Міністерство освіти і науки України

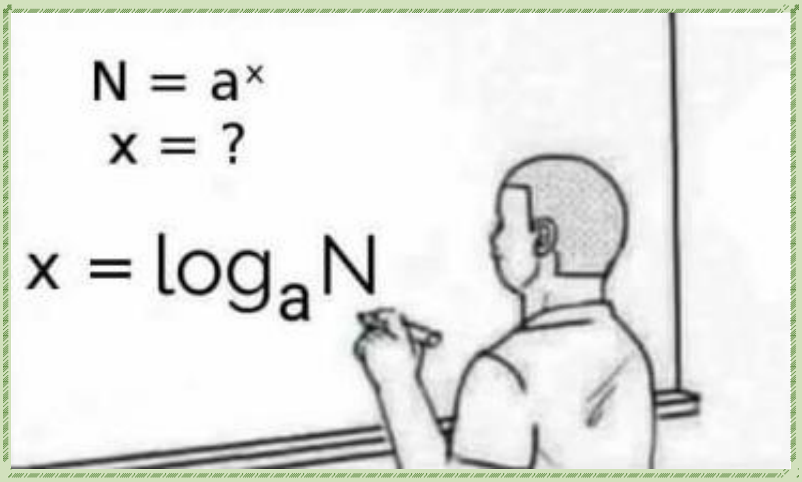
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Т. В. ДУМАНСЬКА,

У. В. ГУДИМА

ЛОГАРИФМІЧНІ ТА ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ, СИСТЕМИ. ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК



ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ НА CD-ROM

Кам’янець-Подільський

2022

УДК 512(075.8)

ББК 22.14я73

Д82

Рекомендовано вченою радою Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 2 від 27.01.2022 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Юрій Сморжевський, кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка;

Ірина Семенишина, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики, інформатики та академічного письма
Закладу вищої освіти «Подільський державний університет»;

Людмила Михайлова, кандидат технічних наук, професор,
директор навчально-наукового інституту енергетики
Закладу вищої освіти «Подільський державний університет».

Думанська Т. В., Гудима У. В.

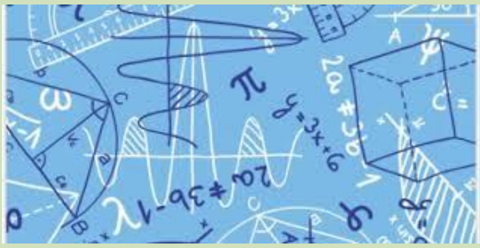
Д82 **Логарифмічні та показникові рівняння, нерівності, системи. Практикум:** навчально-методичний посібник. [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.

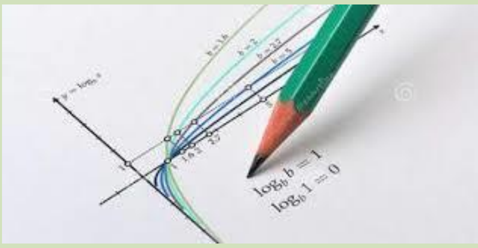
Пропонований посібник спрямований на заповнення можливих прогалини у математичній підготовці здобувачів освіти щодо поняття логарифма, логарифмічної та показникової функцій, типових методів розв'язування логарифмічних і показникових рівнянь, нерівностей, систем, що містять показникові та логарифмічні рівняння і нерівності. У посібнику наведено короткий теоретичний матеріал і приклади розв'язування практичних завдань, в тому числі, підвищеної складності; підібрано завдання для самостійного розв'язування, що сприятимуть удосконаленню та закріпленню навичок виконання практичних вправ. Навчально-методичний посібник призначений для підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, які навчаються за освітньо-професійною програмою Середня освіта (Математика, інформатика) спеціальності 014 Середня освіта (Математика) фізико-математичного факультету для вивчення навчальної дисципліни «Елементарна математика», а також може бути корисним під час опанування відповідних розділів у закладах середньої освіти.

УДК 512(075.8)

ББК 22.14я73

ЗМІСТ





Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Навчальне електронне видання на CD-ROM

ДУМАНСЬКА Тетяна Володимирівна,
кандидат педагогічних наук, доцент, старший викладач
кафедри математики Кам’янець-Подільського
національного університет імені Івана Огієнка

ГУДИМА Уляна Василівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики, Кам’янець-Подільського
національного університет імені Івана Огієнка

ЛОГАРИФМІЧНІ ТА ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ, СИСТЕМИ. ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Електронне видання на CD-ROM

Один електронний оптичний диск (CD-ROM).
Об’єм даних 11,5 Мб. Обл.-вид. арк. 5,3. Підп. 02.02.2022. Тираж 10. Зам. № 967.

Видавець і виготовлювач Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300

Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи
серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

ПЕРЕДМОВА

Зміна способів і форм навчальної діяльності для здобувачів вищої освіти породжує ряд труднощів, зокрема зі сприйняттям фахових математичних дисциплін. Оскільки під час викладання розділів вищої математики широко використовується апарат шкільного курсу математики, тому у структурі й змісті математичної та методичної підготовки майбутніх учителів математики визначне місце займає дисципліна «Елементарна математика», основною функцією якої є поглиблення та систематизація розділів шкільного курсу математики, які викликають труднощі у здобувачів середньої освіти.

Одним із основних завдань викладання математики у закладах вищої освіти є надання здобувачам комплексу математичних знань, необхідних для вивчення загальноосвітніх і спеціальних дисциплін, формування уміння здійснювати математичні дослідження з метою використання їх у майбутній професійній діяльності.

Важливе місце в цьому займають логарифмічна та показникова функції. Логарифмічні та показникові рівняння і нерівності починають вивчати в 9-11 класах і продовжують у закладах вищої освіти. Методи розв'язування як рівнянь, так і нерівностей, базуються на властивостях логарифмів, степенів з різними показниками, логарифмічної та показникової функцій. Під час вивчення цих розділів здобувачі систематизують, узагальнюють здобуті знання у закладах середньої освіти, поглиблюють і засвоюють поняття логарифмічної і показникової функцій, їхні властивості та графіки, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів, розв'язувати логарифмічні та показникові рівняння, нерівності та системи.

Запропонований навчально-методичний посібник покликаний надати допомогу викладачам математики і здобувачам освіти у підготовці до проведення практичних занять. Подані теоретичні відомості, наведені приклади розв'язування вправ дозволяють використовувати посібник для самостійної підготовки.

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ ВИРАЗІВ

Логарифмом додатного числа b за основою $a\left(a>0, a\neq 1\right)$ називається показник степеня x, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b. Тобто рівність $\log_a b = x$ означає, що $a^x = b$.

З означення логарифма випливають такі важливі рівності:

$$\log_a a = 1; \Leftrightarrow a^1 = a;$$

$$\log_a 1 = 0; \Leftrightarrow a^0 = 1.$$

У записі $\log_a b$ число a – *основа логарифма*, b – *логарифмоване число* або *підлогарифмічний вираз*.

Завдання 1. Скориставшись означенням логарифма, обчислити:

а) $\log_2 32 = 5$, оскільки $2^5 = 32$;

б) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$, оскільки $\left(\sqrt{3}\right)^4 = 9$;

в) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, оскільки $2^{-2} = \frac{1}{4}$;

г) $\log_6 1 = 0$, оскільки $6^0 = 1$;

ґ) $\log_3(-7)$ не існує, оскільки не існує такого показника степеня, до якого можна б було піднести число 3 і отримати „-7”, тобто не виконується умова $b > 0$;

д) $\log_{-3} 5$ не існує, оскільки не виконується умова $a > 0$;

е) $\log_1 3$ не існує, оскільки не виконується умова $a \neq 1$.

Якщо основа логарифма дорівнює 10, то логарифм називається ***десятковим*** і позначається $\lg b$.

Зокрема, для десяткових логарифмів справедливі рівності:

$$\lg 1 = 0; \qquad \lg 0{,}1 = -1;$$
$$\lg 10 = 1; \qquad \lg 0{,}01 = -2;$$
$$\lg 100 = 2; \qquad \lg 0{,}001 = -3;$$
$$\lg 1000 = 3; \qquad \lg 0{,}0001 = -4.$$

Логарифми за основою e $(e \approx 2{,}718)$ називають ***натуральними*** і позначають $\ln b$.

Натуральний логарифм приблизно в 2,3 рази більший за десятковий логарифм того самого числа.

Для розв’язування задач і вправ слід чітко знати властивості логарифмів.

ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ:

Якщо $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$, то:

1) $\log_a a = 1$;

2) $\log_a 1 = 0$ – будь-який логарифм одиниці дорівнює нулю;

3) $a^{\log_a b} = b$ – **основна логарифмічна тотожність;**

4) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ – формула логарифма добутку;

5) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ – формула логарифма частки;

6) $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ – формула логарифма степеня;

7) $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$;

8) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$;

9) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$;

10) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

11) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ – формула переходу до нової основи логарифмування.

Завдання 2. Спростити вираз $\log_{\sqrt[5]{3}} \sqrt{2}$.

Розв'язання.

$$\log_{\sqrt[5]{3}} \sqrt{2} = \log_{3^{\frac{1}{5}}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{1}{5} \cdot \log_3 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} \cdot \log_3 2 = \frac{5}{2} \cdot \log_3 2.$$

Відповідь: $\frac{5}{2} \cdot \log_3 2$.

Завдання 3. Обчислити значення виразу $A = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

Розв'язання.

$$A = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}} = -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}} = -\log_2 \left(\frac{1}{8} \cdot \log_2 2 \right) =$$

$$= -\log_2 \frac{1}{8} = -\log_2 2^{-3} = 3 \log_2 2 = 3.$$

Відповідь: 3.

Завдання 4. Обчислити $\dfrac{\log_3 16 + \log_3 4}{\log_3 24 - \log_3 6}$.

Розв'язання.

$$\frac{\log_3 16 + \log_3 4}{\log_3 24 - \log_3 6} = \frac{\log_3 (16 \cdot 4)}{\log_3 \frac{24}{6}} = \frac{\log_3 64}{\log_3 4} = \log_4 64 = 3.$$

Відповідь: 3.

Часто зустрічаються завдання, в яких потрібно обчислити логарифм деякого числа, якщо відомо логарифм іншого числа.

Завдання 5. Знайти $\log_{35} 28$, якщо $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

Розв'язання. У такого типу завданнях варто побачити „приховану” відому величину. Справді,

$$1=\log_{14}14=\log_{14}(2\cdot 7)=\log_{14}2+\log_{14}7,$$

$$1=\log_{14}2+a,$$

$$\log_{14}2=1-a.$$

Тому:

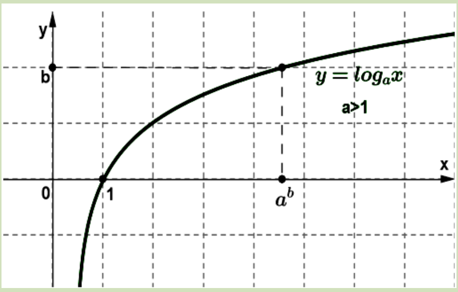
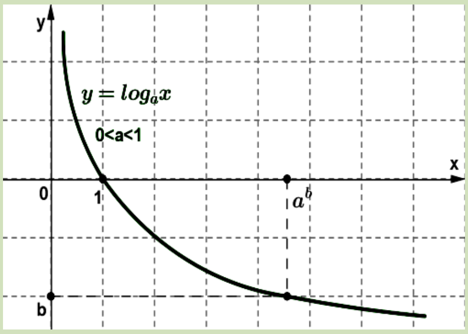
$$\log_{35}28=\frac{\log_{14}28}{\log_{14}35}=\frac{\log_{14}(14\cdot 2)}{\log_{14}(7\cdot 5)}=\frac{\log_{14}14+\log_{14}2}{\log_{14}7+\log_{14}5}=\frac{1+1-a}{a+b}=\frac{2-a}{a+b}.$$

Відповідь: $\dfrac{2-a}{a+b}$.

ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Функцію виду $y=\log_a x$, де $a>0, a\neq 1$, називають ***логарифмічною***.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Властивості	$y=\log_a x$, $a>1$	$y=\log_a x$, $0<a<1$
Графік	 Якщо $x=1$, то $y=0$. Якщо $x>1$, то $y>0$. Якщо $0<x<1$, то $y<0$.	 Якщо $x=1$, то $y=0$. Якщо $x>1$, то $y<0$. Якщо $0<x<1$, то $y>0$.
Область визначення	$(0;+\infty)$	
Область значень	$(-\infty;+\infty)$	
Парність	Ні парна, ні непарна	
Проміжки монотонності	Монотонно зростає	Монотонно спадає

Під час знаходження області визначення логарифмічної функції слід пам’ятати:

1) якщо функція має вигляд $y=\log_a\left(f(x)\right)$, $(a>0,\ a\neq 1)$, то слід вважати $f(x)>0$ (під знаком логарифма може стояти тільки додатний вираз).

Наприклад: якщо $y = \lg\left(x^2 - 5x + 6\right)$, то $x^2 - 5x + 6 > 0$, тобто $D(y) = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

2) якщо функція має вигляд $y = \log_{f(x)} b$, $b > 0$, то слід вважати $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$

(основа логарифма може бути тільки додатною і відмінною від одиниці).

Наприклад: якщо $y = \log_{x-1} 10$, то $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x - 1 \neq 1, \end{cases}$ тобто $D(y) = (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Завдання 6. Знайти область визначення функції $y = \log_{0,3} \dfrac{x-1}{x+3}$.

Розв'язання. Підлогарифмічний вираз повинен бути додатнім, тобто:

$$\frac{x-1}{x+3} > 0; \Rightarrow (x-1)(x+3) > 0.$$

Для того, щоб розв'язати отриману нерівність, пригадаємо, що графіком лівої частини останньої нерівності є парабола. Як відомо, парабола вітками вгору набуває значень більших нуля (додатних) поза коренями квадратного рівняння $(x-1)(x+3) = 0$, тобто $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Завдання 7. Знайти область визначення функції $y = \log_{x+4}\left(9 - 8x - x^2\right)$.

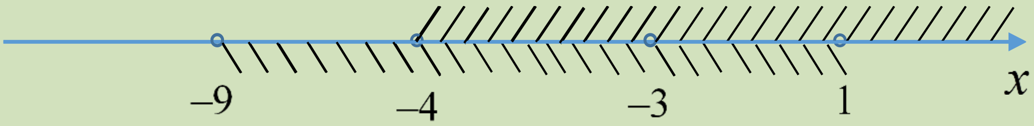
Розв'язання. Оскільки основа логарифма може бути тільки додатною і відмінною від одиниці, а під знаком логарифма може стояти лише додатний вираз, то матимемо:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1, \\ 9 - 8x - x^2 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4, \\ x \neq -3, \\ x^2 + 8x - 9 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4, \\ x \neq -3, \\ (x+9)(x-1) < 0. \end{cases}$$

Для того, щоб розв'язати останню нерівність системи, пригадаємо, що графіком лівої частини останньої нерівності є парабола. Як відомо, парабола вітками вгору набуває від'ємних значень між коренями квадратного рівняння $(x+9)(x-1)=0$, тобто $x \in (-9;1)$.

Тому: $\begin{cases} x \in (-4;+\infty), \\ x \neq -3, \\ x \in (-9;1). \end{cases}$

Нанесемо точки на числову вісь і знайдемо перетин проміжків, отриманих у системі:



Отже, розв'язком системи є об'єднання двох проміжків, тобто $x \in (-4;-3) \cup (-3;1)$.

Відповідь: $(-4;-3) \cup (-3;1)$.

Завдання 8. За властивостями логарифмічної функції визначити, що більше $\log_6 8$ чи $\log_5 8$?

Розв'язання. $\log_6 8 < \log_5 8$, тому що коли $x > 1$, графік функції $y = \log_6 8$ лежить нижче графіка функції $y = \log_5 8$.

Відповідь: $\log_6 8 < \log_5 8$.

Завдання 9. За властивостями логарифмічної функції визначити, що більше $\log_{\frac{1}{3}} 5$ чи $\log_{\frac{1}{2}} 5$?

Розв'язання. $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 5$, тому що графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}} 5$ менш віддалений від осі Ox, ніж графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} 5$.

Відповідь: $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 5$.

Завдання 10. Вказати два послідовні цілі числа, між якими знаходиться логарифм даного числа:

а) $\log_2 5$. Оскільки $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$, то $2 < \log_2 5 < 3$.

б) $\log_3 \frac{1}{5}$. Оскільки $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, то $-2 < \log_3 \frac{1}{5} < -1$.

в) $\log_{\frac{1}{5}} 7$. Оскільки $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$, $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$, то $-2 < \log_{\frac{1}{5}} 7 < -1$.

Завдання 11. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 3$.

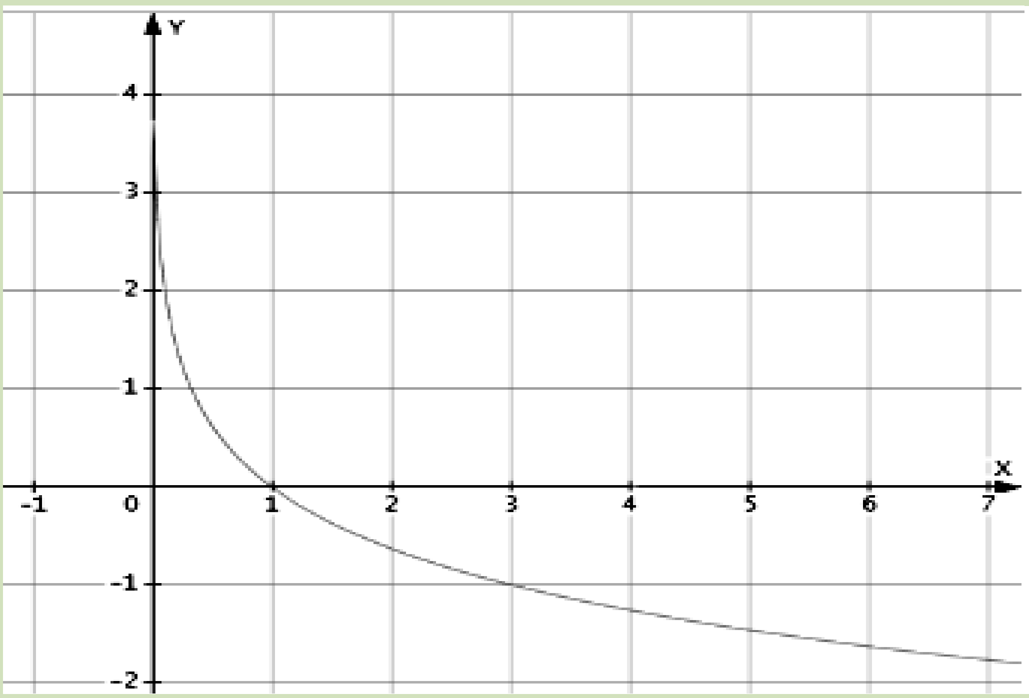
Розв'язання. Шлях побудови: 1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;

2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$;

3) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 3$.

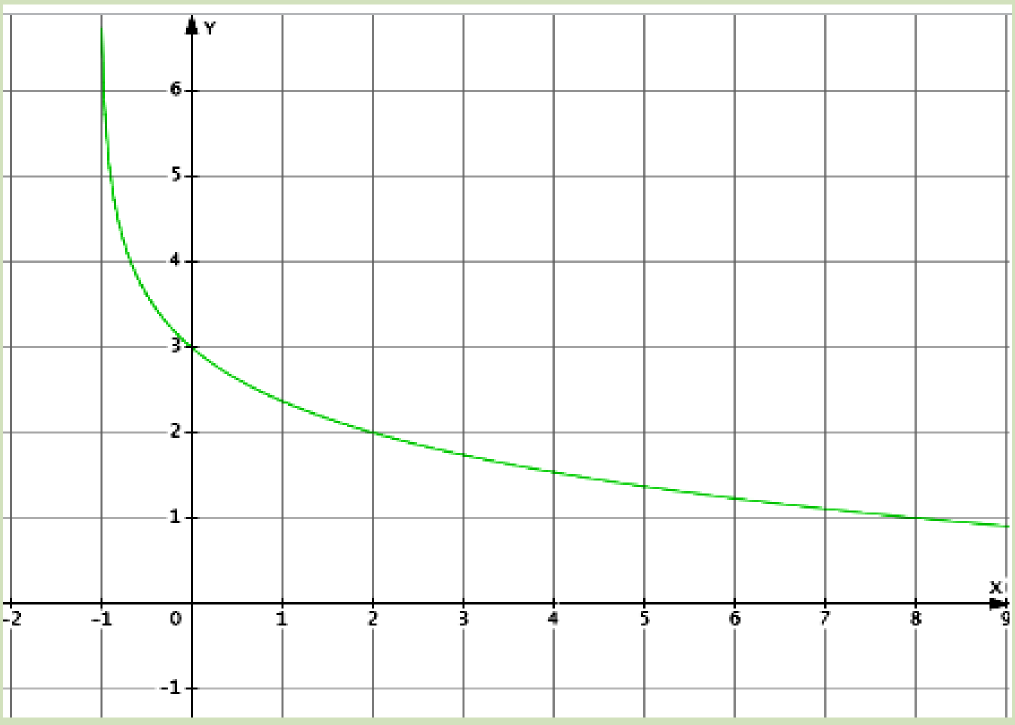
Перейдемо до побудови:

1) Побудуємо графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x$:



2) Щоб побудувати графік функції $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ паралельно перенесемо графік функції $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ на 1 одиницю вліво вздовж осі Ox:

3) Паралельним перенесенням графіка функції $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ на 3 одиниці вверх вздовж осі Oy одержимо графік функції $a>0$:



ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Логарифмічними називають рівняння, які містять змінну під знаком логарифма.

Наприклад, $\lg x = 1 + \lg^2 x$, $\log_2(x+3) = 9$, $\sqrt{\lg x} = \lg\sqrt{x}$.

Розв'язати логарифмічне рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів немає.

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд $\log_a x = b$, де $a > 0, a \neq 1, x > 0$. З означення логарифма випливає, що $x = a^b$.

Інший вигляд найпростішого логарифмічного рівняння:

$$\log_a x = \log_a b, \text{ де } a > 0, a \neq 1, x > 0, b > 0.$$

Із цього рівняння випливає, що $x = b$. Дійсно із рівності $\log_a x = \log_a b$, на підставі означення логарифма і логарифмічної тотожності, маємо $x = a^{\log_a b} = b$.

В основному, усі логарифмічні рівняння зводяться до розв'язування найпростіших рівнянь.

Зазначимо, що в прикладах використовуються тільки такі перетворення, які не призводять до втрати коренів, але можуть привести до одержання сторонніх коренів. Тому перевірка кожного з одержаних коренів обов'язкова, якщо немає впевненості у рівносильності рівнянь.

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь:

1. Метод введення нової змінної.
2. Метод потенціювання.
3. Метод зведення логарифмів до однієї основи.
4. Метод логарифмування.

5. Графічний метод розв’язування логарифмічних рівнянь.

Розглянемо кожен метод детальніше.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ВВЕДЕННЯ НОВОЇ ЗМІННОЇ

Завдання 12. Розв’язати рівняння $\log_3^2 x - 4\log_3 x = -3$.

Розв’язання. Введемо заміну $\log_3 x = t$. Отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 4t + 3 = 0$, коренями якого є $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Повернемося до заміни:

$$\log_3 x = t_1,\ \log_3 x = 1; \Rightarrow x = 3.$$

$$\log_3 x = t_2,\ \log_3 x = 3; \Rightarrow x = 3^3; \Rightarrow x = 27.$$

Перевірка: $x = 3$: $\log_3^2 3 - 4\log_3 3 = -3;\ 1^2 - 4\cdot 1 = -3;\ 1 - 4 = -3;\ -3 = -3;$

$x = 27$: $\log_3^2 27 - 4\log_3 27 = -3;\ 3^2 - 4\cdot 3 = -3;\ 9 - 12 = -3;\ -3 = -3.$

Отже, $x = 3$ і $x = 27$.

Відповідь: 3; 27.

Завдання 13. Розв’язати рівняння $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$.

Розв’язання. Введемо заміну $\sqrt{\lg x} = t$, $t \ge 0$. Отримаємо квадратне рівняння $t^2 + 3t - 4 = 0$, коренями якого є $t_1 = -4$, $t_2 = 1$.

Повернемося до заміни: $t_1 = -4$ не задовольняє умову $t \ge 0$.

Тому $\sqrt{\lg x} = t_2$, $\sqrt{\lg x} = 1$, $\lg x = 1$, $x = 10$.

Перевірка: $x = 10 : 4 - \lg 10 = 3\sqrt{\lg 10}$, $4 - 1 = 3\sqrt{1}$, $3 = 3$.

Отже, $x = 10$.

Відповідь: 10.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІЮВАННЯ

Потенціювання – це перехід від рівняння вигляду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ до рівняння $f(x) = g(x)$, де a – відмінне від одиниці додатне число, $f(x)$ і $g(x)$ – елементарні алгебраїчні функції, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Завдання 14. Розв'язати рівняння $\log_5(x-1) + \log_5(x-2) = \log_5(x+2)$.

Розв'язання.

Знайдемо область допустимих значень:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0, \\ x+2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>2, \\ x>-2; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;+\infty).$$

На основі властивості логарифмів $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ запишемо:

$$\log_5((x-1)(x-2)) = \log_5(x+2).$$

Оскільки основи логарифмів рівні, перейдемо до рівняння:

$$(x-1)(x-2) = x+2;$$

$$x^2 - 4x = 0;\ \ x(x-4) = 0;\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 4.$$

Врахувавши область допустимих значень $x \in (2;+\infty)$, отримаємо, що $x = 4$.

Зробивши перевірку, переконаємося, що $x = 4$ дійсно є коренем заданого рівняння.

Перевірка: $x = 4$: $\log_5(4-1) + \log_5(4-2) = \log_5(4+2)$;

$$\log_5 3 + \log_5 2 = \log_5 6;$$

$$\log_5(3 \cdot 2) = \log_5 6;$$

$$\log_5 6 = \log_5 6.$$

Отже, $x = 4$.

Відповідь: 4.

Завдання 15. Розв’язати рівняння $\lg(4,5 - x) = \lg 4,5 - \lg x$.

Розв’язання. Знайдемо область допустимих значень:

$$\begin{cases} 4,5 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 4,5), \\ x \in (0; +\infty); \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 4,5).$$

На основі властивості логарифмів $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ запишемо $\lg(4,5 - x) = \lg \frac{4,5}{x}$.

Оскільки основи логарифмів рівні, перейдемо до рівняння:

$$4,5 - x = \frac{4,5}{x};$$

$$x^2 - 4,5x + 4,5 = 0.$$

Помноживши для зручності обчислень обидві частини отриманого рівняння на 2, матимемо:

$$2x^2 - 9x + 9 = 0; \;\; x_1 = 1,5; \;\; x_2 = 3.$$

Врахувавши область допустимих значень $x \in (0; 4,5)$, отримаємо, що $x = 1,5$ і $x = 3$.

Відповідь: 1,5; 3.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ЗВЕДЕННЯ ЛОГАРИФМІВ ДО ОДНІЄЇ ОСНОВИ

Завдання 16. Розв’язати рівняння $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$.

Розв’язання. Областю допустимих значень рівняння є $x \in (0; +\infty)$.

Звести логарифм у від’ємнику рівняння до основи 3 можна двома способами, скориставшись однією з формул: $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$ або $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Запишемо рівняння у вигляді $\log_3 x - 2\log_{3^{-1}} x = 3$.

Скориставшись формулою $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$, матимемо:

$$\log_3 x - 2 \cdot \frac{1}{-1} \log_3 x = 3;$$

$$\log_3 x + 2 \cdot \log_3 x = 3;$$

$$3\log_3 x = 3;$$

$$\log_3 x = 1;$$

$$x = 3.$$

Врахувавши область допустимих значень $x \in (0;+\infty)$, переконуємось, що знайдене значення є коренем рівняння.

Відповідь: 3.

Завдання 17. Розв’язати рівняння

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) - \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2 - 16} = 2.$$

Розв’язання. Знайдемо область допустимих значень рівняння:

$$x^2 - 16 > 0;$$

$$(x-4)(x+4) > 0;$$

$$x \in (-\infty;-4) \cup (4;+\infty).$$

Приведемо логарифми другого доданка рівняння до основ 2 і 3:

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) - \log_{2^{-1}} \log_{3^{-1}} \frac{1}{x^2 - 16} = 2.$$

Застосуємо формулу $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$:

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) - \left(\frac{1}{-1}\right) \log_2 \log_{3^{-1}} \frac{1}{x^2 - 16} = 2.$$

Отримаємо: $\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) + \log_2 \log_{3^{-1}} \frac{1}{x^2 - 16} = 2.$

Аналогічні перетворення виконаємо і над внутрішнім логарифмом у другому доданку рівняння:

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) + \log_2 \left(\frac{1}{-1} \log_3 \frac{1}{x^2 - 16}\right) = 2;$$

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) + \log_2 \left(-\log_3 \frac{1}{x^2 - 16}\right) = 2.$$

Застосувавши формулу $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, матимемо:

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) + \log_2 \left(\log_3 \left(\frac{1}{x^2 - 16}\right)^{-1}\right) = 2.$$

Перетворимо далі рівняння таким чином:

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) + \log_2 \left(\log_3 \left(\left(x^2 - 16\right)^{-1}\right)^{-1}\right) = 2;$$

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) + \log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) = 2;$$

$$2 \log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) = 2;$$

$$\log_2 \log_3 \left(x^2 - 16\right) = 1.$$

Скориставшись два рази послідовно означенням логарифма, отримаємо:

$$\log_3 \left(x^2 - 16\right) = 2;$$

$$x^2 - 16 = 3^2; \;\; x^2 - 16 = 9; \;\; x^2 = 25; \;\; x_{1,2} = \pm 5.$$

Врахувавши область допустимих значень рівняння $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$, переконуємось, що знайдені значення $x_{1,2} = \pm 5$ є коренями рівняння.

Відповідь: –5, 5.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМУВАННЯ

Логарифмування – це перехід від рівняння $f(x) = g(x)$ до рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Завдання 18. Розв'язати рівняння $x^{\lg x} = 100x$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень рівняння. Оскільки змінна *x* є основою показникової функції і входить до показника степеня під знаком логарифма, то:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1; +\infty).$$

Прологарифмуємо обидві частини рівняння:

$$\lg x^{\lg x} = \lg 100x.$$

Використовуючи формули $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ і $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, запишемо:

$$\lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x.$$

Перетворимо далі рівняння так:

$$\lg^2 x - \lg x - \lg 100 = 0;$$

$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

Введемо заміну: $\lg x = t$.

Тоді $t^2 - t - 2 = 0$; $t_1 = -1, t_2 = 2$.

Повернемося до заміни: $\lg x = -1$, $x = 10^{-1}$, $x = \frac{1}{10}$;

$$\lg x = 2,\ \ x = 10^{2},\ \ x = 100.$$

Врахувавши область допустимих значень рівняння $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, переконуємось, що знайдені значення є коренями рівняння.

Відповідь: $\frac{1}{10}$; 100.

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ

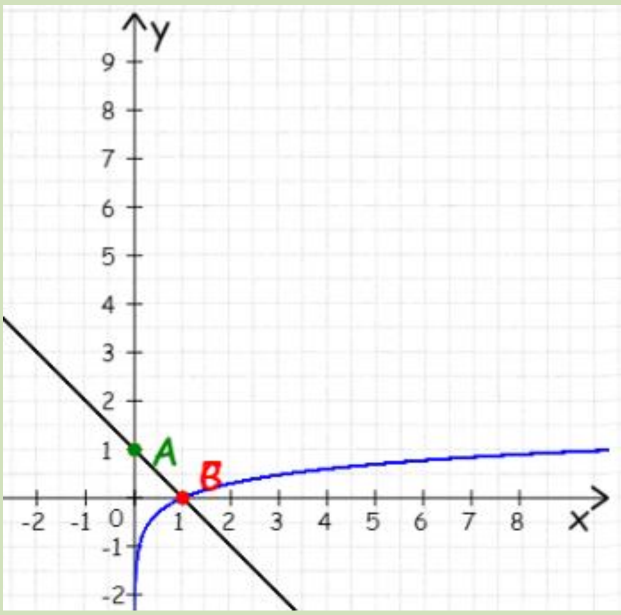
Завдання 19. Розв'язати рівняння $\lg x = 1 - x$ графічно.

Розв'язання. В одній системі координат будуємо графіки функції $y = \lg x$ і $y = 1 - x$.

Абсциса точки перетину побудованих графіків дорівнює 1.

Підставивши у рівняння знайдене значення абсциси, переконуємося, що $x = 1$ – корінь заданого рівняння.

Відповідь: 1.



ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

До найпростіших логарифмічних нерівностей відносять нерівності виду $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Ідея їх розв'язування базується на властивостях функції $y = \log_a x$, а саме: якщо $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ зростає на своїй області визначення, а якщо $0 < a < 1$, то $y = \log_a x$ спадає.

З цих властивостей випливає правило розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей:

1) якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ еквівалентна системі нерівностей $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ а нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ еквівалентна системі нерівностей $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2) якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ еквівалентна системі нерівностей $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ а нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ еквівалентна системі нерівностей $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Тобто, якщо $a > 1$, то знак нерівності не змінюється, а якщо $0 < a < 1$, то знак нерівності змінюється на протилежний. При цьому слід враховувати область допустимих значень для логарифмічних нерівностей.

У випадку нестрогої нерівності в розв'язок включаються також корені відповідного логарифмічного рівняння.

Варто зауважити, що під час розв'язування складніших логарифмічних нерівностей <u>область допустимих значень нерівності слід записувати перед виконанням перетворень логарифмічних виразів</u> із використанням властивостей логарифмів.

У різних джерелах можна зустріти і таку інтерпретацію розв'язування логарифмічних нерівностей:

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x), \\ a > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x), \\ 0 < a < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Інші логарифмічні нерівності зводяться до найпростіших такими самими методами, що й перелічені при розв'язуванні логарифмічних рівнянь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ПОТЕНЦІЮВАННЯМ

Завдання 20. Розв'язати нерівність $\log_{0,3}(3x-8) > \log_{0,3}\left(x^2+4\right)$.

Розв'язання. Оскільки основа логарифмічних функцій в обох частинах нерівності $0 < 0,3 < 1$, то:

$$\log_{0,3}(3x-8) > \log_{0,3}\left(x^2+4\right); \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8 > 0, \\ 3x-8 < x^2+4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{8}{3}, \\ x^2 - 3x + 12 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{8}{3}, \\ x \in R; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{8}{3}; +\infty\right).$$

Відповідь: $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

Завдання 21. Розв'язати нерівність $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<\log_{1,2}5$.

Розв'язання. Звертаючи увагу на те, що основа логарифмічних функцій в обох частинах нерівності $1,2>1$, матимемо:

$$\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<\log_{1,2}5; \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1,2}\left(x^2-4\right)<\log_{1,2}5, \\ x-2>0, \\ x+2>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4<5, \\ x-2>0, \\ x+2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9<0, \\ x>2, \\ x>-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3)<0, \\ x>2, \\ x>-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<3, \\ x>2, \\ x>-2; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(2;3).$$

Відповідь: $(2;3)$.

Завдання 22. Розв'язати нерівність $2\cdot\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\frac{2}{3}$.

Розв'язання. Область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x>3; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3;+\infty).$$

Перетворимо нерівність і перейдемо до еквівалентної системи:

$$2\cdot\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\frac{2}{3}; \Leftrightarrow \log_8\frac{(x-2)^2}{x-3}>\log_8 4; \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(3;+\infty), \\ \frac{(x-2)^2}{x-3}>4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(3;+\infty), \\ \frac{x^2-8x+16}{x-3}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(3;+\infty), \\ \frac{(x-4)^2}{x-3}>0; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3;4)\cup(4;+\infty).$$

Відповідь: $(3;4)\cup(4;+\infty)$.

МЕТОД ЗВЕДЕННЯ ЛОГАРИФМІВ ДО ОДНІЄЇ ОСНОВИ

Завдання 23. Розв’язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1.$$

Розв’язання. Область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x+1>0, \\ 5-x>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>-1, \\ x<5; \end{cases} \Rightarrow x\in(1;5).$$

Приведемо всі логарифми до основи $\frac{1}{3}$:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{3^{\frac{1}{2}}}(5-x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3};\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_{3}(5-x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3};\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+2\log_{3}(5-x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3};\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{3}(5-x)^{2}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3};\Leftrightarrow$$

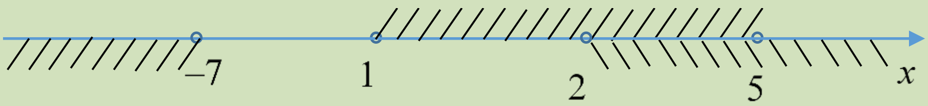
$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{3^{-1}}(5-x)^{2}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3};\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(5-x)^{2}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3};\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{(x-1)(x+1)}{(5-x)^2} < \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}; \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2-1}{(5-x)^2} < \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}; \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;5), \\ \dfrac{x^2-1}{(5-x)^2} > \dfrac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;5), \\ \dfrac{3x^2-3-(5-x)^2}{3(5-x)^2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;5), \\ 3x^2-3-25+10x-x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;5), \\ x^2+5x-14 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;5), \\ (x+7)(x-2) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;5), \\ x \in (-\infty;-7) \cup (2;+\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;5).$$

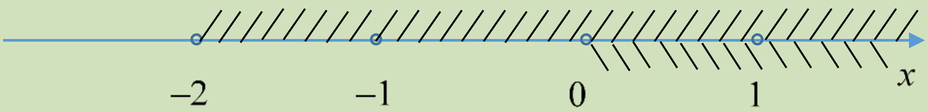


Відповідь: $(2;5)$.

Завдання 24. Розв’язати нерівність $\log_{x+2} 4 > \log_x 2$.

Розв’язання. Область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \neq -1, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty).$$



Перетворимо нерівність:

$$\log_{x+2} 4 > \log_x 2; \Leftrightarrow \log_{x+2} 2^2 > \log_x 2; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{x+2} 2 > \log_x 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{\log_2(x+2)} > \frac{1}{\log_2 x}.$$

Для $x \in (0;1)$ з області допустимих значень нерівності матимемо:

$$\log_2 x < 0, \log_2(x+2) > 0; \Rightarrow \log_2(x+2) \cdot \log_2 x < 0.$$

Домноживши останню нерівність на $\log_2(x+2)\cdot\log_2 x$ одержимо:

$$2\log_2 x < \log_2(x+2);\Rightarrow \log_2 x^2 < \log_2(x+2);\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0;\Rightarrow x\in(-1;2).$$

Для $x\in(1;+\infty)$ з області допустимих значень нерівності матимемо:

$$2\cdot\log_2 x > \log_2(x+2);\Rightarrow \log_2 x^2 > \log_2(x+2);\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 > 0;\Rightarrow (x+1)(x-2) > 0;\Rightarrow x\in(-\infty;-1)\bigcup(2;+\infty).$$

Розв’яжемо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;1),\\ x\in(-1;2);\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(1;+\infty),\\ x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty);\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(0;1),\\ x\in(2;+\infty);\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(2;+\infty).$$

Відповідь: $(0;1)\cup(2;+\infty)$.

Завдання 25. Розв’язати нерівність $\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\le 0$.

Розв’язання. Область допустимих значень заданої нерівності: $x\ne -\frac{1}{2}$.

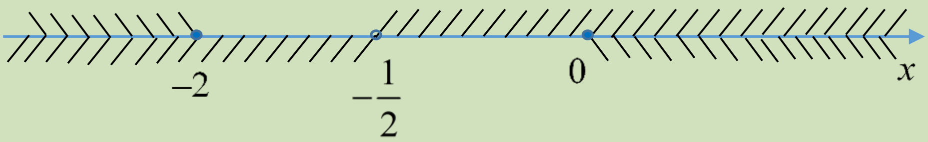
Перетворимо нерівність:

$$\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\le 0;\Leftrightarrow \lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\le \lg 1;\Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\le 1;\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-1}{2x+1}\le 1;\\ \frac{x-1}{2x+1}\ge -1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{2x+1}-1\le 0,\\ \frac{x-1}{2x+1}+1\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-1-2x-1}{2x+1}\le 0,\\ \frac{x-1+2x+1}{2x+1}\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+2}{2x+1}\ge 0,\\ \frac{3x}{2x+1}\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)(2x+1)\ge 0,\\ 3x(2x+1)\ge 0,\\ x\ne\frac{1}{2};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-2] \cup \left(-\frac{1}{2};+\infty\right), \\ x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup [0;+\infty). \end{cases}$$

Звертаємо увагу, що точку $x = -\frac{1}{2}$ потрібно зробити виколотою (незафарбованою):



Отже, розв'язком останньої системи буде: $x \in (-\infty;-2] \cup [0;+\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;-2] \cup [0;+\infty)$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ
МЕТОД ЗАМІНИ НЕВІДОМОЇ (ПІДСТАНОВКИ)

Завдання 26. Розв'язати нерівність $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg x - 1 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \lg x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \lg x \neq \lg 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 10; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;10) \cup (10;+\infty).$$

Зробимо підстановку $\lg x = t$ і отримаємо відносно невідомої t раціональну нерівність:

$$\frac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} < 1; \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} - 1 < 0; \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 3 - t + 1}{t - 1} < 0; \Leftrightarrow \frac{t^2 - 4t + 4}{t - 1} < 0; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{t - 1} < 0; \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 2, \\ t - 1 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 2, \\ t < 1; \end{cases} \Leftrightarrow t < 1.$$

Повертаючись до заміни, і, враховуючи ОДЗ, матимемо:

$$\begin{cases} x \in (0;10) \cup (10;+\infty), \\ \lg x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;10) \cup (10;+\infty), \\ \lg x < \lg 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;10) \cup (10;+\infty), \\ x < 10; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;10).$$

Відповідь: $(0;10)$.

Завдання 27. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)}+1>\log_3\left(3x^2-4x+2\right).$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} 3x^2-4x+2>0, \\ \log_9\left(3x^2-4x+2\right)\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ \log_9\left(3x^2-4x+2\right)\geq \log_9 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ 3x^2-4x+2\geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-4x+1\geq 0; \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)\geq 0; \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right] \cup [1;+\infty).$$

Перейдемо до основи 3 в логарифмі лівої частини нерівності:

$$\sqrt{\log_{3^2}\left(3x^2-4x+2\right)}+1>\log_3\left(3x^2-4x+2\right); \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\log_3\left(3x^2-4x+2\right)}+1>\log_3\left(3x^2-4x+2\right).$$

Введемо заміну: $\sqrt{\frac{1}{2}\log_3\left(3x^2-4x+2\right)}=t, t\geq 0.$

Тоді

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}\log_3\left(3x^2-4x+2\right)}\right)^2=t^2; \Leftrightarrow, \frac{1}{2}\log_3\left(3x^2-4x+2\right)=t^2; \Leftrightarrow \log_3\left(3x^2-4x+2\right)=2t^2.$$

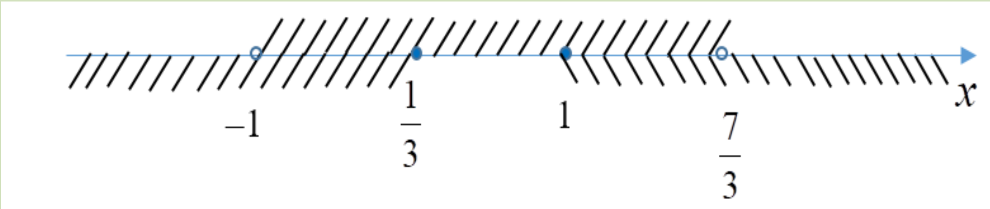
Отже,

$$\begin{cases} t+1>2t^2, \\ t\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-t-1<0, \\ t\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)<0, \\ t\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left(-\frac{1}{2};1\right), \\ t\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow t \in [0;1).$$

Повертаючись до заміни, і, враховуючи ОДЗ, матимемо:

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty), \\ 3x^2 - 4x + 2 < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty), \\ 3(x+1)\left(x - \frac{7}{3}\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty), \\ x \in \left(-1; \frac{7}{3}\right); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right] \cup \left[1; \frac{7}{3}\right).$$



Відповідь: $x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right] \cup \left[1; \frac{7}{3}\right)$.

Завдання 28. Розв'язати нерівність $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x} 2$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ 2x \neq 1, \\ 4x \neq 1, \\ x > 0, \\ 2x > 0, \\ 4x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x > 0, \\ 2x > 0, \\ 4x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in R_+ \setminus \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}.$$

Отже, $D = R_+ \setminus \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$.

Перейдемо в усіх логарифмах нерівності до основи 2:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2(2x)} > \frac{1}{\log_2(4x)}; \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x \cdot (\log_2 2 + \log_2 x)} > \frac{1}{\log_2 2^2 + \log_2 x}; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x \cdot (1 + \log_2 x)} > \frac{1}{2 + \log_2 x}.$$

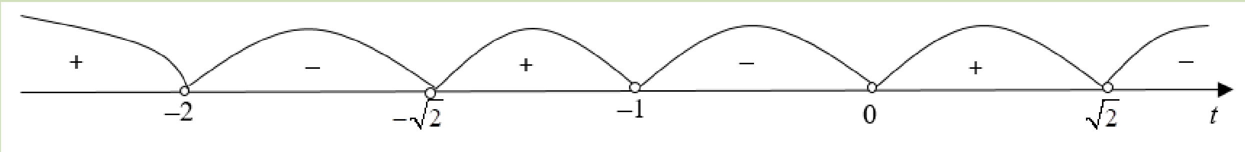
Введемо заміну: $\log_2 x = t$.

Тоді

$$\frac{1}{t(1+t)} > \frac{1}{2+t}; \Leftrightarrow \frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{2+t} > 0; \Leftrightarrow \frac{2+t-t-t^2}{t(1+t)(2+t)} > 0; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-t^2}{t(1+t)(2+t)} > 0; \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2}-t\right)\left(\sqrt{2}+t\right)}{t(1+t)(2+t)} > 0.$$

Використаємо метод інтервалів:



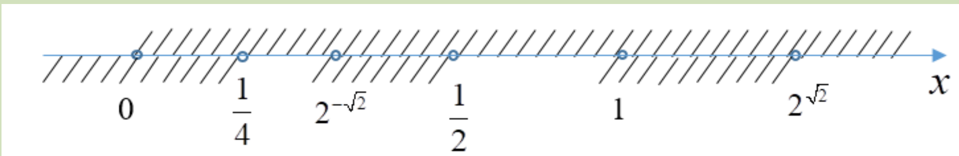
Таким чином,

$$\left[\begin{array}{l} t < -2, \\ -\sqrt{2} < t < -1, \\ 0 < t < \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Тому, повертаючись до невідомої x, отримаємо:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \log_2 x < -2, \\ -\sqrt{2} < \log_2 x < -1, \\ 0 < \log_2 x < \sqrt{2}, \end{array}\right. \\ x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty); \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{4}, \\ 2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}, \\ 1 < x < 2^{\sqrt{2}}; \end{array}\right. \\ x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right).$$



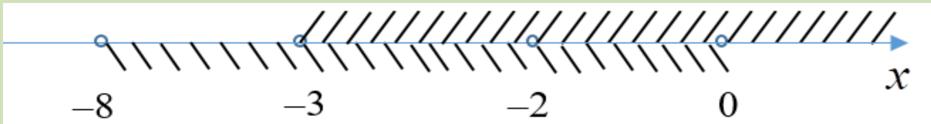
Відповідь: $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ОБЛАСТІ ДОПУСТИМИХ ЗНАЧЕНЬ

Завдання 29. Розв’язати нерівність $\dfrac{\lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)}{\lg(x+3)}>0$.

Розв’язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases}-8x-x^2>0,\\ x+3>0,\\ \lg(x+3)\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+8)<0,\\ x>-3,\\ x+3\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-8;0),\\ x\in(-3;+\infty),\\ x\neq -2;\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup(-2;0).$$



Отже, $D=(-3;-2)\cup(-2;0)$.

Замітимо, що область допустимих значень розпадається на дві множини – інтервал $(-3;-2)$, де $\lg(x+3)<0$, та інтервал $(-2;0)$, в точках якого $\lg(x+3)>0$.

Отже,

$$\frac{\lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)}{\lg(x+3)}>0;\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;-2),\\ \lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0),\\ \lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)>0;\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;-2),\\ \lg\dfrac{7}{-8x-x^2}<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0),\\ \lg\dfrac{7}{-8x-x^2}>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;-2),\\ \lg\dfrac{7}{-8x-x^2}<\lg 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0),\\ \lg\dfrac{7}{-8x-x^2}>\lg 1;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;-2),\\ \dfrac{7}{-8x-x^2}<1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0),\\ \dfrac{7}{-8x-x^2}>1;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;-2),\\ \dfrac{7}{-8x-x^2}-1<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0),\\ \dfrac{7}{-8x-x^2}-1>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;-2),\\ x^2+8x+7<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0),\\ x^2+8x+7>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;-2),\\ (x+1)(x+7)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0),\\ (x+1)(x+7)>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-3;-2),\\ x\in(-7;-1);\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0),\\ x\in(-\infty;-7)\cup(-1;+\infty);\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

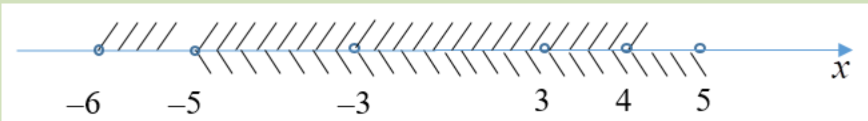
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(-3;-2),\\ x\in(-1;0),\end{array}\right.\Rightarrow x\in(-3;-2)\cup(-1;0).$$

Відповідь: $(-3;-2)\cup(-1;0)$.

Завдання 30. Розв’язати нерівність $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\frac{24-x^2-2x}{14}>1$.

Розв’язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases}\dfrac{25-x^2}{16}\neq 1,\\ 25-x^2>0,\\ 24-x^2-2x>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\neq 9,\\ (5-x)(5+x)>0,\\ x^2+2x-24<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 3,\\ (x-5)(x+5)<0,\\ (x+6)(x-4)<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 3,\\ x\in(-5;5),\\ x\in(-6;4).\end{cases}$$



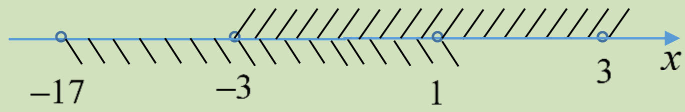
Отже, $D=(-5;-3)\cup(-3;3)\cup(3;4)$.

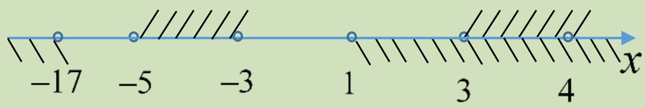
Замітимо, що на інтервалі $(-3;3)$, який складає область допустимих значень, основа логарифма $\frac{25-x^2}{16}>1$, а на решті частини області допустимих значень – ця основа набуває значення з інтервалу $(0;1)$. Враховуючи це, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-3;3), \\ \dfrac{24-x^2-2x}{14}>\dfrac{25-x^2}{16}; \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-5;-3)\cup(3;4), \\ \dfrac{24-x^2-2x}{14}<\dfrac{25-x^2}{16}; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-3;3), \\ 384-16x^2-32x>350-14x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-5;-3)\cup(3;4), \\ 384-16x^2-32x<350-14x^2; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-3;3), \\ x^2+16x-17<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-5;-3)\cup(3;4), \\ x^2+16x-17>0; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-3;3), \\ (x+17)(x-1)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-5;-3)\cup(3;4), \\ (x+17)(x-1)>0; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-3;3), \\ x\in(-17;1); \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-5;-3)\cup(3;4), \\ x\in(-\infty;-17)\cup(1;+\infty). \end{cases}\end{array}\right.$$





Таким чином, остання сукупність набуде вигляду $\left[\begin{array}{l} x\in(-3;1), \\ x\in(3;4). \end{array}\right.$

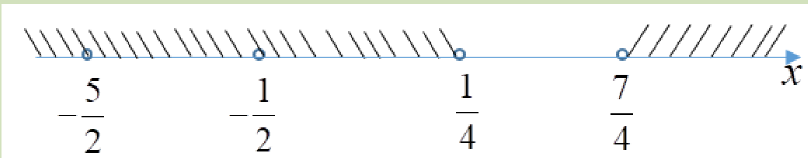
Відповідь: $(-3;1)\cup(3;4)$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ШЛЯХОМ ЗВЕДЕННЯ ЇХ ДО ЕКВІВАЛЕНТНИХ СИСТЕМ АБО ДО ЕКВІВАЛЕНТНИХ СУКУПНОСТЕЙ СИСТЕМ БІЛЬШ ПРОСТИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Завдання 31. Розв'язати нерівність $\dfrac{\log_5\left(x^2-2x+\dfrac{7}{16}\right)}{4x^2+12x+5}>0.$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} x^2-2x+\dfrac{7}{16}>0, \\ 4x^2+12x+5\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)>0, \\ x\neq -\dfrac{1}{2}, \\ x\neq -\dfrac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{7}{4};+\infty\right), \\ x\neq -\dfrac{1}{2}, \\ x\neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

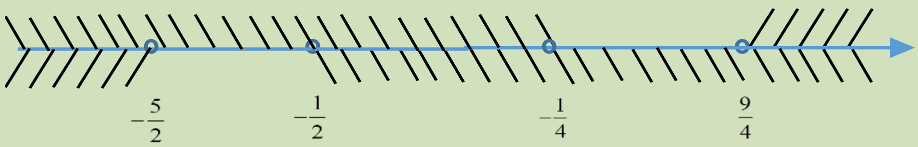


Отже, $D=\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{7}{4};+\infty\right).$

Замінимо задану нерівність еквівалентною сукупністю систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_5\left(x^2-2x+\dfrac{7}{16}\right)>0, \\ 4x^2+12x+5>0; \end{cases} \\ \begin{cases} \log_5\left(x^2-2x+\dfrac{7}{16}\right)<0, \\ 4x^2+12x+5<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x+\dfrac{7}{16}>1, \\ 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x+\dfrac{7}{16}<1, \\ 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x-\dfrac{9}{16}>0, \\ 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x-\dfrac{9}{16}<0, \\ 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{9}{4}\right)>0, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} \left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{9}{4}\right)<0, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right), \\ x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right); \end{cases} \\ \begin{cases} x\in\left(-\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right), \\ x\in\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right). \end{cases} \end{array}\right.$$



Отже,

$$\left[\begin{array}{l} x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right), \\ x\in\varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right).$$

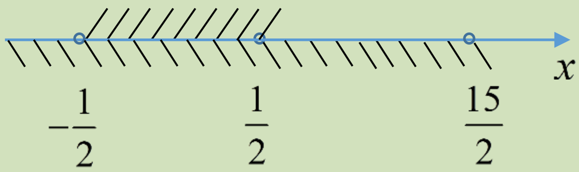
Відповідь: $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Завдання 32. Розв'язати нерівність $\dfrac{3+\log_{\frac{1}{3}}(15-2x)}{\log_3\left(0,5-2x^2\right)}\le 0$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} 15-2x>0, \\ 0,5-2x^2>0, \\ 0,5-2x^2\ne 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{15}{2}, \\ 2x^2-0,5<0, \\ 2x^2\ne -0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{15}{2}, \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0, \\ x^2\ne -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{15}{2}\right), \\ x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right), \\ x \in R; \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right).$$

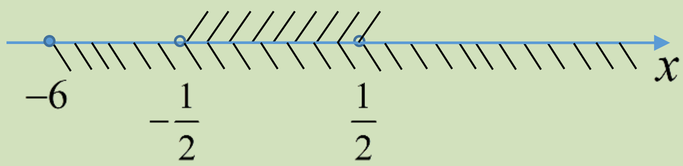


Замінимо задану нерівність еквівалентною сукупністю систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 + \log_{\frac{1}{3}}(15-2x) \le 0, \\ \log_3\left(0{,}5 - 2x^2\right) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 3 + \log_{\frac{1}{3}}(15-2x) \ge 0, \\ \log_3\left(0{,}5 - 2x^2\right) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(15-2x) \le -3, \\ 0{,}5 - 2x^2 > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(15-2x) \ge -3, \\ 0{,}5 - 2x^2 < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(15-2x) \le \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}, \\ 2x^2 < -0{,}5; \end{cases} \\ \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(15-2x) \ge \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}, \\ 2x^2 > -0{,}5; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 15 - 2x \ge 3^3, \\ x^2 < -1; \end{cases} \\ \begin{cases} 15 - 2x \le 3^3, \\ x^2 > -1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -6, \\ x^2 < -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -6, \\ x^2 > -1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x \in [-6; +\infty); \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-6; +\infty).$$

Враховуючи область допустимих значень заданої нерівності, отримаємо:



Отже, $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Відповідь: $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЯМИ

Завдання 33. Розв'язати нерівність $\log_{|x|}(6x+27)>2$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq \pm 1, \\ 6x+27>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq \pm 1, \\ x>-\dfrac{9}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{9}{2};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty).$$

Таким чином, $D=\left(-\dfrac{9}{2};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

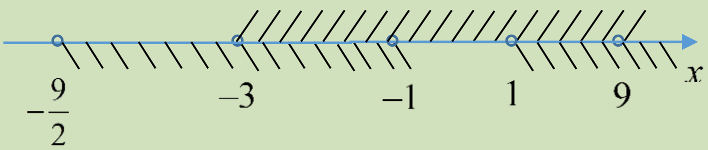
Перепишемо початкову нерівність у вигляді:

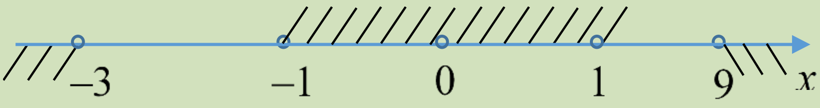
$$\log_{|x|}(6x+27)>\log_{|x|}x^2.$$

Тоді:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in\left(-\dfrac{9}{2};-1\right)\cup(1;+\infty), \\ 6x+27>x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-1;0)\cup(0;1), \\ 6x+27<x^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in\left(-\dfrac{9}{2};-1\right)\cup(1;+\infty), \\ x^2-6x-27<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-1;0)\cup(0;1), \\ x^2-6x-27>0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in\left(-\dfrac{9}{2};-1\right)\cup(1;+\infty), \\ (x+3)(x-9)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-1;0)\cup(0;1), \\ (x+3)(x-9)>0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in\left(-\dfrac{9}{2};-1\right)\cup(1;+\infty), \\ x\in(-3;9); \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-1;0)\cup(0;1), \\ x\in(-\infty;-3)\cup(9;+\infty); \end{cases} \end{array}\right.$$





Отже, остання сукупність матиме вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-3;-1)\cup(1;9); \\ x \in \varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-3;-1)\cup(1;9).$$

Відповідь: $(-3;-1)\cup(1;9)$.

Завдання 34. Розв'язати нерівність $\lg\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right| < 0$.

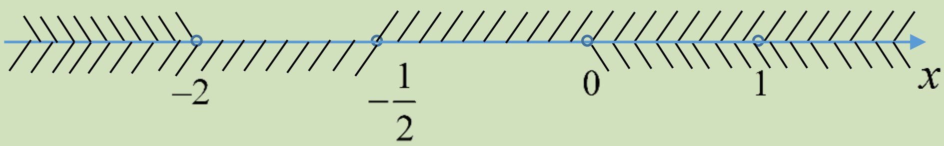
Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень заданої нерівності:

$$\frac{x-1}{2x+1} \neq 0; \Leftrightarrow x \in R \setminus \left\{-\frac{1}{2};1\right\}.$$

Задана нерівність еквівалентна системі:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right| < 1, \\ x \in R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1} < 1, \\ \dfrac{x-1}{2x+1} > -1, \\ x \in R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{2x+1} > 0, \\ \dfrac{3x}{2x+1} > 0, \\ x \in R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x+1) > 0, \\ 3x(2x+1) > 0, \\ x \in R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) > 0, \\ x\left(x+\dfrac{1}{2}\right) > 0, \\ x \in R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-2)\cup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right), \\ x \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty), \\ x \in R \setminus \left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}. \end{cases}$$



Отже, розв'язком останньої системи буде $x \in (-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

Нерівності зі змінною та параметром називаються ***логарифмічними***, якщо змінна входить під знак логарифма або його основи.

Наприклад: $\log_3(3ax-5)\le\log_3(2-x)$, $(\log_a x-2)(\log_a x+3)\le 5$.

Єдиного способу розв'язування логарифмічних нерівностей з параметрами не існує.

Завдання 35. Розв'язати нерівність $\dfrac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$.

Розв'язання. Область допустимих значень нерівності: $x\in(0;+\infty)$, допустимі значення параметра $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Введемо заміну: $\log_a x=t$.

Матимемо:

$$\frac{3t+6}{t^2+2}>1;\Leftrightarrow\frac{3t+6}{t^2+2}-1>0;\Leftrightarrow\frac{3t+6-t^2-2}{t^2+2}>0;\Leftrightarrow\frac{t^2-3t-4}{t^2+2}<0;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2-3t-4<0$$

(оскільки знаменник $t^2+2>0$ при будь-якому значенні змінної). Нерівність $t^2-3t-4<0$ має розв'язок $t\in(-1;4)$.

Повернемося до заміни:

$$-1<\log_a x<4;\Leftrightarrow\log_a a^{-1}<\log_a x<\log_a a^4;\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\a^{-1}<x<a^4;\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1,\\a^4<x<a^{-1}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;0]\cup\{1\}$, то задача не визначена;

якщо $a\in(0;1)$, то $x\in\left(a^4;\dfrac{1}{a}\right)$;

якщо $a \in (1;+\infty)$, то $x \in \left(\frac{1}{a}; a^4\right)$.

Завдання 36. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + a\right) > -3$ з параметром a.

Розв'язання.

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + a\right) > -3; \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0, \\ x^2 - 2x + a < 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 > 1 - a, \\ (x-1)^2 < 9 - a. \end{cases}$$

Введемо заміну: $x - 1 = t$. Тоді $1 - a < t^2 < 9 - a$.

Неважко помітити, що при $a \geq 9$ нерівність $t^2 < 9 - a$ розв'язків немає, а при $a > 1$ нерівність $t^2 > 1 - a$ виконується для будь-якого t.

Тому розв'язком подвійної нерівності $1 - a < t^2 < 9 - a$ у випадку $1 < a < 9$ будуть розв'язки нерівності $t^2 < 9 - a$, тобто $-\sqrt{9-a} < t < \sqrt{9-a}$.

Якщо ж $a \leq 1$, то, розв'язавши подвійну нерівність $1 - a < t^2 < 9 - a$, отримаємо $-\sqrt{9-a} < t < -\sqrt{1-a}$ або $\sqrt{1-a} < t < \sqrt{9-a}$.

Повернувшись до заміни, матимемо:

$$\text{при } a \leq 1: -\sqrt{9-a} < x - 1 < -\sqrt{1-a}; \Leftrightarrow 1 - \sqrt{9-a} < x < 1 - \sqrt{1-a};$$

$$\text{або } \sqrt{1-a} < x - 1 < \sqrt{9-a}; \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{9-a};$$

$$\text{при } 1 < a < 9: \quad -\sqrt{9-a} < x - 1 < \sqrt{9-a}; \Leftrightarrow 1 - \sqrt{9-a} < x < 1 + \sqrt{9-a};$$

при $a \geq 9$ розв'язків немає.

Відповідь:

якщо $a \in (-\infty;1]$, то $x \in \left(1 - \sqrt{9-a}; 1 - \sqrt{1-a}\right) \cup \left(1 + \sqrt{1-a}; 1 + \sqrt{9-a}\right)$;

якщо $a \in (1;9)$, то $x \in \left(1 - \sqrt{9-a}; 1 + \sqrt{9-a}\right)$;

якщо $a \in [9;+\infty)$, то нерівність розв'язків немає.

СИСТЕМИ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Завдання 37. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_8 x \cdot \log_2 (y+1)^2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Розв'язання. Область допустимих значень заданої системи рівнянь:

$$D = \left\{ (x;y) \middle| x \in R_+, y > -1 \right\}.$$

Врахувавши область допустимих значень системи, запишемо її так:

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_2 \sqrt{y+1} - \log_2 2 = 2, \\ 2\log_{2^3} x \cdot \log_2 (y+1) = \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2 x + \log_2 (y+1)^{\frac{1}{2}} - 1 = 2, \\ \dfrac{2}{3}\log_2 x \cdot \log_2 (y+1) = \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 (y+1) = 3, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (y+1) = 2. \end{cases}$$

Зробимо заміну: $\begin{cases} \log_2 x = u, \\ \log_2 (y+1) = v. \end{cases}$

Матимемо систему рівнянь із змінними u і v:

$$\begin{cases} 2u + \dfrac{1}{2}v = 3, \\ u \cdot v = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u + v = 6, \\ u \cdot v = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - 4u, \\ u \cdot (6 - 4u) = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - 4u, \\ 6u - 4u^2 - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - 4u, \\ 2u^2 - 3u + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - 4u; \\ \left[\begin{array}{l} u = 1, \\ u = \dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1, \\ v = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} u = \dfrac{1}{2}, \\ v = 4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 x = 1,\\ \log_2(y+1) = 2;\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x = \dfrac{1}{2},\\ \log_2(y+1) = 4;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2,\\ y = 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x = \sqrt{2},\\ y = 15.\end{cases}\end{array}\right.$

Відповідь: $(2;3)$, $(\sqrt{2};15)$.

Завдання 38. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\log_{xy}(x-y) = 1,\\ \log_{xy}(x+y) = 0.\end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна такій мішаній системі:

$$\begin{cases}x - y = xy,\\ x + y = 1,\\ xy > 0,\\ xy \neq 1.\end{cases}$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases}y = 1 - x,\\ x - 1 + x = x(1-x);\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 1 - x,\\ 2x - 1 = x - x^2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 1 - x,\\ x^2 + x - 1 = 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 1 - x,\\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\\ y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\\ y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Таким чином, отримали дві точки $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Проте нерівність $xy > 0$ задовольняє лише точка $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Відповідь: $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Завдання 39. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Розв'яжемо логарифмічне рівняння системи, для якого $x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0,\ y \neq 1$.

Перейдемо до логарифмів за основою x: $\frac{1}{\log_x y} - 2\log_x y = 1$.

Введемо заміну: $\log_x y = t$.

Отримаємо: $\frac{1}{t} - 2t = 1; \Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$. Коренями квадратного рівняння є $t = -1$ і $t = \frac{1}{2}$.

Повернемось до заміни: $\left[\begin{array}{l} \log_x y = -1, \\ \log_x y = \frac{1}{2}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{x}, \\ y = \sqrt{x}. \end{array} \right.$

Таким чином, отримаємо такі системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ x^2 + 2y^2 = 3; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = y^2, \\ x^2 + 2y^2 = 3. \end{cases}$$

Маємо: $x^2 + \frac{2}{x^2} = 3$ або $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Розв'яжемо рівняння $x^2 + \frac{2}{x^2} = 3$. Нехай $x^2 = t,\ t > 0$. Тоді $t^2 - 3t + 2 = 0$, звідки $t = 1$ або $t = 2$, тобто $x^2 = 1$ або $x^2 = 2$. Враховуючи, що $x > 0$ та $x \neq 1,$ маємо: $x = \sqrt{2}$. Тоді $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Розв'яжемо рівняння $x^2+2x-3=0$, для якого $x=-3$ або $x=1$. Обидва корені рівняння не належать області допустимих значень логарифмічного рівняння.

Відповідь: $\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

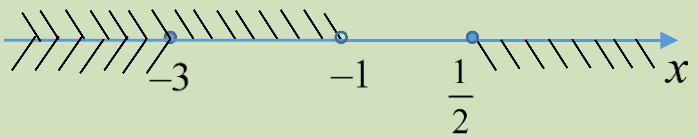
Розв'язуючи системи логарифмічних нерівностей варто пам'ятати, що фактично йдеться про розв'язування двох нерівностей незалежно одна від одної, а потім знаходяться їхні спільні розв'язки.

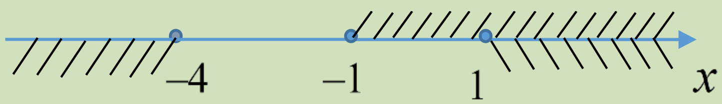
Завдання 40. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases}\sqrt{(2x-1)(x+3)}\ge x+1,\\ \log_{3x-2}28>2.\end{cases}$

Розв'язання. Розв'яжемо першу нерівність системи:

$$\sqrt{(2x-1)(x+3)}\ge x+1;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1<0,\\ (2x-1)(x+3)\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\ge 0,\\ (2x-1)(x+3)\ge (x+1)^2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3)\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -1,\\ x^2+3x-4\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-1),\\ x\in(-\infty;-3]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right);\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[-1;+\infty),\\ x\in(-\infty;-4]\cup[1;+\infty).\end{cases}\end{array}\right.$$





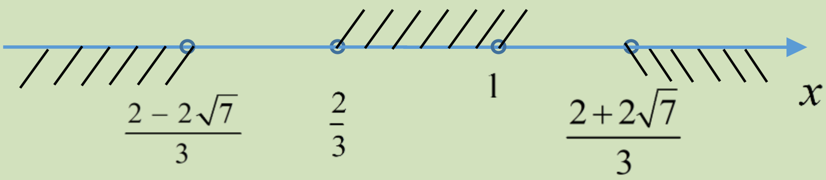
Отже, розв'язок першої нерівності:

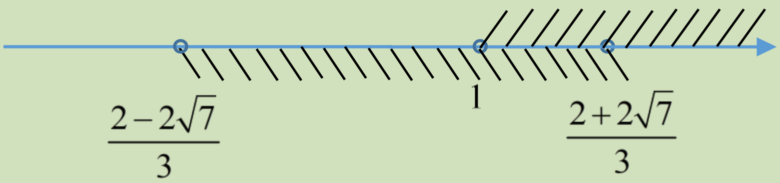
$$\left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-3],\\ x\in[1;+\infty);\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty).$$

Розв'яжемо другу нерівність системи:

$$\log_{3x-2}28>2;\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<3x-2<1,\\ (3x-2)^2>28;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-2>1,\\ (3x-2)^2<28;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<3x-2<1,\\ 3x^2-4x-8>0;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-2>1,\\ 3x^2-4x-8>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right),\\ x\in\left(-\infty;\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3};+\infty\right);\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(1;+\infty),\\ x\in\left(\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3};\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right).\end{cases}\end{array}\right.$$



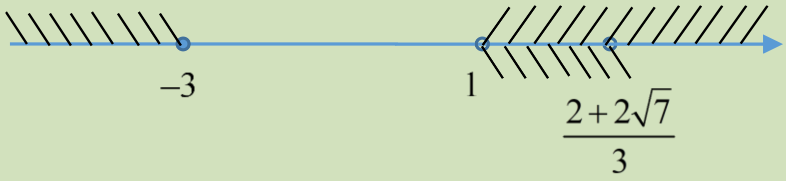


Отже, розв'язок другої нерівності:

$$\left[\begin{array}{l} x\in\varnothing,\\ x\in\left(1;\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right);\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(1;\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right).$$

Тепер розв'яжемо задану систему:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty), \\ x \in \left(1; \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right). \end{cases}$$



Таким чином, $x \in \left(1; \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

Відповідь: $\left(1; \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

Завдання 41. Розв’язати систему нерівностей $\begin{cases} |\lg x - 1| < 1, \\ \dfrac{\sqrt{\lg x}}{3 - x} > 0. \end{cases}$

Розв’язання. Розв’яжемо першу нерівність системи:

$$|\lg x - 1| < 1; \Leftrightarrow -1 < \lg x - 1 < 1; \Leftrightarrow 0 < \lg x < 2; \Leftrightarrow 1 < x < 100.$$

Розв’яжемо другу нерівність системи. Оскільки $\sqrt{\lg x} > 0$ при $\lg x > 0$, то нерівність рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} \lg x > 0, \\ x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 3)$.

Беручи до уваги розв'язки першої і другої нерівностей заданої системи, отримаємо, що $x \in (1; 3)$.

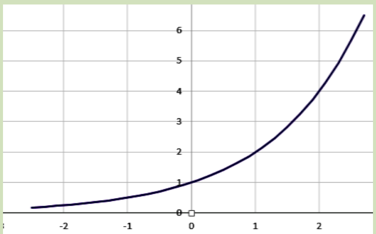
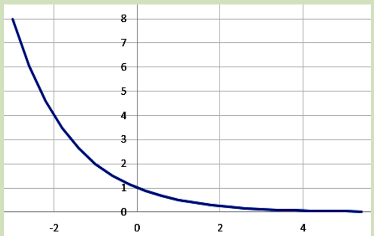
Відповідь: $(1; 3)$.

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Функцію виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають ***показниковою*** за основою a.

Приклади показникової функції: $y = 2^x$, $y = 0,7^x$, $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ

Властивості	$y = a^x$, $a > 1$	$y = a^x$, $0 < a < 1$
Графік	 Якщо $x = 0$, то $y = 1$. Якщо $x < 0$, то $y < 1$. Якщо $x > 0$, то $y > 1$.	 Якщо $x = 0$, то $y = 1$. Якщо $x < 0$, то $y > 1$. Якщо $x > 0$, то $y < 1$.
Область визначення	$(-\infty; \infty)$	
Область значень	$(0; \infty)$	
Парність	Ні парна, ні непарна	
Проміжки знакосталості	Функція приймає додатні значення при будь-якому значенні аргументу	
Проміжки монотонності	Монотонно зростає	Монотонно спадає

Завдання 42. При якому значенні m буде вірною нерівність?

а) $2^{3m+4} < 2^{6m-7}$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3m^2+2} < \left(\frac{1}{7}\right)^{3m-4}$.

Розв'язання. а) Оскільки показникова функція $y = 2^x$ – зростаюча, то нерівність $2^{3m+4} < 2^{6m-7}$ буде мати зміст за умови, що $3m+4 < 6m-7$. Звідси одержимо, що $m > \frac{11}{3}$.

Відповідь: $m \in \left(\frac{11}{3}, +\infty\right)$.

б) Оскільки показникова функція $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ – спадна, то нерівність $\left(\frac{1}{7}\right)^{3m^2+2} < \left(\frac{1}{7}\right)^{3m-4}$ буде мати зміст, за умови, що $3m^2+2 > 3m-4$, або $m^2 - m + 2 > 0$. Розглянемо квадратне рівняння $m^2 - m + 2 = 0$. Оскільки $D = -7 < 0$, то функція $y = m^2 - m + 2$ – додатна для $m \in R$. Звідси одержимо, що нерівність $\left(\frac{1}{7}\right)^{3m^2+2} < \left(\frac{1}{7}\right)^{3m-4}$ має місце для довільного $m \in R$.

Відповідь: $m \in R$.

Завдання 43. Розташуйте числа у порядку зростання:

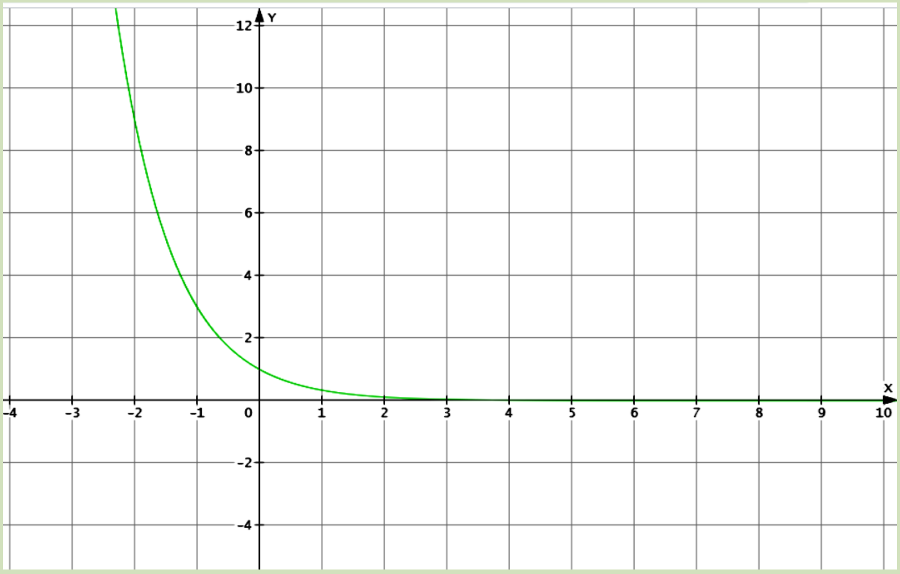
$$3^{\sqrt{3}}, 3^{\sqrt{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{3\pi}{2}}, 3^{-\pi}.$$

Розв'язання. Оскільки функція $y = 3^x$ – зростаюча, то впорядкувавши числа $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \frac{1}{3}, \frac{3\pi}{2}, -\pi$ у порядку зростання, ми зможемо дати відповідь на поставлене запитання. Оскільки $-\pi < \frac{1}{3} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \frac{3\pi}{2}$, тому звідси одержимо: $3^{-\pi}, 3^{\frac{1}{3}}, 3^{\sqrt{2}}, 3^{\sqrt{3}}, 3^{\frac{3\pi}{2}}$ – розташовані в порядку зростання.

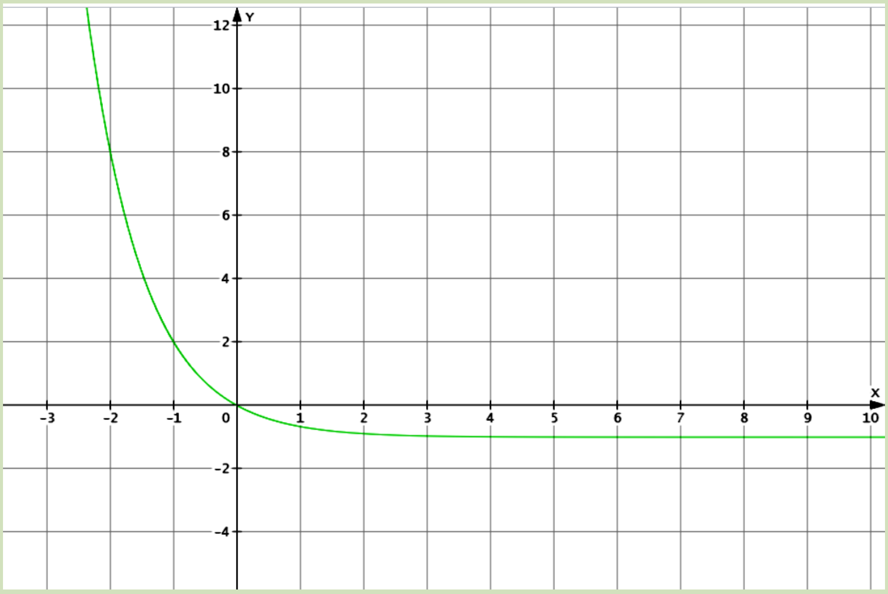
Відповідь: $3^{-\pi}, 3^{\frac{1}{3}}, 3^{\sqrt{2}}, 3^{\sqrt{3}}, 3^{\frac{3\pi}{2}}$.

Завдання 44. Побудуйте графік функції $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1\right|$.

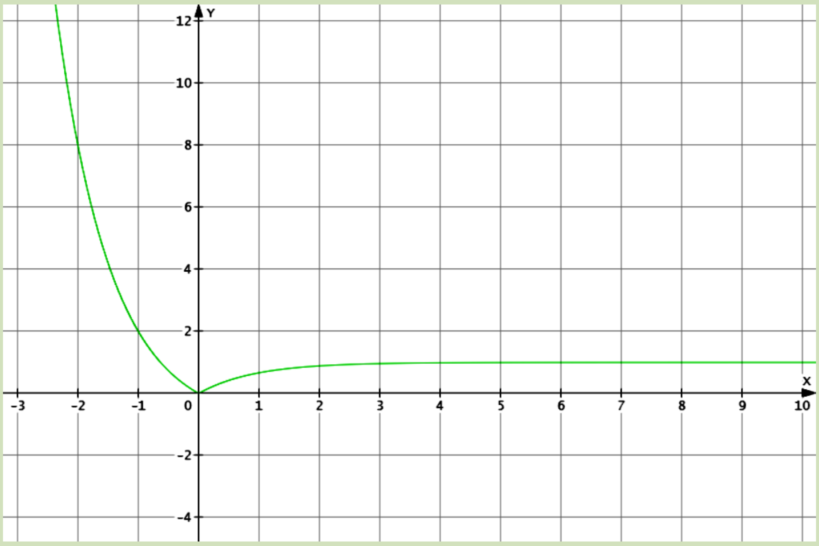
Розв'язання. 1. Побудуємо графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:



2. Паралельним перенесенням графіка функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на 1 одиницю вниз вздовж осі Oy одержимо графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$:



3. Частину графіка $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$, що знаходиться нижче осі Ox, симетрично відображаємо відносно осі Ox вгору.



Завдання 45. Знайти область визначення функції $y=5^{\frac{3x-1}{7x+2}}$.

Розв'язання. Оскільки функція $y=5^x$ визначена для довільного $x\in R$, то функція $y=5^{\frac{3x-1}{7x+2}}$ визначена для довільних $x\in R$, крім $x=-\frac{2}{7}$ (точка, в якій знаменик показника степення перетворюється в нуль).

Відповідь: $R\setminus\left\{-\frac{2}{7}\right\}$.

Завдання 46. Знайти область значень функції $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x-6$.

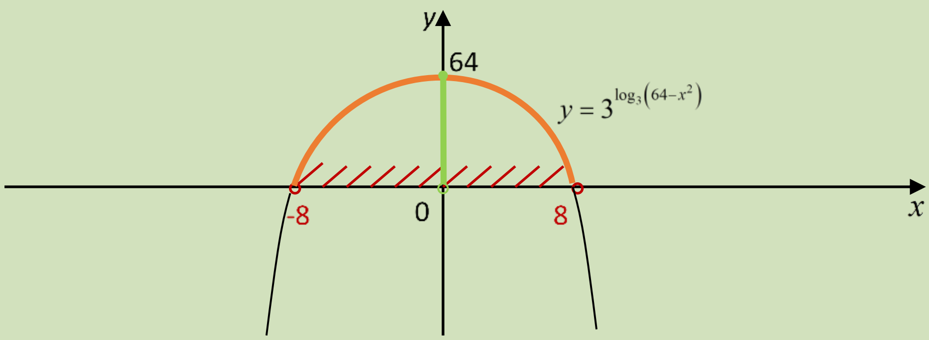
Розв'язання. Оскільки множиною значень функції $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ є множина додатних чисел, тому $\left(\frac{3}{4}\right)^x>0$. Віднімемо від обох частин цієї нерівності 6. Отримаємо $\left(\frac{3}{4}\right)^x-6>-6$. Тому область значень функції є інтервал $(-6;+\infty)$.

Відповідь: $(-6;+\infty)$.

Завдання 47. Знайти область значень функції $y = 3^{\log_3\left(64-x^2\right)}$.

Розв'язання. Відзначимо, що $3^{\log_3\left(64-x^2\right)} \neq 64 - x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення.

Тому знайдемо спочатку область визначення функції, розв'язуючи нерівність $64 - x^2 > 0$. Як відомо, графіком лівої частини цієї нерівності є парабола вітками вниз. Додатні значення така парабола приймає між коренями квадратного рівняння $64 - x^2 = 0$, $x_1 = -8$, $x_2 = 8$. Отже, $x \in (-8;8)$.



Отже, $D(y) = (-8;8)$ і лише на цій області визначення виконується рівність $3^{\log_3\left(64-x^2\right)} = 64 - x^2$. Це означає, що графіком функції $y = 3^{\log_3\left(64-x^2\right)}$ є виділена на рисунку частина параболи $y = 64 - x^2$, розміщена над інтервалом $(-8;8)$ осі Ox.

Тому його проєкцією на вісь Oy є напівінтервал $(0;64]$.

Отже, $E(y) = (0;64]$.

Відповідь: $(0;64]$.

ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Показниковими називають рівняння, в яких невідоме входить лише до показників степенів при сталих основах.

Розглянемо найпростіші показникові рівняння.

РІВНЯННЯ ВИДУ $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Розв’язування даного типу рівнянь зводиться до розв’язування рівняння $f(x) = \varphi(x)$, де $x \in D(f) \cap D(\varphi)$.

Завдання 48. Розв’язати рівняння $3^{\frac{x}{x-2}} = 3^{\frac{3x}{x+2}}$.

Розв’язання. Знайдемо область визначення: $x \neq 2$, $x \neq -2$:

$$D = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty).$$

Розв’яжемо рівняння $\frac{x}{x-2} = \frac{3x}{x+2}$:

$$\frac{x}{x-2} = \frac{3x}{x+2};$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3x}{x+2} = 0;$$

$$\frac{x(x+2) - 3x(x-2)}{x^2 - 4} = 0;$$

$$\frac{x^2 + 2x - 3x^2 + 6x}{x^2 - 4} = 0;$$

$$\frac{-2x^2 + 8x}{x^2 - 4} = 0;$$

$$x^2 - 4x = 0;$$

$$x = 0, x = 4.$$

Відповідь: 0; 4.

Завдання 49. Розв’язати рівняння $2^x \cdot 5^x = \left(10^x\right)^4$.

Розв’язання. Використовуючи властивості степеня, одержимо:

$$10^x = 10^{4x}; \Rightarrow x = 4x; \Rightarrow x = 0.$$

Відповідь: 0.

Завдання 50. Розв’язати рівняння $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

Розв’язання. Зведемо обидві частини рівняння до основи 2:

$$2^{-3} \cdot \left(2^2\right)^{2x-3} = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^3}\right)^{-x}; \Rightarrow\ 2^{-3+2(2x-3)} = 2^{\left(\frac{1}{2}-3\right)(-x)}; \Rightarrow\ 2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x}.$$

Звідси: $4x - 9 = \dfrac{5}{2}x; \Rightarrow x = 6$.

Відповідь: 6.

Завдання 51. Розв’язати рівняння $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85$.

Розв’язання. Такого типу показникові рівняння розв’язуються шляхом винесення спільного множника за дужки. Зрозуміло, що 7^{x-1} і буде таким множником:

$$7^{x-1}\left(2 \cdot 7^2 - 6 - 7\right) = 85;$$

$$7^{x-1} \cdot 85 = 85;$$

$$7^{x-1} = 1;$$

$$7^{x-1} = 7^0;$$

$$x - 1 = 0;$$

$$x = 1.$$

Відповідь: 1.

Завдання 52. Розв'язати рівняння $(0,5)^{1-2x^3} - (0,25)^{1-x^3} + (0,5)^{3-2x^3} = 24$.

Розв'язання. Зведемо рівняння до основи 0,5:

$$(0,5)^{1-2x^3} - (0,5)^{2(1-x^3)} + (0,5)^{3-2x^3} = 24;$$

$$(0,5)^{1-2x^3} - (0,5)^{2-2x^3} + (0,5)^{3-2x^3} = 24.$$

Винесемо множник $(0,5)^{1-2x^3}$ за дужки у лівій частині рівняння:

$$(0,5)^{1-2x^3}(1 - 0,5 + 0,25) = 24;$$

$$(0,5)^{1-2x^3} \cdot 0,75 = 24;$$

$$(0,5)^{1-2x^3} = 32;$$

$$2^{2x^3-1} = 2^5;$$

$$2x^3 - 1 = 5;$$

$$x = \sqrt[3]{3}.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{3}$.

Завдання 53. Розв'язати рівняння $2^{2\lg 4x-1} - 7^{\lg 4x} = 7^{\lg 4x-1} - 3 \cdot 4^{\lg 4x}$.

Розв'язання. З властивостей логарифмічної функції одержимо

$$4x > 0; \Rightarrow x > 0.$$

Отже, $D = (0;\infty)$.

Зведемо рівняння до основ 7 і 4:

$$4^{\lg 4x} \cdot 2^{-1} - 7^{\lg 4x} = 7^{\lg 4x} \cdot 7^{-1} - 3 \cdot 4^{\lg 4x};$$

$$\frac{4^{\lg 4x}}{2} + 3 \cdot 4^{\lg 4x} = \frac{7^{\lg 4x}}{7} + 7^{\lg 4x};$$

$$4^{\lg 4x} \cdot \frac{7}{2} = 7^{\lg 4x} \frac{8}{7}.$$

Поділивши обидві частини рівняння на $4^{\lg 4x} \cdot \frac{8}{7}$ ($4^{\lg 4x} \neq 0$), одержимо:

$$\frac{7^{\lg 4x}}{4^{\lg 4x}} = \frac{49}{16};\ \left(\frac{7}{4}\right)^{\lg 4x} = \left(\frac{7}{4}\right)^2;\ \lg 4x = 2;\ 4x = 10^2;\ x = 25.$$

Відповідь: 25.

РІВНЯННЯ ВИДУ $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Шляхом логарифмування при основі a рівняння $a^{f(x)} = b$ зводимо до вигляду $f(x) = \log_a b$, $x \in D(f)$.

Завдання 54. Розв’язати рівняння $3^{2x-1} = 5$.

Розв’язання. Оскільки число 5 не можна подати у вигляді степеня з раціональним показником з основою 3, то шляхом логарифмування обох частин рівняння за основою 3 одержимо:

$$\log_3 3^{2x-1} = \log_3 5;\ (2x-1)\log_3 3 = \log_3 5;\ 2x - 1 = \log_3 5;\ x = \frac{\log_3 5 + 1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\log_3 5 + 1}{2}$.

Завдання 55. Розв’язати рівняння

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3}.$$

Розв’язання. Винесемо за дужки множники 3^x та 5^x з лівої та правої частин рівняння відповідно:

$$3^x(1 + 3 + 9 + 27) = 5^x(1 + 5 + 25 + 125);$$

$$3^x\cdot 40=5^x\cdot 156;\ \left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{156}{40};\ \left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{39}{10}.$$

Прологарифмувавши обидві частин останнього рівняння за основою $\frac{3}{5}$, одержимо:

$$\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\log_{\frac{3}{5}}\frac{39}{10};\ x=\log_{\frac{3}{5}}\frac{39}{10}.$$

Відповідь: $\log_{\frac{3}{5}}\frac{39}{10}$.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ВВЕДЕННЯ ЗАМІНИ

Якщо показникове рівняння має вигляд $F\left(a^{f(x)}\right)=0$, то ввівши заміну $a^{f(x)}=t,\ t>0$, його зводять до рівняння $F(t)=0$.

Завдання 56. Розв’язати рівняння $9^{x+1}+26\cdot 3^x-3=0$.

Розв’язання. Зведемо степені, які є в рівнянні, до основи 3:

$$9\cdot\left(3^x\right)^2+26\cdot 3^x-3=0.$$

Шляхом заміни $3^x=t,\ t>0$ зведемо рівняння до квадратного:

$$9t^2+26\cdot t-3=0;$$

$$D=26^2-4\cdot 9\cdot(-3)=28^2;$$

$$t_1=\frac{-26+28}{18}=\frac{1}{9};$$

$$t_2=\frac{-26-28}{18}=-\frac{54}{18}=-3 \text{ – не задовольняє умові } t>0.$$

Повернувшись до заміни, одержимо:

$$3^x = \frac{1}{9};\ 3^x = 3^{-2};\ x = -2.$$

Відповідь: -2.

Завдання 57. Розв’язати рівняння $27^{\lg x} - 7\cdot 9^{\lg x} - 21\cdot 3^{\lg x} + 27 = 0$.

Розв’язання. Зведемо степені, які є в рівнянні, до основи 3:

$$\left(3^{\lg x}\right)^3 - 7\cdot\left(3^{\lg x}\right)^2 - 21\cdot 3^{\lg x} + 27 = 0.$$

З властивостей логарифма одержимо: $x > 0$.

Отже, $D = (0;\infty)$.

Шляхом заміни $3^{\lg x} = t,\ t > 0$, зведемо рівняння до кубічного рівняння:

$$t^3 - 7\cdot t^2 - 21\cdot t + 27 = 0.$$

Знайдемо корінь рівняння серед дільників вільного члена: $\pm\ 1$; ± 3; ± 9; ± 27.

$$t = 1:\ 1 - 7 - 21 + 27 = 0;\ 0 = 0.$$

Отже, $t_1 = 1$ є коренем рівняння. Скористаємося діленням кутом многочлена $t^3 - 7\cdot t^2 - 21\cdot t + 27$ на многочлен $t - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
t^3 - 7\cdot t^2 - 21\cdot t + 27 & t - 1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{t^3 - t^2 \qquad\qquad\qquad} & t^2 - 6t - 27 \\
-6\cdot t^2 - 21\cdot t + 27 & \\
-\ \underline{-6\cdot t^2 + 6\cdot t \qquad} & \\
-27\cdot t + 27 & \\
-\ \underline{-27\cdot t + 27} & \\
0 &
\end{array}$$

Звідси многочлен $t^3 - 7\cdot t^2 - 21\cdot t + 27$ можна подати у вигляді:

$$t^3 - 7\cdot t^2 - 21\cdot t + 27 = (t - 1)\left(t^2 - 6t - 27\right).$$

Розв'яжемо квадратне рівняння $t^2 - 6t - 27 = 0$, $t_2 = -3$, $t_3 = 9$.

Отже, $t_1 = 1$, $t_2 = -3$, $t_3 = 9$ – корені рівняння $t^3 - 7 \cdot t^2 - 21 \cdot t + 27 = 0$.

Зауваження: *рівняння* $t^3 - 7 \cdot t^2 - 21 \cdot t + 27 = 0$ *можна розв'язати й іншими способами. Спробуйте їх відшукати.*

$t_2 = -3$ – не задовольняє умови $t > 0$.

Отже,

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\lg x} = 1, \\ 3^{\lg x} = 9; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 0, \\ \lg x = 2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 100. \end{array}\right.$$

Відповідь: 1; 100.

Завдання 58. Розв'язати рівняння $\dfrac{9 - 3^{2x}}{3^x - 3} = 1$.

Розв'язання. Шляхом заміни $3^x = t$, $t > 0$, зведемо рівняння до дробово-раціонального: $\dfrac{9 - t^2}{t - 3} = 1$.

$$\frac{9 - t^2 - t + 3}{t - 3} = 0;$$

$$\frac{t^2 + t - 12}{t - 3} = 0;$$

$$\begin{cases} t^2 + t - 12 = 0, \\ t \neq 3. \end{cases}$$

Коренями рівняння $t^2 + t - 12 = 0$ є $t_1 = 3$, $t_2 = -4$. $t_1 = 3$ не задовольняє умови $t \neq 3$, а корінь $t_2 = -4$ не задовольняє умови $t > 0$, а, отже, рівняння не має коренів.

Відповідь: рівняння немає коренів.

РІВНЯННЯ ВИДУ $Aa^{2f(x)}+Ba^{f(x)}b^{f(x)}+Cb^{2f(x)}=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$.

Рівняння виду $Aa^{2f(x)}+Ba^{f(x)}b^{f(x)}+Cb^{2f(x)}=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ є однорідним показниковим рівнянням другого степеня.

При розв'язуванні однорідного показникового рівняння другого степеня ділимо рівняння на $b^{2f(x)}$ (або на $a^{2f(x)}$).

Звідси:

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+C=0.$$

Ввівши заміну $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t,\ t>0$, одержимо рівняння $At^2+Bt+C=0$.

Рівняння виду

$$a_0a^{nf(x)}+a_1a^{(n-1)f(x)}b^{f(x)}+\ldots+a_{n-1}a^{f(x)}b^{(n-1)f(x)}+a_nb^{nf(x)}=0,$$

де $n\in N$, $a_0\neq 0$, $a_n\neq 0$, є однорідним показниковим рівнянням n-го степеня.

При розв'язуванні однорідного показникового рівняння n-го степеня ділимо рівняння на $b^{nf(x)}$ (або на $a^{nf(x)}$).

Звідси:

$$a_0\left(\frac{a}{b}\right)^{nf(x)}+a_1\left(\frac{a}{b}\right)^{(n-1)f(x)}+\ldots+a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+a_n=0.$$

Ввівши заміну $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t,\ t>0$, одержимо рівняння:

$$a_0t^n+a_1t^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}t+a_n=0.$$

Завдання 59. Розв'язати рівняння $2\cdot 5^{2(x-1)}-7\cdot 5^{x-1}\cdot 2^{x-1}+5\cdot 2^{2(x-1)}=0$.

Розв'язання. Очевидно, що рівняння є однорідним рівнянням другого степеня. Поділимо рівняння на $2^{2(x-1)}$:

$$2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2(x-1)}-7\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{x-1}+5=0.$$

Шляхом заміни $\left(\frac{5}{2}\right)^{x-1}=t$, $t>0$ зведемо рівняння до квадратного:

$$2\cdot t^2-7\cdot t+5=0;$$

$$D=49-40=9=3^2;$$

$$t_1=\frac{7+3}{4}=\frac{5}{2};\ t_1=\frac{7-3}{4}=1.$$

Отже, $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{2}\right)^{x-1}=\frac{5}{2};\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1}=1,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=1;\\ x-1=0,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2;\\ x=1.\end{array}\right.$

Відповідь: $2;1$.

Завдання 60. Розв’язати рівняння

$$7\cdot 5^{3(x+2)}-2\cdot 5^{2(x+2)}\cdot 11^{(x+2)}+14\cdot 5^{(x+2)}\cdot 11^{2(x+2)}-4\cdot 11^{3(x+2)}=0.$$

Розв’язання. Очевидно, що рівняння є однорідним рівнянням третього степеня. Поділимо рівняння на $11^{3(x+2)}$:

$$7\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^{3(x+2)}-2\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^{2(x+2)}+14\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^{(x+2)}-4=0.$$

Шляхом заміни $\left(\frac{5}{11}\right)^{(x+2)}=t$, $t>0$, зведемо рівняння до кубічного:

$$7\cdot t^3-2\cdot t^2+14\cdot t-4=0;$$

$$t^2(7\cdot t-2)+2(7\cdot t-2)=0;$$

$$(7\cdot t-2)\left(t^2+2\right)=0;$$

$$\left[\begin{aligned} &7\cdot t-2=0,\\ &t^2+2=0.\end{aligned}\right.$$

Рівняння $t^2+2=0$ немає дійсних коренів. Розв'язавши рівняння $7\cdot t-2=0$, одержуємо корінь $t=\frac{2}{7}$.

Повернувшись до заміни, одержимо рівняння $\left(\frac{5}{11}\right)^{x+2}=\frac{2}{7}$, яке розв'яжемо шляхом логарифмування при основі $\frac{5}{11}$:

$$\left(\frac{5}{11}\right)^{(x+2)}=\frac{2}{7};\Rightarrow\ x+2=\log_{\frac{5}{11}}\frac{2}{7};\Rightarrow\ x=\log_{\frac{5}{11}}\frac{2}{7}-2.$$

Відповідь: $\log_{\frac{5}{11}}\frac{2}{7}-2$.

Завдання 61. Розв'язати рівняння $3^{2x+1}-4\cdot 21^x-7\cdot 7^{2x}=0$.

Розв'язання. Зведемо рівняння $3^{2x+1}-4\cdot 21^x-7\cdot 7^{2x}=0$ до вигляду однорідного показникового рівняння другого степеня:

$$3\cdot 3^{2x}-4\cdot 3^x\cdot 7^x-7\cdot 7^{2x}=0.$$

Поділимо обидві частини рівняння на 7^{2x}:

$$3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{2x}-4\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{x}-7=0.$$

Шляхом заміни $\left(\frac{3}{7}\right)^{x}=t$, $t>0$, зведемо рівняння до квадратного:

$$3\cdot t^2-4\cdot t-7=0;$$

$$D=16+84=100=10^2;$$

$$t_1=\frac{4+10}{6}=\frac{7}{3};$$

$$t_2=\frac{4-10}{6}=-1, \text{ – не задовольняє умови } t>0.$$

Отже, $\left(\frac{3}{7}\right)^x=\frac{7}{3}$, $\left(\frac{3}{7}\right)^x=\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$, $x=-1$.

Відповідь: -1.

Під час розв’язування рівнянь типу $a^x \pm b^x + c = 0$, де $a>0,\ b>0,$ де числа a та b є взаємно оберненими, тобто $a\cdot b=1$ з урахуванням того, що $b=\frac{1}{a}$, використовують замінну $t=a^x$, $t>0$, в результаті якої одержимо рівняння:

$$t\pm\frac{1}{t}+c=0.$$

Завдання 62. Розв’язати рівняння $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=6$.

Розв’язання. Перевіримо, чи числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ та $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ є взаємно оберненими:

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)}=\sqrt{9-8}=1;$$

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}.$$

Покладемо $t=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x$, $t>0$, тоді $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Одержимо рівняння:

$$t+\frac{1}{t}-6=0;\ \frac{t^2-6t+1}{t}=0;\ \begin{cases} t^2-6t+1=0, \\ t\neq 0. \end{cases}$$

Розв’язавши рівняння $t^2-6t+1=0$, отримаємо корені $t_1=3+2\sqrt{2}$, $t_2=3-2\sqrt{2}$. Повертаючись до заміни, одержимо:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}=3+2\sqrt{2},\\ \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}=3-2\sqrt{2};\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}=3+2\sqrt{2},\\ \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}};\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}}=3+2\sqrt{2},\\ \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1};\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Відповідь: 2, –2.

ВИКОРИСТАННЯ ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ (МОНОТОННОСТІ) ФУНКЦІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ

Використання монотонності функції при розв'язуванні показникових рівнянь ґрунтується на таких засадах:

1. *Підбираємо один або кілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння немає, використовуючи такі положення:*

- якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш, ніж один корінь на цьому проміжку;
- якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш, ніж один корінь на цьому проміжку.

Завдання 63. Розв'язати рівняння $2^{x}=11-x$.

Розв'язання. Підбором знаходимо, що $x=3$ – корінь даного рівняння. Дійсно $2^{3}=11-3$, $8=8$.

Рівняння $2^x = 11 - x$ має єдиний розв'язок $x = 3$, оскільки функція $f(x) = 2^x$ – зростаюча, а функція $g(x) = 11 - x$ – спадна.

Відповідь: 3.

Завдання 64. Розв'язати рівняння $5^x + 12^x = 13^x$.

Розв'язання. Підбором знаходимо, що $x = 2$ – корінь даного рівняння, оскільки $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Доведемо, що інших коренів рівняння немає. Поділивши обидві частини рівняння на 13^x, одержимо рівносильне рівняння $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$. Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$. Ця функція спадна, як сума двох спадних функцій, тому рівняння має один корінь.

Відповідь: 2.

Завдання 65. Розв'язати рівняння $9^x - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0$.

Розв'язання.

$$9^x - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0;$$

$$3^{2x} - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0.$$

Нехай $3^x = y$, тоді $3^{2x} = y^2$. Маємо рівняння:

$$y^2 - (14 - x)y + 33 - 3x = 0.$$

Розв'яжемо його як квадратне відносно змінної *y*.

$$\sqrt{D} = \sqrt{x^2 - 16x + 64} = |x - 8|.$$

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 3, \\ y_2 = 11 - x; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3, \\ 3^x = 11 - x; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Рівняння $3^x = 11 - x$ має єдиний розв’язок $x = 2$, оскільки ліва його частина – зростаюча функція, а права – спадна.

Відповідь: 1; 2.

ПОКАЗНИКОВО-СТЕПЕНЕВІ РІВНЯННЯ, ЯКІ МАЮТЬ ЗМІННУ В ПОКАЗНИКУ СТЕПЕНЯ І В ОСНОВІ.

Якщо розглядати рівняння $\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ як числову рівність, то два степені з однакою основою $f(x)$ рівні тільки в одному з чотирьох випадків:

$$1.\ f(x)=1;\ 2.\ f(x)=-1;\ 3.\ f(x)=0;\ 4.\ g(x)=\varphi(x).$$

Перевірка коренів у 2, 3, 4 випадках обов’язкова.

Завдання 66. Розв’язати рівняння $\left(x^2-1\right)^{3x-7} = \left(x^2-1\right)^8$.

Розв’язання. Розглянемо 4 випадки:

1. Якщо $x^2 - 1 = 1$, тоді $x = \pm\sqrt{2}$.
2. Якщо $x^2 - 1 = -1$, тоді $x = 0$. Підставивши це значення у рівняння, отримаємо $(-1)^{-7} = (-1)^8$, $-1 = 1$ – неправильна числова рівність.
3. Якщо $x^2 - 1 = 0$, тоді $x = \pm 1$. У цьому випадку $0^{-4} = 0^8$, $0^{-10} = 0^8$. Оскільки вирази 0^{-4}, 0^{-10} не мають змісту, то числа 1 та -1 не є коренями рівняння.
4. Прирівняємо показники степеня: $3x - 7 = 8$; $x = 5$. Підставивши це значення у рівняння, отримаємо $24^8 = 24^8$. Отже, $x = 5$ є коренем рівняння.

Відповідь: $\pm\sqrt{2}$, 5.

ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Завдання 67. За якого найбільшого значення параметра a рівняння $16^x - (a+1)\cdot 4^x + a = 0$ має один корінь?

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\left(4^x\right)^2 - (a+1)\cdot 4^x + a = 0.$$

Шляхом заміни $4^x = t,\ t > 0$, зведемо рівняння до квадратного:

$$t^2 - (a+1)\cdot t + a = 0.$$

Знайдемо дискримінант:

$$D = (a+1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2.$$

Рівняння $t^2 - (a+1)\cdot t + a = 0$ має один корінь за умови, що $D = (a-1)^2 = 0$. Звідси $a = 1$. Отже, при $a = 1$ отримаємо рівняння $t^2 - 2\cdot t + 1 = 0$; $(t-1)^2 = 0$. Звідси $t = 1$. Перейшовши до заміни, отримаємо $4^x = 1$; $x = 0$.

Припустимо, що $D = (a-1)^2 > 0$. Тоді рівняння $t^2 - (a+1)\cdot t + a = 0$ матиме корені $t_1 = \dfrac{a+1-(a-1)}{2} = 1$, $t_2 = \dfrac{a+1+(a-1)}{2} = a$. При $a \le 0$ корінь $t_2 = \dfrac{a+1+(a-1)}{2} = a$ не задовольняє умові $t > 0$, а тому $x = 0$ буде єдиним коренем рівняння $\left(4^x\right)^2 - (a+1)\cdot 4^x + a = 0$.

Отже, при $a \le 0$ та при $a = 1$ рівняння буде мати один корінь.

Відповідь: $a = 1$ – найбільше значення параметра a, при якому задане рівняння має один корінь.

ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

Основний метод розв'язування показникових нерівностей – зведення їх до найпростіших нерівностей, обидві частини яких – степені з однаковою основою, при розв'язуванні яких використовують властивості монотонності показникової функції.

Розглянемо найпростішу нерівність $a^x > a^y$ ($a^x < a^y$):

- якщо основа $a > 1$, то, не міняючи знаку, записуємо нерівність для степенів $x > y$ ($x < y$);
- якщо основа $0 < a < 1$, то для степенів записуємо нерівність з протилежним знаком $x < y$ ($x > y$).

У випадку нестрогої нерівності ($\le$ або $\ge$) принцип розв'язування найпростіших нерівностей залишається таким же як і для строгих нерівностей.

Решта нерівностей за допомогою рівносильних перетворень (за схемою розв'язування показникових рівнянь) зводимо до нерівностей відомого виду (квадратної, дробової чи іншої). Після розв'язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей.

Завдання 68. Розв'язати нерівність $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} \le \left(\frac{7}{3}\right)^{4x-21}$.

Розв'язання. Зведемо нерівність до найпростішої, обидві частини якої – степені з основою $\frac{3}{7}$:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} \le \left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{4x-21}; \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} \le \left(\frac{3}{7}\right)^{-4x+21}.$$

Оскільки $0 < \frac{3}{7} < 1$, то $x^2 \ge -4x + 21$, $x^2 + 4x - 21 \ge 0$.

Оскільки $x_1 = 3$, $x_2 = -7$ є коренями рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$, то $x^2 + 4x - 21 = (x-3)(x+7)$. З урахуванням цього одержимо нерівність $(x-3)(x+7) \geq 0$. Графіком лівої частини цієї нерівності є парабола. Як відомо, парабола вітками вгору набуває значень більших нуля (додатних) поза коренями рівняння $(x-3)(x+7) = 0$, тобто $x \in (-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$.

Завдання 69. Розв’язати нерівність $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

Розв’язання. Перепишемо нерівність у вигляді $9 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} < 28$. Винесемо спільний множник 3^x за дужки:

$$3^x \left(9 + \frac{1}{3}\right) < 28;\ 3^x \cdot \frac{28}{3} < 28;\ 3^x < 3;\ x < 1.$$

Відповідь: $(-\infty; 1)$.

Завдання 70. Розв’язати нерівність $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 < 0$.

Розв’язання. Зробимо заміну $3^x = t$, $t > 0$. Одержимо нерівність:

$$t^2 - 8 \cdot t - 9 < 0.$$

Оскільки $t_1 = -1$, $t_2 = 9$ є коренями рівняння $t^2 - 8 \cdot t - 9 = 0$, то $t^2 - 8 \cdot t - 9 = (t+1)(t-9)$. З урахуванням цього одержимо нерівність:

$$(t+1)(t-9) < 0.$$

Розв’яжемо одержану нерівність, користуючись властивостями квадратичної функції. Графіком лівої частини останньої нерівності є парабола вітками вгору, яка набуває від’ємних значень між коренями рівняння $(t+1)(t-9) = 0$, тобто $t \in (-1; 9)$. Але, оскільки $t > 0$, то $t \in (0; 9)$.

Повернувшись до заміни, одержимо

$$0 < 3^x < 9; \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 0, \\ 3^x < 9; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x < 2; \end{cases} \Rightarrow x < 2.$$

Відповідь: $(-\infty; 2)$.

Завдання 71. Розв'язати нерівність $\dfrac{15}{2^x + 1} + \dfrac{4}{2^{x-1} - 3} > \dfrac{12}{2^{x+1}}$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді $\dfrac{15}{2^x + 1} + \dfrac{8}{2^x - 6} > \dfrac{6}{2^x}$.

Позначимо $2^x = t$, $t > 0$. Одержимо:

$$\frac{15}{t+1} + \frac{8}{t-6} > \frac{6}{t};$$

$$\frac{15}{t+1} + \frac{8}{t-6} - \frac{6}{t} > 0.$$

Зведемо ліву частину до спільного знаменника:

$$\frac{15(t-6)t + 8(t+1)t - 6(t+1)(t-6)}{(t+1)(t-6)t} > 0;$$

$$\frac{17t^2 - 42t + 36}{(t+1)(t-6)t} > 0.$$

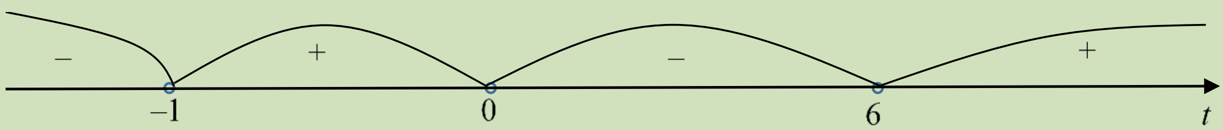
Розкладемо многочлен $17t^2 - 42t + 36$ на множники:

$$17t^2 - 42t + 36 = 0;$$

$$D = 42^2 - 4 \cdot 17 \cdot 36 = 1764 - 2448 = -684 < 0.$$

Оскільки $D < 0$, то квадратний тричлен $17t^2 - 42t + 36$ завжди додатний.

Отже, додатним повинен бути і знаменник дробу, щоб дріб був більшим нуля. Тому $(t+1)(t-6)t > 0$. Розв'яжемо нерівність методом інтервалів:



Проміжок $(-1;0)$ не задовольняє умові $t>0$.

Розглянемо проміжок $(6;+\infty)$: $t>6$.

Повертаючись до заміни, одержимо

$$2^x>6;\ 2^x>2^{\log_2 6};\ x>l\,\mathrm{og}_2 6.$$

Відповідь: $(\log_2 6;+\infty)$.

Завдання 72. Розв’язати нерівність $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x>8$.

Розв’язання. Оскільки

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)\cdot\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)}=\sqrt{16-15}=\sqrt{1}=1,$$

то $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)}$.

Зробимо заміну $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=t$, $t>0$, тоді $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=\dfrac{1}{t}$. В результаті заміни одержимо нерівність:

$$t+\frac{1}{t}>8;\ t+\frac{1}{t}-8>0;\ \frac{t^2-8t+1}{t}>0.$$

Розкладемо многочлен t^2-8t+1 на множники:

$$t^2-8t+1=0;$$

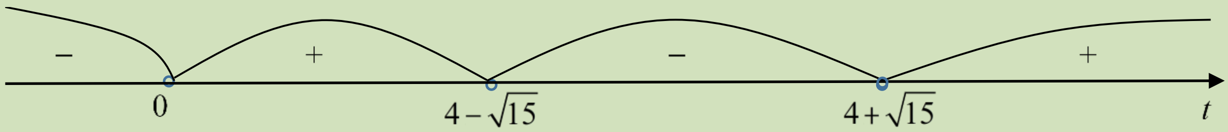
$$D=8^2-4=60;$$

$$t_1=\frac{8-\sqrt{60}}{2}=4-\sqrt{15};\ t_2=\frac{8+\sqrt{60}}{2}=4+\sqrt{15}.$$

Отже, $t^2-8t+1=\left(t-\left(4-\sqrt{15}\right)\right)\left(t-\left(4+\sqrt{15}\right)\right)$. Звідси одержимо нерівність:

$$\frac{\left(t-\left(4-\sqrt{15}\right)\right)\left(t-\left(4+\sqrt{15}\right)\right)}{t}>0.$$

Розв'яжемо одержану нерівність методом інтервалів:



Розглянемо проміжки $\left(0;4-\sqrt{15}\right)$ та $\left(4+\sqrt{15};+\infty\right)$.

1. $0<t<4-\sqrt{15}$.

Повертаючись до заміни, одержимо:

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}<4-\sqrt{15};\Rightarrow\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}<\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{2};\Rightarrow;$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}<\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{-2};\Rightarrow x<-2.$$

2. $t>4+\sqrt{15}$.

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}>4+\sqrt{15},\Rightarrow\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}>\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{2};\Rightarrow x>2.$$

Відповідь: $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Завдання 73. Розв'язати нерівність $2^{2x+1}-5\cdot 6^{x}+3^{2x+1}\le 0$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді

$$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}+3\cdot 3^{2x}\le 0$$

та поділимо її на 2^{2x}:

$$2-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\le 0.$$

Зробимо заміну $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t$, $t>0$. В результаті заміни одержимо нерівність:

$$3t^2 - 5t + 2 \le 0.$$

Розкладемо многочлен $3t^2 - 5t + 2$ на множники:

$$3t^2 - 5t + 2 = 0;$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1;$$

$$t_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3};\ t_2 = \frac{5+1}{6} = 1.$$

Отже, $3t^2 - 5t + 2 = 3\left(t - \frac{2}{3}\right)(t-1)$. Звідси одержимо нерівність:

$$3\left(t - \frac{2}{3}\right)(t-1) \le 0.$$

Графіком лівої частини останньої нерівності є парабола вітками вгору, яка набуває від'ємних значень між коренями квадратного рівняння

$$3\left(t - \frac{2}{3}\right)(t-1) = 0,$$

тобто $t \in \left[\frac{2}{3};1\right]$.

Повертаючись до заміни, одержимо:

$$\frac{2}{3} \le \left(\frac{3}{2}\right)^x \le 1;\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \le \left(\frac{3}{2}\right)^x \le \left(\frac{3}{2}\right)^0;\ -1 \le x \le 0.$$

Відповідь: $[-1;0]$.

Завдання 74. Розв'язати нерівність $12^x + 5^x > 13^x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини нерівності на 13^x:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x > 1.$$

Кожна із функцій $\left(\frac{12}{13}\right)^x$ і $\left(\frac{5}{13}\right)^x$ визначена на R. Крім того, вони спадні, а, отже, функція $f(x)=\left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x-1$ також є спадною. Тому $x=2$ – єдиний корінь рівняння $\left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x-1=0$. Таким чином, при $x<2$ функція $f(x)=\left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x-1>0$.

Відповідь: $(-\infty;2)$.

Завдання 75. Розв’язати нерівність $\left(x^2-8x+15\right)^{x-6}<1$.

Розв’язання. Розглянемо сукупність систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x^2-8x+15<1,\\ x-6>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-8x+15>1,\\ x-6<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв’яжемо кожну із систем окремо:

$$\begin{cases}0<x^2-8x+15<1,\\ x-6>0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x^2-8x+15<1,\\ x>6;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-8x+15>0,\\ x^2-8x+15<1,\\ x>6;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-8x+15>0,\\ x^2-8x+14<0,\\ x>6.\end{cases}$$

Розкладемо многочлени $x^2-8x+15$ та $x^2-8x+14$ на множники:

$$x^2-8x+15=0.$$

Коренями цього рівняння є $x_1=3$, $x_2=5$.

Отже, $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$.

$$x^2-8x+14=0;$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 8;$$

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{8}}{2} = 4 - \sqrt{2};\ x_2 = \frac{8 + \sqrt{8}}{2} = 4 + \sqrt{2}.$$

Отже, $x^2 - 8x + 14 = \left(x - \left(4 - \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(4 + \sqrt{2}\right)\right)$.

З урахуванням цього одержимо систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x-3)(x-5) > 0, \\ \left(x - \left(4 - \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(4 + \sqrt{2}\right)\right) < 0, \\ x > 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ x \in \left(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}\right), \\ x \in (6; +\infty). \end{cases}$$

Одержана система несумісна.

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 1, \\ x - 6 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 14 > 0, \\ x - 6 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x - \left(4 - \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(4 + \sqrt{2}\right)\right) > 0, \\ x < 6; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \in \left(-\infty; 4 - \sqrt{2}\right) \cup \left(4 + \sqrt{2}; +\infty\right), \\ x \in (-\infty; 6). \end{cases}$$

Розв’язком системи буде:

$$x \in \left(-\infty; 4 - \sqrt{2}\right) \cup \left(4 + \sqrt{2}; 6\right).$$

Відповідь: $\left(-\infty; 4 - \sqrt{2}\right) \cup \left(4 + \sqrt{2}; 6\right)$.

Завдання 76. Розв’язати нерівність $a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0$.

Розв’язання. Перепишемо нерівність у вигляді:

$$9 \cdot 9^x + 8a \cdot 3^x - a^2 < 0.$$

Зробимо заміну $3^x = t$, $t > 0$. В результаті заміни одержимо нерівність:

$$9 \cdot t^2 + 8a \cdot t - a^2 < 0.$$

Знайдемо корені квадратного рівняння $9 \cdot t^2 + 8a \cdot t - a^2 = 0$:

$$D = 64a^2 + 36a^2 = 100a^2;$$

$$t_1 = \frac{-8a + 10a}{18} = \frac{a}{9};\ t_2 = \frac{-8a - 10a}{18} = -a.$$

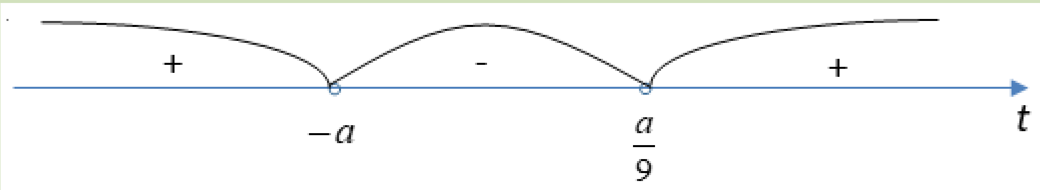
Тому $9 \cdot t^2 + 8a \cdot t - a^2 = 9(t + a)\left(t - \frac{a}{9}\right)$. З урахуванням цього одержимо нерівність $9(t + a)\left(t - \frac{a}{9}\right) < 0$.

Розглянемо випадки:

1. $a = 0$: $9t^2 < 0$.

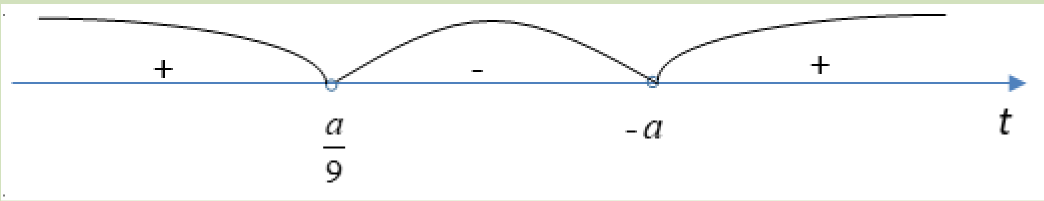
В цьому випадку нерівність немає розв'язків.

2. $a > 0$: $\frac{a}{9} > 0$; $-a < 0$.



З урахуванням того, що $t > 0$, одержимо $0 < t < \frac{a}{9}$; $0 < 3^x < \frac{a}{9}$; $x < \log_3 \frac{a}{9}$; $x < \log_3 a - 2$.

3. $a < 0$: $\frac{a}{9} < 0$; $-a > 0$.



З урахуванням того, що $t > 0$, одержимо:

$$0 < t < -a;\ 0 < 3^x < -a;\quad x < \log_3(-a).$$

Відповідь: при $a = 0$ нерівність немає розв'язків; при $a \in (0; +\infty)$ $x \in (-\infty; \log_3 a - 2)$; при $a \in (-\infty; 0)$ $x \in (-\infty; \log_3(-a))$.

СИСТЕМИ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Завдання 77. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x - 7^y = 2, \\ 3^x + 7^y = 16. \end{cases}$

Розв'язання. Зробимо заміну $3^x = a$, $a > 0$, $7^y = b$, $b > 0$. Тоді матимемо систему:

$$\begin{cases} a - b = 2, \\ a + b = 16. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} 2a = 18, \\ 2b = 14; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9, \\ b = 7. \end{cases}$$

Отже, $\begin{cases} 3^x = 9, \\ 7^y = 7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Відповідь: $(2;1)$.

Завдання 78. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x = 9 - y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{9-y} - 2^y = 16, \\ x = 9 - y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2^9}{2^y} - 2^y = 16, \\ x = 9 - y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{512}{2^y} - 2^y = 16; \\ x = 9 - y. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{512}{2^y} - 2^y = 16; \Rightarrow \frac{512 - 2^{2y} - 16 \cdot 2^y}{2^y} = 0; \Rightarrow 2^{2y} + 16 \cdot 2^y - 512 = 0.$$

Шляхом заміни $2^y = t, t > 0$ зведемо рівняння до квадратного: $t^2 + 16 \cdot t - 512 = 0$, коренями якого є $t_1 = -32$, $t_2 = 16$. Корінь $t_1 = -32$ не задовольняє умову $t > 0$.

Отже, $\begin{cases} 2^y = 16, \\ x = 9 - y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 5. \end{cases}$

Відповідь: $(5;4)$.

Завдання 79. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7. \end{cases}$

Розв’язання.

$$\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 2^y = \sqrt{3^x} - 7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x - \left(\sqrt{3^x} - 7\right)^2 = 77, \\ 2^y = \sqrt{3^x} - 7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x - \left(3^x - 14\sqrt{3^x} + 49\right) = 77, \\ 2^y = \sqrt{3^x} - 7; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14\sqrt{3^x} = 126, \\ 2^y = \sqrt{3^x} - 7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3^x} = 9, \\ 2^y = \sqrt{3^x} - 7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 81, \\ 2^y = 9 - 7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3^4, \\ 2^y = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4; \\ y = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $(4;1)$.

Завдання 80. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$

Розв’язання. Прологарифмуємо за основою 10 рівняння системи:

$$\begin{cases} \lg\left(2^x \cdot 3^y\right) = \lg 6, \\ \lg\left(3^x \cdot 4^y\right) = \lg 12; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\lg 2 + y\lg 3 = \lg 6, \\ x\lg 3 + y\lg 4 = \lg 12; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\lg 2 + y\lg 3 = \lg 2 + \lg 3, \\ x\lg 3 + y\lg 4 = \lg 3 + \lg 4; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\lg 2 + y\lg 3 = \lg 2 + \lg 3, \\ x\lg 3 + 2y\lg 2 = \lg 3 + 2 \cdot \lg 2. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на $\lg 3$, а друге на $\lg 2$ та знайдемо різницю одержаних результатів:

$$\begin{cases} y\lg^2 3 - 2y\lg^2 2 = \lg^2 3 - 2\cdot\lg^2 2, \\ x\lg 3 + 2y\lg 2 = \lg 3 + 2\cdot\lg 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(\lg^2 3 - 2\cdot\lg^2 2\right) = \lg^2 3 - 2\cdot\lg^2 2, \\ x\lg 3 + 2y\lg 2 = \lg 3 + 2\cdot\lg 2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x\lg 3 + 2\cdot\lg 2 = \lg 3 + 2\cdot\lg 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x\lg 3 = \lg 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $(1;1)$.

Завдання 81. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689. \end{cases}$

Розв’язання. З умови випливає, що $y \ge 0$. Введемо заміну $5^{\sqrt[3]{x}} = a$, $a > 0$, $2^{\sqrt{y}} = b$, $b > 0$, тоді матимемо систему:

$$\begin{cases} a\cdot b = 200, \\ a^2 + b^2 = 689. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на 2, та додавши до другого, одержимо:

$$\begin{cases} a\cdot b = 200, \\ a^2 + 2ab + b^2 = 1089; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot b = 200, \\ (a+b)^2 = 1089; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot b = 200, \\ a + b = 33; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{200}{b}, \\ \dfrac{200}{b} + b = 33; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{200}{b}, \\ \dfrac{200 + b^2 - 33b}{b} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{200}{b}, \\ b^2 - 33b + 200 = 0. \end{cases}$$

Коренями рівняння $b^2 - 33b + 200 = 0$ є $b_1 = 8$, $b_2 = 25$.

Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \dfrac{200}{b}, \\ b = 8; \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{200}{b}, \\ b = 25; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 25, \\ b = 8; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 8, \\ b = 25. \end{cases} \end{array}\right.$$

Повертаючись до заміни, одержимо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5^{\sqrt[3]{x}}=25,\\ 2^{\sqrt{y}}=8;\end{cases}\\ \begin{cases}5^{\sqrt[3]{x}}=8,\\ 2^{\sqrt{y}}=25;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2,\\ \sqrt{y}=3;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{x}=\log_5 8,\\ \sqrt{y}=\log_2 25,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=8,\\ y=9;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\log_5^3 8,\\ y=\log_2^2 25.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $(8;9)$, $\left(\log_5^3 8;\log_2^2 25\right)$.

Завдання 82. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64},\\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}.\end{cases}$

Розв'язання. Запишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{9}{8}\right)^x>\dfrac{27}{64},\\ 2^{x^2-6x-3,5}<2^3 2^{\frac{1}{2}};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{2^x}{3^x}\cdot\dfrac{3^{2x}}{8^x}>\dfrac{27}{64},\\ 2^{x^2-6x-3,5}<2^{3,5};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{3}{4}\right)^x>\left(\dfrac{3}{4}\right)^3,\\ x^2-6x-3,5<3,5;\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x<3,\\ x^2-6x-7<0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<3,\\ (x+1)(x-7)<0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<3,\\ -1<x<7;\end{cases} \Rightarrow x\in(-1;3).$$

Відповідь: $x\in(-1;3)$.

Завдання 83. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases}4^x-6\cdot 2^x+8<0,\\ 5^{\frac{x-3}{x+1}}\le 0,2.\end{cases}$

Розв'язання. Запишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases}4^x-6\cdot 2^x+8<0,\\ 5^{\frac{x-3}{x+1}}\le 5^{-1};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4^x-6\cdot 2^x+8<0,\\ \dfrac{x-3}{x+1}\le -1.\end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність $4^x-6\cdot 2^x+8<0$. Введемо заміну $2^x=t$, $t>0$.

В результаті заміни отримаємо:

$$t^2 - 6 \cdot t + 8 < 0; \Rightarrow (t-2)(t-4) < 0; \Rightarrow t \in (2;4).$$

Повернувшись до заміни, одержимо: $2 < 2^x < 4; \Rightarrow 1 < x < 2$.

Розв’яжемо другу нерівність системи:

$$\frac{x-3}{x+1} \le -1; \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} + 1 \le 0; \Rightarrow \frac{x-3+x+1}{x+1} \le 0; \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \le 0; \Rightarrow -1 < x \le 1.$$

Отже, $\begin{cases} 1 < x < 2, \\ -1 < x \le 1. \end{cases}$

Тому система не має розв’язку.

Відповідь: $\varnothing$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти:

1.1. $\log_6 36 =$	1.7. $\log_5 625 =$	1.13. $\log_7 343 =$
1.2. $\log_{0,5} \frac{1}{2} =$	1.8. $\log_{10} 0,001 =$	1.14. $\log_{\frac{1}{6}} 216 =$
1.3. $\log_4 16 =$	1.9. $\log_{0,1} 100 =$	1.15. $\log_5 1 =$
1.4. $\log_{\frac{1}{2}} 16 =$	1.10. $\log_5 5 =$	1.16. $\log_{0,5} 0,125 =$
1.5. $\log_5 125 =$	1.11. $\log_{16} 256 =$	1.17. $\log_{13} 169 =$
1.6. $\log_{\frac{1}{3}} 81 =$	1.12. $\log_{10} 1000 =$	

2. Використовуючи формулу $a^{\log_a b} = b$, перетворити:

2.1. $7^{\log_7 8} =$	2.3. $4^{\log_4 13} =$	2.5. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5} =$	2.7. $9^{\log_9 5} =$
2.2. $\pi^{\log_\pi 10} =$	2.4. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 3} =$	2.6. $3^{\log_3 8} =$	2.8. $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 17} =$

3. Знайти x, якщо:

3.1. $\log_5 x = 2;$	3.3. $\log_3 x = -3;$	3.5. $\log_{\frac{1}{2}} x = -1;$	3.7. $\log_{\frac{1}{4}} x = 2;$
3.2. $\log_x 25 = 2;$	3.4. $\log_x \frac{1}{81} = -2;$	3.6. $\log_x 1 = 3;$	3.8. $\log_x 49 = 2.$

4. Використовуючи формулу $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, записати у вигляді логарифмів за основою 3:

4.1. $\log_7 6 =$	4.3. $\log_5 27 =$	4.5. $\log_2 13 =$
4.2. $\log_2 14 =$	4.4. $\log_2 7 =$	4.6. $\log_7 5 =$

5. Обчислити:

5.1. $\log_2 \log_3 81 =$

5.2. $\log_5 \log_2 32 =$

5.3. $\log_3 \log_2 8 =$

5.4. $\log_{\frac{1}{2}} \log_5 625 =$

5.5. $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_5 25 =$

5.6. $\log_7 \log_5 \log_2 32 =$

6. Подати число 2, –2, 3, 1, $\frac{1}{2}$ у вигляді логарифма за основою 2:

6.1. $2 = \log_2 \ldots$

6.2. $-2 = \log_2 \ldots$

6.3. $3 = \log_2 \ldots$

6.4. $1 = \log_2 \ldots$

6.5. $\frac{1}{2} = \log_2 \ldots$

7. Обчислити:

7.1. $\log_2 16 =$

7.2. $\log_4 16 =$

7.3. $\log_{\frac{1}{2}} 16 =$

7.4. $\log_{\frac{1}{4}} 16 =$

7.5. $\log_{16} 16 =$

7.6. $\log_{16} 1 =$

7.7. $\log_{16} 256 =$

7.8. $\log_2 32 =$

7.9. $\log_3 243 =$

7.10. $\log_7 49 =$

7.15. $\log_{0,5} 0,125 =$

7.16. $\log_{0,3} 0,027 =$

7.17. $\log_{0,2} 125 =$

7.18. $\log_{\frac{1}{3}} 1 =$

7.19. $\log_7 1 =$

7.20. $\log_{15} 15 =$

7.21. $\log_{\frac{1}{2}} 0,2 =$

7.22. $\log_3 \sqrt[4]{3} =$

7.23. $\log_5 \sqrt[7]{5} =$

7.24. $\log_6 \sqrt[3]{6} =$

7.29. $\log_9 1 =$

7.30. $\log_3 3 =$

7.31. $\log_5 5 =$

7.32. $\log_7 7 =$

7.33. $\log_2 \log_5 625 =$

7.34. $\log_3 \log_5 125 =$

7.35. $3^{\log_3 8} =$

7.36. $4^{\log_4 5} =$

7.37. $2^{\log_2 15} =$

7.38. $7^{\log_7 8} =$

7.11. $\log_{\frac{1}{6}} 36 =$ 7.25. $\log_7 7\sqrt{7} =$ 7.39. $9^{\log_9 11} =$

7.12. $\log_{\frac{1}{8}} 64 =$ 7.26. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{5} =$ 7.40. $3^{\log_3 5} =$

7.13. $\log_9 \frac{1}{81} =$ 7.27. $\log_7 \frac{1}{\sqrt[4]{7}} =$ 7.41. $6^{\log_6 2} =$

7.14. $\log_{\frac{1}{5}} 625 =$ 7.28. $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt[8]{6} =$ 7.42. $7^{\log_7 13} =$

8. Використовуючи формули

$$\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b), \log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b},$$

обчислити (якщо можливо):

8.1. $\log_6 2 + \log_6 18 =$

8.2. $\log_2 3,2 + \log_2 10 =$

8.3. $\lg 4 + \lg 25 =$

8.4. $\log_6 2 + \log_6 3 =$

8.5. $\log_6 8 + \log_6 4,5 =$

8.6. $\log_7 2 + \log_7 5 =$

8.7. $\log_2 16 + \log_2 2 =$

8.8. $\log_5 2 + \log_5 17 =$

8.16. $\frac{\log_3 2 + \log_3 8}{\log_3 10 - \log_3 5} =$

8.17. $\frac{\log_7 20 + \log_7 5}{\log_7 20 - \log_7 2} =$

8.18. $\frac{\lg 30 - \lg 3}{\log_6 3 + \log_6 2} =$

8.19. $\frac{\log_3 27 + \log_3 9}{\log_2 36 - \log_2 9} =$

8.20. $\frac{\log_3 4 + \log_3 5}{\log_9 2} =$

8.21. $\frac{\log_{25} 14 - \log_{25} 2}{\log_5 4} =$

8.22. $\frac{\log_3 32 - \log_3 2}{\log_3 2 + \log_3 5} =$

8.23. $\frac{\log_5 15 - \log_5 3}{2\log_6 3} =$

8.9. $\log_3 18 - \log_3 2 =$

8.10. $\log_3 45 - \log_3 5 =$

8.11. $\log_3 64 - \log_3 4 =$

8.12. $\log_{12} 15 - \log_{12} 3 =$

8.13. $\log_5 35 - \log_5 7 =$

8.14. $\log_3 7 - \log_3 4 =$

8.15. $\log_9 63 - \log_9 7 =$

8.24. $\dfrac{\log_3 16 + \log_3 4}{\log_3 24 - \log_3 6} =$

8.25. $\dfrac{\log_3 21 + \log_3 7}{\log_9 25 + \log_9 4} =$

9. Використовуючи формулу $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$, обчислити:

9.1. $\log_{27} 9 =$

9.2. $\log_{16} 64 =$

9.3. $\log_{27} 81 =$

9.4. $\log_{625} 125 =$

9.5. $\log_{36} 216 =$

9.6. $\log_{49} 343 =$

9.7. $\log_{49} \sqrt{7} =$

9.8. $\log_{125} \sqrt{5} =$

9.9. $\log_{\sqrt[3]{3}} 81 =$

9.10. $\log_9 \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

9.11. $\log_6 \sqrt{6} =$

9.12. $\log_4 \dfrac{1}{2\sqrt{2}} =$

10. Обчислити:

10.1. $2^{1+\log_2 7} =$

10.2. $4^{2+\log_4 3} =$

10.3. $6^{1-\log_6 2} =$

10.4. $3^{1-\log_3 2} =$

10.5. $5^{1+\log_5 7} =$

10.6. $4^{\frac{1}{2}\log_2 3} =$

10.7. $25^{\frac{1}{2}\log_5 2} =$

10.8. $4^{\frac{1}{2}\log_2 3} =$

11. Використовуючи формулу $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$, обчислити:

11.1. $\frac{\log_5 16}{\log_5 2} =$	11.3. $\frac{\log_3 125}{\log_3 5} =$	11.5. $\frac{\log_5 27}{\log_5 3} =$
11.2. $\frac{\log_4 81}{\log_4 3} =$	11.4. $\frac{\log_2 216}{\log_2 6} =$	11.6. $\frac{\log_7 10000}{\log_7 100} =$

12. Обчислити значення виразів:

12.1. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$;

12.3. $3\cdot\log_3\sqrt{3\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{5}\cdot(16)^{\frac{3}{2}\log_{64} 5}$;

12.2. $2^{3\cdot\log_2\sqrt{3}-2\cdot\log_4\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

12.4. $\log_{\sqrt{3}}\left(9\sqrt[5]{27}\cdot 2^{\log_{0,5}\sqrt[3]{3}}\right) + \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}\frac{1}{2}$.

13. Дано $\log_{12} 27 = a$. Знайти $\log_6 16$.

14. Дано $\log_5 4 = a$, $\log_5 3 = b$. Знайти $\log_{25} 12$.

15. Розв'язати логарифмічні рівняння:

15.1. $\log_2(x+1,5) = -\log_2 x$;

15.2. $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$;

15.3. $\lg(5-x) + 2\cdot\lg\sqrt{3-x} = 1$;

15.4. $\log_5\frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2-25) = 0$;

15.5. $\log_3(3^x-8) = 2-x$;

15.6. $\lg(x^3+8) - 0,5\cdot\lg(x^2+4x+4) = \lg 7$;

15.7. $\log_{x+1}(2x^3+2x^2-3x+1) = 3$;

15.8. $\log_{x^2-4}\left(x^2-3x\right)=\log_{x^2-4}\left(x+12\right);$

15.9. $\dfrac{\log_2\left(9-2^x\right)}{3-x}=1;$

15.10. $1+\lg\left(1+x^2-2x\right)-\lg\left(1+x^2\right)=2\cdot\lg\left(1-x\right);$

15.11. $\log_{\log_2 x}\left(2-\log_2 x\right)=1;$

15.12. $\dfrac{\lg x^2}{\lg\left(6x-5\right)}=1;$

15.13. $\log_{x+1}\left(x^2-3x+1\right)=1;$

15.14. $\lg\left(3^x+x-17\right)=x\lg 30-x;$

15.15. $\log_{0,5}^2\left(4x\right)+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8;$

15.16. $0,1\cdot\log_2^4\left(x-4\right)-1,3\cdot\log_2^2\left(x-4\right)+3,6=0;$

15.17. $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0;$

15.18. $\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1;$

15.19. $2\cdot\lg x^2-\lg^2\left(-x\right)=4;$

15.20. $\log_x\left(125x\right)\cdot\log_{25}^2 x=1;$

15.21. $\lg\left(10x\right)\cdot\lg\left(0,1x\right)=\lg x^3-3;$

15.22. $\lg^2\left(100x\right)+\lg^2\left(10x\right)+\lg^2 x=14;$

15.23. $x^{2\cdot\lg^2 x}=10x^3;$

15.24. $\dfrac{10x^{2\cdot\lg^2 x}}{x^3}=\dfrac{x^{3\cdot\lg x}}{10};$

15.25. $3 \cdot 2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 64;$

15.26. $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15;$

15.27. $\log_2 \dfrac{x-2}{x+3} = 1 - \log_2 \dfrac{x-3}{x+4};$

15.28. $\log_2 \dfrac{x+2}{x-3} = 1 - \log_2 \dfrac{x+3}{x-4};$

15.29. $\log_5^2 x + 3 \cdot \log_5 x - 4 = 0;$

15.30. $\log_3^2 x - 4 \cdot \log_3 x + 4 = 0;$

15.31. $\log_2 x + \log_x 16 = 5;$

15.32. $\log_3 x = 4 \cdot \log_x 3 - 3;$

15.33. $2 \cdot \log_2 x^2 - \log_2^2 (-x) = 3;$

15.34. $\log_3 x^2 - \log_3^2 (-x) = -3;$

15.35. $\log_{2x} \left(x^2 + x - 2 \right) = 1;$

15.36. $\log_{(-2x)} \left(x^2 - x - 2 \right) = 1;$

15.37. $\dfrac{\log_2 x - \log_2^2 x}{1 - \log_2 x} = 0;$

15.38. $\dfrac{2 + \log_3 x}{\log_3^2 x - 4} = 0;$

15.39. $\log_2^2 (4x) + \log_2^2 (2x) = 1;$

15.40. $\log_3^2 (9x) + \log_3^2 (3x) = 1;$

15.41. $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5;$

15.42. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$

16. Розв’язати логарифмічні нерівності:

16.1. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1;$

16.2. $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \le 1;$

16.3. $\log_{1,5} \frac{2x-8}{x-2} < 0;$

16.4. $\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 (5x) > \log_{\frac{1}{3}} (x+3);$

16.5. $2 \cdot \log_8 (x-2) - \log_8 (x-3) > \frac{2}{3};$

16.6. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0;$

16.7. $\log_4 (x+7) > \log_2 (x+1);$

16.8. $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0;$

16.9. $\log_{x+1} \left(x^2 - x - 2\right) \le 1;$

16.10. $\log_{1-x} \left(x^2 + x - 2\right) \ge 1;$

16.11. $x \log_{0,1} \left(x^2 + x + 1\right) > 0;$

16.12. $\log_x \frac{2x+0,4}{5(1-x)} > 0;$

16.13. $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0;$

16.14. $\frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100 - \log_{0,3}9} < 1;$

16.15. $\dfrac{\log_5\left(x^2+3\right)}{4x^2-16x}<0;$

16.16. $\dfrac{1}{\log_3 x-2}>\dfrac{1}{\log_3 x};$

16.17. $3^{0,25\cdot\log_3^2 x}\le\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}\log_3 x};$

16.18. $\lg(10x)\cdot\log_2 x<2\cdot\log_2 10;$

16.19. $2\cdot\log_5\sqrt{x}+2\ge\log_x\dfrac{1}{5};$

16.20. $\log_2^4 x-\log_{\frac{1}{2}}^2\dfrac{x^3}{8}+9\log_2\dfrac{32}{x^2}<4\log_{\frac{1}{2}}^2 x;$

16.21. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\ge 2;$

16.22. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2>\log_{4x}2;$

16.23. $\log_2^3(x-1)-\log_{0,5}(x-1)>5-\log_2(x-1)^3;$

16.24. $\log_{\sqrt{10}}\sqrt{x^3}\cdot\lg(100x)<3\cdot\lg x;$

16.25. $\log_2 x+\log_2(x-1)\le 1;$

16.26. $\log_{0,5}x+\log_{0,5}(x+1)\ge 1;$

16.27. $\log_{0,4}x+\log_{0,4}(x-1)\ge\log_{0,4}(x+3);$

16.28. $\log_{0,3}x+\log_{0,3}(x+1)\ge\log_{0,3}(8-x);$

16.29. $\lg^2 x+\lg x^3+2\ge 0;$

16.30. $\lg^2 x+\lg x^2\ge 3;$

16.31. $\log_{0,5}^2(-x)-0,5\cdot\log_{0,5}x^4\le 3;$

16.32. $2\cdot\log_{0,2}^{2}(-x)-\log_{0,2}x^{2}<4;$

16.33. $\log_{x-5}8>3;$

16.34. $\log_{3-x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}<3;$

16.35. $\log_{x^{2}-6x+8}(x-4)>0;$

16.36. $\log_{x-2}\left(x^{2}-8x+15\right)>0.$

17. Спростити вирази:

17.1. $0,6^{x}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^{2}-12};$

17.2. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)}};$

17.3. $\frac{\sqrt[4]{5^{3x-4}}}{\sqrt{5}};$

17.4. $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}};$

17.5. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{5}{x}}};$

17.6. $3^{2x^{2}-1}\cdot 3^{x-5}\cdot 3^{4-x^{2}};$

17.7. $2^{x^{2}+1}\cdot 4^{x-2}\cdot 8^{3-x};$

17.8. $\frac{16^{x-1}:16^{2x-1}:16^{2x+3}}{4^{2x-1}:4^{x-1}:4^{x+3}}.$

18. Розв’язати показникові рівняння:

18.1. $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}}=\sqrt[3x-7]{8^{x-3}};$

18.2. $\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2};$

18.3. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3};$

18.4. $(0{,}4)^{x-1} = (6{,}25)^{6x-5};$

18.5. $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{5}{x}}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-4};$

18.6. $\left(\frac{5}{12}\right)^{x} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} = (0{,}3)^{-1};$

18.7. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3;$

18.8. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}} \cdot (0{,}2)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{25};$

18.9. $7^x \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6} - \left(\frac{7}{4}\right)^{x} = 0;$

18.10. $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}} \cdot (0{,}2)^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}} = 125^{x-4} \cdot (0{,}04)^{x-2};$

18.11. $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0;$

18.12. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3};$

18.13. $2^{x+1} - 4 \cdot 3^x = 0{,}5^{-x} - 3^{x+1};$

18.14. $6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} = 3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2};$

18.15. $2^{x+4} + 2^{x+3} + 2^{x+2} = 7^x + 7^{x+1};$

18.16. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1};$

18.17. $2\cdot 3^{3x-1}+27^{x-\frac{2}{3}}=9^{x-1}+2\cdot 3^{2x-1}$;

18.18. $5^{2x+1}-7^{x+1}=5^{2x}+7^{x}$;

18.19. $5^{x-4}-5^{x-5}-2\cdot 5^{x-6}=2\cdot 3^{x-4}$;

18.20. $3^{2x-3}+3^{4-2x}-4=0$;

18.21. $2^{x}+8\cdot 2^{-x}+15=0$;

18.22. $4^{x}-8\cdot 2^{x}+15=0$;

18.23. $9^{2x}-6\cdot 3^{2x}-7=0$;

18.24. $3^{x+1}-3^{1-x}=8$;

18.25. $9^{x+1}-3\cdot 3^{x+3}-27\cdot 3^{x-2}+27=0$;

18.26. $4\cdot 2^{2x}-6^{x}=18\cdot 3^{2x}$.

19. Розв’язати показникові нерівності:

19.1. $3^{\frac{x-5}{2}}\geq 3\sqrt{3}$;

19.2. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x}\leq\left(\frac{8}{27}\right)^{x-2}$;

19.3. $27^{-\frac{2}{3}}<\sqrt[4]{9^{3x-1}}$;

19.4. $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-3}<15\frac{5}{8}$;

19.5. $(0,04)^{x-1}\leq 625^{6x-5}$;

19.6. $(0,6)^{-0,25\sqrt{x}}>\left(4\frac{17}{27}\right)^{\sqrt{x}-\frac{33}{9}}$;

19.7. $5^{2x-1}+2^{x}-5^{2x}+2^{2x+2}>0$;

19.8. $5^{2x}-7^{x}-35\cdot 5^{2x}+35\cdot 7^{x}\le 0;$

19.9. $2^{x}+2^{1-x}<3;$

19.10. $3^{4-3x}-35\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}+6\ge 0;$

19.11. $4^{x}+2\cdot 14^{x}-3\cdot 49^{x}<0;$

19.12. $\frac{1}{2^{x+1}+3}\le\frac{1}{2^{x+2}-1};$

19.13. $\frac{24}{1-25^{-x}}\le\frac{1}{5^{-x}-6};$

19.14. $\left(x^{2}+x+1\right)^{x}<1;$

19.15. $2^{x}+2^{1-x}\le 3;$

19.16. $4\cdot(0,5)^{2x}-33\cdot(0,5)^{x}+8\le 0;$

19.17. $7\cdot 2^{2x}+2^{2x+1}\le 3^{2x+1}+3^{2x}.$

20. Розв’язати системи рівнянь:

20.1. $\begin{cases}\log_{y}x+\log_{x}y=2,\\ x^{2}-y=20;\end{cases}$

20.2. $\begin{cases}\log_{2}(y+x)=2,\\ \log_{2}(x-y)=2;\end{cases}$

20.3. $\begin{cases}\log_{y}x+\log_{x}y=\frac{5}{2},\\ xy=27;\end{cases}$

20.4. $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6},\\ \log_{5}(x-y)+\log_{5}(x+y)=1;\end{cases}$

20.11. $\begin{cases}y^{2}=4^{x}+8,\\ 2^{x+1}+y+1=0;\end{cases}$

20.12. $\begin{cases}2^{x}\cdot 6^{y}=24,\\ 2^{y}\cdot 6^{x}=72;\end{cases}$

20.13. $\begin{cases}2^{x}-7^{y+1}=1,\\ 2^{x}\cdot 7^{y}=8;\end{cases}$

20.14. $\begin{cases}7\cdot 2^{x}+6y=2,\\ 3\cdot 2^{x+1}-5y=93;\end{cases}$

20.5. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}, \\ \log_7(x+y)+\log_7(x-y)=1; \end{cases}$

20.15. $\begin{cases} y^{x^2-7x+12}=1, \\ x+y=6; \end{cases}$

20.6. $\begin{cases} \log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{x}{y}\right)=0, \\ \log_{\sqrt{x}}(xy)=8; \end{cases}$

20.16. $\begin{cases} 3^x+3^y=28, \\ 3^{x+y}=27; \end{cases}$

20.7. $\begin{cases} \log_2 x+2\cdot\log_2 y=3, \\ x^2+y^4=16; \end{cases}$

20.17. $\begin{cases} 2^x+2^y=6, \\ x+y=3; \end{cases}$

20.8. $\begin{cases} \lg(x+y)+\lg(x-y)=1+\lg 1{,}2, \\ \lg\left(x^2+y^2\right)=2-\lg 5; \end{cases}$

20.18. $\begin{cases} 3^x-2^{2y}=77, \\ \sqrt{3^x}-2^y=7; \end{cases}$

20.9. $\begin{cases} \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y, \\ \lg\left(x^2+y^2\right)=2; \end{cases}$

20.19. $\begin{cases} 2\cdot 3^x=18, \\ 4^x\cdot 5^y=16; \end{cases}$

20.10. $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=50, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5; \end{cases}$

20.20. $\begin{cases} 2^x(x+y)=10, \\ \sqrt[x]{x+y}=5. \end{cases}$

21. Розв’язати системи нерівностей:

21.1. $\begin{cases} \log_{3x-1} 27<2, \\ \sqrt{(2x-3)(x+2)}\ge x; \end{cases}$

21.6. $\begin{cases} \dfrac{(x+4)^4}{x+1}\ge 0, \\ 3\cdot 9^{3x+\frac{2}{x}}-27^{2x}\ge 0; \end{cases}$

21.2. $\begin{cases} |\lg x|<3, \\ \dfrac{\lg^2 x}{2-x}<0; \end{cases}$

21.7. $\begin{cases} 3^{\frac{5x-1}{2x-1}}<243, \\ 4^{\frac{2x-1}{x+1}}\ge 64; \end{cases}$

21.3. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(5x-1)\ge 0, \\ 2x+4>3; \end{cases}$

21.8. $\begin{cases} \left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1, \\ 0{,}008^x+5^{1-3x}+0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)}<30{,}04; \end{cases}$

21.4. $\begin{cases} 7^{2x+1} > 49, \\ 2x - 4 > 3; \end{cases}$

21.5. $\begin{cases} \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}, \\ 7^{3x} + 1 > 7^{x-1}\left(55 \cdot 7^{x} - 41\right); \end{cases}$

21.9. $\begin{cases} \left(x^2 - 8x + 16\right)^{x-6} < 1, \\ 16^{x} + \left(x-6\right) \cdot 4^{x} + 5 > x; \end{cases}$

21.10. $\begin{cases} \dfrac{27^{x}}{3^{x-7}} > 9, \\ \log_{0,5}\left(x+16\right) \le \log_{0,5}\left(x+2\right) - 1. \end{cases}$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Захарійченко Ю. О., Школьний О. В., Захарійченко Л. І., Школьна О. В. Повний курс математики в тестах: у 2 ч. Ч. 2. Теоретичні відомості. Тематичні та підсумкові тести. 2-е вид., доповн. Харків: Ранок, 2018. 192 с.
2. Конет І. М., Сиваківський Б. Я., Сиваківський П. Б. Вибрані питання шкільного курсу математики. На допомогу абітурієнту / за редакцією І. М. Конета. Кам’янець-Подільський: ФОП Сисин О. В., 2008. 356 с.
3. Математика для вступників до вузів: навч. посібник / упоряд.: М. Ф. Бондаренко, В. Ф. Дікарєв, О. Ф. Мельников, В. В. Семенець, Л. Й. Шкляров. Харків: «Компанія СМІТ», 2002. 1120 с.
4. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики: навчально-методичний посібник. Житомир: Рута, 2016. 468 с.
5. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : підручник для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. 2-е вид. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. 608 с.