Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

В. А. СОРИЧ,
Н. М. СОРИЧ

ПРАКТИКУМ. ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Кам’янець-Подільський
2019

УДК 511(075.8)
ББК 22.131я73
С65

Друкується згідно рішення вченої ради Кам’янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка,
протокол № 9 від 25 вересня 2019 року.

Рецензенти:

А. С. Сердюк, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України, м. Київ;

У. В. Гудима, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка;

О. Д. Сивак, вчитель математики, вчитель-методист спеціалізованої ЗОШ №5 I-III ступенів з поглибленим вивченням інформатики, Кам’янець-Подільський.

Сорич В. А.

С65 **Практикум. Числові системи** : навчальний посібник / В. А. Сорич, Н. М. Сорич. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. — 71 с.

Навчальний посібник містить теоретичний довідковий матеріал з таких розділів числових систем: натуральні числа, кільце цілих чисел, поле раціональних чисел, поле дійсних чисел, комплексні числа, алгебри з діленням над числовим полем, зокрема наведено аксіоматичні позначення відповідних систем. Практикум містить зразки розв’язання типових задач, вправи для самостійного розв’язування, які розділені на середній, достатній та високий рівень засвоєння навчального матеріалу.

Посібник призначений для організації проведення практичних занять з числових систем для студентів фізико-математичного факультету спеціальності «математика», також він буде корисним для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл.

УДК 511(075.8)
ББК 22.131я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Посібник написано у відповідності з програмою «Числові системи» для фізико-математичного факультету університету і складається з шести розділів. В ньому наведено основні теоретичні відомості, розглянуто розв'язування типових задач різного ступеня складності. Особливу увагу приділено самостійній роботі студентів. Прагнучи задовольнити читача, в посібнику подано до кожної теми задачі для самостійного розв'язування, спрямовані на розвиток його логічного мислення, на перевірку набутих знань з даної теми.

Задачі підібрані по рівню складності таким чином:

- середній рівень розрахований на заучування, наслідування і розуміння головного в навчальному матеріалі;
- достатній рівень розрахований на повне володіння знаннями;
- високий рівень розрахований на повне володіння знаннями із застосуванням прийомів нестандартного мислення.

В розділі «Відповіді. Вказівки» наведено до всіх задач відповіді, вказівки, до деяких – повні розв'язки. Посібник розраховано на студентів фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів (інститутів, університетів). Він може бути використаний як збірник задач з числових систем. Також посібником можуть користуватися старшокласники та вчителі при підготовці до математичних олімпіад (задачі з достатнього та високого рівнів).

Розділ 1

НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

§ 1. Задачі обґрунтування математики

Якщо говорять про обґрунтування математики, то мають на увазі критичний перегляд її основних понять і способів доведення її тверджень, тобто усього того, що становить фундамент математики. Поняття обґрунтування математики носить історичний характер.

Одним із напрямків обґрунтування математики є аксіоматичний метод. В основу аксіоматичної теорії ставлять деякі вихідні положення, що звуться аксіомами, і вводяться неозначувані поняття. Далі на базі неозначуваних понять, вводяться означувані поняття, а з аксіом як логічні наслідки отримуємо теореми.

Прикладом побудови аксіоматичної теорії в шкільній математиці може виступати, зокрема, геометрія. Неозначуваними поняттями в ній виступають точка і пряма на площині, а також – точка, пряма і площина в просторі. Роль аксіом відіграють основні властивості, сформульовані в шкільному підручнику з геометрії.

До системи аксіом ставляться деякі вимоги, яким вони повинні задовольняти.

Однією з таких вимог є проблема <u>несуперечливості</u> системи аксіом. Для розв'язання її пропонується побудувати деяку «модель», яка б задовольняла систему аксіом даної теорії. При цьому доведення несуперечливості має відносний характер: несуперечливість однієї теорії грунтується на несуперечливості іншої теорії, яка є моделлю для вихідної системи аксіом. Моделлю системи аксіом вважають таку множину об'єктів конкретної природи, з визначеними в ній відношеннями і операціями, на якій виконуються всі аксіоми даної теорії.

Другою вимогою, що ставиться до системи аксіом, виступає питання їх <u>незалежності</u>. Для доведення того, що деяка аксіома A теорії T не виводиться із інших аксіом цієї теорії, а, отже, суттєво необхідна для побудови теорії T, достатньо побудувати таку модель теорії T, в якій аксіома A була б хибною, а всі інші аксіоми цієї теорії – істинні.

Ще однією з властивостей системи аксіом є <u>повнота</u>. Аксіоматична теорія T називається повною, якщо вона містить достатню для певної мети кількість теорем. Проте, якщо навіть у T не можна довести всіх теорем, а тільки деяку їх достатню кількість, то і в цьому випадку неповна аксіоматична теорія має цінність.

І наприкінці, розглядають таку властивість аксіоматичної теорії як <u>категоричність</u>. Аксіоматична теорія T називається категоричною, якщо будь-які дві її моделі M_1 та M_2 ізоморфні, тобто якщо існує таке взаємно-однозначне відображення однієї моделі на іншу, при якому зберігаються всі операції та відношення.

Якщо в систему аксіом не входять явним чином способи логічного доведення тверджень, а вважається, що вони відомі інтуїтивно, то кажуть, що побудовано змістовну аксіоматичну теорію. Крім змістовної аксіоматичної теорії розглядають ще формалізовану аксіоматику. Відмінність її в тому, що до системи аксіом додаються ще і формальні правила виведення тверджень (формули) і, таким чином, всі математичні викладки зводяться до формальних перетворень заданих формул («гри» з об'єктами). Надалі основна увага буде приділятися змістовній аксіоматичній теорії.

§ 2. Теорія натуральних чисел

Основним поняттям аксіоматичної теорії натуральних чисел вважається натуральне число. Поняття про число посідає важливе місце як у вузівському, так і у шкільному курсі математики. Число – первісне поняття і воно неозначуване. Означають множину (систему) чисел (натуральних, раціональних, дійсних і т. д.) через набір аксіом. При аксіоматичній побудові натуральних чисел загальновживаною є система аксіом Пеано.

Означення натуральних чисел. Нехай N – непорожня множина елементів довільної природи, «+», «$\cdot$» – бінарні операції, S – унарна операція, 1 – виділений елемент в N. Натуральними числами вважаються елементи алгебри $(N, «+», «\cdot», S, 1)$, які задовольняють наступні аксіоми:

А1. $(\forall a)(S(a) \neq 1), a \in N$ (одиниця не слідує ні за яким числом).

А2. $(\forall a)(\forall b)(S(a) = S(b) \Rightarrow a = b)$, $a, b \in N$ (якщо рівні наступні елементи множини N, то рівні і попередні).

А3. Аксіома індукції. Якщо деяка підмножина M множини N має властивості:

$$1 \in M \text{ і } (\forall a)(a \in M \Rightarrow S(a) \in M), \text{ то } M = N.$$

А4. $(\forall a)(a + 1 = S(a))$, $a \in N$.

А5. $(\forall a)(\forall b)(a + S(b) = S(a + b)), a, b \in N$.

А6. $(\forall a)(a \cdot 1 = a), a \in N$.

А7. $(\forall a)(\forall b)(a \cdot S(b) = a \cdot b + a); a, b \in N$.

Найпростіші наслідки, що випливають безпосередньо з аксіом Пеано.

Теорема 1. Для будь-якого натурального числа, відмінного від 1, існує єдине попереднє: $(\forall a): a \neq 1 \Rightarrow \exists! b : \left(a = S(b)\right), a, b \in N$.

Теорема 2. $(\forall a),(\forall b):\left(a \neq b \Leftrightarrow S(a) \neq S(b)\right), a, b \in N$.

Теорема 3. $(\forall a):\left(a \neq S(a)\right), a \in N$, тобто будь-яке натуральне число не збігається з числом, що йде за ним.

Крім найпростіших наслідків, що випливають з аксіом, можна довести ряд інших теорем, якими зручно користуватися при побудові теорії натурального числа.

Теорема 4. (Має місце сполучний (асоціативний) закон додавання). $(\forall a),(\forall b),(\forall c):\left((a+b)+c = a+(b+c)\right), a, b, c \in N$.

Теорема 5. $(\forall a),(\forall b):(a+b = b+a), a, b \in N$. (Має місце переставний (комутативний) закон додавання).

Теорема 6. $(\forall a),(\forall b):(a+b \neq b),\ a, b \in N$.

Теорема 7. Для будь-яких натуральних чисел виконується одне і тільки одне із співвідношень: $(\forall a),(\forall b):(a = b)$, або $\exists c : (a = b + c)$, або $(\exists d):(b = a + d),\ a, b, c, d \in N$. (Теорема про трихотомію).

Теорема 8. (Операція множення пов'язана з операцією додавання правим дистрибутивним законом).

$$(\forall a),(\forall b),(\forall c):\left((a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\right), a, b, c \in N .$$

Теорема 9. $(\forall a),(\forall b):(a\cdot b = b\cdot a), a, b \in N$. (Комутативний закон множення).

Теорема 10. $(\forall a),(\forall b),(\forall c):\left((a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\right), a, b, c \in N$. (Має місце сполучний (асоціативний) закон множення).

На множині натуральних чисел можна ввести відношення порядку. Наприклад, відношення «>» вводимо наступним чином:

$$(a > b) \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists d : a = b + d; a, b, d \in N ,$$

при цьому кажуть, що «a більше b», або «b менше a». Даний випадок характеризує відношення строгого порядку. Коли ж потрібно розглянути нестрогий порядок в множині натуральних чисел, то його можна задавати таким чином: про натуральні числа a та b кажуть, що «a більше або дорівнює b», або «b менше або дорівнює a» і відповідно записують $a \geq b$ або $b \leq a$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{b > a}$. Більшість теорем про властивості натуральних чисел доводяться, використовуючи метод математичної індукції. Для цього:

1. Будуємо множину M, в яку включаємо ті і тільки ті натуральні числа, які задовольняють умову теореми. Якщо умова теореми містить кілька різних чисел, слід вибрати одне з них і проводити індукцію по цьому числу, вважаючи всі інші довільними.
2. Показуємо, що одиниця належить побудованій множині M (тобто, що одиниця задовольняє умову теореми). При цьому можна користуватися аксіомами і раніше доведеними теоремами.
3. Беремо довільний елемент множини M і показуємо, що наступне за ним число також належить множині M. При цьому крім аксіом і раніше доведених теорем можна використовувати також і те, що дане число належить множині M (припущення індукції) та $1 \in M$ (раніше доведений факт).
4. Застосовуючи аксіому індукції, робимо висновок, що теорема справедлива при всіх натуральних числах.

Проілюструємо ці міркування на прикладі.

Приклад 1. Довести, що в множині $N, a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c$.

Розв'язання. Доведення будемо проводити індукцією по c.

1. Побудуємо множину M, яка складається з тих і тільки тих c для яких із співвідношення $a \neq b$ слідує, що $a + c \neq b + c$, тобто
$$M = \{c \mid \forall a, \forall b : (a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c)\}.$$
2. Покажемо, що $1 \in M$, тобто справедлива імплікація $a \neq b \Rightarrow a + 1 \neq b + 1$. Справді, $a + 1 = S(a), b + 1 = S(b),$ а за теоремою 2 $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$. Отже, $1 \in M$.
3. Нехай $c \in M$. Покажемо, що $S(c) \in M$. Справді, з того, що $c \in M$, маємо: $a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c$ (припущення індукції). Далі, на основі пункту 2 якщо $a + c \neq b + c$, то $(a + c) + 1 \neq (b + c) + 1$. Оскільки за асоціативністю додавання (теорема 4) $(a + c) + 1 = a + (c + 1)$ і $(b + c) + 1 = b + (c + 1)$, то потрібно довести таке речення: $(a + c) \neq (b + c) \Rightarrow (a + (c + 1)) \neq (b + (c + 1))$ або ж (аксіома 4) $a + c \neq b + c \Rightarrow a + S(c) \neq b + S(c)$. Таким чином, маємо $a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c$ і $a + c \neq b + c \Rightarrow a + S(c) \neq b + S(c)$, тоді за правилом силогізму при $c \in M$ $a \neq b \Rightarrow a + S(c) \neq b + S(c)$, тобто $S(c) \in M$.
4. Оскільки для множини M виконуються аксіоми індукції: $1 \in M$, $c \in M \Rightarrow S(c) \in M$, то для неї виконується і висновок теореми $M = N$. Отже для всіх $c : (\forall a), (\forall b) : a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c$, тобто
$$(\forall a), (\forall b), (\forall c) : a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c.$$

Введемо в множині N операцію ділення.

Означення 1. Діленням називається операція, обернена до операції множення, тобто відповідність, при якій двом натуральним числам a та b співставляється третє натуральне число, позначають його $\frac{a}{b} = a : b$ і називають часткою чисел a та b, таке що $\frac{a}{b} \cdot b = a$. Зрозуміло, що операція ділення можлива в тому випадку, коли відповідна частка існує, тобто число $\frac{a}{b}$ є натуральним.

<u>Приклад 2.</u> Довести, що в множині N, 1 не ділиться на 2.

<u>Розв'язання.</u> Згідно означення 1 потрібно довести, що не існує такого натурального числа a, для якого $a \cdot 2 = 1$, або для всіх натуральних $a : a \cdot 2 \neq 1$

Використаємо метод математичної індукції.

1. Нехай множина M складається з тих і тільки тих натуральних чисел a, для яких $a \cdot 2 \neq 1 : M = \{a \mid a \cdot 2 \neq 1\}$.
2. Покажемо, що $1 \in M$. Дійсно, $1 \cdot 2 = 1 \cdot S(1) = S(1) \cdot 1 = S(1) \neq 1$ за теоремою 5, аксіомою 6 і аксіомою 1. Отже $1 \in M$.
3. Припустимо, що $a \in M$, тобто $a \cdot 2 \neq 1$. Тоді за теоремою 9, аксіомою 7, теоремою 4, та аксіомами 4 і 1 будемо мати $S(a) \cdot 2 = 2 \cdot S(a) =$ $= 2 \cdot a + 2 = (2 \cdot a + 1) + 1 = S(2 \cdot a + 1) \neq 1$, звідки $S(a) \in M$.
4. Оскільки для множини M виконуються всі умови аксіоми 3 (аксіоми індукції), то $M = N$. Отже, твердження прикладу 2 доведено.

В множині натуральних чисел крім наведеної раніше операції ділення можна розглядати й інші обернені операції, означивши їх відповідним чином. Зокрема, розглянемо віднімання натуральних чисел.

Означення 2. Відніманням натуральних чисел називається операція, протилежна до додавання, тобто відповідність, на якій двом натуральним числам a та b співставляється третє натуральне число, позначають його $(a - b)$ і називають його різницею a і b, таке, що $(a - b) + b = a$. Аналогічно як і для ділення, віднімання в множині N допустиме лише тоді, коли різниця існує, тобто $(a - b) \in N$.

<u>Приклад 3.</u> Довести, що різниця натуральних чисел a і b існує тоді і тільки тоді, коли $a > b$. Якщо різниця $(a - b)$ існує, то довести, що вона єдина.

<u>Розв'язання.</u> У прикладі сформульовано два твердження. Переконаємося спочатку в справедливості першого з них. Нехай різниця $(a - b)$ існує,

тоді згідно означення 2: $(a-b)+b=a$. З останньої рівності на основі раніше введеного поняття більше («>») слідує, що $a>b$.

Нехай тепер $a>b$, покажемо, що тоді існує різниця $(a-b)$.

Із співвідношення $a>b$ на основі означення поняття («>») маємо: що $\exists c : a=b+c, c \in N$, або в силу теореми 5: $a=c+b$. Тому натуральне число c згідно означення 2 є різницею чисел a і b. Отже, перше твердження доведено.

Доведемо друге. Нехай різниця $(a-b)$ існує, покажемо, що вона єдина.

Припустимо супротивне. Нехай існують, принаймні, два натуральні числа, позначимо їх через c_1 та c_2, такі, що вони відіграють роль різниці чисел a та b, тобто $c_1+b=a$ і $c_2+b=a$.

Праві частини рівностей однакові, тому рівними повинні бути і ліві частини рівностей: $c_1+b=c_2+b$.

Доведемо індукцією по b таке твердження: $c_1+b=c_2+b \Rightarrow c_1=c_2$.

1. Утворимо множину $M=\{\mathrm{b} \mid \mathrm{c}_1+b=c_2+b \Rightarrow c_1=c_2, \mathrm{b}\in N\}$.
2. Нехай $b=1$. За аксіомою 4: $c_1+1=S(\mathrm{c}_1), \mathrm{c}_2+1=S(\mathrm{c}_2)$, а за аксіомою 2: $S(\mathrm{c}_1)=S(\mathrm{c}_2) \Rightarrow c_1=c_2$. Таким чином, $c_1+1=c_2+1 \Rightarrow c_1=c_2$, отже $1\in M$.
3. Нехай при деякому натуральному b із рівності $c_1+b=c_2+b$, випливає $c_1=c_2$ (тобто $b\in M$). Покажемо, що тоді з рівності $c_1+S(b)=c_2+S(b)$ випливає рівність $c_1=c_2$ (тобто $S(b)\in M$). За аксіомою 5 маємо: $c_1+S(b)=c_2+S(b) \Rightarrow S(\mathrm{c}_1+b)=S(\mathrm{c}_2+b)$.

   А за аксіомою 2: $S(\mathrm{c}_1+b)=S(\mathrm{c}_2+b) \Rightarrow c_1+b=c_2+b$.

   За припущенням $c_1+b=c_2+b \Rightarrow c_1=c_2$. Тому за законами силогізму $c_1+S(b)=c_2+S(b) \Rightarrow c_1=c_2$, тобто $S(b)\in M$.
4. Згідно аксіоми індукції $M=N$. Отже, при будь – якому натуральному b з рівності $c_1+b=c_2+b$ випливає $c_1=c_2$, тобто різниця єдина, якщо вона існує.

Означення 3. Множину натуральних чисел N, упорядковану за введеним раніше порядком (більше «>», або більше рівне «≥»), називають натуральним рядом і позначають $(N,>)$, $(N,\geq)$.

Початок натурального ряду можна записувати наступним чином: $1, S(1), S(S(1)), \ldots$. Символом $[a;b]$ позначимо множину $\{x \mid x\in N, a\leq x\leq b\}$ і назвемо її відрізком натурального ряду з кінцями a і b. Якщо $a=1$, то відрізок $[1,b]$ назвемо початковим відрізком натурального ряду. Множину

M , яка включається в N назвемо обмеженою, якщо існує $n : M$ включається в $[1;n], n \in N$.

Означення 4. Назвемо числом нуль (0) елемент, для якого виконуються умови:

а) $S(0) = 1;$

б) $(\forall a)(a + 0 = 0 + a), a \in N;$

в) $(\forall b)(a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0), a \in N;$

г) $(\forall a)(\forall b)(a \cdot b = 0) \Rightarrow (a = 0)$ або $(b = 0); a, b \in N$.

Множину цілих невід'ємних чисел отримуємо в результаті приєднання до множини натуральних чисел числа нуль, позначають її $N_0 = N \cup \{0\}$.

Розширений натуральний ряд позначають через $(N_0, >)$.

§ 3. Властивості системи аксіом Пеано

Повернемося знову до питань аксіоматичної побудови теорії натуральних числа. Як вказувалось раніше, до системи аксіом ставляться такі вимоги: несуперечливість, незалежність, повнота і категоричність.

Що стосується несуперечливості аксіом Пеано, то вона не може бути доведена завдяки побудові деякої моделі тому, що при доведенні довелося би використовувати моделі більш складної природи, ніж арифметика, в несуперечливості яких немає впевненості. Отже, впевненості в тому, що модель системи аксіом Пеано несуперечлива, ще менше. В теорії натурального числа ми не маємо повної гарантії від суперечностей. Впевненість в несуперечливості її ми можемо черпати із самої дійсності, з багатовікової людської практики.

Вимоги належності та категоричності системи аксіом Пеано вирішуються позитивно.

З несуперечливості і категоричності змістовної аксіоматичної теорії, в тому числі і теорії натуральних чисел, випливає і її повнота в тому розумінні, що всі істинні твердження інтуїтивної арифметики можна отримати в змістовній аксіоматичній теорії.

§ 4. Вправи для самостійного розв'язування

Середній рівень

1. Довести, що: 1) $2 + 2 = 4$; 2) $2 \cdot 2 = 4$; 3) $2 \cdot 3 = 6$.
2. Показати, що 3 > 2.
3. Довести, що для будь – яких a і b натуральних, $a \cdot b \geq a$.
4. Довести, що для будь-яких a, b, c натуральних $a + c = b + c$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

5. Довести, що 1 не ділиться на 2 в множині N.
6. Нехай M – довільна множина, не обов'язково щоб вона складалася з натуральних чисел. Довести, що M містить всі натуральні числа, якщо M задовольняє наступні умови: а) $1 \in M$; б) якщо $a \in N$ і $a \in M$, то $a+1 \in M$.
7. Довести, що різниця натуральних чисел a і b визначена тоді, коли $a > b$.
8. Довести, що для будь-яких a, b, c натуральних $a \cdot c = b \cdot c$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$.
9. Довести, що для будь-яких a, b, c натуральних $a + c > b + c$ тоді і тільки тоді, коли $a > b$.
10. Довести, що для будь-яких a, b, c натуральних з того, що $a \cdot c > b \cdot c$ випливає, що $a > b$.
11. Довести, що в множині натуральних чисел справджується рівність $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$, при умові, що відповідні різниці існують.
12. Довести, що $a + b > a$ при будь-яких $a, b \in N$.
13. Довести, що для будь-яких a і b натуральних, якщо $a+1 \geq b$ і $b > a$, то $b = a+1$.
14. Довести, що $a - b < a$ причому $a > b$, $a, b \in N$.
15. Довести, що для будь-яких натуральних чисел a, b, c з того, що $a + c = b + c$ випливає, що $a = b$.

Достатній рівень

1. Довести, що $\frac{a}{b} \leq a$, якщо $a, b \in N$ і a – кратне b.
2. Довести, що для будь-яких a і b натуральних $2a \neq 2b+1$.
3. Довести, що для будь-яких a і b натуральних $a^2 \neq 2b^2$.
4. Довести, що різниця однакових парних степенів двох натуральних чисел ділиться на суму основ, тобто $\left(a^{2n} - b^{2n}\right) \vdots (a+b), a, b, n \in N$.
5. Довести, що для будь-якого натурального $n \neq 1$ існує таке натуральне x, що $n = 2x$ або $n = 2x+1$.
6. Довести, що з нерівності $a^n \neq b^n$ випливає нерівність $a \neq b; a, b, n \in N$.
7. Довести, що при будь-яких $7^{n+2} + 8^{2n+1} \vdots 57$, $n \in N$.
8. Для яких $n \in N$ виконується нерівність: $2^n > 2n+1$?
9. Довести, що $\left(5^{n+1} - 4n - 5\right) \vdots 16$ при будь-якому $n \in N$.
10. Довести, що $2^n > n^2$ при всіх натуральних $n > 4$.
11. Довести, що число $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99} + 2^{100}$ кратне 3.
12. Довести, що з нерівностей $a+1 \geq b > a$ випливає рівність $a+1 = b; a, b \in N$.
13. Довести, що з нерівностей $a+1 > b \geq a$ випливає рівність $a = b; a, b \in N$.

14. Довести тотожність $2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

15. Довести, що при будь-яких $n\in N, \left(10^n-4^n+3n\right)\vdots 9$.

16. Довести тотожність: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, n\in N$.

17. Довести, що для будь – якого $n\in N: \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{(n-радикалів)}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

18. Довести, що для будь – якого $n\in N$:

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

19. Довести, що для будь-якого $n\in N$: $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}, x\neq 1$.

20. Довести, що для будь-якого $n\in N$, якщо $|x|\neq 1$:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

Високий рівень

1. Натуральні числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$, всі більші за 1, не перевищують числа $4n(n-1)$ і попарно взаємно прості. Довести, що принаймні одне з цих чисел – просте.
2. Нехай n – довільне натуральне число, $F(n)$ – сума його цифр. Довести, що, коли $F(n)=F(2n)$, n ділиться на 9.
3. Довести, що числа вигляду $3n+2$, при кожному $n\in N$, не є квадратами натуральних чисел.
4. Довести, що коли принаймні одне з натуральних чисел a або b відмінне від 1, то виконується нерівність $3(a^2+b^2)\geq 5(a+b)$.
5. Для яких $k\in N$ існують такі $m,n\in N$, що m^k+n і n^k+m одночасно є k-ми степенями деяких чисел?
6. Довести, що для довільного $n\in N$ вираз $3^{2n}+5$ не ділиться на 8.
7. Вкажіть алгоритми одночасного знаходження НСК і НСД кількох чисел. Знайти НСК і НСД чисел 693, 4426, 384.
8. Для яких $n\in N$ число $a_n=\underbrace{4\ldots4}_{n-разів}$ є точним квадратом?
9. Довести, що $(1+3^x+9^x)\vdots 13$, якщо $x=3n+1, n\in N_0$.
10. Довести нерівність $n^n<3^n\cdot n!, n\in N$.

Розділ 2

КІЛЬЦЕ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

§ 5. Аксіоматика кільця

Поняття числа пройшло довгий шлях історичного розвитку. Натуральні числа як засіб лічби відомі людині з давніх давен. Давньогрецькі математики користувалися як натуральними, так і додатними дробовими числами, але не знали від'ємних чисел. Таким чином, дробові числа з'явилися в математиці значно раніше від'ємних.

В такому плані ми дещо відступимо від історичного розвитку поняття числа і спочатку введемо цілі числа, а потім дробові.

Натуральні числа служать фундаментом, на якому вже чисто конструктивним шляхом можна побудувати всі інші числові системи в рамках змістовного аксіоматичного методу.

Розширюючи числову систему *A* до нової числової системи *B*, ми будемо дотримуватися таких вимог:

1) множина *A* є підмножиною множини *B*;
2) всі операції, визначені в множині *A*, повинні виконуватися і в *B*, причому їх зміст для елементів з *A*, розглядуваних вже як елементи з *B*, повинен співпадати з тим, який вони мали до розширення в множині *A*;
3) в множині *B* виконується операція, яка в *A* не виконувалась, або не завжди виконувалась;
4) *B* повинно бути мінімальним зі всіх розширень системи *A*, що задовольняє умови 1)-3).

Перед тим, як вводити цілі числа, означимо деякі алгебраїчні структури. Непорожня множина, на якій визначені операції, називається алгеброю.

Означення 1. Алгебру $(K,+,\cdot,\theta)$ називають кільцем, якщо для елементів множини *K* виконуються аксіоми:

А1. Комутативність додавання – $(\forall a)(\forall b)(a+b=b+a), a,b\in K$.

А2. Асоціативність додавання –

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a+b)+c=a+(b+c)), a,b,c\in K .$$

А3. Існування нейтрального елемента відносно операції додавання

$$(\exists\theta)(\forall a)(a+\theta=a), a,\theta\in K.$$

Елемент θ іноді називають нульовим і позначають 0.

А4. Існування симетричного елемента відносно операції додавання

$$(\forall a)(\exists b)(a+b=\theta), a,b,\theta\in K.$$

Елемент b в такому випадку прийнято називати протилежним і позначати $b=-a$.

А5. Комутативність множення $(\forall a)(\forall b)(a \cdot b = b \cdot a), a,b \in K$.

А6. Асоціативність множення

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)), a,b,c \in K .$$

А7. Дистрибутивність множення відносно додавання

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c), a,b,c \in K .$$

Приведемо деякі властивості (теореми) кілець.

Теорема 1. Для довільних елементів кільця визначене віднімання $(\forall a)(\forall b)(\exists! c): a = b + c$. Елемент c у даному випадку називають різницею елементів a та b і позначають $c = a - b$.

Теорема 2. В довільному кільці різниця елементів має такі властивості:

а) $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$;

б) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$;

в) $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$;

г) $(a-b)\cdot(c-d)=(a \cdot c+b \cdot d)-(a \cdot d+b \cdot c)$.

§ 6. Впорядковані кільця

Бінарне відношення називається відношенням порядку, якщо воно транзитивне і антисиметричне. Бінарне відношення називається строгим порядком, якщо воно є транзитивним і антирефлексивне. Відношення порядку «>» на множині K називається лінійним порядком, якщо $(\forall a,b \in K)$ або $a > b$, або $b > a$, або $a = b$. Якщо «>» – відношення порядку, то пара $(K,>)$ називається впорядкованою множиною.

Означення 2. Алгебру $(K,+,\cdot,>)$ називають упорядкованим півкільцем (кільцем), якщо виконуються умови:

1) алгебра $(K,+,\cdot)$ – півкільце (кільце);
2) алгебраїчна система $(K,+,>)$ – лінійно і строго впорядкована півгрупа (група) з непорожньою множиною K^+ додатних елементів;
3) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\left(a > b \wedge c \in K^+ \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \wedge c \cdot a > c \cdot b\right), a,b,c \in K.$

Означення 3. Якщо в упорядкованому півкільці (кільці) K , крім умов 1)-3), виконується й умова $(\forall a)(\forall b)(\exists n)(n \cdot a > b), a \in K^+, b \in K, n \in N,$ то його називають архімедівськи впорядкованим півкільцем (кільцем), а відповідний порядок – архімедівським.

Означення 4. Нехай $(K,+,\cdot,\theta,>)$ – упорядковане кільце, $a \in K.$ Модулем елемента a називають $\max\{a,-a\}$ і позначають $|a|$.

Теорема 3. (Критерій порядку). Кільце $(K,+,\cdot,\theta)$ можна впорядкувати тоді і тільки тоді, коли множина K містить підмножину K^+, яка задовольняє умови:

1) $(\forall a)\left(a \in K^+ \Rightarrow a \neq \theta \wedge \overline{(-a) \in K^+}\right), a,\theta \in K;$

2) $(\forall a)\left(a \neq \theta \Rightarrow a \in K^+ \text{ або } (-a) \in K^+\right), a,\theta \in K;$

3) $(\forall a)(\forall b)\left(a \in K^+\right)\left(b \in K^+\right)\left(a+b \in K^+ \wedge a \cdot b \in K^+\right).$

Означення 5. Нехай $(K,+,\cdot,\theta,>)$ – упорядковане кільце і $a > b.$ Якщо в K не існує елемента c такого, що $a > c > b,$ то елемент b називають сусіднім справа з елементом a відносно порядку $>$. Аналогічно елемент b називають сусіднім зліва з елементом a, якщо $b > a$ і в K не існує елемента c такого, що $b > c > a.$

Означення 6. Упорядковане кільце $(K,+,\cdot,\theta,>)$ називають дискретним, якщо для кожного його елемента a існують сусідні з ним справа і зліва елементи. Якщо ж для довільних двох різних елементів $a,b \in K$ існує елемент $c \in K$,який міститься між елементами a та b, тобто $a > c > b$ або $b > c > a$, то кільце K називають щільним.

Теорема 4. Для того, щоб упорядковане кільце $(K,+,\cdot,\theta,>)$ було дискретним, необхідно і досить, щоб множина додатних елементів K^+ містила найменший елемент. Для того, щоб кільце K було щільним, необхідно і досить, щоб множина K^+ не містила найменшого елемента.

§ 7. Кільце цілих чисел

Означення 7. Алгебраїчна структура $(Z,+,\cdot,0,1,N)$ називається системою цілих чисел, а її елементи – цілими числами, якщо справедливі такі аксіоми:

1 група аксіом:

А1-А7 (аксіоми кільця);

2 група аксіом (аксіоми включення):

А8. $N \subset Z$ – півкільце натуральних чисел включається в кільце цілих чисел;

А9. Результат і правила операцій додаванння і множення, які виконуються в півкільці $(N,+,\cdot,S,1)$ натуральних чисел, зберігаються і для кільця $(Z,+,\cdot,0,1,N)$ цілих чисел:

$$(\forall a)(\forall b)\left(a \underset{N}{+} b = a \underset{Z}{+} b, a \underset{N}{\cdot} b = a \underset{Z}{\cdot} b\right), a,b \in N.$$

3 група аксіом:

А10. (аксіома мінімальності) Довільне кільце $(K,+,\cdot,0)$, яке містить півкільце $(N,+,\cdot,S,1)$, включає також і кільце $(Z,+,\cdot,0,1,N)$:

$$(\forall K)(N \subset K \Rightarrow Z \subset K).$$

Терема 5. Кожне ціле число є різницею двох натуральних чисел.

Наслідок. Кожне ціле число є або 0, або натуральним числом, або числом протилежним до натурального.

Теорема 6. Кільце цілих чисел можна єдиним способом лінійно і строго впорядкувати. Цей порядок архімедівський і є продовженням порядку в множині натуральних чисел, тобто порядок в півкільці $(N,+,\cdot,S,1)$ співпадає з порядком в кільці $(Z,+,\cdot,0,1,N)$.

Теорема 7. Система аксіом цілих чисел несуперечлива відносно аксіоматики Пеано.

Теорема 8. Система аксіом цілих чисел категорична.

Приведемо приклади розв'язування задач.

Приклад 1. Довести, що в Z: $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c.$

Розв'язання. Для того, щоб довести вказану рівність, відповідно до тереми 1 досить встановити таку рівність $(a-b)\cdot c + b\cdot c = a\cdot c.$

Згідно А7 будемо мати $(a-b)\cdot c + b\cdot c = ((a-b)+b)\cdot c.$ Застосуємо А1 і ще раз теорему 1: $(a-b)+b = b+(a-b) = a.$

Тоді $((a-b)+b)\cdot c = a\cdot c,$ отже $(a-b)\cdot c + b\cdot c = a\cdot c$, що й потрібно було довести.

Приклад 2. Довести, що група $(Z,+)$ ізоморфна групі $(mZ,+)$, де $m \in Z$ і $m \neq 0.$

Розв'язання. Задамо відображення φ множини цілих чисел Z в множину чисел кратних m , тобто mZ , таким чином: $(\forall a \in Z)\varphi(a) = ma,\ ma \in mZ.$ Зауважимо, що $m \neq 0.$ Тоді $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow ma = mb \Leftrightarrow a = b.$ Отже φ – взаємно однозначне відображення.

Покажемо, що відображення φ зберігає операцію додавання. Справді, $(\forall a)(\forall b)\varphi(a+b) = m\cdot(a+b) = m\cdot a + m\cdot b = \varphi(a)+\varphi(b), a,b\in Z$.

Тому відображення φ є ізоморфним, а, отже, структури $(Z,+)$ та $(mZ,+)$ ізоморфні.

<u>*Приклад 3.*</u> Довести, що для кожного цілого n вираз $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ є цілим числом.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}=\frac{n^5-5n^3+4n}{120}$, то для розв'язання вправи потрібно показати, що $\left(n^5-5n^3+4n\right)\vdots 120, \forall n\in Z$.

Маємо $n^5-5n^3+4n = n(n^2-1)\left(n^2-4\right) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, тобто це є добуток п'яти послідовних цілих чисел. Тому один із співмножників обов'язково кратний 3, один – 5, тоді весь добуток кратний $3\cdot 5 = 15$. Серед п'яти послідовних цілих чисел обов'язково є два послідовних парних числа, одне з яких кратне 4, тому добуток кратний $2\cdot 4 = 8$. Отже, даний добуток кратний $15\cdot 8 = 120$, що і потрібно було довести.

§ 8. Вправи для самостійного розв'язування

Середній рівень

1. Довести, що для будь-яких цілих a і b :
$$-(-a) = a, -(a+b) = -a-b, -(a-b) = -a+b.$$
2. Довести, що для будь-яких цілих a , b , c справедливо:
$$(a+b)-c = a+(b-c), (a-b)+c = a-(b-c).$$
3. Довести, що в множині цілих чисел виконується рівність:
$$(a+b)\cdot c = ac-bc, a,b,c\in Z.$$
4. Довести, що в множині цілих чисел виконується рівність:
$$(a-b)\cdot(c-d) = (ac+bd)-(ad+bc), a,b,c,d\in Z.$$
5. Довести, що для будь-якого цілого a , n натурального справедливо: $a+n\neq a$.
6. Довести, що для довільного цілого невід'ємного числа $n:(5^{2n}-1)$ ділиться на 24.
7. Довести, що для довільних цілих чисел n вираз (n^3-n) ділиться на 6.
8. Довести, що для довільних цілих чисел n вираз (n^5-n) ділиться на 30.

9. Чи можна в кільці цілих чисел виділити власну підмножину, яка сама буде кільцем?
10. Довести, що множина всіх цілих чисел, які діляться на 5, є кільцем.
11. Чи є кільцем множина всіх цілих степенів числа 3?
12. Довести, що в множині всіх цілих чисел застосовне правило скорочення відносно операції множення.
13. Довести, що число $\cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ$ не є цілим числом.
14. Нехай $(Z,+,\cdot)$ – кільце цілих чисел, $a \in Z$. Довести, що коли $a > 0$, то $(-a) < 0$.
15. Довести, що будь-яка додатна пара більша від будь-якої від'ємної пари.

Достатній рівень

1. Довести, що структура $(Z,+)$ ізоморфна структурі $(mZ,+)$ де $m \in Z, m \neq 0$.
2. Чи є ізоморфним відображення кільця всіх парних чисел на кільце всіх чисел, кратних 5 (відображення f, що задається співвідношенням: $f(2k) = 5k, k \in Z$)?
3. Довести, що рівняння $2x = 1$ нерозв'язне в Z.
4. Довести, що число $tg 22^\circ \cdot tg 82^\circ + tg 82^\circ \cdot tg 142^\circ + tg 142^\circ \cdot tg 202^\circ$ є цілим.
5. Чи існують цілі числа m і n, які задовольняють рівняння $m^2 + 1982 = n^2$?
6. Довести, що число $\cos^2 73^\circ + \cos^2 47^\circ + \cos 73^\circ \cdot \cos 47^\circ$ не є цілим.
7. Довести, що число $8\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sec\left(\frac{\pi}{7}\right)$ є цілим.
8. Довести, що $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \vdots 7$.
9. Довести, що добуток додатної і від'ємної пар є пара від'ємна.
10. Довести, що із m різних цілих чисел завжди можна вибрати таку пару різних чисел, різниця яких ділиться на $m-1$.
11. Довести, що $(a^2 + b^2) \vdots 7$ тоді і тільки тоді, коли $a \vdots 7$ і $b \vdots 7$.
12. Довести, що сума кубів трьох послідовних цілих чисел ділиться на 9.
13. Довести, що множини Z і N рівнопотужні.
14. Довести, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ при всіх цілих x набуває цілих значень тоді і тільки тоді, коли числа $2a, a+b, c$ – цілі.
15. Чи можна побудувати на площині такий правильний трикутник, щоб всі три його вершини мали цілі координати? А в просторі R_3?
16. Чи можна побудувати на площині такий правильний шестикутник, щоб всі його вершини мали цілі координати?
17. Довести, що числа вигляду $5n \pm 2$ при кожному натуральному n не є квадратами цілих чисел.

18. Чи можуть довжини двох катетів піфагорового трикутника (прямокутного трикутника з цілочисельними сторонами) бути непарними?

19. Визначити, для яких натуральних n є цілим числом дріб $\frac{n^3 - n + 2}{n - 1}$?

20. Довести, що кільце $(Z, +, \cdot)$ має безліч підкілець, відмінних від нього самого.

Високий рівень

1. Усі цілі числа від 1 до $2n$ включно розміщено в довільному порядку. До кожного числа додали номер місця, на якому воно стоїть. Довести, що серед утворених сум принаймні два числа при діленні на $2n$ даватимуть однакову остачу.
2. Довести, що довжина принаймні одного з катетів піфагорового трикутника ділиться на 3.
3. Довести, що для будь-якого $n \in Z$ $(tg^{2n} 15^\circ + ctg^{2n} 15^\circ) \in Z$.
4. Знайти всі можливі пари $(x, y)(x, y \in Z)$, що задовольняють співвідношення $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$.
5. Довести, що рівність $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 1599$ не має місця при будь-яких цілих $x_1, x_2, ..., x_{14}$.
6. Довести, що корені рівняння $2\arccos\sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} = \arcsin\left(\frac{2x}{5}\right)$ є цілі числа.
7. Знайти всі цілі значення n, для яких число $(n+2)^4 - n^4$ є кубом цілого числа.
8. Усі цілі числа довільно розбито на 2 групи. Довести, що хоч в одній, з цих груп знайдуться три числа, які утворюють арифметичну прогресію.
9. Довести, що сума $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ ні при якому $n \in N$ не може бути цілим числом.
10. Показати, що ні одна з 5 названих умов не є наслідком інших:
    1) для будь-яких $a, b \in Z : a > b \Rightarrow a \neq b$;
    2) для будь-яких $a, b, c \in Z : a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$;
    3) для будь-яких $a, b \in Z : a > b \Rightarrow a + 1 > b + 1$;
    4) для будь-яких $a, b \in Z : a > b \Rightarrow a - 1 > b - 1$;
    5) $1 > 0$.

Розділ 3

ПОЛЕ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

§ 9. Аксіоматика поля

Розширення множини цілих чисел до множини раціональних чисел будуть виконуватися по загальному плану, вказаному в § 5 для довільного розширення. В даному випадку ставиться задача розширення кільця цілих чисел Z до множини P, де задані операції додавання і множення мають ті властивості, які вони мали в Z, причому ділення на елементи множини Z, відмінні від нуля, завжди можна виконувати. Аналогічно як і для кільця цілих чисел спочатку введемо поняття поля.

Означення 1. Алгебру $(P,+,\cdot,\theta)$ називають полем, якщо виконуються такі аксіоми:

А1-А7 (аксіоми кільця);

А8. (існування одиничного елемента) $(\exists e)(\forall a)(e\cdot a=a), e,a\in P;$

А9. (існування симетричного елемента відносно операції множення)

$$(\forall a, a\neq\theta)(\exists b)(a\cdot b=e), a,b\in P;$$

(В такому випадку b прийнято називати оберненим і позначати $b=\dfrac{e}{a}=a^{-1}=e:a$).

Теорема 1. В довільному полі P існує частка довільних його елементів a та b , $b\neq\theta,$ тобто $(\forall a)(\forall b, b\neq\theta)(\exists c)(a=c\cdot b), a,b,c\in P.$

Елемент c прийнято називати часткою елементів a та b і позначати $c=\dfrac{a}{b}=a\cdot b^{-1}=a:b.$

Теорема 2. (Властивості частки) Вважаючи, що всі частки існують, справедливі такі властивості часток:

а) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c;$

б) $\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d\pm b\cdot c}{bd};$

в) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d};$

г) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}.$

§ 10. Поле раціональних чисел

Означення 2. Алгебру $(Q,+,\cdot,0,Z)$ називають полем раціональних чисел, якщо виконуються такі аксіоми:

I група аксіом:

A1-A9 (аксіоми поля);

II група аксіом (аксіоми включення):

A10. $Z \subset Q$ (кільце цілих чисел включається в поле раціональних чисел);

A11. $(\forall a)(\forall b)\quad a \underset{Z}{+} b = a \underset{Q}{+} b; a \underset{Z}{\cdot} b = a \underset{Q}{\cdot} b$.

Результат і правила операцій додавання і множення, що виконуються в кільці $(Z,+,\cdot,1,0,N)$, зберігаються і для поля раціональних чисел $(Q,+,\cdot,0,Z)$.

III група аксіом (аксіома мінімальності):

A12. $(\forall P)(Z \subset P \Rightarrow Q \subset P)$. Довільне поле $(P,+,\cdot,0)$, яке містить кільце $(Z,+,\cdot,1,0,N)$, включає також і поле $(Q,+,\cdot,0,Z)$.

Теорема 3. Множина раціональних чисел співпадає з множиною допустимих часток цілих чисел.

Означення 3. Поле P називають архімедівськи впорядкованим, якщо воно має властивість: $(\forall a)(\exists n)(n \cdot e > a), a, e \in P, n \in N$.

Теорема 4. Поле раціональних чисел можна єдиним способом лінійно і строго впорядкувати. Цей порядок архімедівський і він є продовженням порядку в множині цілих чисел.

Теорема 5. Система аксіом раціональних чисел несуречлива відносно аксіоматики цілих чисел.

Теорема 6. Система аксіом раціональних чисел категорична.

Наведемо приклади розв’язування задач.

<u>*Приклад 1.*</u> Довести, що $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0$, де $b \neq 0, a, b \in Z$.

<u>*Розв’язння.*</u> Згідно теореми 1 і аксіоми 7 про дистрибутивність операції множення відносно операції додавання будемо мати:

$$\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = a \cdot b^{-1} + (-a) \cdot b^{-1} = (a + (-a)) \cdot b^{-1} .$$

За аксіомою 4 $a + (-a) = 0$, але в кільці добуток будь-якого елемента на нульовий є нульовим елементом, тому $(a + (-a)) \cdot b = 0$. Отже, $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0$.

Приклад 2. Довести, що число $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$ є раціональним.

Розв'язання. Оскільки $29-12\sqrt{5}=(2\sqrt{5}-3)^2$ і $2\sqrt{5}-3>0$, то $3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}=3-2\sqrt{5}+3=6-2\sqrt{5}$. Але $6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)^2$ і $\sqrt{5}-1>0$, тому $3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$. Таким чином,

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}=\sqrt{1}=1.$$

Оскільки $1\in Q$, то досліджуване число є раціональним.

Приклад 3. Довести, що яке б не було додатне раціональне число r, що задовольняє умову $r^2<2$, завжди існує більше раціональне число $r+h(h>0)$, для якого $(r+h)^2<2$.

Розв'язання. Нехай $h>0$ і $h<1$, тоді $h^2<h$, і тому

$$(r+h)^2=r^2+2rh+h^2<r^2+(2r+1)h.$$

Якщо $r^2+(2r+1)h=2$, то $(r+h)^2<2$. Але рівність $r^2+(2r+1)h=2$ можлива лише при $h=\dfrac{(2-r^2)}{(2r+1)}$. Для $r\in Q, r>0$ і $r^2<2, h\in Q$ і $h>0$. При $r>0, h=\dfrac{(2-r^2)}{(2r+1)}<1$, якщо $r>\sqrt{2}-1$. Якщо ж $r\le\sqrt{2}-1$, то в ролі $h+r$ можемо взяти раціональне число 1. Отже, завжди для додатного раціонального r такого, що $r^2<2$, можемо вказати раціональне число, де $h>0$, для якого $(r+h)^2<2$.

§ 11. Вправи для самостійного розв'язування

Середній рівень

1. Вивести правила додавання, віднімання і ділення дробів, користуючись аксіоматикою раціональних чисел.
2. Довести, що поле Q – щільне.
3. Довести, що для будь-яких $a,b,c\in Q, c\neq 0, ac=bc \Leftrightarrow a=b$.
4. Довести, що якщо r – довільне ірраціональне число, $q\neq 0$ – раціональне число, то числа: 1) $r+q$; 2) $r\cdot q$; 3) $\dfrac{r}{q}$; 4) r^{-1} є ірраціональними.

5. Довести, що число $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$ є раціональним.
6. Чи є число $\sqrt{6}+\sqrt{9}+\sqrt{19}$ раціональним?
7. Довести, що не є раціональним числом $\sqrt[3]{2}$.
8. При якій умові $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}, a,b,c,d\in Z$?
9. Яке з чисел більше: $\dfrac{n}{m}$ чи $\dfrac{n^2}{m^2}$?
10. При якій умові $\dfrac{(a^3+b^3)}{(a^3+c^3)}=\dfrac{(a+b)}{(a+c)}$?
11. Довести, що не існує дробу, квадрат якого дорівнює простому числу.
12. Який вигляд мають два дроби, якщо їх різниця дорівнює їхньому добутку?
13. Чи існують додатні раціональні числа a і b такі, що $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2}$?
14. Довести, що числа раціональні:
    1) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$;
    2) $tg20^\circ\cdot tg80^\circ\cdot tg140^\circ$;
    3) $tg\left(\arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right)\right)$.
15. Довести, що коли $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{b}{c}$, то $a=b=c$.

Достатній рівень

1. Довести, що коли дріб $\dfrac{a}{b}$ нескоротний, то $\dfrac{(a+b)}{a\cdot b},\dfrac{(a-b)}{a\cdot b}$ – також нескоротні дроби.
2. Довести, що рівняння $x^3+x^2y+y^3=0$ не має раціональних коренів, крім $x=0, y=0$.
3. Довести, що коли $n\in N$ і $n>1$, а p – просте число, то $\sqrt[n]{p}$ не дорівнює раціональному числу.
4. Довести, що сума взаємно обернених додатних дробів завжди не менша від 2.
5. Довести, що для довільних двох раціональних чисел a і b, які не дорівнюють нулю одночасно, можна знайти іншу пару раціональних чисел c і d таких, що $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=1$.

6. Довести раціональність чисел:

$$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}};\ \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

7. Яке з чисел більше: $\frac{m}{n}$ чи $\frac{(m-k)}{(n-k)}, m, n, k \in Z$?

8. Довести, що корені рівняння є раціональними числами

$$arctg\,2x + arctg\,3x = \frac{3\pi}{4}.$$

9. Відомо, що дріб $\frac{a}{b}$ скоротний $(a, b \in Z)$. Чи є скоротним дріб $\frac{(a-b)}{(a+b)}$? Якщо так, то чи правильне обернене твердження?

10. Довести, що коли $\cos\alpha = \frac{p}{q}$, де p і q – цілі числа, то $q^n \cos n\alpha$ – ціле, n – натуральне.

11. Довести, що будь-яке раціональне число, відмінне від нуля, є періодом функції Діріхле.

12. Довести, що число $1+\sqrt{3}$ не можна подати у вигляді квадрата числа $a+b\sqrt{3}$, де $a, b \in Q$.

13. Знайти дроби $\frac{a}{b}$ $(a < b)$, кожен з яких із збільшенням чисельника і знаменника на 1 перетворюється в $\frac{1}{2}$.

14. Довести, що сума двох додатних нескоротних дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ тільки тоді дорівнюватиме цілому числу, коли знаменники цих дробів будуть рівні між собою.

15. Чи існують два раціональні дроби, сума і добуток яких цілі числа?

16. Чи існують два раціональні дроби, сума і сума квадратів яких цілі числа?

17. Раціональне чи ірраціональне число $\sqrt{\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}}$?

18. Довести, що число $\lg tg30^\circ \cdot \lg tg31^\circ \cdots \lg tg60^\circ$ є раціональним.

19. Чи є число раціональним $\sqrt{1+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$?

20. Знайти всі раціональні значення x, при яких $y=\sqrt{x^2+x+1}$ є раціональним числом.

Високий рівень

1. Серед чисел вигляду $a_n = \sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}, n \in N$, знайти раціональні.
2. Дано дійсне число $\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$. Утворимо таку послідовність $a_1 = \alpha, a_2 = 0,\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...\ , a_3 = 0,\alpha_3\alpha_4...\alpha_n...\ ,..., a_n = 0,\alpha_{n+1}...\alpha_n...$. (Кожне наступне число отримуємо із попереднього викреслюванням першої цифри після коми). Відомо, що послідовність $\{a_n\}$ збіжна. Довести, що α – раціональне число.
3. В опуклому чотирикутнику всі сторони і діагоналі виражаються раціональними числами. Довести, що відрізки, на які діагоналі розбиваються точкою перетину, теж будуть виражатися раціональними числами.
4. Знайти всі раціональні значення x, при яких вираз $\sqrt{x^2+bx+c}$, де $b,c \in Q$, є раціональне число.
5. Вектор a має одиничну довжину і раціональні координати в R_3. Доведіть, що серед перпендикулярних до a векторів одиничної довжини знайдеться вектор з раціональними координатами.
6. Всі додатні раціональні числа є членами послідовності $\frac{1}{1};\frac{2}{1};\frac{1}{2};\frac{3}{1};\frac{2}{2};\frac{1}{3};\frac{4}{1};\frac{3}{2};...,$ в якій з двох чисел йде раніше таке, в якому менша сума чисельника і знаменника, а якщо ці суми рівні, то – той дріб, в якого менший знаменник. З яким номером стоїть число $\frac{m}{n}$?
7. У восьмикутнику всі кути рівні, а довжини всіх сторін – раціональні числа. Довести, що протилежні сторони восьмикутника рівні між собою.
8. Довести, що коли число сторін правильного многокутника дорівнює $3\cdot 2^n$, то не існує прямокутної системи координат, в якій всі його вершини мали б раціональні координати.
9. Довести, що яке б не було додатне раціональне число s, що задовольняє умову $s^2 > 2$, завжди існує менше раціональне число $s-k(k>0)$, для якого виконується умова $(s-k)^2 > 2$.
10. Знайти правильний дріб, що перевищує $\frac{1}{3}$, знаючи, що від збільшення його чисельника на деяке число і множення знаменника на те саме число величина дробу не зміниться.

Розділ 4

ПОЛЕ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

§ 12. Необхідність розширення поля раціональних чисел

Для практичних цілей (різноманітних обчислень, розрахунків, вимірювань величин, тощо) раціональних чисел цілком досить. Проте їх не досить для потреб теорії.

Ще в стародавній Греції було відоме існування несумірних відрізків. Намір отримати для відношення довжин відрізків точне числове значення повинен би привести до поняття ірраціонального числа. Проте строге обґрунтування цього поняття виявилось не під силу стародавнім вченим. З розвитком аналізу в XVII-XVIII ст. дійсні числа стають основним об'єктом досліджень. При цьому з ними оперували на основі наукових уявлень, зображаючи числа точками прямої лінії. До другої половини XIX ст. потреба побудови теорії дійсного числа назріла.

Крім вище сказаного, додамо, що в полі раціональних чисел Q кожне рівняння вигляду $bx = a$, де $b \neq 0$, має розв'язок. Але вже рівняння другого степеня не завжди має розв'язок у полі раціональних чисел. Наприклад, рівняння $x^2 - 2 = 0$ в полі Q нерозв'язне. Поля раціональних чисел не досить і для добування кореня будь-якого натурального степеня з довільного додатного раціонального числа.

Ці та інші проблеми приводять до потреби розширення поля раціональних чисел. В 70-х роках XX ст. майже одночасно виникли три наукові школи еквівалентних теорій дійсних чисел:

1. Школа Вейєрштрасса – теорія дійсних чисел як нескінченних десяткових рядів.
2. Школа Кантора – теорія дійсних чисел як фундаментальних послідовностей раціональних чисел.
3. Школа Дедекінда – теорія дійсних чисел як перерізів в множині раціональних чисел, що завершується перерізами в множині дійсних чисел.

У цій темі ми будемо притримуватися побудови дійсного числа за Кантором.

§ 13. Нормовані поля

Поняття норми є узагальненням поняття модуля. Модуль визначається в упорядкованих полях (кільцях), норма – в довільних полях (кільцях).

Означення 1. Говорять, що в полі P задано норму ν, якщо ν – функція з наступними властивостями:

1) $(\forall a)(\nu(a) \geq 0$ і $\nu(a) = 0 \Leftrightarrow a = \theta), a \in P;$

2) $(\forall a)(\forall b)\big(\nu(a\cdot b)=\nu(a)\cdot\nu(b)\big), a,b\in P;$

3) $(\forall a)(\forall b)\big(\nu(a+b)\le\nu(a)+\nu(b)\big), a,b\in P.$

Поле P , в якому задано норму ν , називають нормованим полем.

Приклади норм

1. Нехай $(\forall a)(\nu(a)=|a|), a\in P.$

   Функція ν в цьому випадку є нормою, яку називають природною.

2. $(\forall a)\left(\nu(a)=\begin{cases}1, \text{якщо } a\ne\theta\\ 0, \text{якщо } a=\theta\end{cases}\right), a\in P.$

   Визначену так норму називають тривіальною.

3. Нехай $P=Q$ – поле раціональних чисел, p – просте число, θ – раціональне число, яке задовольняє умову: $0<\theta<1$. Кожне раціональне число $q\ne0$ можна подати у вигляді $q=p^n\cdot\frac{a}{b}$, де $n\in Z$, а цілі числа a та b взаємно прості з p . Наприклад, при p =3 маємо:

$$q=\frac{5}{6}=3^{-1}\cdot\frac{5}{2}, n=-1;$$
$$q=\frac{4}{7}=3^{0}\cdot\frac{4}{7}, n=0 \text{ і т. д.}$$

Тоді функція $\nu_p(q)=\theta^n, q\ne0$ і $\nu_p(0)=0$ є нормою в полі раціональних чисел. Її називають p – адичною нормою.

Властивості норми

1) $\nu(e)=1;$

2) $\nu(-e)=1;$

3) $(\forall a)(\nu(-a)=\nu(a));$

4) $(\forall a)\left(a\ne\theta\Rightarrow\nu(\frac{1}{a})=\frac{1}{\nu(a)}\right), a\in P;$

5) $(\forall a)(\forall b)\left(b\ne\theta\Rightarrow\nu(\frac{a}{b})=\frac{\nu(a)}{\nu(b)}\right), a,b\in P;$

6) $(\forall a)(\forall b)\big(|\nu(a)-\nu(b)|\le\nu(a-b)\le\nu(a)+\nu(b)\big), a,b\in P.$

Введену вище норму називають архімедовою. Якщо умову (3) норми замінити сильнішою умовою

3^0) $(\forall a)(\forall b)\big(\nu(a+b) \le \max\{\nu(a), \nu(b)\}\big), a, b \in P,$

то отримаємо означення неархімедової норми. Так, наприклад, p – адична норма в полі Q раціональних чисел є неархімедовою. Для неархімедової норми справедлива властивість

7) $(\forall n)(\nu(n \cdot e) \le 1), n \in N.$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Довільне нетривіальне нормування поля раціональних чисел співпадає із абсолютною величиною, або ж з p – адичним нормуванням.

§ 14. Збіжні і фундаментальні послідовності в нормованих полях

Позначимо через Q^+ – множину раціональних додатних чисел.

Означення 2. Послідовність (a_n) елементів поля P називається обмеженою, якщо виконується умова:

$$(\exists \varepsilon)(\exists n_\varepsilon)(\forall n)(n > n_\varepsilon \Rightarrow \nu(a_n) < \varepsilon), \varepsilon \in Q^+, n, n_\varepsilon \in N.$$

Означення 3. Послідовність (a_n) елементів поля P називається фундаментальною, якщо виконується умова:

$$(\forall \varepsilon)(\exists n_\varepsilon)(\forall k)(\forall n)(k > n_\varepsilon \wedge n > n_\varepsilon \Rightarrow \nu(a_k - a_n) < \varepsilon), \varepsilon \in Q^+, n, n_\varepsilon, k \in N.$$

Означення 4. Послідовність (a_n) елементів поля P називається збіжною до елемента $a \in P$, якщо виконується умова:

$$(\forall \varepsilon)(\exists n_\varepsilon)(\forall n)(n > n_\varepsilon \Rightarrow \nu(a_n - a) < \varepsilon), \varepsilon \in Q^+, n, n_\varepsilon \in N.$$

При цьому елемент a називають границею послідовності (a_n) і позначають $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \theta$, то послідовність (a_n) називають нульовою.

Означення 5. Будемо говорити, що послідовності (a_n) і (b_n) елементів поля P знаходяться у відношенні $\sim$, якщо послідовність $(a_n - b_n)$ збігається до нуля, тобто

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon)(\exists n_\varepsilon)(\forall n)(n > n_\varepsilon \Rightarrow \nu(a_n - b_n) < \varepsilon), \varepsilon \in Q^+, n, n_\varepsilon \in N.$$

Збіжні та фундаментальні послідовності мають такі властивості:

Теорема 2. Нехай (a_n) – послідовність елементів поля P. Тоді:

1) якщо послідовність (a_n) фундаментальна, то вона є обмеженою;

2) якщо послідовність (a_n) збіжна, то вона є фундаментальною.

Для фундаментальних і збіжних послідовностей справедливі арифметичні теореми.

Теорема 3. Нехай (a_n) та (b_n) – фундаментальні послідовності елементів поля P. Тоді фундаментальними є також послідовності $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n), (a_n \cdot b_n)$. Якщо ж, крім того, послідовність (b_n) така, що $(\forall n) b_n \neq \theta$ і існує $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n, b \neq \theta$, то фундаментальною є також послідовність $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

Теорема 4. Нехай (a_n) та (b_n) – послідовності елементів поля P, які збігаються до елементів a та b відповідно. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b.$$

Якщо, крім того, $(\forall n) b_n \neq \theta, b \neq \theta,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}.$

Теорема 5. Відношення $\sim$ послідовностей елементів поля P має властивості:

1) рефлексивності;
2) симетричності;
3) транзитивності.

Таким чином, відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності на множині послідовностей.

Теорема 6. Нехай (a_n) та (b_n) – еквівалентні послідовності поля P. Тоді справедливі властивості:

1) (a_n) обмежена $\Leftrightarrow$ (b_n) – обмежена;
2) (a_n) фундаментальна $\Leftrightarrow$ (b_n) – фундаментальна;
3) (a_n) збіжна до $a \Leftrightarrow (b_n)$ – збіжна до a.

Означення 6. Довільне впорядковане поле P називається повним, якщо будь-яка фундаментальна послідовність (a_n) елементів цього поля збігається до елемента з P тобто $(\exists a) a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, a \in P.$

Означення 7. Повне, архімедівськи впорядковане поле називається неперервним.

§ 15. Означення поля дійсних чисел

В полі раціональних чисел Q не завжди виконувана операція граничного переходу для фундаментальної послідовності, тобто поле Q не є повним. А тому розширимо поле Q до нового впорядкованого поля R, в якому довільна фундаментальна послідовність мала б границю. Як і у випадку цілих та раціональних чисел ми намагатимемося мінімально розширити поле раціональних чисел Q до нового поля – поля дійсних чисел R – з умовою, щоб R було повним і архімедівськи впорядкованим полем, або згідно означення 7 поле R повинно бути неперервним. Але виявляється, що умова мінімальності буде виконуватися автоматично, оскільки в силу неперервності поле буде визначатися однозначно до ізоморфізму. Таким чином, ми приходимо до

Означення 8. Системою дійсних чисел R називається архімедівськи впорядковане поле, кожна фундаментальна послідовність елементів якого збігається до елемента з цього поля, або, іншими словами, алгебраїчна структура $(R,+,\cdot,0,1,>)$ називається системою дійсних чисел, а її елементи – дійсними числами, якщо справедливі такі аксіоми:

I група аксіом (аксіоми поля) A1-A9;

II група аксіом (аксіоми впорядкованості):

A10. $(\forall a)(\overline{a > a}), a \in R;$

A11. $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c), a,b,c \in R;$

A12. $(\forall a)(\forall b)(a \neq b \Rightarrow a > b \vee b > a), a,b \in R;$

A13. $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a > b \Rightarrow a + c > b + c), a,b,c \in R;$

A14. $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc), a,b,c \in R;$

A15. $(\forall a)(\forall b)(a > 0 \Rightarrow (\exists n) na > b), a,b \in R, n \in N;$

III група аксіом (аксіома повноти):

A16. Для будь-якої фундаментальної послідовності (a_n) елементів поля R існує в R елемент a такий, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Теорема 7. Довільне архімедівськи впорядковане поле містить підполе, ізоморфне полю раціональних елементів.

Теорема 8. Впорядковане поле є архімедівськи впорядкованим полем тоді і тільки тоді, коли кожен його елемент є границею фундаментальної послідовності раціональних елементів.

Означення 9. Послідовність (a_n) елементів поля R називається додатною, якщо справедливе твердження:

$$(\exists\varepsilon)(\exists n_\varepsilon)(\forall n)(n > n_\varepsilon \Rightarrow a_n > \varepsilon), \varepsilon \in Q^+, n_\varepsilon, n \in N,$$

і позначають $(a_n) > 0$.

Означення 9'. Послідовність (a_n) елементів поля R назвемо від'ємною, якщо має місце твердження:

$$(\exists\varepsilon)(\exists n_\varepsilon)(\forall n)(n > n_\varepsilon \Rightarrow a_n > -\varepsilon), \varepsilon \in Q^+, n_\varepsilon, n \in N,$$

і будемо позначати $(a_n) < 0$.

Теорема 9. Нехай (a_n) – фундаментальна і ненульова послідовність елементів поля R. Тоді послідовність (a_n) або додатна, або від'ємна.

Теорема 10. Поле дійсних чисел можна впорядкувати не більш як одним способом.

Теорема 11. Система аксіом дійсних чисел несуперечлива (відносно поля раціональних чисел).

Теорема 12. (Про існування кореня будь-якого натурального степеня з додатного числа) $(\forall a)(\forall k)\Big(a > 0 \Rightarrow (\exists b)\big(b^k = a\big)\Big), a, b \in R, k \in N$.

§ 16. Зображення дійсних чисел

Зображення дійсних чисел системними дробами

З кожною послідовністю (a_n) дійсних чисел можна зіставити послідовність (S_n), де $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ і вираз $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, який називають рядом. Якщо послідовність (S_n) збігається до дійсного числа S, то S називають сумою ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = S$.

Теорема 13. Якщо $q \geq 2$ – натуральне число, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^{-k} = \dfrac{q}{(q-1)}$.

Теорема 14. Нехай $q \geq 2$ – натуральне число і (a_n) – послідовність цілих невід'ємних чисел, причому $(\forall n)\quad 0 \leq a_n \leq q-1$. Тоді ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k q^{-k}$

збігається, його сума S задовольняє умову $a_0 \le S \le a_0 + 1$, причому рівність $S = a_0 + 1$ можлива лише у випадку, коли $(\forall n)(n \ne 0 \Rightarrow a_n = q - 1)$.

Теорема 15. Нехай $q \ge 2$ – ціле число. Кожне дійсне число S можна подати єдиним способом у вигляді

$$S = \pm q^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{-k}, \tag{1}$$

причому:

1) якщо $S > 0$, то перед правою частиною рівності (1) беремо знак «+», якщо $S < 0$, то беремо знак «–»;
2) якщо $S = 0$, то $n = 0 \wedge (\forall k)(k \ge 0 \Rightarrow a_k = 0), k \in N$ (тобто $a_0 = a_1 = ... = a_n = ... = 0$);
3) якщо $S \ne 0$, то n і всі a_k – цілі, крім того,

$$a_0 > 0 \wedge (\forall k)(k > 0 \Rightarrow 0 \le a_k \le q-1) \wedge \overline{(\exists n_0)(\forall k)}(\overline{k > n_0} \Rightarrow a_k = q-1)$$

(умова неіснування періодичного дробу з періодом $q-1$).

Зображення дійсних чисел ланцюговими дробами

За алгоритмом Евкліда кожне раціональне число $\frac{a}{b}$ можна подати у вигляді скінченного ланцюгового дробу:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + ... + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

що скорочено записують так: $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$, де $a_0 \in Z$, а $a_1, a_2, ..., a_n$ – натуральні числа, $a_n > 1$.

Дріб вигляду $\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n], 0 < k < n,$ називають підхідним дробом *k*-го порядку.

Властивості підхідних дробів:

1) Якщо $a_0 > 0$, то $P_1 < P_2 < ... < P_n < ...$;
2) $Q_0 \le Q_1 < Q_2 < ... < Q_n < ...$;
3) $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < ... < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < ...$;

4) $\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > ... > \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} > ...;$

5) $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}};$

6) $P_0 = a_0, P_1 = P_0 \cdot a_1 + 1, ..., P_n = P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2};$

7) $Q_0 = 1, Q_1 = a_1, ..., Q_n = Q_{n-1} \cdot a_n + Q_{n-2};$

8) $\left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| = \frac{1}{Q_n \cdot Q_{n-1}}.$

Означення 10. Нескінченним ланцюговим дробом називають вираз вигляду

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{...}}}}}$$

або скорочено записують так:

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n, ...], \tag{2}$$

де $a_0 \in Z$, а $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – натуральні числа.

Означення 11. Нескінченний ланцюговий дріб називають збіжним, якщо послідовність підхідних дробів $\left(\frac{P_n}{Q_n} \right)$ збігається, тобто

$$(\exists \alpha) : \alpha = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{P_n}{Q_n} \right).$$

В такому випадку число α називають значенням ланцюгового дробу і записують $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, ...],$. Якщо $\left(\frac{P_n}{Q_n} \right)$ – послідовність підхідних ланцюгових дробів, то в силу їх властивостей 3) – 5) система сегментів $\left[\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}; \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} \right]$ є стяжною. Тому границя послідовності підхідних ланцюгових дробів завжди існує.

Означення 12. Ланцюговий дріб $\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, ...]$ називають повною часткою або остачею дробу (2).

Теорема 16. Якщо α – значення ланцюгового дробу (скінченного або нескінченного), то для будь-якого $k > 1$ справедлива рівність:

$$\alpha = \frac{a_k P_{k-1} + P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Теорема 17. Будь-якому дійсному ірраціональному числу відповідає єдиний нескінченний ланцюговий дріб, що має це число своїм значенням, і навпаки: будь-який нескінченний ланцюговий дріб визначає одне і тільки одне дійсне ірраціональне число.

Теорема 18. (Лагранжа). Кожна дійсна квадратична ірраціональність розвивається в періодичний ланцюговий дріб.

Теорема 19. Кожний періодичний ланцюговий дріб є розвиненням деякої квадратичної ірраціональності.

Наведемо приклади розв'язування задач.

Приклад 1. Довести, що для будь-яких $a, b \in R$ $-a-b = -(a+b)$.

Розв'язання. Додамо до обох частин рівності, що доводиться, число $(a+b)$, будемо мати

$$-a-b=-(a+b) \Leftrightarrow (a+b)+(-a-b)=(a+b)+(-(a+b)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b+a)+(-a-b)=0 \Leftrightarrow b+(a+(-a))-b=0 \Leftrightarrow b+0+(-b)=$$
$$=0 \Leftrightarrow b+(-b)=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Остання рівність має місце, а, отже, мають місце і всі рівносильні рівності, які записані вище.

Приклад 2. Розвинути в ланцюговий дріб число $a = \sqrt{2}$.

Розв'язання. Знайдемо цілу частину числа $a : [a] = a_0 = \left[\sqrt{2}\right] = 1$. Тоді $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$, звідки $\alpha_1 = \dfrac{1}{(\alpha - a_0)}$, тобто $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$. Тому $a_1 = [\alpha_1] = \left[\sqrt{2}+1\right] = 2$. Аналогічно $\alpha_1 = a_1 + \dfrac{1}{\alpha_2}$, звідки

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \alpha_1.$$

Далі $a_2 = [\alpha_2] = \left[\sqrt{2}+1\right] = 2$. Наступні неповні частки будуть повторюватися, тобто матимемо: $\alpha = \sqrt{2} = [1; 2, 2, \ldots] = [1; (2)]$, де запис (2) означає, що неповна частка 2 періодично повторюється.

Приклад 3. Довести, що поле раціональних чисел не є повним.

Розв'язання. Для доведення справедливості твердження прикладу 3 досить вказати деяку фундаментальну послідовність раціональних чисел, яка не збігається до раціонального числа. Згідно з теоремою 19 із прикладу 2 слідує, що число $\sqrt{2}$ – ірраціональне, тобто $\overline{\sqrt{2} \in Q}$. За означенням 11 $\left(\sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{Q_n} \right)$, де $\left(\dfrac{P_n}{Q_n} \right)$ – послідовність підхідних дробів числа $\sqrt{2}$. Так як послідовність $\left(\dfrac{P_n}{Q_n} \right)$ – збіжна, то за теоремою 2 (частина 2) вона є фундаментальною. Крім того, P_n та $Q_n \in Z$, тоді $\left(\dfrac{P_n}{Q_n} \right) \in Q$. Таким чином, послідовність підхідних дробів числа $\sqrt{2}$ є фундаментальною в полі Q, але незбіжною в цьому полі, тобто поле Q не є повним.

Приклад 4. Знайти квадратичну ірраціональність α, якщо α розвивається в такий ланцюговий періодичний дріб: $\alpha = [2;(5)]$.

Розв'язання. Оскільки період починається з другої цифри розвинення числа α в ланцюговий дріб і довжина періоду (кількість цифр у періоді) рівна 1, то $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 5$. Тому $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots$. Із запису числа α у вигляді ланцюгового дробу отримуємо, що $\alpha = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \ldots}}$, або ж

$\alpha = 2 + \dfrac{1}{\alpha_1}$, а також $\alpha = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$.

З двох останніх рівностей маємо $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - 2}, \alpha_2 = \dfrac{\alpha - 2}{11 - 5\alpha}$. Враховуючи те, що $\alpha_1 = \alpha_2$, запишемо таке рівняння $\dfrac{1}{\alpha - 2} = \dfrac{\alpha - 2}{11 - 5\alpha}$. Розв'яжемо його і будемо мати $\alpha = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{29}}{2}$. Але $[\alpha] = 2$ за умовою, тому $\alpha = \dfrac{\sqrt{29} - 1}{2}$. Часто для знаходження значень α_n, P_n та Q_n зручно користуватися рекурентними формулами (6), (7), а також формулою із теореми 16.

Оскільки формули для P_{n+1} та Q_{n+1} аналогічні, то результати обчислень записують у формі таблиці: в першому рядку виписують значення a_n, в другому – P_n, в третьому – Q_n.

Таблиця

a_n	$a_0 = 2$	$a_1 = 5$	5	5	…
P_n	$P_0 = 2$	$P_1 = a_0 a_1 + 1 = 11$	$11 \cdot 5$+2=57	$57 \cdot 5$+11=296	…
Q_n	$Q_0 = 2$	$Q_1 = a_1 = 5$	$5 \cdot 5$+1=26	$26 \cdot 5$+5=135	…
	0	1	2	3	...

Заповнюють нульовий і перший стовпці. Далі заповнення таблиці йде за алгоритмом: останній n-й обчислений член другого чи третього рядка множимо на наступне значення a_{n+1} і до отриманого добутку додаємо попередній член рядка.

Отже, для випадку $\alpha = \left[2;(5)\right]$ маємо:

$$\frac{P_0}{Q_0} = 1; \frac{P_1}{Q_1} = \frac{11}{5}; \frac{P_2}{Q_2} = \frac{57}{26}; \frac{P_3}{Q_3} = \frac{296}{135}...$$

Для формули з теореми 16 отримаємо

$$\alpha = \frac{\alpha_2 P_1 + P_0}{\alpha_2 Q_1 + Q_0} = \frac{11\alpha_2 + 2}{5\alpha_2 + 1}.$$

<u>*Приклад 5.*</u> Довести, що $sin 10^\circ$ – ірраціональне число.

<u>*Розв'язання.*</u> Відомо, що $sin 3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$. Тоді при $\alpha = 10^\circ$ справедливо: $3sin10^\circ - 4sin^3 10^\circ = \frac{1}{2}$. Якщо тепер приймемо за x значення $sin10^\circ$, то матимемо рівняння $8x^3 - 6x + 1 = 0$, то для доведення справедливості твердження прикладу 5 досить показати, що останнє рівняння не має раціональних коренів. Виконавши заміну змінної $2x = t$, отримаємо рівняння $t^3 - 3t + 1 = 0$. Не важко переконатися, що останнє рівняння раціональних коренів не має, а, отже, $sin10^\circ$ – ірраціональне число.

<u>*Приклад 6.*</u> Довести, що коли натуральне число n не є квадратом натурального числа, то $\sqrt{n}$ – ірраціональне число.

<u>*Розв'язання*</u>. Доведення проведемо методом від супротивного.

Нехай n не є квадратом натурального числа і $\sqrt{n}$ – раціональне число. Кожне раціональне число можна записати у вигляді $\frac{p}{q}$, де $p \in Z,\ \ q \in N, (p,q) = 1$.

Оскільки при $n \in N$, $\sqrt{n} > 0$, то $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ і $p, q \in N$, $(p,q) = 1$. Тоді $nq^2 = p^2$, отже nq^2 ділиться на p^2. В силу того, що $(q, p) = 1$, то n ділиться на p^2, тобто $n = kp^2, k \in N$. Маємо $kp^2q^2 = p^2$, або $kq^2 = 1$. При

$k, q \in N$ це можливо лише при $k = q = 1$. Але тоді $n = p^2$, що протирічить умові. Тому припущення про раціональність числа $\sqrt{n}$ при n, що не є квадратом натурального числа, хибне.

Приклад 7. Порівняти числа $\cos(\sin 1)$ і $\sin(\cos 1)$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 1 + \cos 1 = \sqrt{2}\sin\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos 1 < \frac{\pi}{2} - \sin 1$. Враховуючи те, що кути величиною $\cos 1$ та $\frac{\pi}{2} - \sin 1$ радіан знаходяться в першій чверті, а функція $y = \sin x$ в цій чверті зростаюча, будемо мати $\sin(\cos 1) < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin 1\right) = \cos(\sin 1)$.

§ 17. Вправи для самостійного розв'язування

Середній рівень

1. Нехай P – довільне поле. Довести, що функція $\varphi(a) = \begin{cases} 1, a \neq \theta \\ 0, a = \theta \end{cases}$ є нормою в ньому.
2. Довести, що різниця та добуток фундаментальних послідовностей є фундаментальними послідовностями.
3. Нехай (a_n) і (b_n) – еквівалентні послідовності елементів поля *P*. Довести, що (a_n) – фундаментальна тоді і тільки тоді, коли (b_n) – фундаментальна.
4. Нехай (a_n) і (b_n) – еквівалентні послідовності елементів поля *P*. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.
5. Довести, що число $\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$ – ірраціональне.
6. Переконатися, що множина ірраціональних чисел незамкнена відносно арифметичних операцій.
7. Чи є операція піднесення до степеня в полі *P* алгебраїчною операцією?
8. Десятковий розклад числа $\alpha \in [0;1]$ складається з нулів та одиниць, причому число нулів між будь-якими двома сусідніми одиницями дорівнює 1 або 2. Чи може число α бути ірраціональним?
9. Нехай α – додатне ірраціональне число, β – раціональне число. Якими будуть числа $\sqrt{\alpha}, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$?
10. Розвинути в ланцюговий дріб $\sqrt{5}$.

Достатній рівень

1. Розвинути в ланцюговий дріб числа: а) $\alpha = \sqrt{11}$; б) $\alpha = \frac{\left(3+\sqrt{7}\right)}{2}$.
2. Знайти квадратичну ірраціональність α, якщо α розвивається в такий нескінченний мішаний періодичний дріб

   а) $\left[4;3(2,1)\right]$; б) $\left[0;(1,2)\right]$; в) $\left[0;(1,3,2)\right]$.
3. Довести, що числа ірраціональні: а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$; б) $\sqrt{\log_2 3}$.
4. Довести, що не кожне дійсне число є коренем квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами.
5. Нехай α і β – ірраціональні числа, r – раціональне число. Які з наступних чисел є раціональними:

   $$\alpha+4\beta; \alpha+r; \sqrt{\alpha}; \sqrt{r}; \alpha\beta; \alpha r; \ \sqrt{\alpha+r}; \sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}; \sqrt{\alpha+\sqrt{r}} \ ?$$
6. Довести, що дані числа є ірраціональними:

   а) $\cos 20^\circ$; б) $tg 5^\circ$; в) $tg 10^\circ$.
7. Яке із заданих чисел більше:

   а) $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ чи $\sqrt{n-1}+\sqrt{m+1}$; б) $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ чи $\sqrt{n-k}+\sqrt{m+k}$?
8. Довести, що $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$ є число ірраціональне.
9. Числа $\frac{\alpha+1}{\alpha^2+1}$ і $\frac{\alpha^2+3}{\alpha^2+4}$ – раціональні. Раціональне чи ірраціональне число α ?
10. Довести, що всі члени послідовності $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n-\text{радикалів}}, n \geq 1$

    є числа ірраціональні.
11. Довести, що число $\sqrt[3]{2}$ не можна подати у вигляді $p+q\sqrt{r}$, де p, q, r – раціональні числа.
12. Довести, що дані числа є ірраціональними:

    а) $\arcsin\left(\sin 15'\right)$; б) $arctg\left(tg\left(-8\right)\right)$.
13. Довести, що число $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}$ – ірраціональне.
14. Раціональні чи ірраціональні числа:

    а) $arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{2}$; б) $arctg\left(3+2\sqrt{2}\right)+arctg\sqrt{2}$?
15. Довести, що корінь рівняння є число ірраціональне:

    а) $\arcsin x - \arccos x = \frac{\pi}{3}$; б) $\arccos\frac{x}{2} = 2arctg\left(x-1\right)$.

16. Раціональні чи ірраціональні числа:

$$\text{а) } \cos\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}\ldots\cos\frac{13\pi}{15}\cdot\cos\frac{14\pi}{15};\ \text{ б) } \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\ ?$$

17. Довести, що додатний корінь рівняння $x^5+x=10$ – ірраціональне число.

18. Порівняйте числа $\sqrt{40\sqrt{38\sqrt{36\ldots\sqrt{4\sqrt{2}}}}}$ і 40.

19. Нехай a і b – натуральні числа. Відомо, що $\sqrt{a}$ – ірраціональне число. Довести, що $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$ також ірраціональне число.

20. Чи існує найменше ірраціональне число, яке більше $\frac{3}{7}$?

Високий рівень

1. Обґрунтувати ірраціональність числа е, якщо відомо, що

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

2. Яке з заданих чисел більше: а) $\log_4 5$ чи $\log_3 4$; б) $\lg^2 11$ чи $\lg 12$?

3. Довести, що $\cos n^\circ$, n – натуральне число: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, число ірраціональне.

4. Чи можна побудувати на площині кут 60° так, щоб його вершина мала цілі координати, і на кожній стороні лежало ще принаймні по одній точці з цілими координатами?

5. Раціональне чи ірраціональне число: $\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi n}{2n+1}$?

6. Довести, що для будь-якого $x\left(0<x<2\right)$ $\arcsin\left(x-1\right)+2arctg\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$ є число ірраціональне.

7. Нехай P – упорядковане поле, елемент $c\in P$ задовольняє умову $0<c<1$. Показати, що функція $\varphi\left(a\right)=\left|a\right|^c$, $a\in P$, є норма елементів поля P

8. Довести, що для будь-якого $n\in N, n\geq 2$, число

$$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}} \text{ – ірраціональне.}$$

9. З вершини квадрата одночасно рухаються з однаковою сталою швидкістю дві точки: одна по периметру квадрата без зміни напрямку руху, а друга – по діагоналі між вершинами, не затримуючись в них. Чи зустрінуться коли-небудь ці дві точки?

10. Нехай α – ірраціональне число. Довести, що на прямій $y=\alpha x$ немає жодної точки з цілими координатами (крім точки (0;0)), але як завгодно близько від неї є безліч таких точок.

Розділ 5

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

§ 18. Аксіоматика поля комплексних чисел

Математики далеких часів вміли розв'язувати квадратні рівняння $x^2 + px + q = 0$ у випадках, коли $p^2 \geq 4q$. Тому всі задачі на складання квадратних рівнянь підбиралися з такими числовими даними, щоб згадана нерівність виконувалась.

Першим, хто насмілився розглядати задачі, які приводять до квадратних рівнянь, що не задовольняють умову $p^2 \geq 4q$, був італійський вчений Джеронімо Кардано (1501-1576). Він поставив задачу нарізати ділянку землі прямокутної форми з площею $S = 40$ (кв. од.) і периметром 20 (лін. од.).

Розв'язуючи цю задачу, приходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 40, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

Виключимо з неї змінну y і отримаємо квадратне рівняння: $x^2 - 10x + 40 = 0$, в якому $10^2 < 4 \cdot 40 = 160$. Розв'язками цього рівняння є числа: $x_1 = 5 + \sqrt{25 - 40} = 5 + \sqrt{-15}, x_2 = 5 - \sqrt{-15}.$

Кардано був здивований отриманим результатом, назвавши ці числа софістичними, і додав, що "для здійснення таких дій потрібна була б нова арифметика, яка була б настільки витонченою, наскільки марною".

Однак розв'язок в радикалах вже кубічних рівнянь, знайдений італійськими математиками в першій половині 16 століття (формули Кардано), приводив до вираження дійсних коренів рівняння з дійсними коефіцієнтами через квадратні корені з від'ємних чисел. Це змусило математиків того часу оперувати новими числами, які називалися уявними, використовуючи для них ті ж правила дій, що й для дійсних чисел. Перше формальне обґрунтування дій з комплексними числами, подане в «Алгебрі» італійського математика Бомбеллі (1572 рік). Проте наочне геометричне зображення цих чисел (як точок чи векторів на площині) було дане тільки двома сотнями років пізніше. Після цього вивчення комплексних чисел пішло дуже швидко, і в даний час теорія функцій комплексної змінної є основною частиною математичного аналізу.

В полі дійсних чисел операція добування кореня не завжди виконувана, а саме: корінь парного степеня з від'ємного числа не має дійсних значень, тобто при дійсному $a < 0$ і парному натуральному n не існує дійсного числа b, для якого $b^n = a$.

В даному пункті розширимо поле дійсних чисел R до поля комплексних чисел C, в якому операція добування кореня вже завжди виконувана.

Разом з тим, як і раніше, будемо шукати мінімальне розширення поля дійсних чисел *R* до такого поля *C*, яке містить $\sqrt{-1}$.

Означення 1. Полем комплексних чисел *C* називається мінімальне розширення поля дійсних чисел *R*, що містить корінь многочлена x^2+1, або системою комплексних чисел називають мінімальне поле $(C,+,\cdot,0,1,i,R)$, яке є розширенням поля дійсних чисел *R*, і яке містить такий елемент *i*, що $i^2=-1$, або поле, в якому мають місце такі властивості (аксіоми поля комплексних чисел):

І група аксіом:

А1.-А9. (аксіоми поля).

ІІ група аксіом (аксіоми включення):

А10. $R \subset C$ (поле дійсних чисел включається в поле комплексних чисел).

А11. $(\forall a),(\forall b)\ \ a \underset{R}{+} b = a \underset{C}{+} b;\quad a \underset{R}{\cdot} b = a \underset{C}{\cdot} b, a,b \in R$.

Результат і правила операцій додавання і множення, що виконуються в полі дійсних чисел, зберігаються і для комплексних чисел *C*;

А12. $(\exists x): x^2+1=0, x \in C.$

Число *x*, яке задовольняє дане рівняння, позначають $x=i$ при цьому називають уявною одиницею.

ІІІ група аксіом (аксіома мінімальності):

А13. $(\forall P)(R \subset P \wedge i \in P \Rightarrow C \subset P)$.

Довільне поле $(P,+,\cdot,\theta,i,R)$, яке містить поле дійсних чисел і уявну одиницю *i*, включає також і поле комплексних чисел *C*.

Теорема 1. Довільне комплексне число α можемо записати, причому єдиним чином, у вигляді $\alpha = a+bi, a \in R, b \in R$.

Наслідок. Множина *C* комплексних чисел співпадає з множиною виразів $a+bi$, де $a,b \in R$. Дії над виразами вигляду $a+bi$ виконуються так, як над многочленами.

Теорема 2. Адитивну групу комплексних чисел можна лінійно і строго впорядкувати, причому не єдиним чином.

Теорема 3. Довільний многочлен степеня $n \geq 1$ над полем комплексних чисел *C* можна розвинути в добуток многочленів першого степеня з комплексними коефіцієнтами (алгебраїчна замкненість поля комплексних чисел).

Теорема 4. Кожен многочлен над полем *R* дійсних чисел розвивається на лінійні множники та квадратні множники з дискримінантом меншим нуля.

Теорема 5. Поле C комплексних чисел повне. Норму (модуль) в полі C можна ввести таким чином $v(a+bi)=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Теорема 6. В полі C комплексних чисел можливе добування кореня n-го степеня з будь-якого комплексного числа, $n\in N$.

Теорема 7. Система аксіом поля комплексних чисел несуперечлива відносно аксіоматики поля дійсних чисел R.

Теорема 8. Система аксіом поля комплексних чисел C категорична.

Моделлю комплексних чисел можуть служити множина пар (a, b) дійсних чисел, множина матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, множина двовимірних векторів.

Наведемо приклади розв'язування задач.

<u>*Приклад 1.*</u> Подати в тригонометричній формі число $1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки $\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$, то зробимо наступні перетворення:

$$1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}=1-cos\frac{\pi}{4}-isin\frac{\pi}{4}=2sin^2\frac{\pi}{8}-i2sin\frac{\pi}{8}cos\frac{\pi}{8}=2\sin\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8}-i\sin\frac{3\pi}{8}\right)=2\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right).$$

<u>*Приклад 2.*</u> Обчислити значення виразу $z^{167}+\frac{1}{z^{167}}$ для z, що задовольняє рівняння $z+\frac{1}{z}=1$.

<u>*Розв'язання.*</u> Якщо z задовольняє рівняння $z+\frac{1}{z}=1$, то z задовольняє наступні рівняння: $z^2-z+1=0$ та $z^3+1=0$, тобто $z^3=-1$.

Оскільки $z^{167}=\left(z^3\right)^{56}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}$, то $z^{167}+\frac{1}{z^{167}}=\frac{1}{z}+z=1$.

<u>*Приклад 3.*</u> Знайти числа, спряжені зі своїм кубом.

<u>*Розв'язання.*</u> Нехай $z=x+iy$ – шукане. За умовою $z=\overline{z^3}$. Оскільки $z^3=x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3\right)$, то $x+iy=x^3-3xy^2-i\left(3x^2y-y^3\right)$, або

$$\begin{cases} x=x^3-3xy^2; \\ y=y^3-3x^2y. \end{cases}$$

Ця система рівносильна наступній:

$$\begin{cases} x\left(x^2-3y^2-1\right)=0; \\ y\left(y^2-3x^2-1\right)=0. \end{cases}$$

1) якщо $x=0,$ то $y\left(y^2-1\right)=0,$ звідси $y_1=0, \quad y_{2,3}=\pm 1.$

2) якщо $y=0,$ то $x\left(x^2-1\right)=0,$ звідси $x_1=0, \quad x_{2,3}=\pm 1.$

3) якщо $x^2-3y^2-1=0,$ тобто $x^2=3y^2+1,$ то $y\left(y^2-9y^2-3-1\right)=0,$ звідси $y=0$. Тоді $x=\pm 1$.

4) якщо $y^2-3x^2-1=0$, тобто $y^2=3x^2+1$, то аналогічно до 3) $x=y=0$.

Отже, маємо такі розв'язки:

$$z_1=0+i0=0, \quad z_2=0+i=i, \quad z_3=0-i=-i, \quad z_4=1, \quad z_5=-1.$$

<u>*Приклад 4.*</u> Знайти на комплексній площині всі точки *z*, для яких число $w=z^2-z+1$ – дійсне і від'ємне.

<u>*Розв'язання.*</u> Якщо $z=x+iy$, то $w=x^2-y^2-x+1+\left(2xy-y\right)i.$

Число *w* буде дійсним від'ємним при умові

$$\begin{cases} \operatorname{Re} w<0 \\ \operatorname{Im} w=0 \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} x^2-y^2-x+1<0 \\ 2xy-y=0 \end{cases}.$$

Якщо $y=0,$ то $x^2-x+1<0$, чого бути не може. Тому $x=\frac{1}{2}$ і $y^2>\frac{3}{4},$ або $|y|>\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тому множина шуканих точок лежить на прямій $x=\frac{1}{2}$ та утворює два промені з початками в точках $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

§ 19.Вправи для самостійного розв'язування

Середній рівень

1. Знайти дійсні розв'язки:
   а) $\left(4+2i\right)x+\left(5-3i\right)y=13+i;$ б) $\left(3x-i\right)\left(2+i\right)+\left(x-iy\right)\left(1+2i\right)=5+6i.$
2. Знайти всі такі $z\in C,$ що $2|z|=zi+1$.
3. Вивести правила віднімання і ділення комплексних чисел (в алгебраїчній формі).

4. Розв'язати рівняння $(1-i)x^2-(3+3i)x+(-4+2i)=0$.
5. Довести, що множина P усіх матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ над полем дійсних чисел R ізоморфна полю комплексних чисел C.
6. Виконати дії: $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.
7. Довести, що модуль суми двох комплексних чисел не перевищує суми модулів цих чисел, тобто $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.
8. Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів цих чисел. Довести це.
9. Розв'язати рівняння: а) $z=-\bar{z}$; б) $z^2+\bar{z}=0$; в) $z^2+|z|=0$.
10. Подати в тригонометричній формі число $z=1+\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ$.

Достатній рівень

1. Показати, що корені n-го степеня з 1 утворюють групу *Г*, ізоморфну адитивній групі Z_n цілих чисел, конгруентних за модулем n.
2. Довести, що при будь-якому дійсному x $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$.
3. Подати в тригонометричній формі числа:

$$\text{а) } 1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}; \text{ б) } \sin\alpha - i\cos\alpha; \text{ в) } tg\alpha - i \ (0 \le \alpha \le \pi).$$

4. Знайти аргумент комплексного числа z^2-z, якщо $z=\cos\varphi + i\sin\varphi$.
5. Обчислити: а) $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{95}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{126}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.
6. Знайти числа, спряжені зі своїм кубом.
7. Розв'язати систему рівнянь: а) $\begin{cases} |z-2i|=|z|; \\ |z-i|=|z-1|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \left|z^2-2i\right|=4; \\ \left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right|=1. \end{cases}$
8. Де на комплексній площині лежать комплексні числа z, які можна подати у вигляді $z=\dfrac{c-i}{2c-i}$, де $c \in R$?
9. Знайти за допомогою комплексних чисел суму:

$$\text{а) } S_1 = 1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots; \text{ б) } S_2 = C_n^1-C_n^3+C_n^5-\ldots.$$

10. Обчислити суму всіх коренів степеня n з 1.
11. Знайти аргумент комплексного числа: а) $z^2 + \bar{z}$; б) $z^3 + z^2$, якщо $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
12. Застосовуючи формулу Муавра, довести справедливість тверджень: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.
13. Довести, що для всіх цілих k $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{3k} = 1$.
14. Довести, що при піднесенні дробу $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\ i}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\ i}$ до будь-якого цілого степеня вигляду $6k, k \in Z$, дістанемо ціле число.
15. Довести, що комплексне число $\dfrac{z-1}{z+1}$ є числом уявним тоді і тільки тоді, коли $|z| = 1$ і $z \neq -1$.
16. Знайти геометричне місце точок, що зображають комплексні числа z, які задовольняють умові: а) $|z-2| + |z+2| = 5$; б) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$.
17. При яких дійсних значеннях a система $\begin{cases} |z - ai| = a + 4; \\ |z-2| < 1 \end{cases}$ має принаймні один розв'язок в полі комплексних чисел?
18. Довести тотожність $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$ і з'ясувати її геометричний зміст.
19. Обчислити $\sin x + \sin 2x ... + \sin nx$.
20. Обчислити $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + ... + \cos(2n-1)x$.

Високий рівень

1. Нехай a, b, c – такі комплексні числа, що $|a| = |b| = |c| = r$. Довести, що $\left|\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right| = r$.
2. Довести, що якщо яке-небудь ціле число становить суму двох різних квадратів, то й квадрат цього числа є сумою двох квадратів.
3. Довести, що добуток двох цілих чисел, з яких кожне є сумою двох квадратів, є також сума двох квадратів.
4. Знайти суму $S_n = 1 + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{2\pi}{3} + ... + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{3}$.

5. Знайти суму $T_n = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3}$.
6. Довести за допомогою комплексних чисел, що
$$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=0}^{100} C_{100}^k \left(\sqrt{3}i\right)^k = -\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right).$$
7. Знайти за допомогою комплексних чисел суму
$$S_n = C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2 C_n^5 - 3^3 C_n^7 + \ldots.$$
8. Обчислити $z^{142} + \frac{1}{z^{142}}$, якщо z – корінь рівняння $z + \frac{1}{z} = 1$.
9. Обчислити $z^{1975} + \frac{1}{z^{1975}}$, якщо z – корінь рівняння $z^2 + z + 1 = 0$.
10. Подати у вигляді многочлена першого степеня від тригонометричних функцій – кутів кратних x: $\sin^3 x, \sin^4 x, \cos^4 x, \sin^5 x, \cos^5 x$.

Розділ 6

АЛГЕБРИ З ДІЛЕННЯМ НАД ЧИСЛОВИМ ПОЛЕМ

§ 20. Подальші розширення поняття числа. Основні означення

Всі розглянуті нами числові системи: натуральні, цілі, раціональні, дійсні і комплексні числа, не зважаючи на їхні істотні відмінності, мають ряд спільних ознак, це, зокрема, комутативність і асоціативність операцій додавання і множення, зв'язок цих операцій через дистрибутивну властивість, відсутність дільників нуля, існування одиничного елемента відносно операції множення. Виникає запитання: як можна далі розширити поняття про числа і при цьому зберегти, по можливості, їх спільні ознаки? Відповідь на це запитання отримаємо, вивчивши докладніше так звані алгебри з діленням над числовим полем.

Приведемо основні означення.

Означення 1. Алгебраїчна структура, яка відносно операції додавання утворює асоціативну групу, а операція множення асоціативна і при цьому операції додавання і множення пов'язані правим та лівим дистрибутивними законами, утворює простір.

Далі ми ведемо мову про векторні (лінійні) простори.

Означення 2. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається лінійно залежною, якщо для деякої лінійної комбінації виконується рівність $\alpha_1 a_1 + \alpha_1 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$, де числа $\alpha_i, i = \overline{1,n}$, не всі одночасно рівні нулю.

Означення 3. Система векторів $a_1, a_2, ..., a_n$ утворює базис простору, якщо довільний вектор простору є лінійною комбінацією базисних векторів.

Означення 4. Лінійною алгеброю називається розширення (збагачення) векторного простору в результаті введення операції множення векторів.

Означення 5. Нехай (A, P) – лінійна алгебра над полем *P*. Алгебру (A, P) назвемо алгеброю рангу *n* над полем *P*, якщо *A* містить такі лінійно незалежні елементи $a_1, a_2, ..., a_n$, що будь-який елемент $a \in A$ однозначно записується у вигляді лінійної комбінації базисних векторів
$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$, де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in P$.

Зауваження 1. Алгебра є асоціативною, якщо множення векторів асоціативне; комутативною, якщо множення комутативне; якщо справедливі твердження $(\forall a)(\forall b)(\exists x)(\exists y): a = bx$ і $a = yb$, то алгебра називається алгеброю з діленням.

Означення 6. Алгебраїчна структура $(A, +, \cdot, P)$ називається асоціативною алгеброю з діленням, якщо:

1. P – числове поле,
2. A – непорожня множина, елементи якої називаються векторами, для яких мають місце аксіоми:

А1. Асоціативність додавання:
$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a+b)+c = a+(b+c)), a, b \in A.$$

А2. Комутативність додавання: $(\forall a)(\forall b)(a+b = b+a), a, b \in A.$

А3. Існування нуль вектора: $(\exists \theta), (\forall a): (a + \theta = a), \theta, a \in A.$

А4. Існування протилежного вектора: $(\forall a), (\exists b): (a + b = \theta), \theta, a, b \in A$.

А5. Дистрибутивність суми векторів відносно множення на скаляр:
$$(\forall a)(\forall b)(\forall \alpha)((a+b)\cdot\alpha = a\cdot\alpha + b\cdot\alpha), a, b \in A, \alpha \in P.$$

А6. Дистрибутивність відносно множення вектора на суму скалярів:
$$(\forall a)(\forall \alpha)(\forall \beta)(a(\alpha+\beta) = a\cdot\alpha + a\cdot\beta), a \in A, \alpha, \beta \in P.$$

А7. Комутативність множення вектора на скаляр:
$$(\forall a)(\forall \alpha)(a\cdot\alpha = \alpha\cdot a), a \in A, \alpha \in P.$$

А8. Асоціативність множення скалярів на вектор:
$$(\forall a)(\forall \alpha)(\forall \beta)((\alpha\cdot\beta)\cdot a = \alpha(\beta\cdot a)), a \in A, \alpha, \beta \in P.$$

А9. Асоціативність множення векторів:
$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)), a, b, c \in A.$$

А10. Правий та лівий дистрибутивний закон:

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)\big((a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\big);\ \big(a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c\big)\ a,b,c\in A.$$

А11. Асоціативність множення скаляра на добуток векторів:

$$(\forall a)(\forall b)(\forall \alpha)\big(\alpha\cdot(a\cdot b) = (\alpha\cdot a)\cdot b\big), a,b\in A, \alpha\in P.$$

А12. Існування лівого та правого одиничного вектора:

$$(\exists e)(\forall a)(e\cdot a = a);(a\cdot e = a), e,a\in A.$$

А13. Існування правого та лівого оберненого вектора:

$$(\forall a, a\neq\theta),(\exists b)(a\cdot b = e);(b\cdot a = e), a,b,e\in A.$$

(В такому випадку b прийнято називати правим та відповідно лівим оберненим елементом і позначати $b = a^{-1} = \dfrac{e}{a} = e : a$).

§ 21. Основні властивості алгебри з діленням. Алгебри з діленням над полем дійсних чисел

Теорема 1. Алгебра з діленням не містить дільників нуля, тобто $a\cdot b = \theta \Leftrightarrow a = \theta$ або $b = \theta$.

Теорема 2. Нехай $(A,+,\cdot,P)$ – алгебра з діленням над полем *P* скінченного рангу. Тоді *A* містить підполе, ізоморфне полю *P*.

У зв’язку з цією теоремою інколи саме поле *P* вважають підполем алгебри (A,P) . Надалі розглянемо лише лінійні алгебри з діленням скінченного рангу над числовими полями.

Теорема 3. Нехай (A,P) – алгебра рангу *n* над полем *P*. Тоді будь–який елемент $a\in A$ є коренем многочлена степеня не вище *n* над полем *P*.

Теорема 4. Над полем *C* комплексних чисел відсутні алгебри з діленням скінченного рангу, відмінні від самого поля комплексних чисел *C*.

Приведена теорема свідчить: щоб отримати щось нове про розширення числових систем, необхідно звернутися до алгебри з діленням над полем дійсних чисел.

Теорема 5. Нехай $(A,+,\cdot,R)$ алгебра з діленням рангу *n* над полем дійсних чисел *R*. Тоді:

1. Кожен елемент $a\in A$ є коренем незвідного над *R* многочлена першого або другого степеня;
2. Якщо елемент *a* не є дійсним числом, то він є коренем квадратного тричлена з від’ємним дискримінантом. В цьому випадку маємо

$$(\exists\alpha)(\exists\beta):\Big((\alpha a+\beta)^2 = -1, \alpha,\beta\in R, a\in A\Big).$$

3. Якщо $n = 2$, то алгебра (A, R) ізоморфна полю C комплексних чисел.

Теорема 6. Над полем дійсних чисел R відсутні алгебри з діленням рангу три.

§ 22. Алгебра кватерніонів. Теорема Фробеніуса

Означення 7. Кільце $(K, +, \cdot, 0, 1)$ називають тілом, якщо множина K містить принаймні два елементи для яких виконуються властивості

$$(\forall a)(\forall b)(a \neq 0) \Rightarrow (\exists c)(\exists d)(a \cdot c = b \text{ і } d \cdot a = b), a, b, c, d \in K,$$

тобто множина $K / \{0\}$ є групою відносно операції множення.

<u>*Приклад 1.*</u> Позначимо через M_2 множину всіх квадратних матриць другого порядку з комплексними коефіцієнтами вигляду $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ де $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ комплексні числа, спряжені до α, β.

Можна довести, що в M_2 немає дільників нуля і що алгебра $(M_2, \oplus, \otimes, \theta, E)$, де $\oplus, \otimes$ є символи операцій додавання і множення матриць, а θ, E – відповідно нульова і одинична матриця, утворює некомутативне тіло. Якщо в M_2 ввести звичайну операцію множення на дійсні числа, то отримаємо алгебру $Q_k = (M_2, \oplus, \otimes, \theta, E)$ з діленням рангу 4 над полем дійсних чисел R.

Означення 8. Довільну алгебру, ізоморфну алгебрі Q_K називають <u>алгеброю</u> <u>кватерніонів</u>, а самі елементи цієї алгебри – <u>кватерніонами</u>.

З'ясуємо:

1) структуру алгебр рангу $n = 4$;
2) чи існують алгебри рангу $n > 4$ (над полем R)?

Відповідь на ці запитання дають наступні теореми.

Теорема 7. Якщо (A, R) – асоціативна алгебра з діленням над полем R рангу $n \geq 4$, а її елементи $1, i, j$ – лінійно незалежні над полем R, причому $i^2 = j^2 = -1$, то $(i \cdot j + j \cdot i) \in R$, тобто є дійсним числом.

В силу теореми можна дати і таке означення алгебри кватерніонів

Означення 8'. Асоціативну алгебру з діленням $(T, +, \cdot, R)$ над полем R дійсних чисел називають <u>алгеброю</u> <u>кватерніонів</u>, а її елементи – <u>кватерніонами</u>, якщо справедливі такі аксіоми:

А1-А13. (аксіоми асоціативної алгебри з діленням над полем дійсних чисел R, означення 6);

А14. Існує чотири лінійно незалежні над полем R елементи

$$(\exists 1)(\exists i)(\exists j)(\exists k): i^2 = j^2 = k^2 = -1, i, j, k \in T$$

та

$$(\forall q)(\exists a)(\exists b)(\exists c)(\exists d): (q = a\cdot 1 + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k),\ q \in T, a, b, c, d \in R.$$

Теорема 8. Довільна алгебра з діленням рангу $n = 4$ над полем R дійсних чисел ізоморфна алгебрі кватерніонів.

Теорема 9. Система аксіом алгебри кватерніонів несуперечлива відносно аксіоматики поля комплексних чисел C.

Зауваження 2. Подамо кватерніон $q \in T$ у вигляді $q = a\cdot 1 + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k$.

Безпосередньо перевіркою можна знайти таблицю множення елементів (базисних кватерніонів):

$$i\cdot j = -j\cdot i = k, k\cdot i = -i\cdot k = j, j\cdot k = -k\cdot j = i, i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Звідси випливає, що множення кватерніонів некомутативне.

Отже, кватерніони перемножаються так, як ніби це многочлени. При цьому добутки базисних кватерніонів потрібно виконувати згідно таблиці

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

або згідно схеми

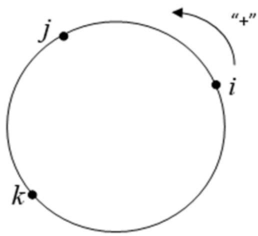

Рис. 1.

Означення 9. Нехай q – кватерніон, тоді $q = a\cdot 1 + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k$.

Кватерніон $q^* = a\cdot 1 - b\cdot i - c\cdot j - d\cdot k$ називають спряженим до кватерніона q. Як ми вже переконалися множення кватерніонів некомутативне, проте справедлива рівність $q\cdot q^* = q^*\cdot q$.

Залишається ще з’ясувати питання про те, чи існують алгебри з діленням скінченного рангу $n > 4$ над полем R дійсних чисел.

Нагадаємо, що лінійні алгебри з діленням грунтуються на полі (некомутативному тілі). Отже, в цих алгебрах повинні виконуватися всі ті основні властивості операцій «+» (додавання) і «·» (множення), які мають місце в тілах. Збереження основних властивостей операцій «+» труднощів не викликає: воно забезпечується заданням лінійної алгебри над полем. Інша річ основні властивості операції множення. В алгебрах рангу $n = 4$ (кватерніони) уже втрачається комутативність множення, але асоціативність ще зберігається. Говорячи про лінійні алгебри з діленням над полем R дійсних чисел, важливими є такі алгебраїчні структури, в яких зберігаються основні властивості операції додавання та особливо асоціативність множення, тобто асоціативні структури.

Справедлива теорема.

Теорема 10. (Фробеніуса). Над полем R дійсних чисел існує лише три лінійних асоціативних алгебри з діленням скінченного рангу n:

1) комутативна алгебра рангу $n=1$, ізоморфна полю R дійсних чисел;
2) комутативна алгебра рангу $n = 2$, ізоморфна полю C комплексних чисел;
3) некомутативна алгебра рангу $n = 4$, ізоморфна алгебрі кватерніонів.

Теорема Фробеніуса обмежує подальше розширення поняття про число. За цією межею існують лінійні алгебри, навіть алгебри з діленням. Такою є, наприклад, алгебра Келі рангу $n = 8$, елементи якої називають октавами Келі або восьмимірними числами. Але в цій алгебрі вже втрачаються крім комутативного ще і асоціативний закон множення, її елементи вже зовсім далекі від поняття числа.

Кватерніони ж, вперше ввів у розгляд англійський математик і механік У. Р. Гамільтон в середині 19-го століття. За їх допомогою він відкрив важливе і складне оптичне явище – конічну рефракцію світлових променів у кристалічних середовищах. Б. О. Венков застосував кватерніони в арифметиці бінарних квадратичних форм.

Наведемо приклади розв'язування задач.

Приклад 2. Ввести систему кватерніонів за допомогою матриць деякого типу.

Розв'язання. Нехай

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

За матрицями E та I будуємо чотири матриці 4-го порядку:

$$e = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді добутки $e \cdot i = i \cdot e = i$; $e \cdot j = j \cdot e = j$; $e \cdot k = k \cdot e = k$. Враховуючи, що $E^2 = E$, $I^2 = -E$, отримуємо $i \cdot j = k = -j \cdot i$, $j \cdot k = i = -k \cdot j$, $k \cdot i = j = -i \cdot k$, а також $i^2 = j^2 = k^2 = -e$. Матриці вигляду

$$a \cdot e + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = \begin{pmatrix} a & -c & -b & -d \\ c & a & d & -b \\ b & -d & a & c \\ d & b & -c & a \end{pmatrix},$$

де a, b, c, d – довільні дійсні числа, назвемо кватерніонами. З цього випливає, що подання кватерніона у формі $a \cdot e + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ однозначне. Сукупність кватерніонів є тілом $(T, +, \cdot, R)$.

Означення 10. Нехай $q = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ – кватерніон. Число $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ називають його нормою. Норму кватерніона можна знайти також, як добуток спряжених кватерніонів $N(q) = q \cdot q^*$. Модуль кватерніона $q : |q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Приклад 3. Знайти ліві і праві частки від ділення кватерніонів k на $1 + i + k$.

Спершу дамо означення.

Означення 11. Оберненим до кватерніона q називають кватерніон q^{-1}, що визначається співвідношення $q^{-1} = \dfrac{q^*}{\| q \|}$.

В результаті множення кватерніона q на обернений до нього і з правого і з лівого боку, отримуємо $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q$.

В силу того, що добуток кватерніонів некомутативний, а залежить від порядку множників, то маємо два рівняння: $q_2 \cdot x = q_1$ і $x \cdot q_2 = q_1$.

Означення 12. Назвемо лівою часткою від ділення кватерніонів q_1 та q_2 і відповідно правою – кватерніони:

$$x_л = \frac{1}{| q_2 |} q_2^* \cdot q_1, \quad x_п = \frac{1}{| q_2 |} q_1 \cdot q_2^*.$$

Повернемося тепер до прикладу 3.

Розв'язання.

$$| 1 + i + k | = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}, \; x_л = \frac{1}{3}\big((1 - i - k) \cdot k\big) = \frac{1}{3}(k + j + 1);$$

$$x_n = \frac{1}{3}\left(k\cdot\left(1-i-k\right)\right) = \frac{1}{3}\left(k+j+1\right).$$

Зауваження 3. Ще одна важлива властивість кватерніонів полягає у тому, що модуль добутку кватерніонів дорівнює добутку модулів. Тобто, $|q_1\cdot q_2|^2=|q_1|^2\cdot|q_2|^2$. Запропонована рівність приводить до цікавої тотожності:

Нехай $q_1 = a_1+b_1 i+c_1 j+d_1 k,\ q_2 = a_2+b_2 i+c_2 j+d_2 k,$ тоді

$$|q_1\cdot q_2|^2=|\left(a_1+b_1 i+c_1 j+d_1 k\right)\left(a_2+b_2 i+c_2 j+d_2 k\right)|^2=$$
$$=|a_1+b_1 i+c_1 j+d_1 k|^2|a_2+b_2 i+c_2 j+d_2 k|^2=|q_1|^2\cdot|q_2|^2.$$

Отже, добуток суми чотирьох квадратів на суму чотирьох квадратів знову є сума чотирьох квадратів.

§23.Вправи для самостійного розв'язування

Середній рівень

1. Чи вірна рівність $\left(q_1+q_2\right)^2 = q_1^2+2q_1q_2+q_2^2$, де q_1, q_2 – кватерніони?
2. Чи має місце рівність для кватерніонів q_1, q_2 $q_1^2-q_2^2=\left(q_1+q_2\right)\left(q_1-q_2\right)$?
3. Знайти суму кватерніонів q_1+q_2: а) $q_1=1+2i+3k,\ q_2=1-i+3j-2k$; б) $q_1=a+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k,\ q_2=a-b\cdot i+c\cdot j-d\cdot k.$
4. Нехай $q=1+2i+3j+4k$ – кватерніон. Знайти норму $N(q)$, обернений кватерніон q^{-1}, модуль $|q|,|q^{-1}|$.
5. Нехай $q=a\cdot 1+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k$ – кватерніон. q^* – спряжений до нього. Довести: а) для довільних кватерніонів q_1, q_2: $\left(q_1\cdot q_2\right)^* = q_2^*\cdot q_1^*$; б) $q\cdot q^*=q^*\cdot q=a^2+b^2+c^2+d^2$.

Достатній рівень

1. Знайти розв'язки рівняння в системі кватерніонів: а) $q_2\cdot x=q_1$, б) $y\cdot q_2=q_1$.
2. Обчислити ліву і праву частки від ділення кватерніонів $q_1=2-3i+j+5k$ на $q_2=1+2i+3j+4k$.
3. Знайти добуток кватерніонів $q_1\cdot q_2$: а) $q_1=1+2i+3k,\ q_2=1-i+3j-2k$; б) $q_1=a+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k,\ q_2=a-b\cdot i+c\cdot j-d\cdot k.$
4. Використовуючи кватерніони довести, що число 1271 можна записати у вигляді суми чотирьох квадратів.

5. Задано прямокутник зі сторонами 30 см. і 74 см. Чи можна побудувати чотири квадрати із цілочисельними сторонами (в сантиметрах), сума площ яких дорівнює площі прямокутника?
6. Вираз $\left[q_1, q_2\right] = q_1 q_2 - q_2 q_1$, де q_1, q_2 – кватерніони, називається комутатором. Знайти комутатор для чисел: $q_1 = 1 + 2i + 3k$, $q_2 = 1 - i + 3j - 2k$.
7. Знайти комутатор $\left[q_1, q_2\right]$ $q_1 = a + bi + cj + dk$, $q_2 = a - bi - cj - dk$.
8. Для довільних кватерніонів q_1 і q_2 довести тотожність
$$\left(q_1 \cdot q_1^*\right) \cdot \left(q_2 \cdot q_2^*\right) = \left(q_1 \cdot q_2\right) \cdot \left(q_1 \cdot q_2\right)^*.$$
9. Використовуючи тотожність пункту 8. довести, що добуток суми квадратів чотирьох цілих чисел на суму квадратів чотирьох цілих чисел, є сумою квадратів чотирьох цілих чисел (тотожність Ейлера).
10. Довести, що
$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2\right) = \left(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4\right)^2 +$$
$$+\left(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3\right)^2 + \left(a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - a_2 b_4\right)^2 +$$
$$+\left(a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2\right)^2, \; a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in R,$$

тобто сума чотирьох квадратів, помножених на суму чотирьох квадратів, дорівнює сумі чотирьох квадратів.

Високий рівень

1. Довести, що довільний кватерніон q є коренем деякого квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами.
2. Довести, що довільний кватерніон (z, λ) можна подати у вигляді $(z, \lambda) = z + \lambda j = z + j \cdot \overline{\lambda}$, де (z, λ) – пара комплексних чисел.
3. Для довільних кватерніонів q_1 та q_2 показати, що
$$q_1 q_2 + \left(q_1 q_2\right)^* = q_2 q_1 + \left(q_2 q_1\right)^*.$$
4. Кватерніон – впорядкована пара комплексних чисел (z, λ):
$$\left(z_1, \lambda_1\right) + \left(z_2, \lambda_2\right) = \left(z_1 + z_2, \lambda_1 + \lambda_2\right);$$
$$\left(z_1, \lambda_1\right) \cdot \left(z_2, \lambda_2\right) = \left(z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2, z_1 \lambda_2 + \lambda_1 \overline{z_2}\right).$$

Показати, що операція множення кватерніонів оборотна.

5. Довести, що теорема про те, що довільний многочлен степеня *n* (зокрема і при *n* = 2) має не більше *n* коренів, хибна в алгебрі кватерніонів.

ВІДПОВІДІ. ВКАЗІВКИ

Розділ 1. Натуральні числа

Достатній рівень

17. Використати м.м. і. і врахувати, що дана послідовність може бути задана рекурентно таким чином: $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

Високий рівень

1. Припустимо, що всі числа $a_1, a_2, ..., a_n$ – складені. Нехай p_i – найменший простий дільник числа $a_i \left(i = \overline{1, n} \right)$, тоді числа $p_1, p_2, ..., p_n$ всі різні, оскільки a_i – взаємно прості. Крім того, $p_i \le \sqrt{a_i} \le \sqrt{4n(n-1)} < 2n - 1$. Серед чисел 1, 2, 3, …, $2n - 2$ до простих не відносяться числа 1, 4, 6, 8,…, $2n - 2$, тобто простих чисел менших $2n - 1$ є не більше $n - 1$. Одержана суперечність спростовує початкове припущення.
2. Скористаємося тим, що будь-яке натуральне число при діленні на 9 дає таку саму остачу, що й сума його цифр, тобто $F(n)$. Оскільки $F(n) = F(2n)$, то числа n та $2n$ при діленні на 9 дають однакову остачу. Але тоді $n = 2n - n$ ділиться на 9.
3. Розбити цілі числа на класи вигляду $3k, 3k \pm 1$ і показати що їх квадрати не можуть бути числами вигляду $3n + 2$.
4. Якщо $a \ge 2$ і $b \ge 2$, то $3a > 5$ і $3b > 5$. Тому $3a^2 > 5a, 3b^2 > 5b,$ звідки $3\left(a^2 + b^2\right) > 5(a + b)$. Якщо $a = 1$ і $b \ge 2$, то $3b^2 \ge 6b \ge 5b + 2$, звідки $3 + 3b^2 \ge 3 + 5b + 2$. Аналогічно при $n \ge 2$ і $b = 1$.
5. Якщо $k = 1$, то m і n – довільні. Якщо $k \ge 2$, то таких натуральних чисел не існує. Справді, якщо $m^k + n = (m + p)^k$, де $p \ge 1$, то

$$n = (m + p)^k - m^k = (m + p - m)\left((m + p)^{k-1} + (m + p)^{k-2} m + ... + m^{k-1}\right) >$$

$$> p\left(m^{k-1} + m^{k-1} + ... + m^{k-1}\right) = pkm^{k-1} > m .$$

Якщо ж $n^k + m = (n + s)^k$, де $s \ge 1$, то аналогічно $m > n$. Оскільки протилежні нерівності одночасно виконуватись не можуть, то числа $m + p$ та $n + s$ не існують.

6. Доведення проведемо м. м. і.. Нехай

$$M = \left\{ n \in N \mid \left(3^{2n} + 5\right) \vdots 8 \right\}, 1 \in M .$$

Якщо $n \in M$, тобто $\left(3^{2n}+5\right) \vdots 8$, то

$$3^{2S(n)}+5=3^{2n}\cdot 9+5=\left(3^{2n}+5+8\cdot 3^{2n}\right) \vdots 8 \text{, тобто } S(n)\in M .$$

7. $$НСД(a,b,c)=НСД(НСД(a,b),c); НСД(693,4426,384)=3,$$
$$НСК(a,b,c)=НСК(НСК(a,b),c); НСК(693,4426,384)=130867968.$$

8. Точними квадратами будуть тільки числа $a_2=144=12^2$ та $a_3=1444=38^2$. Число $a_1=14$ не є точним квадратом. Покажемо, що при $n>3$ числа a_n також не є точними квадратами. Припустимо супротивне: $a_n=k^2$. Оскільки $a_n=a_{n-3}\cdot 1000+444$, то $a_n \vdots 4$, але $a_n \overline{\vdots}\, 16$. Отже, $k=4m+2$. Тому $a_n=(4m+2)^2=16\left(m^2+m\right)+4$. Але $a_{n-3}\cdot 1000+444=16\cdot s+12$. Одержана суперечність доводить хибність припущення.

9., 10. Застосувати м. м. і.

Розділ 2. Кільце цілих чисел

Середній рівень

7. $n^3-n=n(n-1)(n+1)$. Серед трьох послідовних цілих чисел одне – парне, одне – кратне 3.
9. Так, наприклад, $(mZ,+,\cdot), m\in Z, m\neq 0.$
11. Ні.

Достатній рівень

1. Так, ізоморфізм здійснює функція $f(k)=k\cdot m$.
2. Ні, оскільки
$$f(2k_1\cdot 2k_2)=f\left(2(2k_1\cdot k_2)\right)=5(2k_1\cdot k_2)=10k_1\cdot k_2\neq 5k_1\cdot 5k_2=f(k_1)\cdot f(k_2).$$
4. Подати $82^\circ=22^\circ+60^\circ$, $142^\circ=22^\circ+120^\circ$, $202^\circ=180^\circ+22^\circ$.
5. $1982=(n-m)(n+m)$. Числа m, n – однакової парності, тому $(n-m)(n+m) \vdots 4$. Але $1982 \overline{\vdots}\, 4$, отже, цілочисельних розв'язків не існує.
6. $\cos^2 73^\circ+\cos^2 47^\circ+\cos 73^\circ\cos 47^\circ=\dfrac{3}{4}\overline{\in} Z$.
8. Оскільки $2222=3(\bmod 7), 5555=-3(\bmod 7)$, то
$$2222^{5555}+5555^{2222}=(7m+3)^{5555}+(7n-3)^{2222}=$$
$$=7k+3^{5555}+3^{2222}=7k+3^{2222}\left(3^{3333}+1\right).$$

Аналогічно $3^{3333} = 27^{1111} = (4\cdot 7-1)^{1111} = 7s-1,$ тому

$$2222^{5555} + 5555^{2222} = 7k + 3^{2222}\cdot 7s = 7\left(k+3^{2222}s\right).$$

10. Застосувати принцип Діріхле до множини всеможливих остач при діленні на $m-1$.
11. Показати, що серед всеможливих сум квадратів чисел вигляду $7n, 7n\pm 1, 7n\pm 2, 7n\pm 3$ ділиться на 7 тільки сума $(7m)^2+(7n)^2$.
14. Якщо при цілих значеннях змінної x $f(x)=ax^2+bx+c\in Z$, то $f(0)=c$ – ціле, і $f(1)-f(0)=a+b$ – ціле, і $f(-1)+f(1)-2f(0)=2a$ – ціле число. Нехай числа $2a, a+b, c$ – цілі числа, тоді $f(0)=c\in Z$. Оскільки $f(n+1)-f(n)=2an+(a+b)$, то $f(n)\in Z$ при $n\in Z$.
15. Ні. Якщо такий трикутник існує, то існує трикутник із цілочисельними координатами вершин, причому початок координат є однією з цих вершин. Нехай a – довжина сторони трикутника, α – кут між віссю OX та однією із сторін, $(x_1,y_1)(x_2,y_2)$ – вершини трикутника, тоді

$$x_1 = a\cos\alpha, x_2 = a\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right), y_1 = a\sin\alpha, y_2 = a\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right),$$

Звідки $x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1$.

Якщо $x_1\neq 0$, то $\sqrt{3} = \frac{2y_2-y_1}{x_1}\in Q$, що невірно.

Якщо $y_1\neq 0$, то $\sqrt{3} = \frac{x_1-2x_2}{y_1}\in Q$, що теж невірно. $A(x_1,y_1)\neq(0,0)$,

бо $(x_1,y_1),(0,0)$ – різні вершини трикутника.

16. Ні. Якби такий шестикутник існував, то існував би правильний трикутник, усі вершини якого мають цілочисельні координати. Далі дивись попередню задачу.
17. Дивись задачу 3 із розділу 1. Натуральні числа (Вищий рівень).
18. Ні.
19. $n=2, n=3.$
20. $(mZ,+,\cdot), m\in Z$.

Високий рівень

1. Припустимо протилежне, а саме: нехай серед утворених сум усі числа при діленні на $2n$ дають різні остачі. Ці остачі дорівнюють $0,1,2,\ldots,2n-1$. Заз-

начимо, що сума всіх сум $a_1+i\left(i=\overline{1,2n}\right)$ при діленні на $2n$ повинна давати ту саму остачу, що й сума всіх остач при діленні на $2n$. Перевіримо це. Сума $\sum_{i=1}^{2n}\left(a_1+i\right)=2\left(1+2+...+2n\right)=2n\left(2n+1\right)$ кратна $2n$. Сума остач $S=0+1+...+2n=n\left(2n+1\right)$ не ділиться націло на $2n$. Отже, припущення хибне.

3. Подати $tg15^\circ=tg\left(45^\circ-30^\circ\right)$.
4. Якщо цілі числа x,y є розв'язками рівняння, то $\left(x+y\right)^2=xy\left(xy+1\right)$. При $xy>0: xy<\sqrt{xy\left(xy+1\right)}<xy+1$, тому ціле число $\left(x+y\right)$ лежить між послідовними цілими числами xy та $xy+1$, чого бути не може. Аналогічно при $xy<-1$ цілочисельних розв'язків не існує. Отже $xy=0$ або $xy=-1$. Отримуємо сукупність пар $\left(0;0\right);\left(1;-1\right);\left(-1;1\right)$.
6. $x=0, x=2.$
7. Оскільки $\left(n+2\right)^4-n^4=8\left(k^3+k\right)$, де $k=n+1$, то число $\left(n+2\right)^4-n^4$ є кубом цілого числа, якщо сума k^3+k є аналогічним кубом. При $k>0$ $(k+1)^3>k^3+k$, тому k^3+k не є кубом цілого числа; аналогічно при $k<0$ $(k-1)^3<k^3-k$, отже k^3+k не є кубом цілого числа. При $k=0; n=-1.$
8. Спочатку розіб'ємо всі цілі числа на групи, відносячи до першої групи пари чисел вигляду $k,k+1$, а до другої – $k+2,k+3$. Тоді до першої групи належать шукані числа $a,a+4,a+8$. При будь-якому іншому розбитті множини Z на дві групи принаймні в одній знайдеться пара чисел вигляду $a-1,a+1$. Розглянемо ще такі числа $a-3,a,a+3$. Якщо принаймні одне з них належало тій групі, що і числа $a-1$ та $a+1$, то це число разом із $a-1$ та $a+1$ утворюють прогресію. Якщо всі числа $a-3,a,a+3$ – в другій групі, то вони в ній є шуканими.
9. Показати, що знаменник дробу, утворений при додаванні чисел $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}$, ділиться на більш високий степінь двійки, ніж чисельник.
10. Досить вказати такі бінарні відношення в кільці Z, які не задовольняють тільки одній з п'яти умов:

$$1)\ a\rho b\Leftrightarrow a\ge b;\ \ 2)\ a\rho b\Leftrightarrow a\ne b;\ 3)\ a\rho b\Leftrightarrow a>b\,і\,1>a;$$

$$4)\ a\rho b\Leftrightarrow a>b\,і\,b\ge 0;\ \ 5)\ a\rho b\Leftrightarrow a>b+1.$$

Розділ 3. Поле раціональних чисел

Середній рівень

9. Якщо $\frac{m}{n}>1$, то $\frac{n}{m}>\frac{n^2}{m^2}$, якщо $\frac{m}{n}<1$, то $\frac{n}{m}<\frac{n^2}{m^2}$.
10. $b(b-a)=c(c-a)$.
12. Дроби мають вигляд $\frac{a}{b}$, $\frac{na}{n\left(a+b\right)}$.
13. Так, наприклад, $a=b=\frac{1}{2}$.
15. Із рівностей $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}=\frac{b}{c}$ маємо: $a^2=bc, b^2=ac, c^2=ab$. Тоді $2(a^2+b^2+c^2)=$ $=2ab+2ac+2bc$, або $\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(b-c\right)^2=0$.

Достатній рівень

2. Здійснимо підстановку $t=\frac{x}{y}$. Отримаємо рівняння $t^3+t^2+1=0$, яке не має раціональних коренів.
5. $c=\frac{a}{a^2+2b^2}$, $d=-\frac{b}{a^2+2b^2}$.
6. Якщо $r=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$, то r – корінь рівняння $r^3-6r-40=0$.
8. $x=1$
9. Дріб $\frac{a-b}{a+b}$ скоротний. Обернене твердження неправильне.
10. Застосувати м. м. і. і використати тотожність
$$\cos\left(k+1\right)\alpha=2\cos k\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\left(k-1\right)\alpha .$$
13. $\frac{a}{2a+1}, a\in Z$.
14. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=m\Rightarrow ad+bc=bdm\Rightarrow bc\,\vdots\, d$ і $ad\,\vdots\, b\Rightarrow b\,\vdots\, d$ і $d\,\vdots\, b\Rightarrow b=d$.
15. Ні. Дивись попередню задачу.
16. Ні. Дивись дві попередні задачі.
17. Ірраціональне.
18. $\lg tg 45^\circ=0$.
19. Ні, оскільки $1+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}\in I$.

20. $\sqrt{x^2+x+1}-x=r, r\in Q.$

Звідси маємо $x=\dfrac{r^2-1}{1-2r}$, якщо $r\neq\dfrac{1}{2}$. При $r=\dfrac{1}{2}$ рівність $\sqrt{x^2+x+1}-x=\dfrac{1}{2}$ неможлива. Нехай $x=\dfrac{r^2-1}{1-2r}$, де $r\in Q$, $r\neq\dfrac{1}{2}$, тоді

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{\left(\frac{r^2-1}{1-2r}\right)^2+\left(\frac{r^2-1}{1-2r}\right)+1}=\frac{r^2-r+1}{|1-2r|}\in Q\ .$$

Високий рівень

1. Припустимо, що $n(n+2)(n+4)(n+6)$ – квадрат натурального числа m, тоді $\left(n^2+6n+4\right)^2-16=m^2$. Оскільки n і m – натуральні числа, то їх можна знайти або з системи $\begin{cases}k+4-m=1\\k+4+m=16\end{cases}$, або з системи $\begin{cases}k+4-m=2\\k+4+m=8\end{cases}$,

де $k=n^2+6n$. Але ці системи не мають цілочисельних розв'язків.

2. Якщо послідовність (α_n) збіжна і $a_n=0,\alpha_n\alpha_{n+1}...=0,\alpha_n+0,1a_{n+1}$, або $10a_n=\alpha_n+a_{n+1}$, то послідовність (α_n) як різниця збіжних послідовностей збіжна. Але ж послідовність (α_n) складена із цифр, тому, починаючи з деякого номера $n_0: a_n=a, n\geq n_0$. Тоді дійсне число α, будучи періодичним десятковим дробом, є число раціональне.
3. Спочатку покажемо, що косинуси кутів трикутника, у якого сторони – раціональні числа, є раціональними. Нехай в

$$\triangle ABC: AB=c, BC=a, CA=b,\ \text{тоді}\ \cos\angle BAC=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\in Q\ .$$

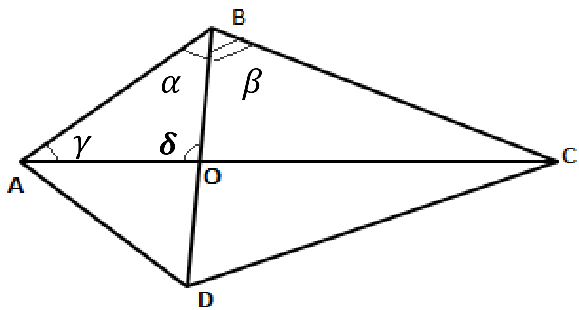

Рис. 2.

Отже, косинуси всіх кутів з вершинами в точках A, B, C, D – раціональні числа. Тепер доведемо, що відрізок OA виражається раціональним числом. Застосуємо теорему синусів до трикутників ABD і ABC:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} = \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} =$$

$$= \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} =$$

$$= \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \frac{BC}{AC}\left(\cos\beta + \cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin^2\alpha}\right) =$$

$$= \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \frac{BC}{AC}\left(\cos\beta + \cos\alpha \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{1-\cos^2\alpha}\right).$$

Оскільки $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma, \cos(\alpha+\beta)$ – раціональні числа, то AO виражається раціональним числом.

4. Дивись задачу 20 розділу 3. Поле раціональних чисел (Достатній рівень).
5. Нехай вектор a має координати $(a,b,c), a,b,c \in Q : a^2+b^2+c^2=1$. Знайти вектор $v(b;y;z)$, де $y,z \in Q, b^2+y^2+z^2=1$ і $ab+by+cz=0$.
6. Позначимо через $N\left(\frac{m}{n}\right)$ – порядковий номер числа $\frac{m}{n}$. Зауважимо, що $N\left(\frac{m}{n}\right) = N\left(\frac{1}{(m+n-1)}\right) + n$, і знайдемо $N\left(\frac{1}{(m+n-1)}\right)$. Нехай $m+n=k$, $k \geq 2, k \in N : N\left(\frac{1}{1}\right) = 1$. Якщо $k=3$, то чисел із сумою 3 є 2, тоді $N\left(\frac{1}{(k-1)}\right) = 1+2=3$. Якщо $k=4$, то чисел із сумою 4 є 3, тоді $N\left(\frac{1}{(k-1)}\right) = 3+3=6$. Якщо $k=5$, то чисел із сумою 5 є 4, тоді $N\left(\frac{1}{(k-1)}\right) = 6+4=10$. М. м. і. можна довести, що $N\left(\frac{1}{(k-1)}\right) = \frac{k(k-1)}{2}$.

   Тоді $N\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + n$.
7. Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ – послідовні сторони восьмикутника. Градусна міра кутів його – 135°. Якщо продовжити до перетину сторони a_1, a_3, a_5, a_7,

то утвориться прямокутник, протилежні сторони якого рівні, тобто $a_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 + a_8) = a_5 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a_4 + a_6)$, звідки $\sqrt{2}(a_5 - a_1) = a_2 + a_8 - a_4 - a_6$. Якби $a_5 \neq a_1$, то $\sqrt{2} \in Q$, що невірно. Отже, $a_1 = a_5$. Аналогічно $a_2 = a_6$ і $a_3 = a_7$, $a_4 = a_8$.

8. Необхідною умовою існування подібного правильного $3 \cdot 2^n$-кутника є існування правильного трикутника, вершини якого раціональні числа. Далі дивись задачу 15 розділу 2. Кільце цілих чисел (Достатній рівень).
9. $k = \frac{s^2 - 2}{2s} \in Q$. Див. приклад 3 розділу 3. Поле раціональних чисел.
10. Подавши дріб у вигляді $\frac{m}{n}$ $(n < 3m)$, отримаємо для визначення m рівність $m = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$. Число m, буде цілим лише при $\alpha = 2$.

Розділ 4. Поле дійсних чисел

Середній рівень

5. Припустити, що число є раціональне, і отримати очевидне протиріччя.
7. Ні.
8. Так, наприклад, $\alpha = 0{,}10010001...$
9. $\sqrt{\alpha}, \alpha + \beta \in I; \alpha \cdot \beta \in I$ при $\beta \neq 0$.
10. $\left[2;(4)\right]$.

Достатній рівень

1. а) $\left[3;(3,6)\right]$; б) $\left[2;(1,4,1,1)\right]$.
2. а) $\frac{49 - \sqrt{3}}{11}$; б) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{37} - 3}{4}$.

4. Наприклад, $\sqrt[3]{2}$.

6. а) нехай $\cos 20^\circ = x$. Оскільки $\cos 60^\circ = \cos 3 \cdot 20^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$, то x є коренем рівняння $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

б) нехай $tg 5^\circ = r \in Q$, тоді

$$r_1 = tg 10^\circ = \frac{2tg 5^\circ}{1 - tg^2 5^\circ} \in Q, \quad r_2 = tg\left(5^\circ + 10^\circ\right) = \frac{r + r_1}{1 - rr_1} \in Q \text{ і } tg 30^\circ = \frac{2r_2}{1 - r_2^2} \in Q.$$

Але $tg30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \overline{\in} Q$.

7. а) якщо $n-m-1\geq 0$, то $\sqrt{n}+\sqrt{m}\leq\sqrt{n-1}+\sqrt{m+1}$; якщо $n-m-1<0$, то $\sqrt{n}+\sqrt{m}>\sqrt{n-1}+\sqrt{m+1}$.
9. Раціональне.
10. Якби $a_n\in Q,$ то $\sqrt{2}\in Q$, що невірно.
11. Припустити, що такі раціональні числа a,b,r існують, тобто $\sqrt[3]{2}=a+b\sqrt{r}$. Якщо $\sqrt{r}\in Q,$ то $\sqrt[3]{2}\in Q$. Якщо ж $\sqrt{r}\in I,$ то можна довести, що $\sqrt{r}\in Q$ (піднести рівність до кубу).
12. а) $15-5\pi\in I;$ б) $3\pi-8\in I.$
16. а) для $k=\overline{0{,}14}$ $\left(\cos\dfrac{k\pi}{15}+i\sin\dfrac{k\pi}{15}\right)^{15}=1,$ або

$$\mathrm{Re}\left(\cos\frac{k\pi}{15}+i\sin\frac{k\pi}{15}\right)^{15}=\cos^{15}\frac{k\pi}{15}-C_{15}^{2}\cos^{13}\frac{k\pi}{15}\left(1-\cos^2\frac{k\pi}{15}\right)+$$
$$+C_{15}^{4}\cos^{11}\frac{k\pi}{15}\left(1-\cos^2\frac{k\pi}{15}\right)^2-...-C_{15}^{14}\cos\frac{k\pi}{15}\left(1-\cos^2\frac{k\pi}{15}\right)^7=1.$$

Тому $\cos\dfrac{\pi}{15},\cos\dfrac{2\pi}{15},...,\cos\dfrac{14\pi}{15}$ є коренями рівняння

$$x^{15}-C_{15}^{2}x^{13}\left(1-x^2\right)+C_{15}^{4}x^{11}\left(1-x^2\right)^2-...-C_{15}^{14}x\left(1-x^2\right)^7=1.$$

Тоді за теоремою Вієта

$$x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_{15}=1\cdot\cos\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}\cdot...\cdot\cos\frac{14\pi}{15}=-\frac{1}{1-C_{15}^{2}+C_{15}^{4}-...-C_{15}^{14}}.$$

б) якщо $\alpha=\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$, то α – корінь рівняння $\alpha^3+3\alpha-14=0$.

18. $\sqrt{40\sqrt{38\sqrt{36...\sqrt{2}}}}<40.$
19. Дивись задачу 11.
20. Ні.

Високий рівень

1. Припустимо, що $e\in Q$, тобто $2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+...=\dfrac{m}{n}$. Помножимо на $n!$, отримаємо: $2n!+3\cdot...\cdot n+4\cdot...\cdot n+...+1+\alpha_n=m\left(n-1\right)!,$ звідки

$$\alpha_n = m(n-1)! - 2n! - 3\cdot\ldots\cdot n - 4\cdot\ldots\cdot n - \ldots - 1 \in Z .$$

Але $0 < \alpha_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots = \frac{\frac{1}{(n+1)}}{1 - \frac{1}{(n+1)}} \le 1,$ що неможливо.

2. а) $\log_3 \frac{4}{3} > \log_3 \frac{5}{4} > \log_4 \frac{5}{4} \Rightarrow \log_3 4 > \log_4 5;$ б) $\lg^2 11 > \lg 12.$

3. Припустимо, що $\cos n^\circ \in Q$, тоді $\cos 2n^\circ = 2\cos^2 n^\circ - 1 \in Q$. В силу співвідношень

$$\cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha \cdot \cos\alpha - \cos(n-1)\alpha ,$$

тоді $\cos 3n^\circ, \cos 4n^\circ, \ldots, \cos kn^\circ \in Q$. Числа 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 є дільниками 30, тому $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \in Q$, що невірно.

4. Припустимо, що такий кут побудовано. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що його вершиною є початок координат. Якщо $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ – точки з цілочисельними координатами на різних сторонах цього кута і α та β – кути, що утворюють промені $[OA)$ та $[OB)$ з додатним напрямом осі OX , то $tg\alpha = \frac{y_1}{x_1}, tg\beta = \frac{y_2}{x_2}$. Нехай $\alpha > \beta$, тоді $\alpha - \beta = 60^\circ$ і $tg 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} \in Q$, що неможливо.

5. Оскільки для $k = \overline{1, n}$ $\left(\cos\frac{k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{2n+1} = \pm 1,$ звідки

$$\operatorname{Im}\left(\cos\frac{k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{2n+1} = 0 ,$$

або

$$C_{2n+1}^1 \cos^{2n}\frac{k\pi}{2n+1} - C_{2n+1}^3 \cos^{2n-2}\frac{k\pi}{2n+1}\cdot\sin^2\frac{k\pi}{2n+1} + \ldots + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}\sin^{2n}\frac{k\pi}{2n+1} = 0.$$

Тому $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}, \sin^2\frac{2\pi}{2n+1}, \ldots, \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ є коренями рівняння

$$x^n - C_{2n+1}^{2n-1}x^{n-1}(x-1) + C_{2n+1}^{2n-3}x^{n-2}(x-1)^2 + \ldots + C_{2n+1}^1(x-1)^n = 0.$$

За теоремою Вієта

$$\sin^2\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\sin^2\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{C_{2n+1}^1}{C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}}.$$

Використовуючи біном Ньютона до $(1+1)^{2n+1}$ та $(1-1)^{2n+1}$, одержимо $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$.

6. Якщо $\varphi = \arcsin(x-1) + 2arctg\,\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$, то $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ і $\sin\varphi = 1$, тому $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \in I$.
7. Для того, щоб довести справедливість нерівності $|a+b|^c \le |a|^c + |b|^c$, досить показати, що функція $g(x) = (1+x)^c - 1 - x^c$ невід'ємна на множині R^+ .
8. Припустимо, що $a_n \in Q$, тоді і $\sqrt{n} \in Q$. Якщо $n \ne m^2, m \in N$, отримаємо протиріччя. Якщо $n = m^2$, то $a_m^2 = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{m^2-1+m}}}$, тому $\sqrt{m^2-1+m} \in Q$. Але $m^2 < m^2 + m - 1 < (m+1)^2$.
9. Ні. Зустріч може відбутися тільки у вершині, до неї точки пройдуть шлях m , та $n\sqrt{2}, m, n \in N$.
10. Досить показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ нерівність $|\alpha x - y| < \varepsilon$ має безліч цілочисельних розв'язків. Для будь-якого $k \in N$ існує таке n_k , що $n_k < k\alpha < n_k + 1$. Оскільки існує s таке, що $\varepsilon > \dfrac{1}{s}$, а в проміжок $\left(\dfrac{m}{s}; \dfrac{(m+1)}{s}\right)$ попадуть деякі два числа $k_1\alpha$ і $k_2\alpha$, то $k_1 - k_2 = x, n_{k_1} - n_{k_2} = y$ шукані.

Розділ 5. Комплексні числа

Середній рівень

1. а) $x = 2, y = 1$; б) $x = \dfrac{20}{17}; y = -\dfrac{36}{17}$.
2. $z = -i, z = \dfrac{i}{3}$.
4. $1 + 2i, -1 + i$.
6. 2.
9. а) $z = iy, y \in R$; б) $z = 0, z = -1, z = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $z = 0, z = \pm i$.
10. $z = 2\cos 20^\circ \left(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ\right)$.

Достатній рівень

3. а) $\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right)$; б) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;

   в) $\frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

4. $\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}$.

5. а) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2^{32}}$; б) $\cos\left(-10^\circ+k60^\circ\right)+i\sin\left(-10^\circ+k60^\circ\right), k=\overline{0,5}$.

6. $0;\pm1;\pm i$.

7. а) $1+i$; б) $\pm\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)$.

8. Задачу можна сформулювати так: при яких параметрах *x,y* рівняння $x+iy=\frac{(c-i)}{(2c-i)}$ має дійсні розв'язки *c*? Вона зводиться до системи: $\begin{cases}(2x-1)c=-y,\\ 2cy=x-1.\end{cases}$ При $x=\frac{1}{2}$ система несумісна, при $y=0$ та $x=1$ існує розв'язок $c=0$, при $x\neq\frac{1}{2}$, $y\neq0$ система сумісна тоді, коли $\frac{-y}{2x+1}=\frac{x-1}{2y}$ або $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}$.

9. а) $S_1=\mathrm{Re}(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$; б) $S_2=\mathrm{Im}(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

10. За теоремою Вієта сума коренів рівняння $x^n-1=0$ рівна 0.

11. а) $\frac{\varphi}{2}$; б) $\frac{5\varphi}{2}$.

16. а) еліпс $\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$; *б*) $x=0\vee y=0, x\neq-1$.

17. $a\in\left(-2,1;-\frac{5}{6}\right)$.

19. $\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\mathrm{Im}\left(1+e^{ix}+e^{2ix}+...+e^{inx}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cdot\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$.

20. $\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\operatorname{Re}\left(e^{ix}+e^{3ix}+\ldots+e^{(2n-1)ix}\right)=\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}$

Високий рівень

1. Якщо $a=rz_1, b=rz_2, c=rz_3$, то $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Тоді

$$\left|\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}\right|=r\left|\frac{z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3}{z_1+z_2+z_3}\right|=r\left|z_1\cdot z_2\cdot z_3\right|\left|\frac{\dfrac{1}{z_3}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_1}}{z_1+z_2+z_3}\right|=$$

$$=r\left|\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=r\left|\frac{\overline{z_1+z_2+z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=r.$$

2. Нехай $a=m^2+n^2, a,m,n\in Z.$ Тоді $a=(m+in)(m-in)$, звідки

$$a^2=\left(m^2-n^2+2mni\right)\left(m^2-n^2-2mni\right)=\left(m^2-n^2\right)^2+(2mn)^2.$$

3. Аналогічно до задачі 2.

4. $S_n=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}2^{-k}e^{\frac{k\pi i}{3}}\right).$

5. $T_n=\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}2^{-k}e^{\frac{k\pi i}{3}}\right).$

6. $$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}\left(\sqrt{3}i\right)^k=\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}\left(\sqrt{3}i\right)^k1^{n-k}=\frac{1}{2^{100}}\left(1+\sqrt{3}i\right)^{100}=$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right).$$

7. $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}C_n^1-\left(\sqrt{3}\right)^3C_n^3+\left(\sqrt{3}\right)^5C_n^5-\ldots\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Im}\left(1+i\sqrt{3}\right)^n.$

8. Корені рівняння $z^2-z+1=0$ є коренями рівняння $z^3+1=0$.

   Тому $z^{142}+\dfrac{1}{z^{142}}=\left(z^3\right)^{47}\cdot z+\dfrac{1}{(z^3)^{47}z}=-\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=-1.$

9. Корені рівняння $z^2+z+1=0$ є коренями рівняння $z^3-1=0$. Далі дивись задачу 8.

10. Якщо $\alpha=\cos x+i\sin x$, то $a^{-1}=\cos x-i\sin x,$ і $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$.

    Тоді $\cos x=\dfrac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}, \sin x=\dfrac{\alpha-\alpha^{-1}}{2i}$. Використаємо ці рівності та формулу Муавра і обчислимо, наприклад, $\sin^3 x$:

$$\sin^3 x = \left(\frac{1}{\rho i^3}\right)\left(\alpha^3 - 3\alpha^2\alpha^{-1} + 3\alpha\left(\alpha^{-1}\right)^2 - \left(\alpha^{-1}\right)^3\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho i^3}\right)\left(\cos 3x + i\sin 3x - 3\left(\alpha - \alpha^{-1}\right) - \cos 3x + i\sin 3x\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho i^3}\right)\left(2i\sin 3x - 6i\sin x\right) = \left(\frac{3}{4}\right)\sin x - \left(\frac{1}{4}\right)\sin 3x.$$

Розділ 6. Алгебри з діленням над числовим полем

Середній рівень

1. Ні. Наприклад $q_1 = 1 + 2i + 3k, \quad q_2 = 1 - i + 3j - 2k.$ Тоді
   $\left(q_1 + q_2\right)^2 = -7 + 7i + 12j + 4k,$ а $q_1^{\ 2} + 2q_1q_2 + q_2^{\ 2} = -7 - 14i + 6j + 16k.$
2. Ні. Навести приклад.
4. $N\left(q\right) = 30, \ q^{-1} = \frac{1}{30}\left(1 - 2i - 3j - 4k\right), \ |\, q \,| = \sqrt{30}, \ |\, q^{-1} \,| = \frac{1}{\sqrt{30}}.$

Достатній рівень

3. а) $x_л = \frac{19}{5} - \frac{17}{5}i + \frac{17}{5}j - \frac{14}{5}k, \ \ x_n = \frac{19}{5} + i - \frac{24}{5}j + \frac{21}{5}k.$

$$1271 = 31 \cdot 41, \ 31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2, \ 41 = 6^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2.$$

$$31 = |\, 5 + 2i + j + k \,|^2, \ 41 = |\, 6 + 2i + j \,|^2 .$$

$$1271 = |\, 5 + 2i + j + k \,|^2 |\, 6 + 2i + j \,|^2 = |\left(5 + 2i + j + k\right) \cdot \left(6 + 2i + j\right)|^2 =$$

4. $= |\left(30 - 4 - 1 - 0\right) + \left(10 + 12 + 0 + 1\right)i + \left(5 + 6 + 2 - 0\right)j + \left(0 + 6 + 2 - 2\right)k \,|^2 =$

$$= |\, 25 + 21i + 13j + 6k \,|^2 = \left(\sqrt{25^2 + 21^2 + 13^2 + 6^2}\right)^2 = 25^2 + 21^2 + 13^2 + 6^2.$$

5. Можна (квадрати мають відповідно сторони завдовжки 1 см., 13 см., 31 см., 33 см.).
6. $\left[q_1, q_2\right] = \left[\left(1 + 2j + 3k\right), \left(1 - i + 3j - 2k\right)\right] = -26i + 10j + 2k.$
7. $\left[q_1, q_2\right] = \left[\left(a + bi + cj + dk\right), \left(a - bi + cj - dk\right)\right] = 0.$

Високий рівень

1. Для зведеного кватерніона $q = 1 + bi + cj + dk$ розглянути, зокрема, рівняння $\left(x - b\right)^2 + \left(x - c\right)^2 + d^2 = 0.$
2. $\left(z, \lambda\right) = \left(a + bi\right) + \left(c + di\right) \cdot j = \left(a + bi\right) + j \cdot \left(c - di\right).$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Балк М. Б. Математический анализ. Теория аналитических функций / М. Б. Балк, Н. Я. Виленкин, В. А. Петров. – М. : Просвещение, 1985. – 160 с.
2. Балк М. Б. Реальные применения мнимых чисел / М. Б. Балк, Г. Д. Балк, А. А. Полухин. – Киев : Рад. шк., 1988. – 255 с.
3. Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк, В. К. Григоренко, С. С. Левіщенко. – Київ : Вища школа. Головне вид-во, 1988. – 272 с.
4. Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк. – Київ : Вища школа, Головне видавництво, 1977. – 184 с.
5. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел. Практикум : у 2-х ч. / С. Т. Завало, С. С. Левіщенко, В. В. Пилаєв, І. О. Рокицький. – К. : Вища школа, Головне вид-во, 1983. – Ч. 1. – 232 с.
6. Нечаев В. И. Числовые системы / В. И. Нечаев. – М. : Просвещение, 1975. – 199 с.
7. Сорич В. А. Числові системи / В. А. Сорич, Н. М. Сорич. – Кам’янець-Подільський, 1996. – 53 с.
8. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел / И. К. Андронов. – М. : Просвещение, 1975. – 155 с.

Додаткова

9. Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – М. : Наука, 1973. – 144 с.
10. Клини С. Математическая логика / С. Клини. – М. : Мир, 1973. – 480 с.
11. Кострикин А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – М. : Наука, 1977. – 495 с.
12. Новиков П. С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической / П. С. Новиков. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
13. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1986. – 117 с.
14. Проскуряков И. В. Числа и многочлены / И. В. Проскуряков. – М. : Просвещение, 1965. – 284 с.
15. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Р. Столл. – М. : Изд-во иностр. Лит., 1968. – 231 с.
16. Уткіна С. В. Алгебра і числові системи / С. В. Уткіна, Л. С. Чаришкіна. – Київ : Вища школа, 1995. – 304 с.

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

СОРИЧ Віктор Андрійович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

СОРИЧ Ніна Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

ПРАКТИКУМ. ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Підписано до друку 25.11.2019 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк різографічний.
Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк. 4,1. Обл.-вид. арк. 4,4.
Тираж 50. Зам. № 876.

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.