \cdot 7 = 49$; $7 \cdot 6 = 42$.

227. $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$.

228. $7 \cdot 7 = 49$.

229. $6 \cdot 7 = 42$.

230. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

231. а) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; б) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$;
в) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$; г) $10 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 9900$.

232. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

233. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$; $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$.

234. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

235. а) $6 \cdot 5 = 30$; б) $8 \cdot 11 \cdot 16 \cdot 10 = 14080$;
в) $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$.

236. В українському алфавіті 33 літери. Якщо вважати, що імена можуть розпочинатися з будь-якої літери (навіть з «и» та «ь»), то щонайбільше жителів з різними ініціалами може бути $33 \cdot 33 = 1089$, що менше 1500. Отже ініціали будуть повторюватися.

237. $6 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 3 = 113$.

238. Спочатку виберемо одну кость. Якщо вибрали дубль (тут може бути сім варіантів), то другу кость можна вибрати 6 способами (наприклад, якщо на першому кроці вибрано 1:1, то на другому кроці можна взяти одну з костей 0:1, 2:1,..., 6:1). Якщо вибрали не дубль (є 21 варіант вибору), то другу кость можна вибрати 12 способами (6 для одного краю і 6 для іншого). Отже, за правилами суми та добутку отримуємо $7 \cdot 6 + 21 \cdot 12 = 294$ способи вибору пари костей.

В проведених роздумах враховувався порядок, в якому вибирались кості. Тому кожна пара костей з'являлась двічі (наприклад, перший раз 0:1 і 1:6, а другий раз 1:6 і 0:1). Якщо не враховувати порядок вибору костей, то отримаємо вдвічі менше способів вибору (147 способів).

239. а) Для вибірки кості з п'ятьма очками є 3 варіантами (нас влаштовує один з наборів 0:5, 1:4 або 2:3), а з двома очками – 2 варіанти (0:2 або 1:1). За правилом добутку отримуємо $3 \cdot 2 = 6$ способів.

б) Може бути на одній кості 0 очок і на другій – 7 або 1 і 6, 2 і 5, 3 і 4. Тому всього є $1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 19$ способів.

240. $9 \cdot 10^2 = 900$.

241. $9 \cdot 10^4 = 90000$.

242. $9^5 = 59049$.

243. $6^3 \cdot 5 = 1080$.

244. $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 29400$.

245. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

246. $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$.

247. Число може бути одно-, дво-, три- або чотирицифровим. Останню цифру можна вибрати двома способами. Тоді непарні (парні) числа можна одержати $2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 32$ способами.

248. $25 + 27 – 18 = 34$.

249. $85 + 75 – 100 = 60$.

250. $78 + 55 – 30 + 150 = 253$ *см*^{2}.

251. $20 + 24 + 17 – (12 + 6 + 12) + 1 = 32$.

252. $1000 – [333 + 200 + 142 – (66 + 47 + 28) + 9] = 457$.

253. 108.

254. 10.

255. 11.

256. 6; 14.

258. 40.

259. 81.

260. 100000.

261. 12^6.

262. 729.

263. 100.

264. $\overline{A}_2^8$; $\overline{A}_2^{16}$.

265. Ні, бо $\overline{A}_{10}^7 = 10000000 < 20000000$.

266. $12^5 - 1 = 248831$.

267. $9 \cdot \overline{A}_9^6$.

268. $\overline{A}_2^4 + 4 \cdot \overline{A}_2^3$.

269. $9 \cdot 10 \cdot \overline{A}_{10}^3$.

270. $\overline{A}_{10}^3$ = 729 (Одно- та двоцифрові числа можна вважати трицифровими, в яких на перших місцях стоїть нуль).

271. A_{25}^4 = 303600.

272. A_{26}^3 =15600.

273. A_8^5.

274. $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3$.

275. A_8^4 = 1680; 4· A_7^3 = 840.

276. A_5^2; $A_{10}^2 - A_5^2$.

277. A_5^3; 3· A_4^2.

278. Різних переможців судді назвуть в A_{10}^3 випадках. Тоді співпадання будуть в $\overline{A}_{10}^3 - A_{10}^3$ = 280 випадках.

279. $A_{21-3\cdot 3}^4$.

280. 10!.

281. 4!; 3!; 2!.

282. 8! = 40320.

283. 5!/2 = 60.

284. 4! = 24.

285. $(5!)^2 \cdot 2$.

286. $8!$.

287. $(5!)^3 \cdot 3!$.

288. $5! \cdot A_5^3$.

289. $A_5^4 \cdot A_5^3 \cdot 3!$.

290. $9!$.

291. $3 \cdot 4 \cdot 8!$.

292. $3 \cdot 4 \cdot 8!$.

293. $2 \cdot 6 \cdot 8!$.

294. $10!/2$.

295. $(n!)^2$.

296. $(n-2)(n-3)!$.

297. $(15!)^2$.

298. $(15!)^2 \cdot 2^{15}$.

299. $10!/3$.

300. $10!/4/2$.

301. $(n-1)!(n-2)$.

302. $(2n)!(2n)!n!n!$.

303. 6.

304. $13!/8$; 6720; 2520; $12!/24$.

305. 207900.

306. 360; а) 60; б) 6.

307. 140.

308. 5040.

309. 3003.

310. 20;560.

311. $P_{m+n+s}(m, n, s)$.

312. 60.

313. $P_{3n}(n, n, n)$.

314. $P_5(2, 0, 3) + P_5(1, 1, 3) + P_5(2, 1, 2) = 60$.

315. $P_{10}(3, 5, 2) = 2520$.

316. 84.

317. 2598960.

318. C_n^k.

319. $C_7^2 \cdot C_9^2$ = 756.

320. 435.

321. $C_{12}^4 \cdot A_{15}^4$.

322. $A_{16}^3 \cdot C_{13}^2$.

323. 114660.

324. 220.

325. C_{48}^6.

326. $C_{300}^3 + C_{300}^2 + C_{300}^1$ = 4500250.

327. Кожен найкоротший шлях складається з 10 горизонтальних та 10 вертикальних кусочків, причому лише чергування цих частин визначатиме різні шляхи. Тому загальне число шляхів дорівнює числу способів, якими з 10 + 10 відрізків, можна вибрати місце для 10 вертикальних, тобто C_{20}^{10}.

328. $C_{13}^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^2 \cdot C_7^2$ = 3243240.

329. $C_3^1 \cdot C_5^3$ = 30.

330. $C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2$ = 371.

331. 376992.

332. а) 4650; б) 155; в) 1; г) 4806.

333. $C_{12}^4 \cdot C_8^4$ = 34650.

334. C_x^2 = 45; x = 10.

335. C_{x-2}^2 = 84 – 6; x = 15.

336. C_{30}^4; A_{30}^4.

337. A_{10}^7; C_{10}^3; $A_7^2 \cdot A_8^5$; C_8^3.

338. $C_n^2 - n$.

339. $C_{20}^6 \cdot P_6(3,2,1)$; $C_{20}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{20}^1$.

340. $(C_3^1 + C_3^2 + C_3^3)\cdot(C_2^1 + C_2^2)\cdot(C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5)$ = 651.

341. $C_{12}^{3} - 6\cdot C_{10}^{1} = 160$ або $C_6^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$.

342. Якщо не проведено жодної діагоналі, то маємо одну частину. Після проведення кожної діагоналі число частин збільшується на одиницю плюс кількість точок перетину з тими діагоналями, що проведені раніше. Тому число частин, які утворилися після проведення всіх діагоналей, дорівнює 1 плюс число точок перетину, плюс число діагоналей. Якщо жодні три діагоналі не перетинаються в одній точці, то число точок перетину дорівнює C_n^4. Число діагоналей дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$. Додавши ці числа, отримуємо $1 + C_n^4 + \frac{n(n-3)}{2}$ частин.

343. Місця для парних (непарних) чисел можна вибрати C_6^3 способами. На кожному місці може стояти одна з 5 цифр. Тоді за правилом добутку отримаємо $C_6^3 \cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = C_6^3 \cdot 5^6$ чисел. Серед них будуть такі, де 0 стоїть на першому місці. Якщо 0 поставити на перше місце, то для інших парних чисел місця можна вибрати C_5^2 способами. Отже, існує $C_5^2 \cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = C_5^2 \cdot 5^5$ чисел, які розпочинаються з нуля. Залишається $C_6^3 \cdot 5^6 - C_5^2 \cdot 5^5$ шестицифрових чисел.

344. Які б $(m-1)$ членів комісії не зібрались, повинен знайтись замок, який вони не можуть відкрити, але ключ до цього замка є у кожного з $(n-m+1)$ інших членів комісії (поява будь-кого з них дає можливість відкрити сейф). Тому число замків C_n^{m-1}, а число ключів $(n-m+1)C_n^{m-1}$.

345. *ааа, ввв, ссс, авв, асс, всс, аав, аас, ввс, авс*.

346. $\overline{C}_9^7 = 6435$.

347. $\overline{C}_{30}^3 = 4960$.

348. $\overline{C}_{10}^{12}; \overline{C}_{10}^{8}; C_{10}^{8}$.

349. $\overline{C}_{10}^3 = 220$.

350. $\overline{C}_5^3 - 7 = 28$.

351. $\overline{C}_m^n$. Задача аналогічна до задачі про розміщення однакових куль в різних лузах, причому окремі лузи можуть бути порожніми.

352. $\overline{C}_m^{n-m}$. Задача аналогічна до задачі про розміщення однакових куль в різних лузах, причому жодна луза не повинна бути порожньою. Якщо в кожну лузу помістити по одній кулі, то решту куль можна розподіляти з припущенням, що не обов’язково в кожну лузу потрібно вкидати кулю.

354. $C_{25}^{12} \cdot C_{13}^{10}$.

355. $C_{28}^{7} \cdot C_{21}^{7} \cdot C_{14}^{7}$.

356. $C_{32}^{10} \cdot C_{22}^{10} \cdot C_{12}^{10}$.

357. $\dfrac{C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10}}{3!}$.

358. $\dfrac{C_{4}^{2} \cdot C_{32}^{16}}{2!}$.

359. $C_4^1 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{13}^4 \cdot C_3^1 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{10}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_{10}^4 \cdot C_2^1 \cdot C_7^3 \cdot C_7^4 \cdot C_6^3 \cdot C_6^3$.

360. $\overline{A}_3^{10}$.

361. C_{42}^2; C_{27}^2.

362. $\overline{A}_p^k = p^k$; $\overline{C}_p^k = C_{k+p-1}^{p-1}$.

363. C_{34}^4.

364. $\overline{C}_{20-12}^{6}$; $\overline{C}_5^{20} + \overline{C}_5^{19} + \overline{C}_5^{18}$.

365. $C_{14}^4 + 5 \cdot C_{14}^3 + C_5^2 \cdot C_{14}^2$.

366. $C_{11}^3 C_{13}^3 C_{10}^3$; $C_7^3 C_9^3 C_6^3$.

367. $C_{14}^4 C_{19}^4 C_{12}^4$; $C_9^4 C_{14}^3 C_7^3$.

368. $C_{11}^3 C_{13}^3 C_{10}^3 - C_4^1 C_{10}^2 C_{12}^2 C_9^2 + C_4^2 C_9^1 C_{11}^1 C_8^1 - C_4^3$. Див. [6, с.97].

369. $C_8^5 C_9^5 - C_6^1 C_7^4 C_8^4 + C_6^2 C_6^3 C_7^3 - C_6^3 C_5^2 C_6^2 + C_6^4 C_4^1 C_5^1 - C_6^5$

або $6\left(C_5^2 + C_5^2 + 5\right)$.

370. $C_{15}^9 C_{15}^9 - C_{10}^1 C_{14}^8 C_{14}^8 + C_{10}^2 C_{13}^7 C_{13}^7 - C_{10}^3 C_{12}^6 C_{12}^6 + C_{10}^4 C_{11}^5 C_{11}^5 -$

$- C_{10}^5 C_{10}^4 C_{10}^4 + C_{10}^6 C_9^3 C_9^3 - C_{10}^7 C_8^2 C_8^2 + C_{10}^8 C_7^1 C_7^1 - C_{10}^9$ або

$10 \cdot 2 \cdot C_9^3 + 10 \cdot 2 \cdot C_9^4 + C_{10}^2 \cdot 2 \cdot C_8^2 + C_{10}^2 \cdot 4 \cdot C_8^3 + C_{10}^2 \cdot 2 \cdot C_8^4 + C_{10}^2 \cdot 1 \cdot C_8^4$.

371. 5^8.

372. 2^5.

373. $5^7 - C_5^1 \cdot 4^7 + C_5^2 \cdot 3^7 - C_5^3 \cdot 2^7 + C_5^4 \cdot 1^7$.

374. $5^8 - C_5^1 \cdot 4^8 + C_5^2 \cdot 3^8 - C_5^3 \cdot 2^8 + C_5^4 \cdot 1^8$.

375. $\frac{1}{5!}\left(5^{12} - C_5^1 \cdot 4^{12} + C_5^2 \cdot 3^{12} - C_5^3 \cdot 2^{12} + C_5^4 \cdot 1^{12}\right)$.

376. $\frac{1}{3!}\left(3^{10} - C_3^1 \cdot 2^{10} + C_3^2 \cdot 1^{10}\right)$.

Комбінаторні співвідношення

377. а) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$;

б) $x^8 - 16x^7 + 112x^6 - 448x^5 + 1120x^4 - 1792x^3 + 1792x^2 - 1024x + 256$;

в) $m^{14} + 7m^{12} + 21m^{10} + 35m^8 + 35m^6 + 21m^4 + 7m^2 + 1$;

г) $x^{14} - 14x^{12}y + 84x^{10}y^2 - 280x^8y^3 + 560x^6y^4 -$

$- 672x^4y^5 + 448x^2y^6 - 128y^7$;

д) $\frac{1}{32}a^5 + \frac{5}{8}a^4b^2 + 5a^3b^4 + 2a^2b^6 + 40ab^8 + 32b^{10}$;

е) $\sqrt{x^5} + 5x^2y + 10\sqrt{x^3}y^2 + 10xy^3 + 5\sqrt{x}y^4 + y^5$;

є) $m^2\sqrt[3]{m} - 7m^2\sqrt[3]{n} + 21m\sqrt[3]{m^2n^2} - 35mn\sqrt[3]{m} +$

$+ 35mn\sqrt[3]{n} - 21n\sqrt[3]{m^2n^2} + 7n^2\sqrt[3]{m} - n^2\sqrt[3]{n}$;

ж) $\dfrac{b\sqrt[3]{b^2} - 5b\sqrt[3]{ab} + 10b\sqrt[3]{a^2} - 10a\sqrt[3]{b^2} + 5a\sqrt[3]{ab} - a\sqrt[3]{a^2}}{ab\sqrt[3]{a^2b^2}}$;

з) $a^6 + 15a^5 + 30a^4 + 31a^3 + 18a^2 + 3a + 1 - 2a(3a^4 +$

$+ 10a^3 + 13a^2 + 6a + 3)\sqrt{1+a}$;

и) $2x^2 + 8x^{2\,-}8$, $|x| \geq 1$.

378. а) $101376x^5$; б) $168\sqrt{2}\,x^6$;

в) $C_{16}^8 x^{-4}$; г) $256C_{17}^8 m^3 n^{12}$ і $-512C_{17}^8 m^{\frac{8}{3}} n^{\frac{27}{2}}$.

379. а) $924x^6$; б) $12012\sqrt{2}x^5$; в) $495m^{10}\sqrt[3]{m^2}$; г) $C_{18}^{6}x^{-1}y^6$.

380. а) 84; б) C_{1000}^{200}.

381. а) 12; б) 9; в) 12; г) 15.

382. а) 60; б) $T_7 = 120x^5$;

в) $T_{21} = 2^{-10}$; $T_{15} = C_{20}^{14} \cdot 2^{-5}$; $T_9 = C_{20}^{8}$; $T_3 = C_{20}^{2} \cdot 2^5$.

383. 26.

384. $T_7 = \dfrac{924}{x^4}$.

385. $T_{12} = 364(ab)^{\frac{11}{2}}$.

386. -165.

387. 144.

388. 1820.

389. 14 і 7.

390. $35a^5$.

391. n = 15, p = 5.

392. $x_1 = \dfrac{1}{10}$; $x_2 = \sqrt[3]{10}$.

393. $x_1 = 2$; $x_2 = 0$.

394. $C_{50}^{21}\left(\sqrt{2}\right)^{29}$.

395. 2; 1,5; 5.

398. 2.

399. а) $x^{10} + 5x^9 + 15x^8 + 30x^7 + 45x^6 + 51x^5 +$

$+ 45x^4 + 30x^3 + 15x^2 + 5x + 1$;

б) $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y - 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 - 3y^2z - 3yz^2 + 6xyz$;

в) $x^4y^4 + x^4 + 1 - 4x^4y^3 + 4x^3y^3 - 4x^4y - 4x^3 + 4xy - 4x -$

$-12x^3y^2 + 12x^3y - 12x^2y + 6x^4y^2 + 6x^2y^2 + 6x^2$.

400. 581.

401. а) -30; б) 6160; в) 76; г) 266.

402. 210.

403. 4200.

404. а) $\frac{n^2-7n+13}{n-3}$; б) 0; в) 1; г) 0; д) $m+3$; е) $\frac{m}{m+2}$.

405. а) 220; б) 28; в) $A_{10}^n P_{10-n}$ в 10 разів більше за P_9.

406. а) вірно; б) вірно; в) вірно.

407. а) 4; б) 4; в) 5; г) 5; д) 4; е) 4; є) 5; ж) 3 і 14; з) 12; и) 3; і) 4; ї) 4; й) 5; к) 5; л) 12; м) 10; н) 10; о) 17; п) 8; р) 8; с) 4; т) $x=n+2\pm\sqrt{n+2}$. Задача має розв'язок при $n=k^2-2$, де k – будь-яке відмінне від 1 натуральне число. При цьому $x=k^2\pm k$; у) 10; ф) 10; х) 4.

408. а) (17; 2);
б) множина розв'язків x = 4, 9, 14, 19,...; y = 3, 6, 9, 12, ...;
в) (18; 8); г) (5; 5); д) (10; 8); е) (15; 7).

409. а) $x = 5$, $y = 2$; б) $x = 7$, $y = 3$; в) $x = 34$, $y = 14$;
г) $x = 6$, $y = 3$.

410. 5.

411. 9.

412. 7.

413. а) $A(x)=\frac{1}{1-ax}$, $E(x)= e^{ax}$;

б) $A(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$, $E(x)= x\cdot e^x$;

в) $A(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$, $E(x)= x^2\cdot e^x$;

г) $A(x)=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$, $E(x)= x(x+1)\cdot e^x$.

414. $B(x) = (A(x) - A(-x))/2$.

415. а) $A(x)= (1-x)B(x)$; б) $A(x)=(1+x)B(x)$;

в) $A(x)= \frac{B(x)(1-x)-b_0}{x}$; г) $A(x)= x\frac{dB(x)}{dx}$;

д) $A(x)= x\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}\ B(x))$;

е) $A(x)= \frac{x\cdot B(x)}{1-x}$; є) $A(x)= \frac{B(1)-B(x)}{1-x}$.

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ПРОГРАМ НА ОСНОВІ ГРАФОВИХ МОДЕЛЕЙ

Основні поняття

421. а) 3; б) 6; в) 10.

422. Кожній вершині в повному графі з n вершинами належить n – 1 ребро, але в добутку $n(n – 1)$ кожне ребро враховане двічі. а) ні; б) так; в) ні.

423. а) 3; б) 5; в) 6; г) 2.

425. а) двом; б) жодному; в) трьом.

426. $\frac{n(n-1)}{2} - k$.

427. а) підрахувати кількість рядків (стовпців) матриці;
б) підрахувати кількість одиниць над (під) головною діагоналлю;
в) підрахувати кількість одиниць відповідного рядка (стовпця);
г) з’ясувати, чи всі елементи матриці, крім елементів головної діагоналі, є одиницями;
д) кількість рядків матриці дорівнює числу вершин (див. а)), а стовпців – ребер (див. б)); якщо пронумерувати ребра за порядком розміщення одиниці над діагоналлю в матриці суміжності, то в i-тому стовпці матриці інцидентності 1 проставляються лише в тих рядках, що співпадають номером рядка чи стовпця розміщення відповідної одиниці в матриці суміжності.

428. Ні.

429. Ні.

431. Див. [4, с.13].

433. Ні.

434. Див. [4, с.12].

435. а) так; б) ні; в) ні; г) так.

436. $2k$, $k \in N$. k.

437. Див. [15, с.18].

438. а) так; б) ні; в) ні; г) так.

439. nm.

441. Ні.

443. Див. задачу 3.1 [4, с. 51].

445. Див. [4, с.13].

446. Див. [4, с.13].

447. Див. [4, с.12].

450. а) мають різну кількість вершин;
б) мають різну кількість ребер;
в) на одному зображенні є вершина степеня 4, а на іншому зображенні вершини степеня 4 немає;
г) один з графів зв'язний, а інший – ні;
д-ж) не можливо встановити взаємно однозначну відповідність між вершинами, яка б зберігала ребра.

453. Див. [4, с. 248].

454. а) ні; б) ні.

457. а) 3; б) 5; в) 5; г) $[n/2]+1$.

461. Ні.

462. Так.

Маршрути

466. b.

469. Див. [4, с.17].

472. Див. [12, с. 238].

473. Див. задачу 25.

474. Див. [4, с.18].

476. Див. [13, с. 240].

477. Вилучати по одній вершині з інцидентними їй ребрами до тих пір поки не залишиться дві вершини.

478. Див. [12, с. 241].

479. а) 4; б) 4.

481. а) 4; б) 7.

482. Див. [15, с. 36] або [12, с. 239].

483. Див. [12, с. 242].

484. Доповнення будь-якої пари зв’язних компонент містить повний двочастковий граф.

485. Див. [12, с. 242].

486. а) розділювальні вершини – 1, 6, 9; мости – (1, 2), (1, 5); блоки – підграфи, що визначаються множинами вершин {2, 1}, {5, 1}, {3, 1, 6, 4}, {6, 7, 9, 8},{9, 10, 11};

б) розділювальні вершини – 2, 4, 5; мости – (1, 2), (4, 5), (5, 6); блоки – підграфи, що визначаються множинами вершин {1, 2}, {2, 3, 4},{4, 5}, {6, 5}, {5, 7, 8, 9, 10}.

503. K_n, $n = 2k + 1$, $k \in N$.

504. При парних значеннях n і m.

511. 18.

512. Див. [4, с. 41].

518. а) гамільтоновий і ейлеровий; б) ейлеровий; в) гамільтоновий; г) ні ейлеровий, ні гамільтоновий.

522. Див. [4, с. 47].

523. Див. теорему 3.4.5 [15, с. 74].

524. $n = m$; див. теорему 3.4.3 [15, с. 74].

526. Степінь кожної вершини дорівнює 2.

527. Регулярний граф парного степеня.

Дерева та плоскі графи

530. Не може.

537. $n - 1$ кінцевих вершин – зірковий граф; 2 кінцеві вершини – простий ланцюг.

539. Кожне з дерев має $n_i - 1$ ребер, де n_i – кількість вершин в i-тому дереві. Залишається знайти суму цих чисел та врахувати кількість вершин і дерев в лісі.

541. 102.

542. 15.

544. Див. [4, с. 91].

545. Див. [15, с. 84].

546. Див. [15, с. 84].

547. Див. [15, с. 84].

548. Так.

559. Ні.

560. а) ні; б) ні.

561. а) ні; б) ні; в) ні.

562. Див. [12, с. 258].

564. а) ні; б) так.

565. 6.

566. Ні.

569. Доповнення до графа другого роду (інші дві вершини не обов'язково ізольовані) містить частину графа першого роду.

572. Див. [12, с. 258].

577. а) 3; б) 4.

578. а) 2; б) 3; в) 2.

579. Див. [12, с. 262].

580. Трикутна піраміда. Див. приклад 8.

ЛІТЕРАТУРА

1. Балога С.І. Дискретна математика: навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОРШАРК», 2021. 124 с.
2. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. Київ: Вища школа, 2002. 287 с.
3. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. Харків: «Компанія СМІТ», 2004. 79 с.
4. Вивальнюк Л.М. Алгебра і теорія чисел. Елементи теорії множин і логіки. Київ: Вища школа, 1972. 92 с.
5. Годич Н.Т. Елементи теорії математичної логіки. Кам'янець-Подільський: К-П ДПІ, 1983. 34 с.
6. Годич Н.Т. Елементи теорії множин. Кам'янець-Подільський: К-П ДПІ, 1983. 35 с.
7. Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики. Київ: Вища школа, 1972. 84 с.
8. Капітонова Ю.В. Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. Київ: Наукова думка, 2002. 580 с.
9. Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Теорія графів у задачах: навчальний посібник. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2004. 90 с.

10. Скалозуб В.В., Ільман В.М., Івченко Ю.М., Андрющенко В.О. Дискретні та алгоритмічні структури в інструментарії програмної інженерії: навч. посіб. / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. Дніпропетровськ, 2016. 254 с.
11. Хромой Я.В. Математична логіка. Київ: Вища школа, 1983. 208 с.
12. Хромой Я.В. Збірник вправ і задач з математичної логіки Київ: Вища школа, 1978. 160 с.

Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

Навчальне електронне видання

ПОНЕДІЛОК Вадим Віталійович,
кандидат технічних наук, старший викладач кафедри комп’ютерних наук Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

ФУРТЕЛЬ Олеся Вікторівна,
асистент кафедри комп’ютерних наук Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

ЩИРБА Віктор Самуїлович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри комп’ютерних наук Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

ДИСКРЕТНІ СТРУКТУРИ

Навчальний посібник для студентів закладів вищої освіти спеціальності «Комп’ютерні науки»

Електронне видання

Підписано 27.09.2022. Гарнітура “Times”.
Об’єм даних 4,0 Мб. Обл.-вид. арк. 8,8. Зам. № 991.

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи
серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Виготовлено в Кам’янець-Подільському національному університеті імені
Івана Огієнка, вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300.