УДК 518.968

К. Г. Геселева, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ДОСЛІДЖЕННЯ НА СУМІСНІСТЬ ТА ВІДШУКАННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

У статті досліджується задача на сумісність одного типу інтегро-функціонального рівняння з малою не лінійністю та додатковими умовами (обмеженнями), коли оператор внутрішньої суперпозиції знаходиться в підінтегральному виразі інтегрального оператора. Приведена задача є важлива в зв'язку з тим, що до неї зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням та додатковими умовами. Показано, що в частковому випадку, коли $h(x) = x - \Delta$, отримується випадок сталого запізнення.

Крім основної задачі, в якій досліджується узгодженість шуканого розв'язку з додатковими умовами, також розглянуто допоміжну задачу, – задачу з керуванням. Основна ідея досліджень на сумісність згаданої задачі полягає в тому, що ця задача зводиться до аналогічної задачі для інтегрального рівняння з малою нелінійністю і з сумісності останньої випливає сумісність основної задачі.

У роботі розглянуто питання побудови наближених розв'язків як основної так і допоміжної задач. Показано, що при виконанні певних умов такі розв'язки можна отримати, застосувавши до задачі один варіант ітераційного методу. При застосуванні цього методу на кожному кроці ітерації виникає необхідність у розв'язанні лінійної системи алгебраїчних рівнянь. Оскільки основна матриця системи є невиродженою і однаковою для кожного кроку ітерації, то доцільно на початку цього процесу знайти обернену матрицю і в подальшому поетапно використовувати її при відшуканні наближених розв'язків. Слід мати на увазі, що у випадку, коли основна задача є сумісною, використання додаткових умов, яким задовольняє шуканий розв'язок, дає змогу покращити умови збіжності та швидкість збіжності згаданого ітераційного методу.

Одержані результати є важливими в подальших дослідженнях різних типів наближених методів для відшукання розв'язків інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями.

Ключові слова: *наближений розв'язок, додаткові умови, обмеження, інтегро-функціональні рівняння з малою нелінійністю, інтегральне рівняння з малою нелінійністю ітеративний метод, обернений оператор.*

Вступ. Розглянемо в просторі $L_2[a, b]$ інтегро-функціональне рівняння

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt + \int_a^b H(x,t)\, y(h(t))\, dt +$$
$$+\varepsilon \int_a^b G(x;t)\, F(t; y(t))\, dt, x \in [a,b], \quad (1)$$

з умовою

$$y(x) = \psi(x), x \notin [a,b], \quad (2)$$

та обмеженнями

$$\int_a^b \Phi_i(x) y(x) dx = \gamma_i, i = \overline{1,m}, \quad (3)$$

де $f(x), \psi(x)$ — задані відповідно на $[a,b]$ та за його межами функції, а $y(x)$ — шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій $\{\Phi_i(x)\}$ та числова множина $\{\gamma_i\}, i = \overline{1,m}$ — відомі. До рівняння (1) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, у випадку сталого запізнення $\Delta, h(x) = x - \Delta$.

Задачу (1)–(3) будемо вважати сумісною, якщо існує така функція $y(x)$, яка є розв'язком рівняння (1), задовольняє умову (2) та обмеження (3).

Основна частина. Розглянемо випадок, коли функції $K(x,t)$, $H(x,t), G(x;t)$ в квадраті $[a,b]^2$ задовольняють умови

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)\, dxdt = K^2 < \infty , \quad (4)$$

$$\int_a^b \int_a^b H^2(x,t)\, dxdt = H^2 < \infty , \quad (5)$$

$$\int_a^b \int_a^b G^2(x;t)\, dxdt = G^2 < \infty;$$

функція $\Phi(t; y)$ в області $D = \{a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ вимірна за t при всіх y і неперервна за y при всіх t (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця:

$$\left|\Phi(t; y) - \Phi(t; \bar{y})\right| \le L\left|y - \bar{y}\right|,$$

де L — деяка додатня стала; функція $h(x)$ є неперервною разом із своєю похідною на $[a,b]$ і справджуються нерівності

$$x-h(x)\geq\Delta>0, \tag{6}$$

$$h'(x)\geq l>0. \tag{7}$$

Покажемо, що рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (7) зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю. Перепишемо другий інтеграл правої частини рівняння (1) з урахуванням умови (2) так

$$\int_a^b H(x,t)\,y(h(t))\,dt=\int_a^{h^{-1}(a)} H(x,t)\,y(h(t))\,dt+\int_{h^{-1}(a)}^{b} H(x,t)\,y(h(t))\,dt=$$

$$=\int_a^{h^{-1}(a)} H(x,t)\,\varphi(h(t))\,dt+\int_{h^{-1}(a)}^{b} H(x,t)\,y(h(t))\,dt=$$

$$=\varphi(x)+\int_{h^{-1}(a)}^{b} H(x,t)\,y(h(t))\,dt.$$

В силу умови (7) неперервна функція $s=h(t)$ буде зростаючою і для неї існуватиме обернена функція $t=h^{-1}(s), dt=\dfrac{ds}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}$. Тоді останній інтеграл буде мати вигляд

$$\int_{h^{-1}(a)}^{b} H(x,t)\,y(h(t))\,dt=\int_a^{h(b)}\frac{H\left(x,h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}y(s)ds=\int_a^b\tilde{H}(x,s)y(s)ds,$$

$$\tilde{H}(x,s)=\begin{cases}\dfrac{H\left(x,h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}, s\in\left[a,h(b)\right],\\ 0, s\in(h(b),b], x\in[a,b].\end{cases} \tag{8}$$

Слід відмітити що оператор $\tilde{H}$, який визначається рівністю

$$\left(\tilde{H}v\right)(x)=\int_a^b\tilde{H}(x,t)v(t)dt, \forall v(x)\in L_2\left[a,b\right], \tag{9}$$

з виконанням умов (5)–(7) бачимо, що оператор K, який має вигляд

$$\left(Kv\right)(x)=\int_a^b K(x,t)v(t)dt, \forall v(x)\in L_2\left[a,b\right],$$

буде Фредгольмовим.

Дійсно,

$$\int_a^b\int_a^b\tilde{H}^2(x,s)\,dxds=\int_a^b\int_a^b\frac{H^2\left(x,h^{-1}(s)\right)}{\left(h'\left(h^{-1}(s)\right)\right)^2}dxds\leq\int_a^b\int_a^b\frac{H^2\left(x,h^{-1}(s)\right)}{h^2}dxds=$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_a^b\int_a^b H^2\left(x,h^{-1}(s)\right)dxds\le\frac{H^2}{h^2}<\infty.$$

З урахуванням приведених міркувань рівняння (1) з умовою (2) запишеться таким чином

$$y(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)y(t)dt+\varphi(x)+\int_a^b\tilde{H}(x,s)y(s)ds+$$

$$+\varepsilon\int_a^b G(x;t)F\left(t;y(t)\right)dt,x\in[a,b],$$

або

$$y(x)=f_1(x)+\int_a^b T(x,t)y(t)dt+\varepsilon\int_a^b G(x;t)F\left(t;y(t)\right)dt,\qquad(10)$$

де

$$f_1(x)=f(x)+\varphi(t)=f(t)+\int_a^{h^{-1}(a)} H(x,t)\psi\left(h(t)\right)dt,\qquad(11)$$

$$T(x,t)=K(x,t)+\tilde{H}(x,t),(x,t)\in[a,b]^2.\qquad(12)$$

Таким чином, ми показали, що рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (4)-(7) зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю (10) з цілком неперервним оператором T . Це означає, що задача (1)-(3), в свою чергу, зводиться до аналогічної задачі (10), (3) для інтегрального рівняння з малою нелінійністю і з сумісності випливає сумісність вихідної задачі і навпаки. Дослідженню умов сумісності задачі типу (10), (3) присвячена низка наукових праць, зокрема [2, 3]. Встановлений факт еквівалентності задач (1)–(3) та (10), (3) щодо їх сумісності дає можливість проводити подальші дослідження стосовно формулювання умов сумісності, безпосередньо, для задачі (10), (3) та розгляду питання застосування до цієї задачі наближених методів.

Зауваження. Умова (6), в приведених вище міркуваннях, не є суттєвою. Вона впливає лише на визначення нових меж при згаданій заміні змінної в другому інтегралі рівняння (1) та вказує на те, що умова (2) виконується конкретно на проміжку $[h^{-1}(a),a)$. Міркування аналогічні приведеним, можна провести і в тому випадку, коли стосовно функції $h(x)$ виконується лише умова (7). Це говорить про те, що для цієї функції може існувати такий проміжок $\left[x_1;x_2\right]\subseteq[a,b]$ (чи декілька проміжків), що $h(x)\ge x,\forall x\in\left[x_1;x_2\right]$.

Задача з керуванням. Розглянемо в просторі $L_2\left[a,b\right]$ задачу

$$\tilde{y}\left(x\right)=f\left(x\right)+\int_a^b K\left(x,t\right)\tilde{y}\left(t\right)dt+\int_a^b H\left(x,t\right)\tilde{y}\left(h(t)\right)dt+ \\ +\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)F\left(t;\tilde{y}\left(t\right)\right)dt, x\in\left[a,b\right], x\in\left[a,b\right], \tag{13}$$

$$\tilde{y}\left(x\right)=\psi(x), x\notin\left[a,b\right], \tag{14}$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)\tilde{y}(x)dx=\gamma_i+\int_a^b \Phi_i(x)u(x)dx, i=\overline{1,m}, \tag{15}$$

де $\tilde{y}(x)$ і $u(x)$ — шукані функції, причому

$$u(x)=\sum_{j=1}^m \lambda_j\xi_j(x), \tag{16}$$

$\left\{\xi_j(x)\right\}, j=\overline{1,m},$ — деяка лінійно-незалежна система функцій і $\xi_j(x)=0$, коли $x\notin\left[a;b\right]$.

Покажемо, що задача (13)–(15) еквівалентна деякому рівнянню без обмежень. Введемо заміну

$$\tilde{y}\left(x\right)=z\left(x\right)+\int_a^b K\left(x;t\right)u\left(t\right)dt+\int_a^b H\left(x;t\right)u\left(h(t)\right)dt+ \\ +\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)F\left(t;u\left(h(t)\right)\right)dt, x\in\left[a,b\right], x\in\left[a;b\right], \tag{17}$$

яку будемо розглядати, як допоміжну задачу, вважаючи в ній функцію $z\left(x\right)$ заданою, а функції $\tilde{y}\left(x\right)$ та $u\left(x\right)$ треба знайти. Підставляючи (16) в (17), а потім (16) та (17) в рівність (15), отримаємо

$$\int_a^b \Phi_i(x)\{z(x)+\sum_{j=1}^m \lambda_j(\int_a^b K(x,t)\xi_j(t)dt+\int_a^b H(x,t)\xi_j(h(t))dt)\}dx+ \\ +\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)F\left(t;\xi_j\left(t\right)\right)dt=\gamma_i+\int_a^b \Phi_i(x)\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j\xi_j(x)\right)dx, i=\overline{1,m},$$

Перепишемо цю рівність так

$$\int_a^b \Phi_i(x)\{\sum_{j=1}^m \lambda_j(\xi_j(x)-\int_a^b K(x,t)\xi_j(t)dt-\int_a^b H(x,t)\xi_j(h(t))dt)\}dx- \\ -\varepsilon\int_a^b G\left(x;t\right)F\left(t;\xi_j\left(t\right)\right)dt=\int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx-\gamma_i, i=\overline{1,m}.$$

Нехай

$$\eta_j(x) = \xi_j(x) - \int_a^b K(x,t)\xi_j(t)dt - \int_a^b H(x,t)\xi_j(h(t))dt -$$
$$-\varepsilon\int_a^b G(x;t)\, F\left(t;\xi_j(t)\right)dt. \qquad (18)$$

Позначивши

$$\int_a^b \Phi_i(x)\eta_j(x)dx = a_{ij}, b_i = \int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx - \gamma_i, i, j = \overline{1,m}. \qquad (19)$$

Останню рівність запишемо так

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j = b_i, i = \overline{1,m}. \qquad (20)$$

Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо випадок, коли матриця цієї системи, яку позначимо через Λ, не вироджена і нехай $\Lambda^{-1} = (c_{ij}), i, j = \overline{1,m}$ — обернена матриця. Тоді

$$\lambda_j = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_j, j = \overline{1,m}, \qquad (21)$$

і розв'язки допоміжної задачі (17), (15) запишуться так

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_j(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji} b_i \xi_j(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\left(\int_a^b \Phi_i(t)z(t)dt - \gamma_i\right)\xi_j(x) =$$
$$= \int_a^b \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji} b_i \xi_j(x)\Phi_i(t)z(t)dt - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\gamma_i\xi_j(x).$$

Тобто

$$u(x) = \int_a^b R(x,t)z(t)dt - w(x), \qquad (22)$$

$$R(x,t) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\xi_j(x)\Phi_i(t), \qquad (23)$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \xi_j(x), \sigma_j = \sum_{j=1}^{m} c_{ji}\gamma_i, j = \overline{1,m}, \qquad (24)$$

$$\tilde{y}(x) = u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \eta_i(x) = u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji} b_i \eta_j(x) =$$
$$= u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\left(\int_a^b \Phi_i(t)z(t)dt - \gamma_i\right)\eta_j(x) =$$

$$= u(x) + z(x) - \int_a^b \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \Phi_i(t) \eta_i(t) dt - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \gamma_i \eta_j(x) =$$

$$= u(x) + b(x) + \int_a^b P(x,t) z(t) dt,$$

$$P(x,t) = \delta(x-t) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \eta_j(x) \Phi_i(t), \qquad (25)$$

$$b(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \gamma_i \eta_j(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_i \eta_j(x), \qquad (26)$$

Таким чином, єдиний розв’язок допоміжної задачі (17), (15) має вигляд

$$u(x) = \int_a^b R(x,t) z(t) dt - w(x), \; y(x) = u(x) + b(x) + \int_a^b P(x,t) z(t) dt.$$

Згідно з теоремою 3 [3] задача (1)–(3) сумісна лише тоді, коли розв’язок $z^*(x)$ рівняння

$$z(x) = g(x) + \int_a^b M(x,t) z(t) dt, \qquad (27)$$

задовольняє умову

$$\int_a^b P(x,t) z^*(t) dt = w(x), \qquad (28)$$

де

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) z(t) dt + \int_a^b H(x,t) z(h(t)) dt + \varepsilon \int_a^b G(x;t) F(t; z(t)) dt, \qquad (29)$$

$$M(x,t) = \int_a^b K(x,\xi) P(\xi,t) d\xi + \int_a^b H(x,\xi) P(h(\xi),t) dt + \varepsilon \int_a^b G(x;t) F(t; z(t)) dt. \qquad (30)$$

Можна також показати, що умова (28) буде рівносильною умовою

$$\int_a^b \Gamma_j(t) z^*(t) dt = \sigma_j, \; j = \overline{1,m}, \qquad (31)$$

де

$$\Gamma_j(t) = \sum_{i=1}^m c_{ji} \Phi_i(t). \qquad (32)$$

Ітераційний метод. Ідея ітераційного методу стосовно задачі (1)–(3) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на підставі формул

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\, y_{k-1}(t)\, dt + \int_a^b H(x;t)\, y_{k-1}(h(t))\, dt, x \in [a;b], \quad (33)$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x), x \notin [a;b], \quad (34)$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)\, u_k(t)\, dt + \int_a^b H(x;t)\, u_k(h(t))\, dt,\ x \in [a;b], \quad (35)$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \xi_i(x), x \in [a,b], u_k(x) = 0, x \notin [a,b], \quad (36)$$

$$\int_a^b \Phi_i(x) y_k(x) dx = \gamma_i, i = 1,m, y_k(x) = \tilde{y}_k(x) - u_k(x). \quad (37)$$

Для визначення невідомих параметрів $\lambda_j^k, j = \overline{1,m}$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Дійсно, на підставі наведених вище формул матимемо

$$y_k(x) = z_k(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \eta_i(x). \quad (38)$$

Якщо підставити цю функцію в першу з формул (37) і скористатись позначенням (19), то отримаємо

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \lambda_j^k = b^k, i = \overline{1,m}, \quad (39)$$

де

$$b_i^k = \int_a^b \Phi_i(x) z_k(x) dx - \gamma_i, i = \overline{1,m}. \quad (40)$$

Висновки. Метод (33)–(37) буде збіжним, якщо матриця Λ невироджена, задача (1)–(3) сумісна і $\rho(M) < 1$, причому послідовність $\{y_k(x)\}$ збігатиметься до єдиного розв'язку $y^*(x)$ задачі (1)–(3), а послідовність $\{u_k(x)\}$ збігатиметься до нуля.

Список використаних джерел:

1. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Алимов. — М. : Наука, 1948. — 752 с.
2. Криль С. А. Решение интегро-разностных уравнений с малой нелинейностью проекционно-итеративным методом / С. А. Криль. — К., 1978. — 35 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.17).

3. Лучка А. Ю. Методи розв'язування рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова / А. Ю. Лучка // Укр. мат. журн. — 1996. — Вип. 48, № 11. — С. 1501–1509.
4. Лучка А. Ю. Интегральные уравнения и методы их решения / А. Ю. Лучка // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — №3. — С. 82–96.
5. Лучка А. Ю. Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями / А. Ю. Лучка, Т. А. Кучерук // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54. — №4. — С. 472–482.

RESEARCH ON COMPATIBILITY AND REVIEW OF APPROPRIATE SOLUTIONS OF INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH SMALL NONLINEARITY AND RESTRICTIONS

The article deals with the problem of compatibility of one type of integro-functional equation with additional conditions (restrictions) and with a small nonlinearity, when the operator of the internal superposition is in the integral operator integral expression. The given problem is important because it reduces the boundary value problem for a differential equation with delay deviation and additional conditions. It is shown that in the partial case, when $h(x) = x - \Delta$, a case of steady delay is obtained.

In addition to the main task, which investigates the coherence of the desired solution with the additional conditions, also considered the auxiliary problem — the task of management. The basic idea of research on the compatibility of this problem is that this problem is reduced to a similar problem for an integral equation with a small nonlinearity, and the compatibility of the latter implies compatibility of the main problem.

The paper deals with the problem of construction of approximate solutions of both basic and auxiliary problems. It is shown that under certain conditions, such solutions can be obtained by applying one variant of the iterative method to the problem. When applying this method, at every step of the iteration, there is a need to solve the linear system of algebraic equations. Since the main matrix of the system is not degenerate and is the same for each iteration step, it is expedient at the beginning of this process to find an inverse matrix and then use it step by step in the search for approximate solutions. It should be borne in mind that in the case where the primary task is compatible, the use of additional conditions that satisfies the desired solution will improve the convergence conditions and the convergence rate of the said iterative method.

The obtained results are important in the further research of various types of approximate methods for finding solutions to integro-functional equations with constraints.

Key words: *approximate solution, additional conditions, restrictions, integro-functional equations with small nonlinearity, integral equation with small nonlinearity, iterative method, inverse operator.*

Отримано: 29.05.2018