Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

Н. М. СОРИЧ,
В. А. СОРИЧ

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Кам’янець-Подільський
2018

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.16я73
С65

Друкується згідно рішення вченої ради Кам’янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка,
протокол №5 від 30 травня 2018 року.

Рецензенти:

І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор,
проректор з наукової роботи Кам’янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка;

А. П. Громик, кандидат технічних наук, завідувач кафедри
математичних дисциплін і моделювання Подільського державного
аграрно-технічного університету.

Сорич Н. М.

С65 **Практикум з математичного аналізу** : навчальний посібник / Н. М. Сорич, В. А. Сорич. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національного університету імені Івана Огієнка, 2018. — 67 с.

Навчальний посібник містить теоретичний довідковий матеріал з таких розділів математичного аналізу як ряди, диференціальне числення функцій багатьох змінних, інтегральне числення функцій багатьох змінних, а також зразки розв’язування типових завдань. В ньому вміщені задачі та типові варіанти модульних контрольних робіт, відповіді і вказівки до контрольних робіт та домашніх завдань.

Призначений для організації проведення практичних занять з даних розділів для студентів фізико-математичного факультету спеціальностей «математика», «інформатика», «фізика».

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.16я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Посібник написаний відповідно до навчальної програми курсу «Математичний аналіз» для фізико-математичного факультетів педагогічних інститутів та університетів(спеціальності математика, інформатика, фізика). Математична освіта студентів математичних, фізичних, прикладних спеціальностей базується на трьох основних дисциплін, а саме: математичному аналізі, аналітичній геометрії та вищій алгебрі.

В запропонованому посібнику з математичного аналізу, який складається із трьох розділів, висвітлено основні питання з таких тем дисципліни: Ряди. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних.

На початку кожного розділу вміщено необхідний мінімум теоретичного матеріалу (означено основні поняття, способи обчислення похідних, інтегралів, деякі їх застосування), наведено зразки розв'язування типових вправ. Потім у §§ 1-9 – запропоновані завдання різного рівня складності, що охоплюють досить широке коло питання по розділу «Ряди», в §§ 10-18 завдання з диференціального числення функцій кількох змінних, а §§ 20-32 присвячені кратним та криволінійним інтегралом. Кожен параграф доповнений домашнім завданням, для якого у частині «Відповіді та вказівки» надана необхідна інформація.

Практикум складено на основі багаторічного досвіду викладання авторами математичного аналізу в Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка. Він може бути корисним студентам та викладачам при проведенні практичних занять з математичного аналізу.

Автори вдячні професору Конету І.М. за ряд критичних зауважень, які сприяли поліпшенню наукового та методичного рівня посібника, а також співробітниці кафедри математики Захарець Є.А. за технічну допомогу при підготовці рукопису.

Розділ I
РЯДИ

Вираз вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається числовим рядом, при цьому a_n – загальний член ряду, а сума $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ – частинна сума порядку n цього ряду.

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд називається збіжним, в противному випадку – розбіжним.

Теорема 1. (необхідна умова збіжності).

Якщо ряд збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Якщо $a_n \geq 0, \forall n \in N$, то ряд називається додатним. Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{2}$$

додатні ряди.

Теорема 2. (ознака порівняння).

Якщо позначаючи з деякого номера m $0 \leq a_n \leq b_n$, то із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1), а із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

Теорема 3. (ознака порівняння в граничній формі).

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c, 0 < c < \infty$, то ряди (1) та (2) збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 4. (ознака Даламбера).

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Якщо $\rho < 1$, то ряд (1) збігається, якщо $\rho > 1$, то розбігається.

Теорема 5. (ознака Коші).

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$. Якщо $\rho < 1$, то ряд (1) збігається, якщо $\rho > 1$, то ряд розбігається

Теорема 6. (інтегральна ознака Коші).

Якщо функція, що задана і неспадна на проміжку $[1;+\infty)$, задовольняє умові $f(n)=a_n, \forall n \in N$, то ряд (1) та невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Для рядів із членами довільного знаку справедливі такі твердження.

Якщо ряд, складений із модулів членів ряду, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

є збіжним, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називають абсолютно збіжним. Якщо для збіжного ряду ряд складений із модулів, розбігається, то ряд без модулів називається умовно збіжним.

Теорема 7. Абсолютно збіжний ряд є збіжним.

Якщо $a_n \geq 0, \forall n \in N$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

називають знакозмінним.

Теорема 8. (ознака Лейбніца).

Якщо для знакозмінного ряду $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ і $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in N$, то ряд є збіжним.

Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

називають степеневим.

Теорема 9.

Якщо для степеневого ряду існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R,$ або $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R,$ то на інтервалі $(x_0-R; x_0+R)$ ряд збігається абсолютно і розбігається поза ним.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}.$$

Розв'язання. Даний числовий ряд є додатним із загальним членом

$$a_n = \frac{2^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}.$$

Використаємо ознаку Коші

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left| \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e = 2,7\ldots \right| = \frac{2}{e} < 1,$$

тобто ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Розв'язання. Даний ряд є знакозмінним. Розглянемо ряд із модулів його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Застосуємо до нього ознаку порівняння в граничній формі, вибравши ряд із загальним членом $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, який, як відомо, є розбіжним.

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0;+\infty).$$

Тому згідно теореми 3 ряд з модулів є розбіжним.
Далі до заданого знакозмінного ряду застосуємо ознаку Лейбніца. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0 \; i \; a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = a_n, \forall n \in N.$$

Умови теореми 8 виконуються, тому вихідний ряд є збіжним. Отже, остаточно, досліджуваний ряд збігається умовно.

Відповідь: ряд збігається умовно.

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n} \left(x+3 \right)^n .$$

Розв'язання. Для заданого степеневого ряду $x_0 = 3$, $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{3^n}, n \in N$. Такий ряд згідно теореми 9 абсолютно збігається в інтервалі $\left(x_0 - R; x_0 + R \right)$, розбігається поза ним, а в точках $x_0 \pm R$ необхідні додаткові дослідження.

Знайдемо R за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| a_n \right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{\sqrt{n+1}}{3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1}}} = \left| \sqrt[n]{n+1} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \to 1 \right| = 3.$$

Отже, на інтервалі (–6; 0) степеневий ряд збігається абсолютно, а при $x \in \left(-\infty; -6 \right) \cup \left(0; +\infty \right)$ – розбігається. В точках $x_1 = 0$ та $x_2 = -6$ проведемо додаткові дослідження. Підставимо $x_1 = 0$ у степеневий ряд і одержимо додатний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1},$$

загальний член якого $\sqrt{n+1} \nrightarrow 0$.

Тому даний числовий ряд розбігається згідно необхідної умови (теорема 1). Аналогічно при $x_2 = -6$ маємо розбіжний числовий ряд за теоремою 1.

Відповідь: при $x \in \left(-6; 0 \right)$ ряд збігається абсолютно.

§ 1. Основні поняття та факти теорії числових рядів

I. Ряд, його загальний член, частинні суми, сума.
II. Збіжні, розбіжні ряди. Необхідна умова збіжності.
III. Залишок ряду. Зв'язок між збіжністю ряду та його залишку.
IV. Операції над збіжними рядами.
V. **Розв'язати вправи:**

1. Написати одну з можливих формул загального члена ряду:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \ldots; \; 1 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \ldots; \; 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots .$$

2. Нехай $a_n = \left(\dfrac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$. Написати a_{n+1}, a_{2n}, a_{3n-1}, a_{n^2}.

3. Одержати вирази для S_n, S, r_n:

а) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$; б) $\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots$;

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n}+\sqrt{n}\right).$$

4. Які з даних рядів є розбіжними:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}+\ldots;\ \frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{2n}{3^n}+\ldots;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\ ?$$

5. Знайти суму рядів: $3-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}+\ldots$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{6^n}$.

VI. **Домашнє завдання.**

1. Одержати вирази для S_n, S, r_n:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{7\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots;\ \frac{2}{1^2\cdot 3^2}+\frac{3}{2^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}+\ldots;$$

$$arctg\,\frac{1}{2}+arctg\,\frac{1}{8}+\ldots+arctg\,\frac{1}{2n^2}+\ldots.$$

2. Які з даних рядів є розбіжними

$$0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+\ldots+\sqrt[n]{0,001}+\ldots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\, n;\ \sum_{n=1}^{\infty} n\sin n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\ ?$$

§ 2. Ознаки збіжності додатних рядів

I. Ознаки порівняння для невід'ємних рядів.
II. Ознаки збіжності Даламбера та Коші для невід'ємних рядів.
III. Інтегральна ознака Коші.
IV. **Розв'язати вправи:**

1. Дослідити на збіжність ряд:

а) за допомогою ознак порівняння: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^3}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^{n-1}};\ \sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{4n};$$

б) за допомогою ознаки Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(2n-1)!!}$; $\sum_{n=1}^{\infty} ntg\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

в) за допомогою ознаки Коші: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{2n-1}\right)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{n}{n+1}\right)^n$;

г) за допомогою інтегральної ознаки: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

2. Дослідити на збіжність ряд, самостійно вибравши ознаку порівняння чи збіжності:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}.$$

3. Нехай додатні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ збіжні. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n$ також збіжний.

4. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

V. **Домашнє завдання.**

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{n^2+4}{n^2+5}\right)^{n^3}$; є) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

и) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$; і) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-n^3+n^2+1}}$.

§ 3. Збіжність рядів із членами довільного знаку

I. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца.

II. Абсолютно і умовно збіжні ряди, їх властивості.

III. Розв'язати вправи:

1. Дослідити на збіжність (абсолютну чи умовну) ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$; д) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}-1}-\frac{1}{\sqrt{k}+1}+\ldots$;

е) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{3^{2k-1}}+\ldots$.

2. Скільки членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю $\varepsilon = 0,01$?

3. Оцінити помилку, яку допускають при заміні суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ сумою його перших 100 членів.

IV. **Домашнє завдання.**

Дослідити на збіжність (абсолютну і умовну) ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{n}{n+1}\right)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

§ 4. Сполучна і переставна властивості збіжних рядів

I. Сполучна властивість збіжних рядів.
II. Переставна властивість абсолютно збіжних рядів.
III. Переставляння членів умовно збіжних рядів. Теорема Рімана.
IV. Добуток рядів. Теорема Коші.
V. Розв'язати вправи:

1. Довести, що ряд збіжний. Дослідити ряд на збіжність, якщо забрати дужки:

$$1+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{8}{9}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n^2-1}{n^2}\right)+\ldots.$$

2. Відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$. Обчислити

$$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\ldots.$$

3. Показати, що ряд $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...$ збіжний, а ряд $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...$ розбіжний.

4. Відомо, що $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=\ln 2$. Обчислити $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+...$.

5. Показати, що $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$.

6. Піднести до квадрату ряд $1+x+x^2+x^3+\ldots$.

VI.Домашнє завдання.

1. Показати, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$ збіжний. Довести, що ряд розбігається, якщо забрати дужки.

2. Показати, що $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

3. Обчислити суму ряду $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...$.

§ 5. Функціональні послідовності

I. Поняття функціональної послідовності. Область визначення та збіжності ф. п.
II. Поняття поточкової та рівномірної збіжності ф. п.
III. **Розв’язати вправи:**

1. Побудувати графіки граничних функцій

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} arctg\, nx,\quad x\in R;\ f(x)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right),\ x>0;$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}},\quad x\in R.$$

2. Знайти відстань між функціями $y=2\sqrt{x}$ і $y=-x$ на відрізку [0; 4]; між функціями $y=2n^2xe^{-n^2x^2}$ та $y=0$ на відрізку [0; 1].

3. Довести, що послідовність $y_n(x)=\frac{x}{n^2x^2+1}$ рівномірно збігається до нуля на R.

4. Довести, що послідовність $\frac{nx^2}{\sqrt{n^2+x^2}}$ рівномірно збігається до функції x^2 на відрізку [–1; 1].

5. При яких α послідовність функцій $u_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ рівномірно збігається до нуля на промені $[0; +\infty)$?

6. Довести, що послідовність $u_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$ збігається на відрізку $[0; \pi]$, але нерівномірно.

7. Дослідити на збіжність і рівномірну збіжність послідовність $\frac{n^2+nx+x^2}{n^2-nx+x^2}$ на множині $[1; +\infty)$.

IV. **Домашнє завдання.**

1. Побудувати графік функції $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x+1)arctg\,\frac{1}{x^{2n}+1}$.

2. Знайти область збіжності і граничну функцію для послідовності $f_n(x) = \frac{x}{(2\sin x)^{2n}+1}$.

3. Довести, що послідовність $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+2x}$ рівномірно збігається на [1; 2].

4. Довести, що послідовність $u_n(x) = \sin^n x$ збігається на відрізку $[0; \pi]$, але нерівномірно.

5. Дослідити на збіжність та рівномірну збіжність послідовність $\sin\frac{nx+1}{2n}$ на всій осі.

§ 6. Функціональні ряди

I. Поняття функціонального ряду, його області збіжності та суми.
II. Рівномірна збіжність функціонального ряду. Ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.
III. Умови неперервності суми функціонального ряду та границі функціональної послідовності.
IV. Почленне інтегрування функціональних рядів.
V. Почленне диференціювання функціональних рядів.
VI. **Розв’язати вправи:**

1. Знайти область збіжності (абсолютної і умовної) функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}.$$

2. За допомогою ознаки Вейєрштрасса довести рівномірну збіжність функціонального ряду на вказаному проміжку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n},\ |x| \le 1;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n - x^{-n}\right),\ \frac{1}{2} \le x \le 2\ .$$

3. Довести, що ряд $x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$ рівномірно збігається при $|x| \le q \quad (q \in (0;\, 1))$. Почленним інтегруванням даного ряду знайти суму ряду $\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$.

4. Виходячи із формули $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$, знайти суми рядів $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$; $1 \cdot 2 + 3 \cdot 2x + \ldots + n \cdot (n-1)x^{n-2} + \ldots$.

VII.**Домашнє завдання.**

1. Знайти області збіжності (абсолютної і умовної) функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n \sin^n x}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n x}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

2. Користуючись ознакою Вейєрштрасса, дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд на вказаному проміжку:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2},\ x \ge 0$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx},\ x \ge 0$.

3. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+\sqrt{n}}$ рівномірно збігається при $x \ge 0$.

§ 7. Степеневі ряди

I. Поняття степеневого ряду, його коефіцієнтів.
II. Область збіжності степеневого ряду (теорема Коші-Адамара).
III. Рівномірна збіжність степеневого ряду, неперервність його суми.
IV. Почленне інтегрування і диференціювання степеневих рядів.
V. **Розв'язати вправи:**

1. Знайти проміжок збіжності степеневого ряду і дослідити поведінку ряду на кінцях проміжку:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}x^{n+1}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}\ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}\,x^n}{\sqrt{n^2+1}}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{n+1}{n}}}\ .$$

2. Знайти суми степеневих рядів $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} 3nx^{3n-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$.

3. Обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$, проінтегрувавши прогресію $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

VI. **Домашнє завдання:**

1. Знайти проміжок збіжності степеневого ряду і дослідити поведінку ряду на кінцях проміжку:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n+1}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}; \text{ д) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n; \text{ е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n};$$

$$\text{є) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

2. Знайти суми степеневих рядів: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

§ 8. Формула Тейлора. Ряди Тейлора і Маклорена

I. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Коші та Лагранжа.
II. Ряд Тейлора. Критерій розвинення функції в степеневий ряд.
III. Розклад в степеневі ряди функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$, $\mathrm{arctg}\, x$, $(1 + x)^{\alpha}$, $\arcsin x$.
IV. **Розв'язати вправи:**

1. Розкласти функцію $f(x) = \ln(1 + 2x)$ за степенями x. Обмежитися чотирма доданками. Оцінити похибку при цьому відкиданні залишкового члена у формулі Тейлора при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. З'ясувати походження наближеної рівності $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ і оцінити її похибку для $0 \le x \le 0{,}5$.

3. На якому проміжку наближена рівність $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ виконується з точністю до 0,001?

4. Використовуючи відомі розклади, розкласти за степенями x функції: $\cos^2 x$; $\frac{x}{1+x-2x^2}$; $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; $\frac{1}{x^2+4x+3}$ (за степенями $x + 2$).

V. **Домашнє завдання.**

1. Оцінити похибку наближеної рівності $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ на проміжку [0; 1].

2. Скільки членів треба взяти в формулі Тейлора для функції cos x, щоб одержати многочлен, який замінює цю функцію на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ з точністю до 0,0001?

3. Розкласти за степенями х функції:

а) $\ln(1+x+x^2+x^3)$; б) $\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$; в) $\arcsin x^3$;

г) $x arctg x-\ln\sqrt{1+x^2}$; д) $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

§ 9. Обчислення за допомогою рядів

I. Розклад в степеневі ряди функцій e^x, sin x, cos x, ln(1 + x), arctg x, $(1 + x)^{\alpha}$.

II. **Рзв'язати вправи:**

1. Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,001.
2. Обчислити $\sqrt[10]{1027}$ з точністю до 0,001.
3. Обчислити $\cos 10^0$ з точністю до 0,0001.
4. Обчислити $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ з точністю до 0,001.
5. Фігура обмежена лініями $y^2=x^3+1, \quad x=0, \quad x=\frac{1}{2}$. Обчислити площу фігури з точністю ε = 0,001.
6. Знайти корінь рівняння 4tg x – 1 = 0 на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ з точністю ε = 0,001.
7. Обчислити ln 3 (ε = 0,001).

8) Обчислити $\sin 18^0$ (ε = 0,001).

III. **Домашнє завдання.**

Обчислити

а) $\arcsin\frac{1}{3}$ $(\varepsilon=0,01)$; б) $\sqrt[4]{15}$ $(\varepsilon=0,001)$; в) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ $(\varepsilon=0,001)$;

г) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ $(\varepsilon=0,001)$; д) $\ln 1,2$ $(\varepsilon=0,001)$.

Розділ II

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Змінна величина u називається функцією незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$, якщо кожній упорядкованій сукупності значень $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \overline{x}$ цих змінних з області їх зміни $\mathcal{D} \subset R^m$ за деяким правилам f поставлено у відповідність єдине значення величини u і позначають $u = f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. У випадку функції трьох змінних пишуть $u = (x, y, z)$, а у випадку функції двох змінних – $u = f(x, y)$, або $z = f(x, y)$, чи $z = z(x, y)$.

Число А називається границею функції $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в точці $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ таке, що $\forall M \in \mathcal{D}$, що задовольняють умову $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність $\left| f(M) - A \right| < \varepsilon$, де $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2}$. При цьому пишуть

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = A \cdot$$

Якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, то кажуть, що функція $f(M)$ неперервна в точці M_0.

Нехай $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \Delta\vec{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$. Повним приростом функції $f(\overline{x})$ в точці $\overline{x}$ називається величина $\Delta u = f(\overline{x} + \Delta\overline{x}) - f(\overline{x})$.

Частинним приростом функцій $f(\overline{x})$ в точці $\overline{x}$ за змінною x_k називається така різниця

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_m).$$

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta_{x_k}}$, то її називають частинною похідною функції $u = f(\overline{x})$ в точці $\overline{x}$ за змінною x_k і позначають $f'_{x_k}(\overline{x}) = \dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_k} = u'_{x_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}\left(k = \overline{1, m}\right)$. Частинні похідні знаходяться за звичайними правилами і формулами диференціювання, при цьому, знаходячи u'_{x_k}, всі змінні, крім x_k, розглядаються як сталі.

Функція $f\left(\overline{x}\right)$ називається диференційовною в точці M_0, якщо в цій точці її повний приріст має такий вигляд

$$\Delta f\left(M_0\right)=\sum_{k=1}^{m}A_k\Delta x_k+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\Delta x_k,$$

де $A_k=A_k\left(M_0\right),\alpha_k=\alpha_k\left(M_0,\Delta\overline{x}\right)$ і $\lim\limits_{\Delta\overline{x}\to 0}\alpha_k=0,$ при цьому $A_k=f'_{x_k}\left(M_0\right)$. Перший доданок повного приросту, який є його головною частинною, називається повним диференціалом і позначається

$$df\left(M_0\right)=\sum_{k=1}^{m}f'_{x_k}\left(M_0\right)\Delta x_k.$$

При досить малих приростах незалежних змінних повний приріст функції можна наближено замінити її повним диференціалом $\Delta f\left(M_0\right)\approx df\left(M_0\right)$, або

$$f\left(\overline{x_0}+\Delta x\right)\approx f\left(\overline{x_0}\right)+\sum_{k=1}^{m}f'_{x_k}\left(\overline{x_0}\right)\Delta x_k.$$

Цю формулу застосовують при обчисленні наближених значень функції.

Частинні похідні функції $u=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$, які в свою чергу є функціями m змінних, можуть мати частинні похідні по цих змінних. Вираз $\left(u'_{x_k}\right)'_{x_i}$ називається частинною похідною 2-го порядку і позначається $u''_{x_kx_i}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x_k\partial x_i}$. Якщо $k\neq i$, то частинну похідну називають змішаною. Аналогічно означаються частинні похідні вищих порядків.

Теорема 1. (Шварца) Якщо функція $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$ в деякій області має усі частинні похідні до *n*-го порядку включно, причому всі вони неперервні в цій області, то значення будь-якої її змішаної похідної *n*-го порядку не залежить від того порядку, в якому відбуваються послідовні диференціювання.

Якщо вважати прирости незалежних змінних сталими, то диференціал від повного диференціала функції $f\left(\overline{x}\right)$ називається диференціалом 2-го порядку та позначається $d^2f\left(\overline{x}\right)=d\left(df\left(\overline{x}\right)\right)$. Диференціал n-го порядку означається так: $d^nf\left(\overline{x}\right)=d\left(d^{n-1}f\left(\overline{x}\right)\right)$. Зокрема, для функцій двох змінних при умові неперервності змішаних похідних справедлива рівність

$$d^nf\left(x;y\right)=\sum_{k=1}^{m}C_n^k\,\frac{\partial^nf\left(x;y\right)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\Delta x^k\Delta y^{n-k}.$$

Точка M_0 є точкою максимуму(мінімуму) функції $u = f\left(\overline{x}\right)$, якщо існує такий окіл точки M_0, що $\forall M \in \varepsilon\left(M_0\right), M \neq M_0$, виконується умова

$$f\left(M\right) < f\left(M_0\right)\left(f\left(M\right) > f\left(M_0\right)\right).$$

Теорема 2.(необхідна умова екстремуму).

Якщо функція $f\left(\overline{x}\right)$ диференційовна в точці M_0 і має в цій точці екстремум, то $f'_{x_k}\left(M_0\right) = 0, k = \overline{1,m}$.

Точки, в яких всі частинні похідні рівні нулю, називаються стаціонарними.

Теорема 3. (достатня умова екстремуму для випадку функції двох змінних).

Нехай в деякому околі стаціонарної точки M_0 функція $f\left(x;y\right)$ має неперервні частинні похідні 2-го порядку, причому

$$f''_{x^2}\left(M_0\right) = A, f''_{y^2}\left(M_0\right) = B, f''_{xy}\left(M_0\right) = C, \Delta = A \cdot B - C^2.$$

Якщо $\Delta > 0,$ то M_0 – точка екстремуму функції $f\left(x;y\right)$, причому мінімуму при $A > 0$ та максимуму при $A < 0$; якщо ж $\Delta < 0,$ то в точці M_0 екстремуму немає; випадок $\Delta = 0$ вимагає додаткових досліджень.

Умовним екстремумом функції $u = f\left(\overline{x}\right)$ називається екстремум цієї функції, який досягається за умови, що змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$ задовольняють рівнянням

$$\begin{cases} \varphi_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) = 0, \\ \qquad \vdots \\ \varphi_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) = 0, \end{cases}$$

де $n < m.$ Ці рівняння називаються рівняннями зв'язку. При відшуканні умовного екстремуму будуємо допоміжну функцію Лагранжа $m + n$ змінних

$$F\left(\overline{x}, \overline{\lambda}\right) = f\left(\overline{x}\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k\left(\overline{x}\right),$$

де λ_k – невизначені множники Лагранжа, і прирівнюємо до нуля частинні похідні за всіма $(m+n)$ змінними. При цьому знак d^2F в стаціонарних точках визначає характер екстремуму за умови, що $d\varphi_1 = 0, d\varphi_2 = 0, \ldots, d\varphi_n = 0$.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f\left(x;y\right)$, де функція $f\left(x;y\right)$ диференційована в точці $M_0\left(x_0;y_0\right)$, то рівняння дотичної площини до поверхні в точці M_0 має вигляд

$$z - f\left(M_0\right) = f'_x\left(M_0\right)\left(x - x_0\right) + f'_y\left(M_0\right)\left(y - y_0\right).$$

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x;y;z)=0,$ причому функція $F(x;y;z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$, то рівняння дотичної площини має вигляд

$$F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0.$$

Приклад 1. Наближено обчислити $(0,98)^{3,03}$.

Розв'язання. Шукане число можна знайти як значення функції $z=x^y$ при $x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y,$ де $x_0=1,\Delta x=-0,02$, $y_0=3,\Delta y=0,03$. Маємо $z(x_0;y_0)=1^3=1,$ $z_x'(1;3)=yx^{y-1}/_{(1;3)}=3,$ $z_y'(1;3)=x^y\ln x/_{(1;3)}=0$. За формулою наближених обчислень за допомогою диференціала

$$(0,98)^{3,03}\approx 1+3\cdot(-0,02)+0\cdot 0,03=0,96\,.$$

Відповідь: 0,96.

Приклад 2. $u=e^{xyz}$. Знайти u'''_{x^2y}.

Розв'язання.

$$u_x'=yze^{xyz},u''_{x^2}=\left(yze^{xyz}\right)_x'=y^2z^2e^{xyz},$$

$$u'''_{x^2y}=\left(y^2z^2e^{xyz}\right)_y'=2yz^2e^{xyz}+y^2z^2xze^{xyz}=yz^2e^{xyz}(2+xyz).$$

Відповідь: $yz^2e^{xyz}(2+xyz)$.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $z=x^3+3xy^2-15x-12y.$

Розв'язання. Згідно теореми 2 знайдемо стаціонарні точки

$$\begin{cases} z_x'=3x^2+3y^2-15=0, \\ z_y'=6xy-12=0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 2xy=4, \end{cases}$$

Звідки $(x+y)^2=9$. Якщо $x+y=3,$ то $x_1=1,\ y_1=2,\ x_2=2, y_2=1.$ Якщо $x+y=-3$, то $x_3=-1,\ y_3=-2,\ x_4=-2, y_4=-1.$ Одержуємо чотири стаціонарні точки $M_1(1;2), M_2(2;1), M_3(-1;-2), M_4(-2;-1).$ В кожній точці перевіримо виконання достатньої умови.

$$z''_{x^2}=6x, z''_{y^2}=6x, z''_{xy}=6y.$$

В точці M_1 $A=6,B=-6,C=12,\ \Delta=36-12^2<0.$

Екстремуму немає.

В точці M_2 $A=12,B=12,C=6,\ \Delta=144-36>0$. Оскільки $A>0$, то M_2 – точка мінімуму і $z_{\min}=z(M_2)=-28.$

В точці M_3 $A=-6, B=-6, C=-12,\ \Delta=36-12^2<0.$

Екстремуму немає.

В точці M_4 $A=-12, B=-12, C=-6,\ \Delta=144-36>0$. Оскільки $A<0$, то M_4 – точка максимуму і $z_{\max}=z(M_4)=28.$

Відповідь: $z_{\min}=z(2;1)=-28,\ \ z_{\max}=z(-2;-1)=28.$

§ 10. Метричні простори

I. Поняття метричного простору.
II. Приклади метричних просторів.
III. Окіл точки метричного простору. Збіжність в метричному просторі.
VI. Характер збіжності в метричних просторах R^m, $C[a;b]$.
V. Гранична точка множини. Критерій граничної точки. Замкнені множини.
VI. Внутрішня точка. Відкриті множини. Зв'язок між замкненими і відкритими множинами.
VII. Похідна множини, замикання, їх властивості.
VIII. **Розв'язати вправи:**

1. Нехай l -множина числових послідовностей $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots)$, для яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty$, а $\rho(x;y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|$. Переконатись, що $(l,\ \rho)$ – метричний простір.

2. Нехай $C_{[a;\ b]}$ – множина неперервних на $[a;\ b]$ функцій, $\rho_1(x;y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|\,dt$. Довести, що $\left(C_{[a;b]};\rho_1\right)$ – метричний простір.

3. Нехай l_2 – множина числових послідовностей $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots)$, для яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty$, а $\rho(x;y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2$. Чи задає функція ρ метрику?

4. Нехай $\rho(x;y)=arctg\,|x-y|$. Довести, що ρ на множині дійсних чисел задає метрику.

5. Нехай $x_0(t)=\sin t,\ \ x(t)=\sin t+\frac{1}{5}\cos t$. Довести, що $x\in\frac{1}{9}(x_0)$ в просторі $C\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

6. Нехай $x_n=\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n;\ ntg\frac{\pi}{n}\right)\in R^2$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. Нехай $x_n(t)=\frac{1}{3}-\frac{t-3}{9}+\frac{(t-3)^2}{27}-...+(-1)^{n-1}\frac{(t-3)^{n-1}}{3^n}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ в просторі $C[1;\,5]$.

8. Чи є збіжними в просторі $C_{[0;\ 1]}$ послідовності $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$, $x_n(t)=t^n-t^{2n}$?

9. Дві метрики ρ_1 та ρ_2 на множині X називаються еквівалентними, якщо $x_n \xrightarrow[\rho_1]{} x_0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow[\rho_2]{} x_0 \quad (x_n,\ x_0\in X)$.

Нехай на R^2

$$\rho_1(x;y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},\ \ \rho_2(x;y)=|\,x_1-y_1\,|+|\,x_2-y_2\,|.$$

Довести, що ρ_1 та ρ_2 еквівалентні метрики.

10. Нехай $M=\{(x;y)\,|\,x+y\ge 5,\ x^2+y^2\le 100\}$. Довести, що M – замкнена множина.

11. Нехай $M=\{(x;y)\,|\,x>0,\ y>0,\ x^2+y^2>25\}$. Довести, що M – відкрита множина.

12. Нехай $x_0(t)\in C[a;\,b]$ $\quad M=\{x\in C_{[a;b]}\,|\,x(t)<x_0(t),\ t\in[a;b]\}$. Довести, що M – відкрита множина.

13. Нехай $M=\left\{0;\ \frac{1}{n};\ \frac{1}{n}+\frac{1}{m}\ |\ n,m\in N\right\}\subset R^1$. Знайти $M',\ M''$.

14. Нехай $M=\{(x;y)\,|\,x\in Q,\ y\in I\}\subset R^2$. Знайти $\bar{M}$.

IX. **Домашнє завдання.**

1. Нехай $\rho(x;y)=\begin{cases}0,\ x=y,\\ 1,\ x\ne y.\end{cases}$ Довести, що функція ρ задає метрику.

2. Чи задає метрику на множині дійсних чисел функція $\rho(x;y)=\sqrt{|\,x-y\,|}$?

3. Довести, що функція $\rho(x;y)=\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\frac{|\,x_k-y_k\,|}{1+|\,x_k-y_k\,|}$ задає метрику на R^m.

4. Нехай $x_n=\left(\frac{1+2+...+n}{n^2};\ \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3^n}}\right)$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. Чи збігається в просторі $C_{[0;\ 1]}$ послідовність $x_n=x_n(t)=t^n$?

6. Нехай $x_n = x_n(t) = t + \frac{t^3}{3} + ... + \frac{t^{2n-1}}{2n-1}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ в просторі $C\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

7. Довести, що множина $M = \left\{(x; y) \mid y \geq x^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\} \subset R^2$ замкнена.

8. Довести, що множина $M = \left\{(x; y) \mid x + y > 5,\ x^2 + y^2 < 100\right\} \subset R^2$ відкрита.

9. Нехай $M = \left\{(x; y) \mid x,\ y \in I\right\} \subset R^2$. Довести, що $M' = R^2$.

§ 11. Поняття функції кількох змінних

I. Означення функції кількох змінних.
II. Область визначення та множина значень функції кількох змінних.
III. Графік функції двох змінних, лінії рівня. Поверхні рівня функції трьох змінних.
IV. **Розв'язати вправи:**

1. Знайти область визначення і зобразити її в системі координат Oxy для функцій $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$; $z = \sqrt{y \sin x}$; $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$; $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$.

2. Підібрати аналітичний вираз для функції $f(x; y)$, область визначення якої обмежена лініями $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $xy = 4$, $xy = 8$; лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ (без самих ліній).

3. Описати та зобразити графіки функцій: $z = x + y + 1$; $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Знайти сімейства ліній рівня та зобразити їх графіки для функцій $z = x + y$; $z = x^2 - y^2$; $z = \frac{2 - xy}{y^2}$ ($c = 0$, $c = \pm 1$).

5. Довести, що

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}, & |xy| < 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}, & xy > 1,\ x > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}, & xy > 1,\ x < 0. \end{cases}$$

V. **Домашнє завдання.**

1. Зобразити $D(z)$, якщо $z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$; $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$; $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

2. Зобразити графік функції $z = x^2 + y^2$.

3. Зобразити лінії рівня функції $z = \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2}$; $z = x^y \quad (x > 0)$.

§ 12. Границя та неперервність функції кількох змінних

I. Означення границі функції кількох змінних та критерій границі.
II. Теореми про границі функції кількох змінних.
III. Означення неперервності функції кількох змінних. Властивості неперервних функцій.
IV. Теореми Вейєрштрасса, Больцано-Коші, Кантора для неперервних функцій кількох змінних.
V. **Розв'язати вправи:**

1. Користуючись означенням границі функції на мові «околів», довести: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x^2 y = 4$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x}{y} = 1$.

2. Довести, що не існує $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$, якщо

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^4 + y^2}, & (x;y) \neq (0;0), \\ 0, & (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

3. Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x - xy - 2y}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(x^2 + y^2)x^2 y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$.

4. Доозначити функцію $z = \dfrac{x^4 + y^4 + x^3 y^3}{x^4 + y^4}$ в точці (0; 0) так, щоб вона стала неперервною в цій точці.

5. Вказати точки розриву функції:

$$z = \frac{2x + 3}{x^2 + y^2 - 4}; \; z = \left[\frac{x}{y}\right]; \; z = \frac{1}{(x^2 + y^2 - 4)(y^2 - 4x)}.$$

6. Довести, що система має хоча б один розв'язок $\begin{cases} x^4 + y^4 = 81, \\ x^2 + y^2 - 6x = 1. \end{cases}$

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x + |x - y|$ в області $|x| \le 1$, $|y| \le 2$.

VI. **Домашнє завдання.**

1. Користуючись означенням границі функції на мові «околів», довести: $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to -1}} (x + y^2) = 3$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to 1}} \frac{y+1}{x+2} = \frac{1}{2}$.

2. Довести, що не існує $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2 + y}{x + y^2}$.

3. Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}$.

4. Вказати точки розриву функції $z = \left[\sqrt{x^2 + y^2}\right]$; $z = \frac{1}{x^4 - y^4}$.

5. Довести, що система має хоча б два розв'язки $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^3 + y^3 + x^2 y - 6 = 0. \end{cases}$

§ 13. Диференційовність функції кількох змінних. Частинні похідні

I. Означення частинного приросту та частинної похідної функції кількох змінних. Правило відшукання частинних похідних функції n змінних.
II. Повний приріст функції кількох змінних, її диференційовність.
III. Неперервність диференційовної функції.
IV. Зв'язок між диференційовністю функції кількох змінних та існуванням частинних похідних.
V. Достатня умова диференційовності функції кількох змінних.
VI. Дотична площина до графіка функції $z = f(x; y)$; її рівняння. Нормаль до поверхні $z = f(x; y)$, рівняння нормалі.
VII. **Розв'язати вправи:**

1. Виходячи із означення, знайти $f_x'(1;\ 2)$ та $f_y'(1;\ 2)$, якщо $z = xy - \frac{x}{y}$.

2. Знайти всі частинні похідні функції: $z = x^2 y^3 + x^3 y$; $z = \frac{xy}{x+y}$; $z = x^y$;

$z = arctg\,\frac{x}{y}$; $z = (1 + xy)^y$; $z = (\sin x)^{\cos y}$; $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $u = y^{\frac{x}{z}}$; $u = x^{y^z}$; $z = \ln tg\,\frac{y}{x}$.

3. Користуючись означенням, довести, що функція $z = x^2 + y^2$ $(z = 2 - x - y)$ диференційовна на всій площині.

4. Показати, що функція $z = \sqrt{|xy|}$ неперервна в точці (0; 0), має в цій точці частинні похідні, але не є диференційовною в точці (0; 0).

5. Показати, що функція $f(x; y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x; y) \neq (0; 0), \\ 0, & (x; y) = (0; 0) \end{cases}$ не є диференційовною в точці (0;0).

6. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в точці M_0:

$$z = xy,\ M_0(1;\ 1;\ 1);\ xy^2 + z^3 = 12,\ M_0(1;\ 2;\ 2).$$

7. Довести, що поверхні $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ і $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ дотикаються одна одної в точці (2; –3; 1), тобто мають спільну дотичну площину.

8. До поверхні $xy + z^2 + xz = 5$ провести дотичну площину, яка паралельна площині $x - y + 2z = 0$.

9 Знайти дотичну площину до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, яка перпендикулярна площинам

$$x - y - z = 2, \quad x - y - 0{,}5z = 2.$$

VIII.**Домашнє завдання.**

1. Виходячи із означення, знайти $f_x'(2;\ 1)$ та $f_y'(2;\ 1)$, якщо $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

2. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = \ln(x + \ln y)$; б) $z = \dfrac{x + y}{x - y}$; в) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; г) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$; д) $u = x^{yz}$.

3. Показати, що функція $z = x + y - \sqrt{|xy|}$ неперервна в точці (0; 0), має в цій точці частинні похідні, але не є диференційовною в ній.

4. Довести, що функція $u = x^2 + y^2 + z^2$ диференційовна на всій своїй області визначення.

5. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до гіперболічного параболоїда $z = x^2 - y^2$ в довільній точці $(x_0;\ y_0)$.

6. До поверхні $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести дотичну площину, паралельну площині $x - y + 2z = 0$.

§ 14. Диференціювання складеної функції кількох змінних

I. Теореми про диференційовність складеної функції кількох змінних. Формули для відшукання частинних похідних складеної функції.
II. Повна похідна.
III. Відшукання диференціала складеної функції. Інваріантність форми першого диференціала.
IV. **Розв'язати вправи:**

1. Нехай $z = x^2 + xy^2$, а $x = e^{2t}$, $y = \sin t$. Знайти $\frac{dz}{dt}$.

2 Нехай $u = xy + y^2 + yz$, а $x = \cos t$, $y = \operatorname{tg} t$, $z = \sin 2t$. Знайти $\frac{du}{dt}$.

3. Нехай $u = e^{ax}(y - z)$, $y = a\sin x$, $z = a\cos x$. Знайти повну похідну.

4. Нехай $z = x^2y - xy^2$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$. Знайти z_u', z_v'.

5. Нехай $w = x^2 + \sqrt{yz} + \sin z,\ x = u + v,\ y = u^2 - v,\ z = uv$. Знайти w_u', w_v'.

6. Вводячи проміжні змінні, знайти частинні похідні функції $z = (x^2 + y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $u = (x + y + z)^2 \cos\frac{xz}{y}$.

7. Знайти повний диференціал функції $z = xy \operatorname{arctg} xy$, якщо $x = t^2 + 1$, $y = t^3$.

8. Знайти повний диференціал функції $z = x \sin y + y \cos x$. Переконатися у інваріантності форми першого диференціала, якщо $x = \frac{u}{v},\ y = uv$.

9. Замінюючи приріст функції повним диференціалом, наближено обчислити:

$$\sqrt{1,98^3 + 1,01^2}\ ;\ 2,03^2 \cdot 3,98^2 \cdot 1,02^3\ ;\ \frac{1,98^2 + 2,03^2}{1,98^3 - 2,03}.$$

V. **Домашнє завдання.**

1. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{y},\quad y = e^{(x+1)^2}$. Знайти $\frac{dz}{dx}$.

2. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = x^2 - y^2$, де $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.

3. Довести, що функція $z = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, де $u = x + y,\quad v = x - y$, задовольняє співвідношення $z_x' + z_y' = \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

4. Наближено обчислити:

а) $\sqrt{2,99^2 + 4,02^2}$; б) $3,01 \cdot 1,99^2 \cdot 1,03^3$; в) $\sin 59^0 tg 46^0$.

§ 15. Похідна за напрямом. Градієнт. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Диференціювання функцій, заданих неявно

I. Означення похідної за напрямом.
II. Формула для відшукання похідної за напрямом. Градієнт.
III. Означення похідних вищих порядків.
IV. Умови незалежності мішаних похідних від порядку диференціювання.
V. Диференціали вищих порядків. Формула для відшукання диференціалу n-го порядку функції кількох змінних.
VI. Формула Тейлора для функції двох змінних.
VII. Поняття неявної функції. Диференціювання неявно заданих функцій.
VIII. **Розв'язати вправи:**

1. Знайти похідну функції $z = 3x^4 + xy + y^3$ в точці (1; 2) по напряму, який утворює з віссю OX кут 135^0.

2. Знайти похідну функції $u = \ln(x + y^2 + z^2 + 1)$ по напряму, який утворює рівні кути з координатними осями.

3. Для функції $z = \arcsin\frac{x}{x+y}$ знайти кут між градієнтами в точках (1; 1) і (3; 4).

4) $z = x^3 + 3x^2y + 12xy^3$. Знайти $z''_{x^2}(0;1);\ z''_{y^2}(2;0);\ z''_{xy}(-1;1)$.

5. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x}$.

6. Переконатися, що функція $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

7. Написати диференціал другого порядку для функції $z = x^2 \sin^2 y$.

8. Написати диференціал n-го порядку для функції $z = e^{x+y}$.

9. Записати формулу Тейлора для функції $z = \sin x \cdot \cos y$ при $n = 2$.

10. Розкласти в ряд за степенями x та y функцію $z = e^x \cos y$.

11. Із рівняння $y^4 - 4xy^2 + \sin x = 0$ виразити y як функцію від змінної x.

12. Знайти $y'(x)$, якщо $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$.

13. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z(x; y)$, якщо $z\ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0$.

14. Знайти частинні похідні та повні диференціали першого і другого порядку функції $z(x; y)$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$.

15. Знайти $y',\ y''$ для функції $y(x)$, якщо $x^2 + xy + y^2 = 3$.

16. Знайти y', y'' для функції $y(x)$, якщо $x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$. Обчислити $y'(0)$, $y''(0)$, якщо $y(0) = 1$.

17. Знайти $d^2z(1; 2)$, якщо $x - yz - e^z = 0$, $z(1; 2) = 0$.

IX. **Домашнє завдання.**

1. Знайти похідну функції $z = x^2 + xy + y^2$ в точці (3; 1) по напряму від неї до точки (6; 5).

2. Довести, що $grad\, z(x, y)$ і лінії рівня функції $z(x; y)$ ортогональні для $z(x; y) = x^2 + y^2$.

3. $f(x; y; z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$. Знайти $f''_{x^2}(0;0;1)$; $f''_{xz}(1;0;2)$; $f'''_{xz^2}(2;0;1)$.

4. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(x + e^{xy})$.

5. Записати диференціал другого порядку для функції $z = e^{x+y^2}$.

6. Знайти диференціал n-го порядку функції $u = \ln(x + y)$.

7. Знайти $y'(x)$, якщо $ye^x + e^y = 0$.

8. Знайти z'_x та z'_y, якщо $z^3 + 3xyz = 3$.

9. Знайти $dz(1; 2)$ для неявної функції $z(x; y)$, що визначається рівнянням

$$xz^5 + y^3z - x^3 = 8, \text{ якщо } z(1; 2) = 1.$$

10. Знайти dz і d^2z, якщо $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$.

§ 16. Екстремуми функцій кількох змінних

I. Поняття точки екстремуму, екстремуму.
II. Необхідна умова екстремуму для функції кількох змінних.
III. Достатні умови екстремуму для функції двох змінних.
IV. **Розв’язати вправи:**

1. Дослідити на екстремум функцію $z(x; y)$: $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$; $z = x^3 + y^3 - 3xy + 27$; $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

2. Серед усіх трикутників периметра $2p$ знайти трикутник найбільшої площі.

3. Дослідити на екстремум функцію $z(x; y)$, що неявно задана рівнянням $x^2 + y^2 + 4xz + 4 + \frac{z^2 + z}{2} = 0$.

V. **Домашнє завдання.**

Дослідити на екстремум функцію $z(x; y)$:

а) $z = xy(1 - x - y)$; б) $z = x^2 + y^2 - xy + 3x - 2y + 1$;

в) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$; г) $\frac{x^3}{3} + 2y^2 - z^2x + z = 0$.

§ 17. Найбільше і найменше значення функції кількох змінних

I. Алгоритм відшукання найбільшого та найменшого значень неперервної функції кількох змінних на обмеженій замкненій множині.

II. **Розв'язати вправи:**

Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в області, що задається нерівностями $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 1$;
2) $z = \mathrm{arctg}(x^2 - xy + y)$ в прямокутнику, що обмежений прямими $x = \pm 2$; $y = \pm 3$;
3) $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в області $y^2 \leq x \leq 2$;
4) $u = x + y + z$ в області $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$;
5) $z = 2xy$ в області $x^2 + y^2 \leq 1$.

III. **Домашнє завдання.**

Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = 0$; $y = 0$; $x + y = -3$;
2) $z = \dfrac{xy}{2} - \dfrac{x^2 y}{6} - \dfrac{xy^2}{8}$ в області $x \geq 0$; $y \geq 0$; $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} \leq 1$;
3) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в прямокутнику $0 \leq x \leq 2$; $-1 \leq y \leq 1$;
4) $z = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в крузі $x^2 + y^2 \leq 4$.

§ 18. Умовні екстремуми

I. Поняття умовного екстремуму.

II. Зведення задачі відшукання умовного екстремуму до відшукання безумовного екстремуму.

III. Метод множників Лагранжа при відшуканні умовного екстремуму.

IV. **Розв'язати вправи:**

1. Вказати розміри циліндра найбільшого об'єму із заданою повною поверхнею S.

2. Дослідити на екстремум функцію $z = xy$ при умові $x^2 + y^2 = 1$.

3. Дослідити на умовний екстремум функцію $u = x + y + z$ при умові $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

4. Дослідити на умовний екстремум функцію $u = xyz$, якщо $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$.

5. На площині $3x - 2z = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней від якої до точок $A(1; 1; 1)$ і $B(2; 3; 4)$ була б найменшою.

V. **Домашнє завдання.**

1. Знайти мінімум функції $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, де a, b, c – додатні числа, а змінні x, y, z пов'язані співвідношенням $x + y + z = 1$.

2. Знайти прямий паралелепіпед даного об'єму V, який має найменшу повну поверхню.

3. Дослідити на екстремум функцію $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при умові $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

§ 19. Модульна контрольна робота

Зразок варіанта контрольної роботи.

1. Знайти область збіжності (абсолютної та умовної) функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg^n x}{n}$.

2. Розкласти в ряд за степенями x функцію $y(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

3. З точністю до 0,01 обчислити $\sqrt[3]{65}$.

4. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \ln\left(y - x^2\right) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

5. Користуючись означенням на мові «околів», довести, що

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \left(x^2 + y^2\right) = 2.$$

6. Дослідити на екстремум функцію $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$.

Розв'язання.

1. Розглянемо ряд, утворений з абсолютних величин вихідного функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|tg\, x|^n}{n}$ і застосуємо до нього ознаку Коші (або Даламбера). Одержимо, що $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|tg\, x|}{\sqrt[n]{n}} = |tg\, x|$. Якщо $\rho < 1$, тобто $|tg\, x| < 1$, то ряд буде абсолютно збіжним. Нерівність $|tg\, x| < 1$ має розв'язки $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$,

$n \in Z$. При $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ отримаємо наступний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним як гармонійний. При $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ будемо мати ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який задовольняє ознаці Лейбніца, тому є умовно збіжним.

Відповідь: при $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n \right), n \in Z$, ряд збігається абсолютно, при $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ — умовно.

2. Оскільки при $\forall x \in R \quad e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, то при

$$\forall t \in R \qquad e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-t^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Застосуємо до останньої рівності теорему про почленне інтегрування степеневих рядів і одержимо:

$$y(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Відповідь: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \forall x \in R.$

3. Використаємо розклад

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \text{ при } |x| < 1.$$

Маємо

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} = 4\sqrt[3]{1+\frac{1}{64}} = 4\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = 4\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{4}{3}-n\right)}{n!64^n}\right) =$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{3\cdot 64} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{n!64^n}\right).$$

Якщо $a_n = \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{n!64^n}$, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n-1}{64(n+1)} < 1$, тому останній числовий ряд задовольняє ознаці Лейбніца. Для забезпечення потрібної точності 0,01 із правильності нерівності $4\cdot\frac{2}{2!64^2}<\frac{1}{100}$ випливає, що $\sqrt[3]{64}\approx 4\left(1+\frac{1}{3\cdot 64}\right)=4,02$.

Відповідь: 4,02.

4. Оскільки логарифми існують від додатних чисел, а корені парних степенів – із невід'ємних чисел, то для відшукання області визначення функції досить відшукати розв'язки такої системи:

$$D(z):\begin{cases} y-x^2>0, \\ 1-x^2+y^2\geq 0. \end{cases}$$

Нерівності $y>x^2$ задовольняє внутрішність параболи $y=x^2$ без межі, а нерівності $x^2+y^2\leq 1$ – круг із центром в точці $(0;0)$ радіуса 1 із межею. Остаточно маємо:

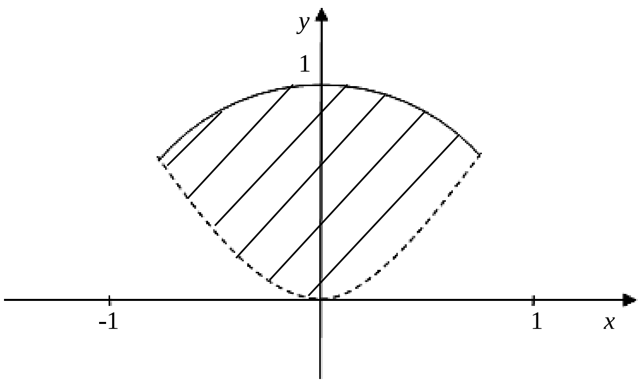

Рис. 1.

5. Згідно означення потрібно переконатися у справедливості висловлення:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall(x;y):0<\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}<\delta\to\left|x^2+y^2-2\right|<\varepsilon\right).$$

Якщо $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}<\delta$, то $|x-1|<\delta$ і $|y-1|<\delta$. Тому

$$\left|x^2+y^2-2\right|=\left|\left(x^2-1\right)+\left(y^2-1\right)\right|\leq\left|x^2-1\right|+\left|y^2-1\right|=$$

$$=|x-1|\cdot|x+1|+|y-1|\cdot|y+1|<\delta\left(|x+1|+|y-1|\right).$$

Нехай $\delta\leq 1$, тоді $|x-1|<1$ і $|y-1|<1$, звідки $-1<x-1<1$, $-1<y-1<1$, або $1<x+1<3$, $1<y+1<3$. Отже, $|x+1|+|y+1|<6$. Тому при $\delta\leq 1$

$\left|x^2+y^2-2\right|<6\delta$. Нехай $6\delta=\varepsilon$, або $\delta=\dfrac{\varepsilon}{6}$. Тоді при $\delta=\min\left\{1;\dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$ із нерівності $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}<\delta$ слідує, що $\left|x^2+y^2-2\right|<\varepsilon$.

Відповідь: $\delta=\min\left\{1;\dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$.

6. Знайдемо стаціонарні точки функції $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-xy$ з умови $\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0. \end{cases}$

Маємо $z'_x=-\dfrac{1}{x^2}-y$, $z'_y=-\dfrac{1}{y^2}-x$ і систему $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+y=0, \\ \dfrac{1}{y^2}+x=0, \end{cases}$ звідки $y=-\dfrac{1}{x^2}$, та $x^4+x=0, x\left(x^3+1\right)=0, x_1=0, x_2=-1$. Перший корінь є стороннім, оскільки $x\neq 0$ та $y\neq 0$. Тому маємо єдину точку $M\left(-1;-1\right)$. Застосуємо для неї достатню умову екстремуму. Для цього знайдемо знак виразу $\Delta\left(M\right)=z''_{x^2}\left(M\right)\cdot z''_{y^2}\left(M\right)-\left(z''_{xy}\left(M\right)\right)^2$. Маємо $z''_{x^2}=\dfrac{2}{x^3}$, $z''_{y^2}=\dfrac{2}{y^3}$, $z''_{xy}=-1$, тому $\Delta\left(M\right)=-2\cdot\left(-2\right)-\left(-1\right)^2=3>0$. Отже, $M\left(-1;-1\right)$ – точка екстремуму, причому, оскільки $z''_{x^2}\left(M\right)<0$, то M – точка максимуму $z_{\max}=z\left(-1;-1\right)=-3$.

Відповідь: $z_{\max}=z\left(-1;-1\right)=-3$.

Розділ III
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Нехай в обмеженій замкненій області $\mathcal{D} \subset xOy$ задана обмежена функція $f(x;y)$; τ – поділ області $\mathcal{D}$ на квадрові частини $\mathcal{D}_k$ без спільних внутрішніх точок і $\Delta\mathcal{D}_k$ – їх площа; $T_k \in \mathcal{D}_k \left(k=\overline{1,m}\right)$. Сума вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} f(T_k)\Delta\mathcal{D}_k = \sigma(\tau;T_k)$$

називається інтегральною, а границя

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(\tau;T_k),$$

де

$$\lambda(\tau) = \max_{1\le k\le n} d(\mathcal{D}_k)$$

подвійним інтегралом і позначається $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x;y)\,dxdy$.

Будемо казати, що область $\mathcal{D}$ правильно орієнтована вздовж осі Oy, якщо вона має такий вигляд $\mathcal{D} = \left\{(x;y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\right\}$. Якщо $\forall x \in [a,b]$ існує

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(y)} f(x;y)\,dy,$$

а функція $f(x;y)$ інтегрована в області $\mathcal{D}$, то

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x;y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)\,dy$$

(останній інтеграл називається повторним).

Аналогічно при правильно орієнтованій області вздовж осі Ox, тобто $\mathcal{D} = \left\{(x;y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\right\}$,

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x;y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)\,dx \quad .$$

Нехай область $Q \subset uOv$ за допомогою співвідношень $x = \varphi(u;v)$, $y = \psi(u;v)$ взаємно однозначно відображається на область $\mathcal{D} \subset xOy$, причому φ та ψ мають неперервні частинні похідні в Q. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на $\mathcal{D}$, то

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{Q} f(\varphi(u;v);\psi(u;v))\left|\mathcal{I}(u;v)\right| dudv,$$

де визначник

$$\mathcal{I}(u;v) = \begin{vmatrix} \varphi_u^{'} & \varphi_v^{'} \\ \psi_u^{'} & \psi_v^{'} \end{vmatrix}$$

називають якобіаном.

При переході від декартових до полярних координат заміна змінних відбувається згідно рівності

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{Q} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\,\rho d\varphi d\rho.$$

Нехай в обмеженій замкненій області $\mathcal{D} \subset Oxyz$ задана обмежена функція $f(x;y;z)$; τ – поділ області $\mathcal{D}$ на кубовні частини без спільних внутрішніх точок і $\Delta\mathcal{D}_k$ – їх об'єм, $T_k \in \mathcal{D}_k\left(k=\overline{1,m}\right)$. Сума вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} f(T_k)\Delta\mathcal{D}_k = \sigma(\tau;T_k)$$

називається інтегральною, а границя

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma(\tau;T_k) -$$

потрійним інтегралом, який позначають через

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} f(x;y;z)\,dxdydz.$$

Кажуть, що область $\mathcal{D}$ правильно орієнтована вздовж осі Oz, якщо вона задовольняє таким обмеженням

$$\mathcal{D} = \{(x;y;z) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(y), z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$$

або

$$\mathcal{D} = \{(x;y;z) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le y \le x_2(y), z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}.$$

Потрійний інтеграл по такій області, якщо функція $f(x;y;z)$ інтегровна по ній, обчислюється через наступний повторний інтеграл

$$I = \iiint\limits_{P} f(x;y;z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x;y;z)\,dz,$$

або ж

$$I = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x;y;z)\,dz.$$

Якщо область $\mathcal{D}$ правильно орієнтована вздовж інших координатних осей, то потрійний інтеграл по ній обчислюється через аналогічні повторні інтеграли. Якщо область не є правильною, то її розбивають на скінченне число правильним і застосовують властивість адитивності кратних інтегралів.

Питання про заміну змінних у потрійному інтегралі вирішується таким самим чином, як і у випадку подвійного інтеграла, тобто якщо функція $f(x;y;z)$ неперервна в області $\mathcal{D}$ та формули $x=\varphi(u;v;w)$, $y=\psi(u;v;w)$, $z=\chi(u;v;w)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між областями Q та $\mathcal{D}$, то

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} f(x;y;z)\,dxdydz=\iiint\limits_{Q} f\big(\varphi(u;v;w);\psi(u;v;w);\chi(u;v;w)\big)\left|\mathcal{I}\right|dudvdw,$$

де

$$\mathcal{I}=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w\\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w\\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w\end{vmatrix}-$$

якобіан даної відповідності.

В циліндричній системі координат положення точки визначається полярними координатами φ,ρ та аплікатою z, тому $\left|\mathcal{I}\right|=\rho.$ Сферичні координати ρ,φ,θ, точки M, де ρ – відстань від М до початку координат, φ – кут між віссю Ox та проекцією радіус-вектора OM на площину xOy, θ – кут між віссю Oz та вектором $\overline{OM}$, пов’язані із декартовими $x;y;z$ співвідношеннями: $x=\rho\cos\varphi\sin\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta,$ $z=\rho\cos\theta,$ для яких модуль якобіана $\left|\mathcal{I}\right|=\rho^2\sin\theta$.

Нехай функція $f(x;y)$ задана на кусково-гладкий кривій AB. Розіб’ємо дугу AB на n частин точками A_k і позначимо через Δl_k – довжину дуги A_kA_{k+1}. Нехай $T_k\in A_kA_{k+1}\left(k=\overline{0,n-1}\right),$ суму вигляду

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(T_k)\Delta l_k=\sigma(\tau;T_k)$$

називають інтегральною, а

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma(\tau;T_k)$$

називають криволінійним інтегралом I роду ($\lambda(\tau)=\max\limits_k \Delta l_k$) і позначають

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl.$$

Якщо дуга AB задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta,$$

то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Якщо ж крива AB задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi.$$

Нехай вздовж кусково-гладкої дуги AB задана вектор-функція $P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$. Розіб'ємо дугу точками $A_k(x_k; y_k)$ на n частин, позначимо $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, виберемо $T_k \in A_k A_{k+1}$. Суму вигляду

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(T_k)\Delta x_k + Q(T_k)\Delta y_k = \sigma(\tau; T_k)$$

називають інтегральною по координатах. Границю цих інтегральних сум

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(\tau; T_k)$$

називають криволінійним інтегралом II роду і позначають

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy,$$

де

$$\lambda(\tau) = \max_k \left\{|\Delta x_k|, |\Delta y_k|\right\}.$$

Якщо дуга AB задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta,$$

то

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P\left(x(t), y(t)\right)x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right)y'(t)\right]dt.$$

Нехай L – межа області $\mathcal{D}$, рух по якій здійснюється в додатному напрямі, функції P, Q, P_y', Q_x' неперервні в $\mathcal{D}$, тоді

$$\oint_L P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \iint_{\mathcal{D}} (Q'_x(x;y) - P'_y(x;y))\,dxdy.$$

Ця рівність називається формулою Гріна-Остроградського.

Справедливе твердження:

Якщо функції P, Q, P'_y, Q'_x неперервні в області $\mathcal{D}$, то наступні вислов-лення рівносильні:

1) $\oint_\gamma Pdx + Qdy = 0$ (γ – контур);

2) $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від форми шляху, що з'єднує точки *A* та *B*;

3) вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x;y)$;

4) у всіх точках області $\mathcal{D}$ $P'_y = Q'_x$.

Приклад 1. Обчислити $I = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,$ де область обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання. Перейдемо до узагальнених полярних координат $x = a\rho\cos\varphi,\ \ y = b\rho\sin\varphi$, при цьому $|\mathcal{I}| = ab\rho$, а рівняння еліпса набуде вигляду $\rho = 1$. Тому $Q = \{(\varphi,\rho)\,|\,0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \rho \le 1\}$. Згідно формули заміни змінної в подвійному інтегралі будемо мати

$$I = \iint_Q \sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho\,d\varphi\,d\rho = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = -2\pi ab\,\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1-\rho^2\right) =$$

$$= -\pi ab\,\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big/_0^1 = -\frac{2\pi ab}{3}(0-1) = \frac{2\pi ab}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2\pi ab}{3}$.

Приклад 2. Обчислити $I = \int_{AB} \left(x^5 + 8xy\right) dl,$ де AB – дуга $y = \frac{1}{4}x^4,$ $0 \le x \le 1$.

Розв'язання. Знайдемо $y'(x)$ та dl:

$$y' = x^3,\ dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + x^6}\,dx.$$

Тоді згідно правила обчислення криволінійного інтеграла I роду будемо мати

$$I=\int_0^1\left(x^5+8x\cdot\frac{1}{4}x^4\right)\sqrt{1+x^6}\,dx=3\int_0^1\sqrt{1+x^6}\,x^5dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+x^6\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+x^6\right)=\frac{1}{3}\left(1+x^6\right)^{\frac{3}{2}}\Big/_0^1=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

Приклад 3. Перевірити, що вираз $(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)dx$ є повним диференціалом функцій $u(x;y)$, та знайти цю функцію.

Розв'язання. Якщо $(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)dx=Pdx+Qdy$, то $P_y^{'}=-2\cos 2x,\ \ Q_x^{'}=-2\cos 2x.$ Отже, вираз $Pdx+Qdy$ є повним диференціалом функції $u(x;y)$. Знайдемо її як криволінійний інтеграл II роду із змінною верхньою межею

$$u(x;y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy=\int_0^x P(x,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y)\,dy+C=$$

$$=\int_0^x-3dx+\int_0^y(1-\sin 2x)dy+C=-3x+(1-\sin 2x)y+C.$$

Відповідь: $-3x+(1-\sin 2x)y+C.$

§ 20. Означення подвійного інтеграла. Властивості подвійного інтеграла. Обчислення подвійного інтеграла

I. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла.
II. Означення подвійного інтеграла, його властивості**.**
III. Обчислення подвійного інтеграла у випадку прямокутної області.
IV. Обчислення подвійного інтеграла по криволінійній області.
V. **Розв'язати вправи:**

1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} xydxdy$, як границю інтегральних сум, при цьому область інтегрування розбити на квадрати прямими $x=\frac{k}{n},\ \ y=\frac{i}{n}\ \ (k,\ i=\overline{1,n})$ і вибрати значення функції у правих верхніх вершинах цих квадратів.

2. Криволінійна область обмежена даними лініями. Зобразити цю область, та подвійний інтеграл по ній записати у вигляді повторних інтегралів двома способами:

а) $y = 0$, $y = x$, $x = 5$, б) $y = x^3$, $x + y = 10$, $x - y = 4$, $y = 0$.

3. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі:

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y)dy$, б) $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)dx$.

4. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_P x\sqrt{y}dxdy,\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$; б) $\iint\limits_P \frac{x^2}{1+y^2}dxdy,\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$;

в) $\iint\limits_P xe^{xy}dxdy,\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2$; г) $\iint\limits_P e^{\frac{x}{y}}dxdy,$ якщо область P обмежена лініями $x = 0$, $y = 1$ $x = y^2$;

д) $\iint\limits_P dxdy,$ якщо область P обмежена лініями $y = 2 - x$, $y^2 = 4x + 4$;

е) $\iint\limits_P (x+y)dxdy,$ якщо область Р обмежена лініями $y^2 = 2x$, $x + y = 4$.

VI. **Домашнє завдання.**

1. Криволінійна область обмежена даними лініями. Зобразити область і подвійний інтеграл по ній подати двома способами через повторний:

а) $y - 2x \le 0,\ 2y - x \ge 0,\ xy \le 2$; б) $x^2 + y^2 = 4,\ x + y = 2\ \ (x \ge 0)$.

2. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)dy$.

3. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$;

б) $\iint\limits_P \frac{dxdy}{\sqrt{ax - x^2}},$ де область P обмежена лініями $x = 0$, $y^2 = a^2 - ax$;

в) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$;

г) $\iint\limits_P (x^2 + y)dxdy,$ де область P обмежена параболами $y = x^2$ та $x = y^2$,

д) $\iint\limits_P \frac{x^2}{y^2}dxdy,$ де область P обмежена прямими $y = x$, $x = 2$ і гіперболою $xy = 1$.

§ 21. Заміна змінних у подвійному інтегралі

I. Відображення плоских областей. Визначник Якобі.
II. Заміна змінних у подвійному інтегралі.
III. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
IV. **Розв'язати вправи:**

1. Фігура P, обмежена параболами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ і гіперболами $xy = 1$, $xy = 2$. Знайти образ області P при відображенні $u = xy,\ v = \dfrac{y^2}{x}$ та якобіан цього відображення.

2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_P x^2 y\,dxdy,$ якщо область P обмежена гіперболами $xy = 2$, $xy = 3$, прямими $y = 2x$, $y = x$, розташована в першій чверті (Виконайте заміну $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}},\ y = \sqrt{uv}$).

3. Знайти площу паралелограма, який обмежений прямими $x + y = 0$, $x + y = 5$, $y + 2x = -1$, $y + 2x = 5$.

4. Перейти до полярних координат у інтегралі $\iint\limits_P f(x;y)\,dxdy,$ і розставити межі інтегрування, якщо P:

а) круг $x^2 + y^2 \le 2x$;
б) круг $x^2 + y^2 \le 3y$;
в) спільна частина кругів $x^2 + y^2 \le 2x$ та $x^2 + y^2 \le 3y$;
г) фігура, що обмежена лемніскатою $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x \ge 0)$.

5. Обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_P \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dxdy,$ якщо P – круг $x^2 + y^2 \le rx$;

б) $\iint\limits_P arctg\,\dfrac{y}{x}\,dxdy,$ якщо область P – частина круга $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

в) $\iint\limits_P \sqrt{xy}\,dxdy,$ якщо область P обмежена лінією $\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3}\right)^4 = \dfrac{xy}{\sqrt{6}}$ при умові $x \ge 0$, $y \ge 0$;

г) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax - x^2}} dy$.

V. **Домашнє завдання.**

1. Перейти в подвійному інтегралі $\iint\limits_P f(x;y)\,dxdy,$ до полярних координат і розставити межі інтегрування, якщо область P:

а) обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ та прямими $y = x$, $y = 2x$;
б) визначається нерівностями $(x^2 + y^2)^3 \le 4a^2x^2y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;
в) обмежена прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

2. Обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_{\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$;

б) $\iint\limits_{P} arctg\,\frac{y}{x}\,dxdy$, якщо P – частина кільця $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \le x\sqrt{3}$;

в) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)\,dy$;

г) $\iint\limits_{P} (x + y)\,dxdy$, якщо область P обмежена лініями $y + x = 4$, $y + x = 12$, $y = 2x$, $y = 4x$.

§ 22. Обчислення площ плоских фігур і об’ємів тіл за допомогою подвійних інтегралів

I. Формули для обчислення площ плоских фігур за допомогою подвійних інтегралів.
II. Задача про об’єм циліндричного бруса. Обчислення об’ємів тіл за допомогою подвійних інтегралів.
III. **Розв’язати вправи:**

1. Обчислити площу фігури, що обмежена:

а) параболами $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;
б) лініями $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}\,y$;
в) лемніскатою $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$;
г) кривими $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \ge a^2$.

2. Обчислити об’єм тіла, яке обмежене поверхнями:

а) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$, $z = x^2 + y^2 + 1$;
б) координатними площинами, площиною $2x + 3y - 12 = 0$, циліндром $z = \frac{y^2}{2}$;

в) $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$;
г) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = x$, $z = 2x$.

3. Зобразити тіло, об'єм якого рівний інтегралу $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)dy$.

4. Обчислити об'єм тіла, яке обмежене поверхнями $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ ($x > 0$, $y > 0$).

VI. **Домашнє завдання.**

1. Зобразити тіло, об'єм якого подається інтегралом

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dy .$$

2. Обчислити площу фігури, що обмежена

а) лініями $x^2 + y^2 = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$ $(x \geq 0)$;
б) кривими $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = 0$, $y = x$;
в) лініями $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке обмежене:

а) площинами $x + y + z = 3$, $z = 0$, циліндром $x^2 + y^2 = 1$;
б) поверхнями $z = xy$, $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$, $z = 0$;
в) сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і циліндром $x^2 + y^2 \leq x$.

§ 23. Обчислення площ поверхонь за допомогою подвійного інтеграла

I. Означення площі криволінійної поверхні.
II. Формули для обчислення площі поверхні.
III. **Розв'язати вправи:**

1. Обчислити площу тієї частини поверхні $z^2 = 2xy$, яка знаходиться над прямокутником в площині xOy: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 6$.

2. Знайти площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, яка попадає всередину циліндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \leq a)$.

3. Обчислити площу частини поверхні конуса $x^2 - y^2 = z^2$, що розташована в першому октанті і обмежена площиною $y + z = a$.

4. Обчислити площу частини циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$, яка розташована в першому октанті між площиною xOy та конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

5. Обчислити площу частини поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, яка вирізана циліндром з твірними паралельними осі Oz, напрямною якого є кардіоїда $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

6. Обчислити площу частини параболоїда $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$, що вирізається поверхнею $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$.

IV. **Домашнє завдання.**

1. Обчислити повну поверхню тіла, обмеженого сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z \geq 0)$ і параболоїдом $x^2 + y^2 = 2az$.

2. Обчислити площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, що знаходиться між площинами $x = -8$, $x = 6$.

3. Обчислити площу частини поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, яка вирізана циліндром $z^2 = 2py$.

4. Обчислити площу гвинтової поверхні $z = arctg\frac{x}{y}$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = a^2$.

5. Обчислити площу частини конуса $z^2 + y^2 = x^2$, яка розташована всередині циліндра $x^2 + y^2 = a^2$.

§ 24. Деякі застосування подвійних інтегралів в механіці

I. Обчислення маси плоскої неоднорідної матеріальної фігури, її статичних моментів та моментів інерції відносно координатних осей. Обчислення координат центра ваги цієї фігури.

II. **Розв'язати вправи:**

1. Обчислити масу пластинки, обмеженої лініями $y = 0$, $y = x^2$, $x + y = 2$, якщо густина пластинки в кожній точці $(x; y)$ дорівнює xy^2.

2. Визначити статичні моменти чверті круга $x^2 + y^2 = R^2$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ відносно координатних осей.

3. Обчислити статичний момент круга радіуса R відносно дотичної до нього.

4. Знайти центр ваги однорідної фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 13$, $xy = 6$, $x > 0$.

5. Обчислити моменти інерції трикутника, що обмежений прямими $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, відносно координатних осей.

6. Знайти момент інерції фігури, що обмежена кривою $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, відносно початку координат.

III. **Домашнє завдання.**

1 Знайти масу квадратної пластинки із стороною 2, якщо її густина в точці дорівнює квадрату відстані від цієї точки до точки перетину діагоналей.

2. Знайти координати центра ваги фігури, що обмежена віссю Ox та циклоїдою $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

3. Знайти момент інерції однорідного круга радіуса R відносно точки, що лежить на колі, яке обмежує цей круг.

4. Обчислити статичний момент півкруга відносно його діаметра.

§ 25. Потрійний інтеграл. Обчислення потрійних інтегралів

I. Означення потрійного інтеграла, його властивості.

II. Обчислення потрійних інтегралів у випадку прямокутного паралелепіпеда.

III. Обчислення потрійних інтегралів у випадку довільної області.

IV. **Розв'язати вправи:**

1. Розставити межі інтегрування, коли інтегрування проводити в порядку:

а) x, y, z; б) y, z, x

у інтегралі $\iiint\limits_P f(x;y;z)dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$ $(x \ge 0, y \ge 0)$.

2. В інтегралі $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x;y;z)dz$ провести інтегрування в порядку z, x, y.

3. Обчислити інтеграли:

а) $\iiint\limits_P (x+y+z)dxdydz$, якщо $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le b$;

б) $\iiint\limits_P \dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$, якщо область P обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

в) $\iiint\limits_P xyzdxdydz$, якщо область Р обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ $(x \ge 0, y \ge 0)$;

4. Потрійним інтегруванням обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

V. **Домашнє завдання.**

1. Розставити межі інтегрування в $\iiint\limits_p f(x;y;z)dxdydz$ в порядку:

а) x, y, z;   б) y, z, x,

якщо область інтегрування обмежена координатними площинами, площиною $x + y = 1$, циліндром $y^2 + z^2 = 1$.

2. Обчислити інтеграли:

а) $\iiint\limits_P yzdxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$;

б) $\iiint\limits_P xydxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x + y = 1$, $z \ge 0$, $z = xy$;

в) $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)} dz$.

§ 26. Заміна змінних в потрійних інтегралах. Обчислення об'ємів тіл за допомогою потрійних інтегралів

I. Заміна змінних у потрійному інтегралі.

II. Обчислення потрійних інтегралів шляхом переходу до циліндричних та сферичних координат.

III. Обчислення об'ємів тіл за допомогою потрійних інтегралів.

IV. **Розв'язати вправи:**

1. Нехай змінні x, y, z та u, v, w пов'язані між собою співвідношеннями $u = x + y + z$, $uv = y + z$, $uvw = z$. Знайти якобіан даного відображення.

2. Обчислити $\iiint\limits_P x^2 dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $z = ay^2$, $z = by^2$, $(0 < a < b)$, $y > 0$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$, $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$.

3. Переходячи до циліндричних координат, обчислити $\iiint\limits_P (x^2 + y^2) dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

4. Переходячи до сферичних координат, обчислити

$$\iiint\limits_P \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz,$$

якщо область P обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

5. Виконавши відповідну заміну змінних, обчислити

$$\iiint\limits_P \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dxdydz,$$

де P – внутрішність еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6. Знайти об’єми тіл, які обмежені поверхнями:

а) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$;

б) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 \le z^2$.

V. **Домашнє завдання.**

1. Обчислити $\iiint\limits_P xyzdxdydz$, де область P обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

2. Обчислити $\iiint\limits_P \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, якщо область P обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

3. Знайти об’єми тіл, які обмежені поверхнями:

а) $2z = x^2$, $z = 0$, $y = 0$, $3x + 2y = 12$;

б) $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} = z$, $z = 8$;

в) $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$.

§ 27. Застосування потрійних інтегралів при розв’язуванні задач з механіки

I. Обчислення маси неоднорідного просторового тіла.
II. Обчислення статичних моментів тіла відносно координатних площин.
III. Обчислення координат центра ваги просторового тіла.
IV. Обчислення моментів інерції тіла відносно координатних площин, осей координат, початку координат.
V. **Розв’язати вправи:**

1. Обчислити масу кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le 2x$, якщо густина розподілу маси в точці рівна відстані від точки до початку координат.

2. Обчислити статичний момент однорідного конуса ($\rho = 1$) з радіусом основи R, висотою H відносно площини, що проходить через вершину паралельно основі.

3. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене поверхнями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x + y + z = 3$.

4. Обчислити моменти інерції відносно координатних площин однорідного тіла, яке обмежене поверхнями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

5. Знайти момент інерції кулі радіуса R відносно дотичної до неї.

VI. **Домашнє завдання.**

1. Знайти координати центра ваги однорідної півкулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

2. Знайти координати центра ваги тіла, що обмежене поверхнями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c > 0$.

3. Обчислити момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла, що обмежене поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z > 0$).

4. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного тіла, яке обмежене поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$.

§ 28. Криволінійні інтеграли І типу

I. Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла І типу.
II. Означення криволінійного інтеграла І типу і способи його обчислення.
III. Застосування інтегралів І типу при обчисленні площ циліндричних поверхонь та розв'язуванні задач з механіки (обчислення маси неоднорідної лінії, її статичних моментів та моментів інерції відносно координатних осей чи площин, відшукання центра ваги).
IV. **Розв'язати вправи:**

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{x}{y} dl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $A(1; \sqrt{2})$ до точки $B(2; 2)$.

2. Обчислити $\int\limits_L y dl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки (0; 0) до точки $(1; \sqrt{2})$.

3. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{2y} dl$, якщо L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

4. Обчислити $\int\limits_L (x + y) dl$, якщо L – права пелюстка лемніскати $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

5. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, якщо L – коло $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$).

6. Обчислити $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, якщо L – частина гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

7. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла площу циліндричної поверхні $y^2 = 2x$, яка знизу обмежена площиною xOy, а зверху графіком функції $z = \sqrt{2x - 4x^2}$.

8. Обчислити площу частини циліндра $x^2 + y^2 = Rx$, яка знаходиться всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

9. Знайти масу дуги параболи $y^2 = 2px$ $\left(0 \le x \le \frac{p}{2}\right)$, якщо лінійна густина $\rho(x; y) = |y|$.

10. Знайти координати центра ваги однорідної частини циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, ($0 \le t \le 2\pi$).

11. Обчислити момент інерції однорідного півкола $x^2 + y^2 = a^2$ ($y \ge 0$) відносно діаметра, що стягує це півколо.

V. **Домашнє завдання.**

1. Обчислити:

а) $\int\limits_L x^2 dl$, якщо L – верхня половина кола $x^2 + y^2 = a^2$;

б) $\int\limits_L xydl$, якщо L – прямокутник, обмежений прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 2$;

в) $\int\limits_L x\sqrt{x^2 - y^2}\,dl$, якщо L – лінія, задана рівнянням $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ $(x \ge 0)$ (половина лемніскати).

2. Обчислити площу циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, що лежить між площиною xOy та поверхнею $z = \frac{xy}{2R}$.

3. Знайти масу кривої $x = ln\,(1 + t^2)$, $y = 2arctgt - t$ на ділянці $0 \le t \le 1$, якщо її лінійна густина $\rho(x; y) = \frac{y}{e^x}$.

4. Знайти центр ваги кривої $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(-a \le x \le a)$.

5. Обчислити статичний момент відносно площини xOy першого витка конічної гвинтової лінії $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $(0 \le t \le 2\pi)$, якщо густина $\rho(x; y; z) = z^2$.

§ 29. Криволінійні інтеграли II типу

I. Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла II типу.
II. Означення та обчислення криволінійних інтегралів II типу.
III. Властивості криволінійних інтегралів II типу.
IV. **Розв'язати вправи:**

1. Обчислити криволінійні інтеграли II типу:

а) $\int\limits_L xdy$, якщо L – відрізок прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ від точки (a; 0) до точки (0; b).

б) $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy$, якщо L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \le t \le 2\pi$);

в) $\oint\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$, якщо L – еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, рух по якому здійснюється в додатному напрямі;

г) $\int\limits_L \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, якщо L – права пелюстка лемніскати $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

д) $\oint\limits_L xdy$, де L – контур трикутника, який утворений координатними осями і прямою $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, рух по якому здійснюється в додатному напрямі;

е) $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, якщо L – відрізок прямої від точки (1; 1; 1) до точки (2; 3; 4);

є) $\int\limits_L y^2dx+x^2dy+x^2dz$, де L – лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і циліндра $x^2 + y^2 = Rx$ ($z \ge 0$), рух здійснюється проти годинникової стрілки.

2. В кожній точці площини діє сила $\vec{F}$, проекції якої на координатні осі рівні $F_x = xy$, $F_y = x + y$. Обчислити роботу сили при переміщенні точки масою 1 з початку координат в точку (1; 1): а) по прямій $y = x$; б) по параболі $y = x^2$.

3. Поле утворене силою $\vec{F}$, для якої $|\vec{F}| = r$, де r – радіус-вектор точки, і вектор $\vec{F}$ утворює з вектором $\vec{r}$ кут $\frac{\pi}{2}$. Знайти роботу поля при переміщенні тіла масою m по дузі кола $x^2 + y^2 = a^2$ від точки (a; 0) до точки (0; a) ($x \ge 0$, $y \ge 0$).

V. **Домашнє завдання.**

1. Обчислити криволінійні інтеграли II типу:

а) $\int\limits_L (x^2-y^2)dx$, якщо L – дуга параболи $y = x^2$ від точки (0; 0) до точки (2; 4);

б) $\int\limits_L 4x\sin^2 ydx + y\cos^2 2xdy$ вздовж прямої лінії від точки (0; 0) до точки (3; 6);

в) $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ по астроїді $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ від точки $(a; 0)$ до точки $(0; a)$;

г) $\oint\limits_L xdy - ydx$, якщо L – коло $x^2 + y^2 = 2x$;

д) $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dy$, якщо L – контур чотирикутника *АВСД*, $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 0)$, $C(4;\ 4)$, $Д(0;\ 4)$.

§ 30. Взаємозв'язок між криволінійними та кратними інтегралами

I. Формула Гріна-Остроградського.
II. Обчислення площ плоских фігур при допомозі криволінійних інтегралів.
III. Умови незалежності криволінійних інтегралів ІІ типу від форми шляху інтегрування.
IV. Відновлення функції 2-ох змінних за її повним диференціалом.
V. **Розв'язати вправи:**

1. За допомогою формули Гріна-Остроградського перетворити криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)dy.$$

2. Довести, що величина інтеграла $\oint\limits_L (2xy - y)dx + x^2dy$ рівна площі області, обмеженої контуром L.

3. Обчислити площі фігур, які обмежені такими кривими:

а) астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$;
б) параболою $(x + y)^2 = ax$ $(a \ge 0)$ і віссю Ox;
в) лемніскатою $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$, $a > 0$.

4. Переконатись, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування, і обчислити його:

$$\text{а) } \int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy\text{ ; б) } \int\limits_{(0;0)}^{(2;3)} e^x(\cos ydx - \sin ydy).$$

5. Перевірити, чи є вираз повним диференціалом функції двох змінних, і якщо так, то знайти цю функцію:

$$\text{а) } \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x + y)^3}\text{ ; б) } \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1 + x^2}dy.$$

VI. **Домашнє завдання.**

1. Обчислити $\oint\limits_C (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy$, якщо C – коло $x^2 + y^2 = r^2$.

2. Обчислити площі фігур, які обмежені лініями:

а) кардіоїдою $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t$;

б) кривою $y^2 = x^2 - x^4$.

3. Обчислити інтеграли :

$$\text{а)}\ \int\limits_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy\ ;$$

$$\text{б)}\ \int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy\ .$$

4. Відновити функцію 2-х змінних за її повним диференціалом:

а) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$; б) $\dfrac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3}$.

§ 31. Поверхневі інтеграли І типу

I. Задача, що приводить до поняття поверхневого інтеграла І типу.
II. Означення та обчислення поверхневих інтегралів І типу.
III. Застосування поверхневих інтегралів І типу до розв'язування задач з механіки.
IV. **Розв'язати вправи:**

1. Обчислити поверхневі інтеграли І типу:

а) $\iint\limits_\sigma \left(z + \frac{4}{3}y + 2x\right)ds$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$, що лежить в першому октанті;

б) $\iint\limits_\sigma x\,ds$, де σ – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, яка лежить в першому октанті;

в) $\iint\limits_\sigma (x + y + z)ds$, де σ – поверхня $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$;

г) $\iint\limits_\sigma \dfrac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$, де σ – циліндр $x^2 + y^2 = R^2$, обмежений площинами $z = 0$, $z = H > 0$;

д) $\iint\limits_\sigma \left(x^2 + y^2\right)ds$, де σ – межа тіла $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

2. Обчислити масу параболічної оболонки $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ $(0 \le z \le 1)$, густина якої змінюється за законом $\rho(x; y; z) = z$.

3. Знайти масу сфери, якщо поверхнева густина в кожній точці рівна квадрату відстані цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери.

4. Обчислити статистичні моменти однорідної трикутної пластинки $x + y + z = a$ $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$ відносно координатних площин.

5. Знайти координати центра ваги частини однорідної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вирізаної поверхнею $x^2 + y^2 = ax$.

6. Знайти момент інерції циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$ $(0 \le z \le H)$ відносно початку координат.

V. **Домашнє завдання.**

1. Обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_{\sigma} xyz\, ds$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$, що лежить в першому октанті;

б) $\iint\limits_{\sigma} x^2 y^2 ds$, якщо σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

в) $\iint\limits_{\sigma} \left(xy + yz + xz\right) ds$, де σ – частина конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що вирізана поверхнею $x^2 + y^2 = 2x$.

2. Знайти масу півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(z \ge 0)$, якщо густина в кожній точці $(x; y; z)$ рівна $\frac{z}{R}$.

3. Знайти координати центра ваги частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, яка лежить в першому октанті.

4. Обчислити момент інерції відносно координатних площин однорідної трикутної пластинки $x + y + z = 1$ $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

§ 32. Поверхневі інтеграли II типу

I. Орієнтація поверхні. Означення і обчислення поверхневих інтегралів II типу.
II. Формула Остроградського-Гаусса.
III. Формула Стокса.
IV. Умови незалежності поверхневого інтеграла II роду функції трьох змінних від форми шляху інтегрування.
V. **Розв'язати вправи:**

1. Обчислити поверхневі інтеграли II типу:

а) $\iint\limits_{\sigma} x^2 y^2 z dxdy,$ якщо σ – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

б) $\iint\limits_{\sigma} (x-y)dxdy + (y-z)dydz,$ якщо σ – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$;

в) $\iint\limits_{\sigma} y^2 z dxdy + xzdydz + x^2 ydxdz,$ якщо σ – зовнішня сторона межі тіла, яке обмежене поверхнями $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 1$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \ge 0, y \ge 0)$.

2. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчислити поверхневі інтеграли II типу:

а) $\iint\limits_{\sigma} xzdxdy + xydydz + yzdxdz,$ якщо σ – зовнішня сторона піраміди, утвореної координатними площинами та площиною $x + y + z = 1$;

б) $\iint\limits_{\sigma} (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy,$ якщо σ – зовнішня сторона поверхні $|x| + |y| + |z| = 1$.

3. Перевірити, чи є вираз повним диференціалом функції $u(x; y; z)$ і, якщо так, то знайти функцію: $\left(x^2 - 2yz\right)dx + \left(y^2 - 2xz\right)dy + \left(z^2 - 2xy\right)dz$.

VI. **Домашнє завдання.**

1. Обчислити поверхневі інтеграли II типу:

а) $\iint\limits_{\sigma} z^2 dxdy,$ де σ – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

б) $\iint\limits_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$ де σ – зовнішня сторона куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

2. Знайти функцію $u(x; y; z)$, якщо $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz$.

3. Застосовуючи формулу Стокса, обчислити

$$\oint\limits_{L} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz ,$$

якщо L – межа частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка лежить в першому октанті (при русі по контуру L поверхня залишається зліва).

§ 33. Модульна контрольна робота

Зразок варіанта контрольної роботи.

1. Змінити порядок інтегрування $\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^3 f(x;y)\,dy$.

2. Знайти об'єм тіла, яке обмежене поверхнями: циліндром $x^2 + y^2 = 4x$, площинами $z = x$, $z = 2x$.

3. Обчислити масу дуги AB: $y = \sqrt{x}$, $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, якщо $\rho(x;\ y) = y$.

4. За допомогою криволінійного інтеграла 2-го роду обчислити площу фігури, яка обмежена кардіоїдою $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 4\sin t - 2\sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання.

1. Відновимо область інтегрування: $\begin{matrix} 0 \le x \le 3 \\ \sqrt{9-x^2} \le y \le 3 \end{matrix}$. Зобразимо фігуру, що обмежена лініями $x = 0$, $x = 3$, $y = \sqrt{9-x^2}$, $y = 3$. Одержимо такий рисунок:

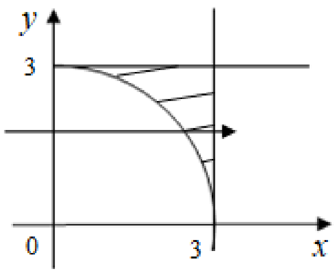

Рис. 1.

Розглянемо дану фігуру як криволінійну область другого типу: $\begin{matrix} 0 \le y \le 3 \\ \sqrt{9-y^2} \le x \le 3 \end{matrix}$. Тому

$$\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^3 f(x;y)\,dy = \int_0^3 dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^3 f(x;y)\,dx .$$

Відповідь: $\int_0^3 dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^3 f(x;y)\,dx$.

2. Зобразимо тіло, об'єм якого потрібно обчислити. Для циліндра $x^2 + y^2 = 4x$ напрямною служить коло $(x-2)^2 + y^2 = 4$ в площині xOy, а твірні – паралельні осі Oz. Площини $z = x$ та $z = 2x$ паралельні осі Oy.

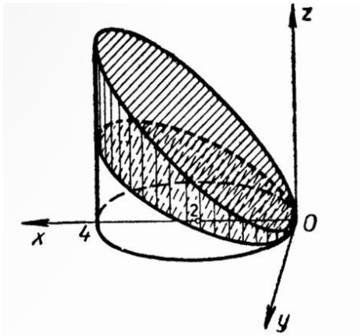

Рис. 2.

Використаємо потрійний інтеграл:

$$V = \iiint\limits_P dxdydz \,.$$

Перейдемо в ньому до циліндричних координат: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$ при цьому якобіан відображення $|I| = \rho$. Маємо:

$$V = \iiint\limits_Q \rho d\varphi d\rho dz.$$

Ортогональною проекцією фігури Q на площину xOy є круг $x^2 + y^2 \le 4x$, або в полярних координатах $\rho^2 \le 4\rho\cos\varphi$, звідки $\rho \le 4\cos\varphi$. Як криволінійний сектор ця фігура задовольняє обмеженням $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 4\cos\varphi$. З рисунка бачимо, що для змінної z справедливі нерівності $x \le z \le 2x$, або $\rho\cos\varphi \le z \le 2\rho\cos\varphi$. Тому матимемо такий повторний інтеграл:

$$V = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{4\cos\varphi} d\rho \int\limits_{\rho\cos\varphi}^{2\rho\cos\varphi} \rho dz =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{4\cos\varphi} \rho d\rho \left(2\rho\cos\varphi - \rho\cos\varphi\right) =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{4\cos\varphi} \rho^2 \cos\varphi d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{0}^{4\cos\varphi} =$$

$$= \frac{64}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{128}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{128}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 8\pi.$$

Відповідь: 8π .

3. Використаємо криволінійний інтеграл першого роду:

$$m = \int_{AB} \rho(x;y)dl \ .$$

В нашому випадку

$$dl = \sqrt{1+\left(\left(\sqrt{x}\right)'\right)^2}dx = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx = \sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx \ , \ \rho(x;y) = y = \sqrt{x}$$

і

$$AB: y = \sqrt{x}, 1 \le x \le 4 \, .$$

Остаточно:

$$m = \int_1^4 \sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx = \int_1^4 \left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left.\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \frac{17\sqrt{17}-1}{12} \, .$$

Відповідь: $\dfrac{17\sqrt{17}-1}{12}$.

4. При обчисленні площі плоскої фігури використаємо наступний криволінійний інтеграл II роду:

$$S = \frac{1}{2}\oint_{\gamma} xdy - ydx \ .$$

Знайдемо та спростимо підінтегральний вираз:

$$dx = \left(-2\sin t + 2\sin 2t\right)dt = -2\left(\sin t - \sin 2t\right)dt \ ,$$

$$dy = \left(4\cos t - 4\cos 2t\right)dt = 4\left(\cos t - \cos 2t\right)dt \ ,$$

$$xdy = \left(2\cos t - \cos 2t\right)\cdot 4\left(\cos t - \cos 2t\right)dt =$$

$$= 4\left(2\cos^2 t + \cos^2 2t - 3\cos t\cos 2t\right)dt,$$

$$ydx = -\left(4\sin t - 2\sin 2t\right)\cdot 2\left(\sin t - \sin 2t\right)dt =$$

$$= -4\left(2\sin^2 t + \sin^2 2t - 3\sin t \sin 2t\right)dt,$$

$$xdy - ydx = 4\left(2 + 1 - 3\cos t \cos 2t - 3\sin t \sin 2t\right)dt =$$

$$= 12\left(1 - \cos\left(2t - t\right)\right)dt = 12\left(1 - \cos t\right)dt.$$

Отже, остаточно

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 12\left(1 - \cos t\right)dt = 6\left(t - \sin t\right)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi \ .$$

Відповідь: 12π .

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

§1 1. $\dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{(n+2)^2-n^2}{n^2(n+2)^2}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$, $S_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$,

$$S=\frac{1}{4},\ r_n=\frac{1}{4(n+2)^2};\ \operatorname{tg} S_2=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3};\ S_2=\operatorname{arctg}\frac{2}{3};\operatorname{tg} S_3=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\frac{39}{52}=\frac{3}{4};$$

$$S_3=\operatorname{arctg}\frac{3}{4},\ S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1};\ S=\frac{\pi}{4},\ r_n=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

§2 а) збіжний; б) збіжний; в) збіжний $\rho=\lim\dfrac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\dfrac{4}{27}<1$;

г) збіжний; д) розбіжний; е) збіжний; є) розбіжний; ж) збіжний; з) збіжний; и) розбіжний; і) розбіжний; к) збіжний.

§3 а) розбіжний; б) умовно збіжний; в) умовно збіжний (Вказівка: подати загальний член у вигляді $(-1)^n ln^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$); г) абсолютно збіжний; е) умовно збіжний.

§4 3.

$$S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k}\right).\frac{1}{2}\ln 2.$$

§5 1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}(x+1), & |x|<1;\\ 2\,arctg\,\dfrac{1}{2}, & x=1;\\ 0,\quad x=-1 \text{ або } |x|>1. & \end{cases}$;

2. $f(x)=\begin{cases}x, & \dfrac{\pi}{6}+\pi n<x<\dfrac{5\pi}{6}+\pi n, n\in Z;\\ \dfrac{x}{2}, x=\dfrac{\pi}{6}+\pi n, x=\dfrac{5\pi}{6}+\pi n, n\in Z;\\ 0, & \text{в інших випадках}.\end{cases}$

3. Поточково $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=x^2$ на $[1;2]$, а $\left|f_n(x)-x^2\right|<\dfrac{8}{n}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0, x \neq \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, x = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ але дана функція не є неперервною на $[0;\pi]$.

5. Рівномірно збіжна.

§6 1. а) ряд збігається абсолютно при $|x|<1$; б) ряд збігається абсолютно при $\dfrac{\pi}{6}+\pi n < x < \dfrac{5\pi}{6}+\pi n, n \in Z$; в) ряд збігається абсолютно при $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n < x < \dfrac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$, умовно при $x = -\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$; г) при $x=1$ ряд розбігається, при $x=-1$ збігається умовно, в інших випадках ряд збігається абсолютно(Вказівка: використати нерівність $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$).

§7 1. а) ряд збігається абсолютно при $x \in [-1;1]$; б) ряд збігається абсолютно при $|x|<1$ і умовно при $x=\pm 1$; в) ряд збігається абсолютно при $x \in R$; г) ряд збігається абсолютно при $x \in (-3;1)$, при $x=-3$ збігається умовно; д) ряд збігається абсолютно при $|x| < \dfrac{1}{e}$; е) ряд збігається абсолютно при $|x|<1$; є) ряд збігається абсолютно при $x \in (3;7)$, при $x=3$ – умовно. 2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x), x \in (-1;1)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} = \ln(1+x), x \in (-1;1)$.

§8 1. $|\Delta| \le \dfrac{1}{16}$. 2. $n=8$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} - 3\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{4n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n-2}}{4n-2}, |x|<1$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n+1}, 0<|x|<1$; в) $x^3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{6n+3}, |x|<1$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, |x|<1$; д) $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(4n+1)} x^{4n+1}, |x|<1$.

§9 а) 0,34; б) 1,968; в) 0,946; г) 0,747; д) 0,183.

§10 1. Вказівка: при перевірці виконання нерівності трикутника розглянути два можливі випадки: серед елементів x, y, z всі однакові та хоча б два різні; 2. Так. 3. Вказівка: використати факт зростання функції $\dfrac{t}{1+t}$ при

$t \ge 0$. 4. $\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right)$. 5. Ні. 6. $\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$. 8. Вказівка: $M = CA \cap CB$, де $A = \{(x;y) \mid x+y \le 5\}$, $B = \{(x;y) \mid x^2+y^2 \ge 100\}$.

§12 2. Вказівка: використати критерій границі функції при двох послідовностях $(n;n^2)$ та $(n^2;n)$. 3. 1. 5. Дуги AD та BC кола $x^2+y^2=25$ є зв'язними множинами, якщо $A(5;0), B(0;5), C(-5;0), D(0;5)$. Функція $f(x;y) = x^3+y^3+x^2y-6$ на кінцях дуг набуває значень різних знаків.

§13 6. $x-y+2z \pm \sqrt{\frac{11}{2}} = 0$.

§14 4. а) 4,99; б) 11,92; в) 0,909.

§15 1. $\frac{41}{5}$. 2. Для лінії рівня $x^2+y^2=C$ нормаль дотичної $\bar{n} = (2x_0;2y_0)$ співпадає із градієнтом функції $z = x^2+y^2$, тому дотична ортогональна градієнту.

3. $f''_{x^2}(0;0;1) = 2$, $f''_{xz}(1;0;2) = 2$, $f'''_{xz^2}(2;0;1) = 0$.

5. $e^{x^2+y^2}\left(\Delta x^2 + 4y\Delta x\Delta y + 2\left(1+2y^2\right)\Delta y^2\right)$. 6. $(-1)^{n+1}\frac{(\Delta x+\Delta y)^n}{(x+y)^n}$. 7. $-\frac{ye^x}{e^x+e^y}$.

8. $z'_x = -\frac{yz}{z^2+xy}$, $z'_y = -\frac{xz}{z^2+xy}$. 9. $dz(1;2) = \frac{1}{13}(2\Delta x - 12\Delta y)$.

10. $dz = \frac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}$, $d^2z = -\frac{z^2(ydx-xdy}{y^2(x+z)^3}$.

§16 а) $z_{\max} = z\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$; б) $z_{\min} = z\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$;

в) $z_{\min} = z\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right) = z\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right) = 0$; г) $z_{\min} = z\left(\sqrt{\frac{3}{2}};0\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

§17

1. $\max z(x;y) = z(-3;0) = z(0;-3) = 6$, $\min z(x;y) = z(-1;-1) = -1$.

2. $\min z(x;y) = 0$, $\max z(x;y) = z\left(1;\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

3. $\min z(x;y) = z(0;-1) = -7$, $\max z(x;y) = z(2;-1) = 13$.

4. $\min z(x;y) = z(0;0) = 0$, $\max z(x;y) = z(0;\pm 1) = \frac{3}{e}$.

§18 1. $u_{\min} = u\left(\frac{bc}{ab+bc+ac}; \frac{ac}{ab+bc+ac}; \frac{ab}{ab+bc+ac}\right) = \frac{abc}{ab+bc+ac}$. 2. Куб зі стороною $\sqrt[3]{V}$. 3. $z_{\min} = z\left(-a\sqrt{2}; a\sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{a}$, $z_{\max} = z\left(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{a}$.

§20

$$1.\ \text{а)}\ \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} f(x;y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{2}{x}} f(x;y)\,dy,\ \text{б)} \int_0^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy.$$

$$2.\ \int_0^1 dy \int_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x;y)\,dx.\ 3.\ \text{а)}\ \ln\frac{25}{24};\ \text{б)}\ 4a;\ \text{в)}\ \frac{1}{2};\ \text{г)}\ \frac{33}{140};\ \text{д)}\ \frac{9}{4}.$$

§21

$$1.\ \text{а)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg\,2} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\,\rho d\varphi d\rho;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\,\rho d\varphi d\rho;$$

$$\text{г)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\,\rho d\varphi d\rho.$$

2. а) $-4\pi^2$; б) $\frac{\pi^2}{6}$; в) $\frac{\pi R^2}{4}\left(\ln\left(1+R^2\right)-1\right)+\frac{\pi}{4}\ln\left(1+R^2\right)$; г) $73\frac{23}{45}$.

§22 1. Частина кулі $x^2+y^2+a^2 \le 1$, що знаходиться в першому октанті. 2.а) $2+3\pi$; б) $\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$; в) $7\ln 2$; 3. а) 3π, б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}$.

§23 1. $\frac{16}{3}\pi a^2$; 2. 280π; 3. $\sqrt{2}\pi p^2$; 4. $\pi\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)$; 5. $2\pi a^2$.

§24 1. $\frac{8}{3}$. 2. $x_c = \pi a$, $y_c = \frac{5}{6}a$. 3. $\frac{3\pi R^4}{2}$. 4. $\frac{2}{3}R^3$.

§25

$$1.\ \text{а)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x;y;z)\,dz;\ \text{б)} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int_0^{1-y} f(x;y;z)\,dx.$$

2. а) 0; б) $\frac{1}{180}$; в) $2e-5$.

§26 1. $\frac{1}{56}$. 2. $\frac{\pi}{6}$. 3. а) 16; б) $\frac{96\pi}{5}$; в) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$.

§27 1. $x_c = y_c = 0$, $z_c = \frac{3R}{8}$. 2. $x_c = y_c = 0$, $z_c = \frac{3}{4}c$. 3. $\frac{4\pi}{15}\left(4\sqrt{2}-5\right)$. 4. $\frac{\pi^2 a^5}{8}$.

§28 1. а) $\frac{\pi a^3}{2}$; б) 24; в) $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. 2. R^2. 3. $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2$. 4. $x_c = 0$, $y_c = \frac{a\left(sh1ch1+1\right)}{2sh1}$. 5. $\frac{1}{5}\left(2+4\pi^2\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\left(2+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15}\sqrt{2}$.

§29 1. а) $-\frac{56}{15}$; б) 18; в) $\frac{3\pi a^{\frac{4}{3}}}{16}$; г) 2π; д) $\frac{112}{3}$.

§30 1. 0. 2. а) $6\pi a^2$; б) $\frac{4}{3}$. 3. а) $1+\pi$; б) 62;

4. а) $F\left(x;y\right) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$; б) $F\left(x;y\right) = \frac{x-y}{\left(x+y\right)^2} + C$.

§31 1. а) $\frac{\sqrt{3}}{20}$; б) $\frac{2\pi R^6}{15}$; в) $\frac{64\sqrt{2}}{15}$. 2. πR^2. 3. $x_c = y_c = z_c = \frac{R}{2}$. 4. $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = \frac{\sqrt{3}}{48}$.

§32 1. а) 0; б) $3a^4$. 2. $u\left(x;y;z\right) = \frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + x + C$. 3. –4.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу : підручник : у 3-х ч. / М.О. Давидов. – К. : Вища школа, 1991. – Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 365 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу : підручник : у 3-х ч. / М.О. Давидов. – К. : Вища школа, 1990. – Ч. 1. Функції однієї змінної. – 383 с.
3. Шкіль М.І. Математичний аналіз : у 2-х ч. / М.І. Шкіль. – К. : Вища школа, 1994. – Ч. 1. – 423 с.
4. Шкіль М.І. Математичний аналіз : у 2-х ч. / М.І. Шкіль. – К. : Вища школа, 1995. – Ч. 2. – 511 с.
5. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум. (І курс ІІ семестр) / уклад.: І.В. Алексеєва, О.В. Гайдай, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова. – К. : НТУУ «КПІ», 2014. – 190 с.
6. Шунда Н.М. Практикум з математичного аналізу. Інтегральне числення. Ряди : навч. посібник / Н.М. Шунда, А.А. Томусяк. – К. : Вища школа, 1995. – 541 с.
7. Ляшко И.И. Математический анализ в примерах и задачах / И.И. Ляшко и др. – К. : Вища школа, 1977. – Ч. 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. – 672 с.

Додаткова

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1970. – Т. 2. – 800 с.
9. Задачник по курсу математического анализа / под ред. Н.Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.
10. Давыдов Н.А. Сборник задач по математическому / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. – М. : Просвещение, 1973. – 255 с.
11. Сорич Н.М. Подвійний інтеграл та його застосування. Метод рекомендації для самостійної роботи студентів фізико-математичного факультету. Індивідуальні завдання / Н.М. Сорич, В.А. Сорич, Ю.В. Гнатюк – Кам’янець-Подільський : ПП «Медобори», 2011. – 40 с.

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

СОРИЧ Ніна Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

СОРИЧ Віктор Андрійович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Підписано до друку 25.09.2018 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк різографічний.
Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк. 3,9. Обл.-вид. арк. 4,2.
Тираж 50. Зам. № 821.

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.