

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

А. Ф. ВЕРЛАНЬ,
А. А. ВЕРЛАНЬ,
К. М. КЛЮЧКА,
В. А. ФЕДОРЧУК

ІНТЕГРАЛЬНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

МОНОГРАФІЯ

Кам'янець-Подільський
2022

УДК 004.94
ББК 22.183.4
В33

Друкуються згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 7 від 30 червня 2022 року.

Рецензенти:

В. І. Мороз, доктор технічних наук, професор,
професор кафедри електромехатроніки та
комп'ютеризованих електромеханічних систем
Національного університету «Львівська політехніка»;
С. А. Положаєнко, доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри комп'ютеризованих систем
та програмних технологій Національного університету
«Одеська політехніка».

Верлань А. Ф., Верлань А. А., Ключка К. М., Федорчук В. А.
В33 **Інтегральні динамічні моделі електричних кіл:** монографія.
Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний
університет імені Івана Огієнка, 2022. 172 с.

ISBN 978-966-643-096-3

Розглянуто методи математичного і комп'ютерного моделювання динамічних процесів в електричних колах із застосуванням інтегральних рівнянь та операторів. Наводяться обчислювальні алгоритми та приклади розв'язування модельних та прикладних задач.

Для науковців, науково-педагогічних працівників та інженерів, які займаються моделюванням електричних кіл, а також аспірантів та студентів відповідних технічних спеціальностей.

УДК 004.94
ББК 22.183.4

ISBN 978-966-643-096-3

© **Верлань А. Ф.,** Верлань А. А.,
Ключка К. М., Федорчук В. А., 2022

ВСТУП

З розвитком електроніки і електроенергетики постійно зростає складність задач аналізу і проектування електротехнічних пристроїв, що обумовлює необхідність вдосконалення відповідних методів математичного опису, числового і комп'ютерного розрахунку електричних кіл. При цьому задачі дослідження і розрахунку динаміки електричних кіл є найбільш трудомісткими. Характерним і розповсюдженим на практиці прикладом є складні електричні кола, які містять різноманітні елементи як із зосередженими, так і з розподіленими параметрами, що стали невід'ємною частиною багатьох електротехнічних та електронних пристроїв. Ця обставина висуває особливі вимоги до їх моделей аж до необхідності застосування нетрадиційних моделей, структура яких повинна враховувати неоднорідність кіл, що розраховуються. Крім того, для розрахунку та проектування значної кількості електричних кіл вихідною інформацією є експериментально отримані дані у вигляді неперервних динамічних характеристик цих кіл (перехідних чи імпульсних перехідних функцій). В цьому випадку достатньо складно застосувати традиційні моделі у вигляді диференціальних рівнянь, які відносяться до класу параметричних моделей. Принципово найбільш ефективними при цьому повинні бути непараметричні моделі, які формуються безпосередньо на основі динамічних характеристик об'єктів, що моделюються. Цією особливістю володіють моделі у вигляді інтегральних операторів чи рівнянь.

Традиційний підхід при побудові алгоритмів та програмних засобів розрахунку перехідних процесів в електричних колах базується на числовій реалізації диференціальних рівнянь. Цей підхід закладений майже у всі універсальні та спеціалізовані серійні пакети прикладних програм, що дозволяють вести такі розрахунки. Числові алгоритми, що реалізовані в серійних пакетах на теперішній час, достатньо удосконалені та широко застосовуються для розв'язування багатьох задач моделювання, але теж мають певні якісні обмеження, що стосуються вказаних вище задач, а також задач великої розмірності, кіл із імпульсними впливами, зі змінною структурою, із високим рівнем високочастотних завад.

Ефективним підходом для подолання цих утруднень може бути використання обчислювальних алгоритмів, заснованих на реалізації нетрадиційних динамічних моделей у вигляді інтегральних або змішаних інтегро-диференціальних залежностей, аналітично еквівалентних моделям у вигляді диференціальних рівнянь, але таких, що реалізуються якісно відмінними обчислювальними методами, які врахо-

вують особливості структури непараметричних моделей. Дані обчислювальні методи володіють корисною для зазначених задач специфікою та можуть забезпечувати необхідні результати для задач розрахунку із вказаними вище особливостями. Слід зазначити, що області задач, які ефективно розв'язуються завдяки цим двом підходам, можуть перетинатися, але принципово не співпадають.

Інтегральні рівняння є своєрідним та самостійним математичним апаратом, який має специфічні особливості при якісному та кількісному дослідженні задач динаміки. Для них своєрідними є методи аналізу стійкості та асимптотичних властивостей, а також методи кількісного розрахунку динамічних процесів та характеристик систем (в даному випадку електричних кіл).

Сучасні методи аналізу перехідних процесів в електричних колах повинні враховувати зростаючу складність та все більш жорсткі вимоги до якості отримуваних результатів. Пошук ефективних методів аналізу перехідних процесів привів до створення цілого ряду методів, які отримали загальне визнання. Відомим серед них є метод підсумовування скінчених приростів [12,13] запропонований В. М. Бондаренком і також принципово відноситься до класу інтегральних методів. Необхідно зазначити, що цей метод має ряд переваг, а саме, дає можливість отримати розв'язок для жорстких систем диференціальних рівнянь і є простим для комп'ютерної алгоритмізації. Відома також методика розрахунку перехідних процесів на основі використання розривних функцій для опису моменту комутації напруг та струмів в електричній мережі [11]. Комплексний підхід, який ґрунтується на відомих методах гармонічного синтезу і комутаційних функцій, наведено у роботі [84]. Він дає можливість в аналітичному вигляді дослідити складні електромагнітні процеси у нелінійних електричних колах з вентиляними елементами. Модель нелінійних крайових задач, яка побудована на диференціально-тейлорівських перетвореннях, запропонована у роботі [5]. Аналізу схем з вентиляними та ключовими елементами присвячена робота [109]. Відомий підхід до побудови та аналізу математичних моделей електричних мереж на основі вузлових інтегральних рівнянь відповідає методу вузлових напруг для електричних кіл [92].

Крім традиційних задач, пов'язаних з аналізом динамічних процесів, існує ряд задач дослідження динамічних систем без попереднього знання законів їх функціонування, а також задачі, які зворотні задачам аналізу – ідентифікація, синтез управління, діагностика електричних та електронних схем і т.п. Трактовка властивостей динамічних об'єктів на основі поняття післядії, розвиток структурного методу досліджень привели до практичного використання інтегральних операторів в якості математичних моделей елементів систем і систем в цілому. Це зумо-

вило широке застосування інтегральних рівнянь для розв'язування багатьох задач моделювання динамічних об'єктів та систем. Важлива роль в розвитку методу інтегральних рівнянь відносно електричних кіл належить роботам О. І. Безносолової [6, 7], В. І. Біленка [46], В. М. Бондаренка [12-17], А. Ф. Верляня [19-29], В. М. Висоцького [31], В. І. Мороза [78-81], І. О. Орурка [86], Г. Є. Пухова [91-93], М. Й. Ронто [97], Е. П. Семагіної [97, 138], М. Ю. Юр'єва [114], J. R. Carson [123], J. H. Chou [125], Н. Poch [136] та інших.

Значне розширення області застосування інтегральних рівнянь, виникнення нових класів задач, де використання інтегральних математичних моделей є ефективним, стимулювало розробку теоретичних основ і практичних алгоритмів їх розв'язування.

Таким чином, призначення апарату інтегральних рівнянь стосовно розрахунку перехідних процесів в електричних колах співпадає з призначенням звичайних диференціальних рівнянь. При цьому задачі Коші відповідають інтегральні рівняння типу Вольтерри, а крайовій задачі – рівняння типу Фредгольма, Проміжне положення займають інтегро-диференціальні рівняння, які можуть формуватися в тому числі і для крайової задачі.

Інтегральні методи розрахунку мають такі позитивні властивості як зручність та компактність математичного опису електричних кіл; високий рівень універсальності моделей; високу стійкість методів числової реалізації інтегральних залежностей [4, 137]; властивість згладжування похибок експериментальних даних [19]. При цьому залежність між вихідними величинами і вхідними діями представлена інтегральними операторами, ядра яких повністю визначають внутрішні властивості даних математичних моделей та одночасно трактуються (для лінійних систем) як реакції на типові вхідні дії, тобто мають природній практичний зміст [24, 25, 93].

Засновником інтегрального підходу до розв'язування задач динаміки є італійський вчений Віто Вольтерра (1860-1940 р.р.) [30], який і заклав основи теорії інтегральних рівнянь як ефективних математичних моделей динамічних об'єктів (рівняння Вольтерри).

Аналіз існуючих пакетів прикладних комп'ютерних програм показує, що серед розроблених програмних засобів явно недостатньо таких, які забезпечують ефективне моделювання широкого класу електричних кіл, що описуються інтегральними та інтегро-диференціальними рівняннями. Це свідчить про важливість і актуальність задачі відповідного розширення можливостей існуючих відкритих програмних пакетів комп'ютерного моделювання, зокрема шляхом створення методів та алгоритмів розрахунку перехідних процесів в електричних колах на основі використання та числової реалізації динамічних моделей електричних кіл у вигляді інтегральних рівнянь.

1. ФОРМУВАННЯ ТА ОСОБЛИВОСТІ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

1.1. Інтегральні рівняння Вольтерри

Інтенсивний розвиток наближених методів розв'язування математичних задач передбачає використання широких обчислювальних можливостей комп'ютерів. Проте застосуванню комп'ютера передую велика робота по математичному опису задачі, що розв'язується, пошуку вдалої математичної моделі, яка відображає реальне явище і разом з тим доступної для дослідження і отримання кількісних результатів. Саме на цьому етапі розв'язується питання про використання тих чи інших видів рівнянь або іншої математичної залежності.

Методологія розрахунку перехідних процесів в електричних колах, що склалася, може дати певні рекомендації по застосуванню скінченних рівнянь, звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь з частинними похідними, що стали вже традиційними математичними моделями електричних кіл. Значно менше загальних рекомендацій для застосування інтегральних рівнянь, хоча їх застосування безперервно поширюється. Є задачі, для опису яких принципово неможливо застосувати які-небудь інші види рівнянь.

Під інтегральною динамічною моделлю електричного кола будемо розуміти його математичну модель в якій вхідні чи вихідні змінні (струми, напруги, потокочеплення) входять під знак інтеграла, тобто якщо ця модель містить інтегральний оператор.

Основні типи інтегральних рівнянь. В достатньо загальному випадку лінійні інтегральні рівняння представляються у вигляді [25]

$$g(x)y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x \in Q, \quad (1.1)$$

де $K(x,s)$ – ядро ІР, $f(x)$ – права частина рівняння з областю визначення Q , λ – параметр рівняння (часто рівний 1 чи -1), $y(s)$ – функція, яку необхідно знайти в області визначення Ω – змінною чи постійною, одномірною чи багатомірною. Функції $K(x,s)$, $f(x)$, $g(x)$, параметр λ та області визначення Q і Ω вважаються заданими, а функція $y(s)$ – невідомою. При цьому функції $K(x,s)$, $f(x)$, $g(x)$, $y(s)$ можуть бути як комплексними, так і дійсними, а змінні x та s – тільки дійсними.

У випадку $g(x) = 0$ (1.1) є рівняння першого (І) роду і має вигляд

$$\int_{\Omega} K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad x \in Q, \quad (1.2)$$

тоді у випадку $\Omega = Q$ його називають рівнянням Вольтерри, а у випадку $\Omega \neq Q$ – рівнянням Фредгольма. Якщо $g(x) \neq 0$ то рівняння (1.2) допускає ділення на $g(x)$ і можливо розглядати рівняння виду

$$y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad x \in Q, \quad (1.3)$$

яке називається рівнянням другого (II) роду. Інколи $g(x) = 0$ лише для деяких, але не всіх $x \in Q$ тоді рівняння (1.1) називають рівнянням III роду. Такі рівняння слабо досліджені, хоча, і зустрічаються при розв'язуванні практичних задач.

Інтегральні рівняння з різницевиими ядрами, тобто рівняння типу згортки, і які часто застосовують для розрахунку *електричних кіл*, мають вигляд

$$g(x)y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x - s)y(s)ds = f(x). \quad (1.4)$$

Рівняння (1.1), в якому $f(x) \neq 0$ називається неоднорідним, а у протилежному випадку – однорідним і використовується для постановки та розв'язування задачі знаходження власних значень і власних функцій.

Крім вищенаведених лінійних інтегральних рівнянь також існують нелінійні інтегральні рівняння в яких інтеграл, що містить невідому функцію $y(s)$, записується у вигляді оператора *Урисуна*

$$A_y[y] \Rightarrow \int_{\Omega} K[x, s, y(s)]ds, \quad (1.5)$$

чи у вигляді оператора *Гаммерштейна*

$$A_{\Gamma}[y] \Rightarrow \int_{\Omega} K(x, s)F[y(s)]ds. \quad (1.6)$$

Часто при моделюванні реальних систем використовують, крім одномірних рівнянь, системи інтегральних рівнянь, які мають вигляд

$$g_i(x)y_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} K_{ij}(x, s)y_j(s)ds = f_i(x), \quad x \in Q_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (1.7)$$

або (1.1), але під $f(x)$, $g(x)$, $y(s)$ розуміють векторні функції, а під $K(x, s)$ – матрицю-функцію.

Задача аналізу перехідних процесів в електричних колах. Відомі закономірності, що зв'язують фізичні величини основних елементів електричних кіл, використовуються, зазвичай, для отримання диференціальних рівнянь електричного кола в цілому, хоча можуть застосо-

уватися і для отримання еквівалентних інтегральних рівнянь. Дійсно, для опису лінійних елементів C і L разом з відомими диференціальними співвідношеннями використовуються інтегральні залежності:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(s) ds, \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(s) ds, \quad (1.8)$$

де i_C , i_L , u_C , u_L – відповідно струми і напруги конденсатора і котушки індуктивності. Аналогічні залежності справедливі для нелінійного C – елемента із заданою характеристикою $q = f(u)$ або $u = F(q)$ ($f^{-1} = F$) і динамічною ємністю $C(u)$:

$$q(t) = \int_0^t i(s) ds, \quad u(t) = F \left(\int_0^t i(s) ds \right), \quad (1.9)$$

а також для нелінійного L – елемента з характеристикою $\psi = f(i)$ або $i = F(\psi)$ і динамічною індуктивністю $L(i)$:

$$\psi(t) = \int_0^t u(s) ds, \quad i(t) = F \left(\int_0^t u(s) ds \right). \quad (1.10)$$

Подібні залежності використовуються і за наявності взаємних індуктивностей.

Вказані залежності природньо доповнюються первинними непараметричними інтегральними моделями, що отримуються на основі використання поняття закону Ома-Дюамеля [91]:

$$\int_0^t i(s) ds = \int_0^t y(t-s)[u(s) - \bar{u}(s)] ds = \int_0^t y(s)[u(t-s) - \bar{u}(t-s)] ds, \\ \int_0^t u(s) ds = \int_0^t z(t-s)[i(s) - \bar{i}(s)] ds = \int_0^t z(s)[i(t-s) - \bar{i}(t-s)] ds, \quad (1.11)$$

де $y(t)$, $z(t)$ – перехідна провідність та перехідний опір відповідно по відношенню до одиничної напруги та одиничного струму; $\bar{u}(t)$, $\bar{i}(t)$ – напруга холостого ходу та струм короткого замикання двополусника; s – змінна інтегрування.

В загальному випадку, довільне електричне коло описується системою інтегральних рівнянь Вольтерри-Урисона

$$y_i(t) + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t H_{if} [t, s, y_j(s)] ds = \sum_{q=1}^m \int_{t_0}^t G_{iq} [t, s, f_q(s)] ds, \quad (1.12)$$

де $y_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) невідомі величини (струми, напруги чи потоки); $f_q(t)$ ($q = \overline{1, m}$) – функції, залежні від зовнішніх джерел і початкових

умов; H_{ij} і G_{iq} , – перетворюючі характеристики елементів. У разі лінійного кола замість (1.12) використовується система лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри

$$y_i(t) + \sum_{f=1}^n \int_{t_0}^t H_{ij}(t, s) y_j(s) ds = \sum_{q=1}^m \int_{t_0}^t G_{iq}(t, s) f_q(s) ds, \quad (1.13)$$

де, в такому разі, ядра $H_{ij}(t, s)$ і $G_{iq}(t, s)$ мають зміст вагових функцій.

Загальною аналітичною формою розв’язування рівняння Вольтерри другого роду є вираз

$$y(t) = f(t) + \int_0^t R(t, s) f(s) ds. \quad (1.14)$$

Функція $R(t, s)$ називається резольвентою та визначається виразом

$$R(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(t, s), \quad (1.15)$$

де $K_{n+1}(t, s)$ – інтегровані (повторні) ядра, що відповідають рекурентним співвідношенням

$$K_1(t, s) = K(t, s), \quad K_{n+1}(t, s) = \int_s^t K(t, s) K_n(t, s) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

Можна бачити, що резольвента не залежить від вільного члена, а визначається тільки «внутрішніми» властивостями, тобто ядром інтегрального рівняння.

Існують різні способи [24, 25] точного чи наближеного знаходження резольвенти та використання її для отримання розв’язку в аналітичному вигляді (1.14). Визначення та використання резольвенти може бути успішним лише для окремих випадків ядра рівняння Вольтерри другого роду. Загальний прийом отримання виразів (1.14), (1.15) є подання розв’язку у вигляді нескінченного ряду [24, 25].

При розв’язуванні інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з різницевиими степеневими ядрами, якими зазвичай описуються електричні кола, для знаходження резольвенти потрібно отримати та розв’язати відповідне диференціальне рівняння. Це можливо в одному з окремих, але важливих для практичних розрахунків динаміки електричних кіл випадків, коли ядро рівняння Вольтерри II роду є різницевим та має вигляд

$$K(t, s) = a_0(t) + a_1(t)(t-s) + \dots + \frac{a_{n-1}(t)}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} \quad (1.17)$$

при умові неперервності коефіцієнтів $a_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, в $[a, b)$.

Резольвента для (1.17) визначається виразом

$$R(t, s) = \frac{d^n g(t, s)}{dx^n},$$

де функція $g(t, s)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d^n g}{dt^n} - \left[a_0(t) \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + a_1(t) \frac{d^{n-2} g}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(t) g \right] = 0$$

при

$$g \Big|_{t=s} = \frac{dg}{dt} \Big|_{t=s} = \dots = \frac{dg^{n-2}}{dt^{n-2}} \Big|_{t=s} = 0, \quad \frac{dg^{n-1}}{dt^{n-1}} \Big|_{t=s} = 1. \quad (1.18)$$

Для ядра

$$K(t, s) = b_0(t) + b_1(t)(s-t) + \dots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!} (s-t)^{n-1}$$

резольвента має вигляд $R(t, s) = -\frac{d^n g(t, s)}{dx^n}$,

де $g(t, s)$ – розв'язок рівняння

$$\frac{d^n g}{dt^n} + [b_0(t) \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + b_1(t) \frac{d^{n-2} g}{dt^{n-2}} + \dots + b_{n-1}(t) g] = 0,$$

що задовольняє умові (1.18).

Резольвента лінійного інтегрального рівняння є основним інструментом аналітичного розв'язування отриманих інтегральних рівнянь електричних кіл. Застосування резольвенти істотно відрізняється від класичного методу розв'язування еквівалентних диференціальних рівнянь.

1.2. Модифікація класичного методу аналізу перехідних процесів в електричних колах

У загальному випадку класичний метод заснований на застосуванні диференціальних рівнянь виду

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) y^{(n-i)}(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.19)$$

$$y(0) = b_0, \quad y'(0) = b_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = b_{n-1},$$

де $a_i(t)$ – змінні коефіцієнти.

При застосуванні класичного методу розрахунку лінійних електричних кіл результуючими первинними є інтегро-диференціальні рівняння, наприклад рівняння для rLC – двополюсника

$$ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds = u(t) - u(0). \quad (1.20)$$

Для отримання диференціальних рівнянь таких кіл необхідно або спеціальним чином підбирати шукані змінні, або диференціювати початкові залежності. Прямим узагальненням рівняння (1.20) є інтегро-диференціальні рівняння складного кола, отримані методом вузлових потенціалів [21]

$$g_C \frac{d\varphi(t)}{dt} + g_r \varphi(t) + g_L \int_0^t \varphi(s) ds = i(t) - i_L(0), \quad (1.21)$$

де g_C , g_r , g_L – відповідно матриці параметрів C , r і L ; $I(t)$, $i_L(0)$, $\varphi(0)$ – вектори, побудовані за заданими джерелами і початковими умовами.

У багатьох випадках ефективним для аналізу перехідних процесів виявляється використання саме апарату інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема це дозволяє зменшити розмірність моделей, розширює клас обчислювальних методів, що використовуються, дозволяє отримати стійкі обчислювальні процедури. Крім того, інтегро-диференціальні моделі часто є природним способом опису нелінійних електричних кіл [46, 74]. Наприклад [74] послідовний нелінійний коливальний контур з лінійними опором і ємністю і нелінійною індуктивністю з характеристикою $i(\psi)$, підключених до джерела напруги (рис. 1.1), описується інтегро-диференціальним рівнянням.

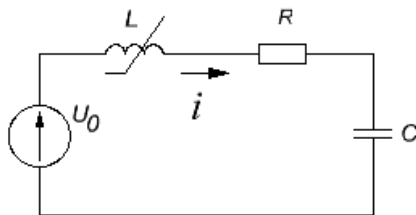


Рис. 1.1. Нелінійний коливальний контур

Дійсно, рівняння стану щодо поточозчеплення в індуктивності записується у вигляді

$$\frac{d\psi}{dt} = -Ri(\psi) + u_0 - \frac{1}{C} \int_0^t i(\psi) ds.$$

Апроксимуючи нелінійну функцію $i(\psi)$ поліномом третього степеня $i(\psi) = a_1\psi + a_2\psi^3$, отримуємо інтегро-диференціальне рівняння Вольтерри

$$\frac{d\psi}{dt} = -R(a_1\psi + a_2\psi^3) + u_0 - \frac{1}{C} \int_0^t (a_1\psi + a_2\psi^3) ds.$$

Використовуючи подібний підхід, заснований на безпосередньому використанні інтегро-диференціальних моделей, можна отримати значне спрощення математичної моделі при описі складних електричних кіл, що містять велику кількість нелінійних елементів (ємнісних та індуктивних), а також ключових елементів з складною логікою роботи, оскільки немає необхідності робити складні еквівалентні перетворення моделі кола до чисто диференціального чи інтегрального виду.

Розглянемо спосіб отримання інтегральних рівнянь, що полягає в модифікації класичного методу аналізу перехідних процесів в електричних колах. Інтегральний варіант класичної методики полягає в тому, що за законами Кірхгофа отримується система інтегро-диференціальних рівнянь і шляхом інтегрування далі отримується система інтегральних рівнянь [59, 61, 64].

Приведемо, послідовність побудови інтегрального рівняння для паралельного LC контура, схема якого наведена на рис. 1.2.

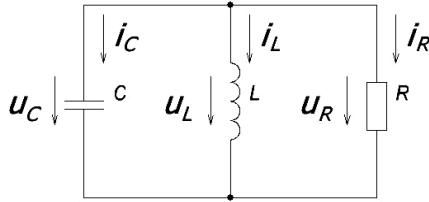


Рис. 1.2. Електрична схема для ілюстрації отримання інтегрального рівняння

Вважаємо заданими параметри кола R , L , C , а також початкові значення величини струму в котушці індуктивності $i_L(0) = I_0$ і напруги на конденсаторі $u_C(0) = U_0$. Для отримання моделі кола у вигляді інтегрального рівняння використовуємо рівняння гілок:

$$i_R(t) = Gu_R(t) \quad (G = R^{-1}), \quad i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}, \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau, \quad (1.22)$$

а також рівність $i_R + i_L + i_C = 0$, що отримується за першим законом Кірхгофа. З вищенаведених залежностей отримуємо інтегро-диференціальне рівняння відносно напруги на елементах кола

$$Gu_R(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau + C \frac{du_C(t)}{dt} = 0, \quad u_C(0) = U_0. \quad (1.23)$$

Традиційне диференціальне рівняння отримуємо шляхом диференціювання (1.23). Якщо ж проінтегрувати (1.23), то отримаємо інтегральне рівняння

$$Cu_C(t) + G \int_0^t u_R(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_0^t \int_0^{\tau} u_L(\tau) d\tau dt_1 = U_0. \quad (1.24)$$

Враховуючи рівність $u_C = u_R = u_L$ для даного електричного кола та виконуючи нескладні перетворення, остаточно отримаємо

$$Cu_C(t) + \int_0^t \left[G + \frac{1}{L}(t - \tau) \right] u_C(\tau) d\tau = U_0. \quad (1.25)$$

При отриманні останнього рівняння використовуємо формулу [25]:

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} z(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} z(s) ds. \quad (1.26)$$

Рівняння (1.26) відповідає одновірному рівнянню Вольтерри II роду

$$y(t) - \int_a^x K(t, s) y(s) ds = f(t), \quad (1.27)$$

де $K(t, s)$ – ядро.

Використання даного методу проілюструємо кількома прикладами.

Приклад 1.1. Для електричної схеми, що наведена на рис. 1.3, необхідно визначити струм $i(t)$ після комутації, використовуючи метод інтегральних рівнянь.

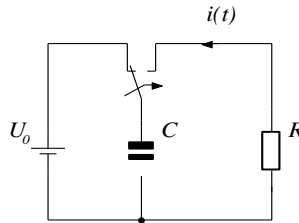


Рис. 1.3. Електрична схема до прикладу 1.1

Відомо, що перехідний процес в RC контурі можна описати диференціальним рівнянням виду

$$u_c'(t) + \frac{1}{RC} u_c(t) = 0, \quad u_c(0) = u_0 \quad (1.28)$$

відносно напруги на конденсаторі, чи інтегральним рівнянням виду

$$i(t) + \int_0^t \frac{1}{RC} i(s) ds = -\frac{u_0}{R} \quad (1.29)$$

відносно струму розряду конденсатора $i(t)$. Ядру даного інтегрального рівняння, рівному $\frac{1}{RC}$, відповідає резольвента $R(t-s) = e^{-\frac{1}{RC}(t-s)}$.

Відповідно до (1.20) розв'язок рівняння можна записати у вигляді

$$i(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-s)} \left(-\frac{u_0}{R}\right) ds - \frac{u_0}{R}. \quad (1.30)$$

Остаточно маємо

$$i(t) = -\frac{u_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (1.31)$$

Отриманий результат співпадає з розв'язком диференціального рівняння досліджуваного електричного кола з врахуванням початкових умов.

Приклад 1.2. Для електричної схеми, що наведена на рис. 1.4, необхідно визначити напругу $U_L(t)$ після комутації, використовуючи метод інтегральних рівнянь.

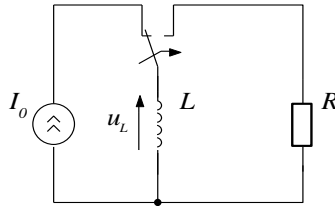


Рис. 1.4. Електрична схема до прикладу 1.2

Відомо, що перехідний процес в RL – контурі можна описати диференціальним рівнянням виду

$$i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = 0, \quad i(0) = I_0 \quad (1.32)$$

відносно струму в колі, або інтегральним рівнянням

$$u_L(t) + \frac{R}{L} \int_0^t u_L(s) ds = -RI_0 \quad (1.33)$$

відносно напруги на котушці індуктивності. Розв'язок останнього рівняння за допомогою резольвенти має вигляд

$$u_L(t) = \frac{R}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-s)} (-RI_0) ds - RI_0 = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (1.34)$$

Приклад 1.3. Наведемо більш складний приклад, що базується на формалізованому підході до отримання та застосування інтегральних рів-

нянь для аналізу лінійних електричних кіл будь-якої складності із зосередженими параметрами на основі модифікації класичного методу [104].

1. *Формалізація опису кіл за допомогою інтегральних рівнянь.* Розглянемо гілку орієнтованого графа, наприклад k -ту гілку графа, що складається з послідовно з'єднаних R , L , C , e (рис. 1.5), та входить до складного лінійного стаціонарного електричного кола із зосередженими параметрами. Такі кола описуються системами рівнянь інтегро-диференціального та алгебраїчного типу, складених відносно величин струмів та напруг на основі законів Кірхгофа та співвідношень між струмами та напругами на елементах кола:

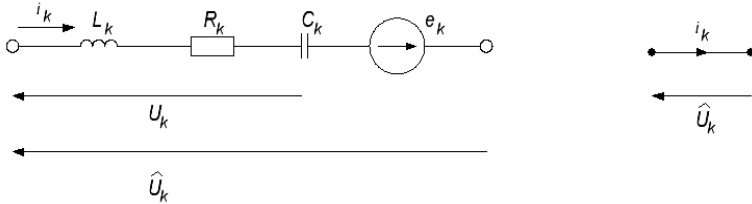


Рис. 1.5. Гілка електричного кола

$$[\hat{u}] = [L] \frac{d[i(t)]}{dt} + [R][i(t)] + \int_{t_0}^t [\Gamma][i(\tau)]d\tau + [u_c(t_0)] - [e(t)], \quad (1.35)$$

$$[B][\hat{u}] = 0, \quad [B][u] = [B][e], \quad (1.36)$$

$$[A][i] = 0, \quad (1.37)$$

де t_0 – початковий момент часу; $[\hat{u}]$, $[u]$, $[i]$ – вектори напруг, струмів гілок; $[L]$, $[R]$, $[\Gamma]$ – діагональні матриці величин індуктивностей, опорів, величин, обернених ємності; $[u_c(t_0)]$ – вектор початкових напруг на конденсаторах; $[B]$ – матриця головних контурів; $[A]$ – вузлова матриця.

Розв'язування систем рівнянь (1.35), (1.36), (1.37) відноситься до складних задач, зважаючи на їх структуру. При цьому вигідно замінити струми гілок на контурні струми, використовуючи наступне співвідношення

$$[i] = [B]^t [i_k], \quad (1.38)$$

де $[i_k]$ – вектор контурних струмів.

Підставивши в залежність (1.36) вираз (1.35) отримаємо рівняння

$$[B][L][B]^t \frac{d[i_k(t)]}{dt} + [B][R][B]^t [i_k(t)] + \int_{t_0}^t [B][\Gamma][B]^t [i_k(\tau)]d\tau = [B][e](t) - [B][u_c(t_0)]. \quad (1.39)$$

Введемо наступні позначення:

$$[L_0] = [B][L][B]^t,$$

$$[R_0] = [B][R][B]^t,$$

$$[\Gamma_0] = [B][\Gamma][B]^t,$$

де $[L_0]$, $[R_0]$, $[\Gamma_0]$ – матриці контурних індуктивностей, контурних опорів, контурних величин обернених ємності.

Помножимо вираз (1.39) на $[L_0]^{-1}$ (вважаючи, що $[L_0] \neq 0$) і отримаємо залежність

$$\begin{aligned} \frac{d[i_k(t)]}{dt} + [L_0]^{-1}[R][i_k(t)] + \int_{t_0}^t [L_0]^{-1}[\Gamma_0][i_k(\tau)]d\tau = \\ = [L_0]^{-1}([B][e(t)] - [B][u_c(t_0)]). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Проінтегруємо рівняння (1.40) в межах від t_0 до t і отримаємо

$$\begin{aligned} [i_k(t)] - [i_k(t_0)] + \int_{t_0}^t [L_0]^{-1}[R_0][i_k(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^t \left\{ \int_{t_0}^s [L_0]^{-1}[\Gamma_0][i_k(\tau)]d\tau \right\} ds = \\ = \int_{t_0}^t [L_0]^{-1}[B][e(\tau)]d\tau - \int_{t_0}^t [L_0]^{-1}[B][u_c(t_0)]d\tau, \end{aligned} \quad (1.41)$$

де $[i_k(t_0)]$ – вектор початкових струмів в котушках індуктивності.

Використовуючи вираз (1.26), отримаємо інтегральний опис гілки кола

$$[i_k(t)] - \int_{t_0}^t -([L_0]^{-1}[R_0] + [L_0]^{-1}[\Gamma_0(t-\tau)])[i_k(\tau)]d\tau = [F_0(t)]. \quad (1.42)$$

Отримане рівняння є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри II роду з правою частиною виду

$$[F_0(t)] = \int_{t_0}^t [L_0]^{-1}[B][e(\tau)]d\tau - \int_{t_0}^t [L_0]^{-1}[B][u_c(t_0)]d\tau \quad (1.43)$$

та з ядром виду

$$[K(t, \tau)] = -([L_0]^{-1}[R_0] + [L_0]^{-1}[\Gamma_0(t-\tau)]). \quad (1.44)$$

Можна стверджувати, відповідно до [18], що існує єдиний розв'язок рівняння (1.42) в класі неперервних функцій на відрізку $[t_0, t_1]$, якщо $[K(t, \tau)]$ вміщує неперервні функції часу і справедлива потрібна нерівність $t_0 < \tau < t < t_1$, а $[F_0(t)]$ є неперервна на відрізку $[t_0, t_1]$.

2. Алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь. Згідно до процедури знаходження чисельного розв'язку системи рівнянь (1.42)

досліджуваний часовий проміжок від t_0 до t_1 поділимо на N відрізків тривалістю Δt і замінимо інтеграл сумою

$$[i_k(t_i)] - \sum_{j=1}^i K(t_i, t_j)[i_k(t_j)]\Delta t = [F_0(t_i)], \quad (1.45)$$

$$t_i = t_0 + (i-1)\Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.46)$$

або

$$([1 - K(t_i, t_j)]\Delta t)[i_k(t_i)] = [F_0(t_i)] + \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j)[i_k(t_j)]\Delta t. \quad (1.47)$$

З виразу ядра (1.44) видно, що при $t = \tau$, його вигляд буде $([L]^{-1}[R_0])$, що значно спрощує розрахунок обчислювальним методом. При цьому необхідно тільки один раз знайти обернену матрицю до матриці $[1 - K(t_i, t_j)\Delta t]$ для досліджуваного відрізка часу $[t_0, t_1]$.

Будемо застосовувати ітераційний метод для розв'язування систем рівнянь. Точність отриманих результатів розрахунку кола залежить як від точності обчислення оберненої матриці так і від вибраної величини Δt . Приріст Δt повинен вибиратися так, щоб норма вектора $[A][i]$ була менша від заданої точності.

3. Узагальнення на вироджені гілки. Розглянемо складне лінійне стаціонарне електричне коло із зосередженими параметрами, що має гілки вигляду рис. 2.5 (позначимо цей тип гілок N_1), а також гілки певного виду, в яких відсутній хоча б один з елементів L , R , C . Такі гілки будемо називати виродженими.

Приведемо види ядер інтегральних рівнянь, що описують різні типи гілок:

- система з N_1 інтегральних рівнянь Вольтерри II роду описує гілки неvirоджені, при цьому ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$K_{n_1, n_1}(t, \tau) = - \left(\frac{R_{n_1}}{L_{n_1}} + \frac{1}{L_{n_1} C_{n_1}}(t - \tau) \right), \quad n_1 = 1, 2, \dots, N_1; \quad (1.48)$$

- система з N_2 інтегральних рівнянь Вольтерри II роду описує вироджені гілки, зображені на рис. 1.6.

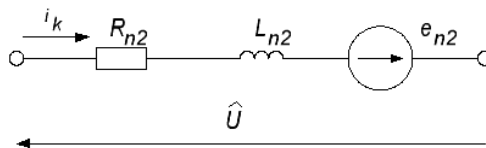


Рис. 1.6. Варіант гілки кола

При цьому ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$K_{n_2, n_2}(t, \tau) = -\frac{R_{n_2}}{L_{n_2}}, \quad n_2 = 1, 2 \dots N_2; \quad (1.49)$$

- система з N_3 інтегральних рівнянь Вольтерри I роду описує гілки, зображені на рис. 1.7,

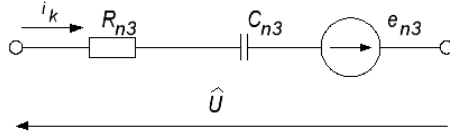


Рис. 1.7. Варіант гілки кола

при цьому ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$K_{n_3, n_3}(t, \tau) = 1 + \frac{1}{R_{n_3} C_{n_3}}(t - \tau), \quad n_3 = 1, 2 \dots N_3; \quad (1.50)$$

- система з N_4 інтегральних рівнянь Вольтерри I роду описує гілки, зображені на рис. 1.8,

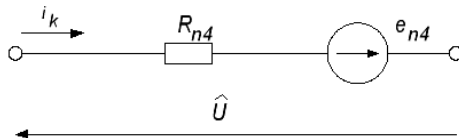


Рис. 1.8. Варіант гілки кола

при цьому ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$K_{n_4, n_4}(t, \tau) = R_{n_4}, \quad n_4 = 1, 2 \dots N_4; \quad (1.51)$$

- система з N_5 інтегральних рівнянь Вольтерри I роду описує гілки, зображені на рис. 1.9,

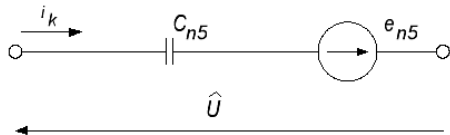


Рис. 1.9. Варіант гілки кола

при цьому ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$K_{n_5, n_5}(t, \tau) = \frac{1}{C_{n_5}}(t - \tau), \quad n_5 = 1, 2 \dots N_5; \quad (1.52)$$

- системи з N_6 і N_7 алгебраїчних рівнянь описують відповідно гілки, що містять котушки індуктивності і джерела ЕРС та гілки, що містять лише джерела ЕРС.

Кола які складаються з гілок, що розглядаються в цьому пункті, описуються наступними системами рівнянь

$[B]^* \times$	N_1	$i_{n_1} - \int_{t_0}^t K_{n_1, n_1}(t, \tau) i_{n_1}(\tau) d\tau \times L_{n_1}$	
	$N_1 + N_2$	$i_{n_2} - \int_{t_0}^t K_{n_2, n_2}(t, \tau) i_{n_2}(\tau) d\tau \times L_{n_2}$	
	$N_1 + N_2 + N_3$	$\int_{t_0}^t K_{n_3, n_3}(t, \tau) i_{n_3}(\tau) d\tau$	
	$N_1 + N_2 + \dots + N_4$	$\int_{t_0}^t K_{n_4, n_4}(t, \tau) i_{n_4}(\tau) d\tau$	
	$N_1 + N_2 + \dots + N_5$	$\int_{t_0}^t K_{n_5, n_5}(t, \tau) i_{n_5}(\tau) d\tau$	
	$N_1 + N_2 + \dots + N_6$	$L_{n_6} i_{n_6}$	
	$N_1 + N_2 + \dots + N_7$	0	=
$[B]^* \times$	N_1	$\int_{t_0}^t (e_{n_1}(\tau) - u_{cn_1}(t_0)) d\tau + L_{n_1} i_{n_1}(t_0)$	
	$N_1 + N_2$	$\int_{t_0}^t e_{n_2}(\tau) d\tau + L_{n_2} i_{n_2}(t_0)$	
	$N_1 + N_2 + N_3$	$\int_{t_0}^t (e_{n_3}(\tau) - u_{cn_3}(t_0)) d\tau$	
	$N_1 + N_2 + \dots + N_4$	$\int_{t_0}^t e_{n_4}(\tau) d\tau$	(1.53)
	$N_1 + N_2 + \dots + N_5$	$\int_{t_0}^t (e_{n_5}(\tau) - u_{cn_5}(t_0)) d\tau$	
	$N_1 + N_2 + \dots + N_6$	$\int_{t_0}^t e_{n_6}(\tau) d\tau + L_{n_6} i_{n_6}(t_0)$	
	$N_1 + N_2 + \dots + N_7$	$\int_{t_0}^t e_{n_7}(\tau) d\tau$	

Використовуючи вирази (1.47) та (1.53) отримаємо систему рівнянь

$$[B][N(t_i, t_j)]\Delta t[B]^t[i_k(t_i)] = [F(t_i)] + \sum_{j=1}^{i-1} [B][M(t_i, t_j)][B]^t[i_k(t_j)]\Delta t, \quad (1.54)$$

де $[N(t_i, t_i)]$ – діагональна матриця, елементи якої мають вигляд:

$$\begin{aligned} N_{k,k}(t_i, t_i) &= \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{R_k}{L_k}\right)L_k \text{ для } k = n_1, n_2 + 1; \\ N_{k,k}(t_i, t_i) &= R_k \text{ для } k = N_1 + N_2 + n_3, N_1 + N_2 + N_3 + n_4; \\ N_{k,k}(t_i, t_i) &= 0 \text{ для } k > N_1 + N_2 + N_3 + N_4; \end{aligned} \quad (1.55)$$

$[F(t_i)]$ – вектор стовпець елементи якого відповідають правій стороні виразу (1.53) відповідно до величини (t_i) ;

$[M(t_i, t_j)]$ – діагональна матриця, елементи якої мають вигляд:

$$\begin{aligned} M_{k,k}(t_i, t_j) &= -(R_k + \frac{1}{C_k}(t_i - t_j)) \text{ для } k = 1 \dots N_1; \\ M_{k,k}(t_i, t_j) &= -R_k \text{ для } k = N_1 + n_2; \\ M_{k,k}(t_i, t_j) &= -(R_k + 1/C_k(t_i - t_j)) \text{ для } k = N_1 + N_2 + n_3; \\ M_{k,k}(t_i, t_j) &= -R_k \text{ для } k = N_1 + N_2 + N_3 + n_4; \\ M_{k,k}(t_i, t_j) &= -(t_i - t_j)\frac{1}{C_k} \text{ для } k = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + n_5; \\ M_{k,k}(t_i, t_j) &= 0 \text{ для } k = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + n_6. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Якщо в колах присутні магнітні зв'язки між котушками, то цей факт треба враховувати в матрицях $[N(t_i, t_i)]$ (1.55) або $[1 - K(t_i, t_j)]$ (1.47). Необхідно звертати увагу на збіжність і точність розв'язання рівнянь (1.54) та (1.47), а також встановити чи існує матриця, обернена до матриці $[B][N(t_i, t_j)][B]^t$.

В якості ілюстрації, отримаємо матриці $[N(t_i, t_i)]$ і $[M(t_i, t_j)]$ для кола, що наведене на рис. 1.10:

$$[N(t_i, t_i)] = \begin{vmatrix} L_1 + R_1\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{17} & 0 \\ 0 & L_2 + R_2\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_8 \end{vmatrix}$$

$$[M(t_i, t_j)] =$$

$$\begin{vmatrix} -(R_1 + \frac{1}{C_1}(t_i - t_j)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(R_3 + \frac{1}{C_3}(t_i - t_j)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(t_i - t_j)\frac{1}{C_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

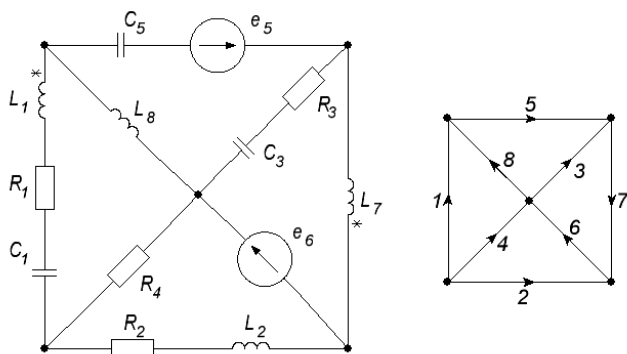


Рис. 1.10. Варіант складного кола

Даний метод можна модифікувати для кіл, що містять джерела струму. Подібно можна використати інтегральні рівняння для методу вузлових потенціалів.

1.3. Отримання інтегральних рівнянь кіл за диференціальними рівняннями на основі еквівалентних перетворень

Лінійні одномірні (скалярні) рівняння Вольтерри II роду

$$y(t) - \int_a^t K(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b] \quad (1.57)$$

мають глибокий зв'язок із задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь [24, 25]. Зокрема, для рівняння (1.57) можливо отримати вираз для розв'язку, аналогічний формулі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

У загальному випадку кіл із змінними параметрами необхідно розглядати рівняння вигляду

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)y^{(n-i)}(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.58)$$

де $a_i(t)$ – змінні коефіцієнти; $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1, \dots$, $y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$.

Отримання інтегральних рівнянь кіл із диференціальних рівнянь на основі еквівалентних перетворень можна представити в наступному вигляді. Приймаючи $u(t) = y^{(n)}(t)$ щодо функції $u(t)$, отримуємо інтегральне рівняння

$$u(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^n a_i(t) \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} u(s) ds = \varphi(t), \quad (1.59)$$

еквівалентне (1.58). При цьому

$$y(t) = b_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + b_1 t + b_0 + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} u(s) ds, \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & f(t) - b_{n-1} a_1(t) - (b_{n-1} t + b_{n-2}) a_2(t) - \dots \\ & \dots - \left(b_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + b_1(t) + b_0 \right) a_n(t). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Рівняння (1.59), (1.60) можуть трактуватися як інтегральні рівняння стану.

Даний метод опису процесів в електричних колах при постійних параметрах зводиться до отримання інтегральних рівнянь (1.59) типу Вольтерри з різницевами степеневими ядрами.

Отримання інтегральних рівнянь нелінійних електричних кіл із змінними параметрами із диференціальних рівнянь на основі еквівалент-

тних перетворень [21, 25, 60]. Метод розрахунку перехідних процесів, що буде розглянутий далі, доцільно використовувати в тому випадку, коли система диференціальних рівнянь, що описує електричне коло, зводиться до одного диференціального рівняння високого порядку.

Такій умові задовольняють електричні кола з параметричними елементами, а також кола, що містять один нелінійний елемент з неперервною характеристикою, а також кола з декількома нелінійними елементами, що мають розривні характеристики. В останньому випадку система є кусково-лінійною і отримання диференціального рівняння (високого порядку) може виконуватися для окремих інтервалів лінійними методами.

Нехай електричне коло описується нелінійним диференціальним рівнянням n -го порядку наступного виду

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = f \left(t, y, \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right), \quad (1.62)$$

де $y(t)$ – координата динамічної системи (струм, напруга), коефіцієнти a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) є функціями координати $y(t)$ та її похідних

$$a_k = \varphi_k \left(t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right), \quad (1.63)$$

а також $f \left(t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right)$ – задана функція часу координати $y(t)$ та її похідних. Також, як зазвичай, задано початкові умови

$$y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}}. \quad (1.64)$$

При наявності декількох нелінійних елементів з розривними характеристиками рівняння (1.62) буде мати місце для кожного інтервалу нелінійності.

Будемо вважати, що функція $y(t)$ та $(n-1)$ її похідних – однозначні неперервні функції (при $0 < t < \infty$ або для інтервалів лінійності). Запишемо для $y(t)$ формулу Маклорена

$$y(t) = y(0) + \frac{dy(0)}{dt} \cdot t + \frac{d^2 y(0)}{dt^2} \cdot \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^n y(s)}{ds} ds$$

або інакше

$$y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^n y(s)}{ds} ds + \sum_{q=1}^n \frac{d^{n-q} y(0)}{dt^{n-q}} \cdot \frac{t^{n-q}}{(n-q)!}. \quad (1.65)$$

Якщо продиференціювати обидві частини останнього рівняння по t і позначити $\frac{d^n y(t)}{dt^n} = x(t)$, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot x(s) ds + \sum_{q=1}^n \frac{d^{n-q} y(0)}{dt^{n-q}} \cdot \frac{t^{n-q-1}}{(n-q-1)!}, \\ \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} \cdot x(s) ds + \sum_{q=1}^{n-m} \frac{d^{n-q} y(0)}{dt^{n-q}} \cdot \frac{t^{n-q-m}}{(n-q-m)!}, \\ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} = \int_0^t x(s) ds + \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}}. \end{cases} \quad (1.66)$$

Підставивши останні два рівняння у рівняння (1.62) та ввівши a_k під знак інтеграла (оскільки інтегрування ведеться за допоміжною змінною s), отримаємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду, записане відносно старшої похідної $\frac{d^n y(t)}{dt^n} = x(t)$ функції $y(t)$

до, записане відносно старшої похідної $\frac{d^n y(t)}{dt^n} = x(t)$ функції $y(t)$

$$\begin{aligned} a_0 x(t) - \int_0^t K \left(t, y, \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, s \right) \cdot x(s) ds = \\ = N \left(t, y, \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right), \end{aligned} \quad (1.67)$$

де ядро рівняння

$$\begin{aligned} K(t, y, \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, s) = \\ = - \sum_{k=1}^n a_k \left(t, y, \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, s \right) \cdot \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

а також вільний член

$$\begin{aligned} N(t, y, \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}) = f(t, y, \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}) - \\ - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{q=1}^k \frac{d^{n-q} y(0)}{dt^{n-q}} \cdot \frac{t^{k-q}}{(k-q)!}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Приклад 1.4. Для ілюстрації розрахункової схеми проведемо розрахунок перехідних процесів в нелінійному електричному колі з

вентилем. Електричне коло, що наведене на рис. 1.11. вмикається на синусоїдну напругу виду $u(t) = U_m \sin \omega t$. Додатному напрямку цієї напруги відповідає провідний напрям вентиля.

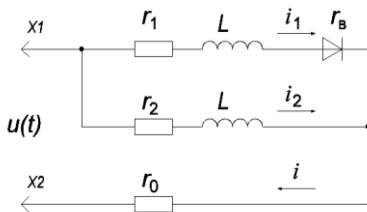


Рис. 1.11. Розрахункова схема

Диференціальні рівняння для струмів гілок електричного кола будуть наступними:

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + a_1 \frac{di_1(t)}{dt} + a_2 i_1(t) = f_1(t), \\ \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{di_2(t)}{dt} + a_2 i_2(t) = f_2(t), \end{cases} \quad (1.70)$$

де

$$a_1 = \frac{1}{L} (2r_0 + r_1 + r_2 + r_e), \quad a_2 = \frac{1}{L^2} \left[r_2 (r_1 + r_e) + r_0 (r_1 + r_2 + r_e) + L \frac{dr_e}{dt} \right],$$

$$f_1 = u(t) \frac{r_2}{L^2} + \frac{1}{L} \frac{du(t)}{dt}, \quad a_3 = \frac{1}{L^2} [r_2 + (r_1 + r_e) + r_0 (r_1 + r_2 + r_e)],$$

$$f_2 = u(t) \frac{r_1 + r_e}{L^2} + \frac{1}{L} \frac{du(t)}{dt}.$$

Початкові умови – нульові:

$$i_1(0) = i_2(0) = 0, \quad \left(\frac{di_1(t)}{dt} \right)_{i=0} = \left(\frac{di_2(t)}{dt} \right)_{i=0} = \frac{u(0)}{L} = 0.$$

Отриману модель у вигляді диференціальних рівнянь, запишемо, використовуючи метод еквівалентних перетворень, у вигляді інтегральних рівнянь відносно допоміжних величин $z(t) = \frac{d^2 i_1}{dt^2}$, $x(t) = \frac{d^2 i_2}{dt^2}$.

Будемо вважати, що вентиль володіє ідеальною характеристикою: його прямий опір рівний нулю ($r_{en} = 0$), а зворотний ($r_{e3} = \infty$). Тоді для всієї провідної частини періоду коло буде лінійне з ($r_e = 0$),

$\frac{dr_e}{dt} = 0$ та $a_2 = a_3$. Ядра обох інтегральних рівнянь будуть однако-
вими і матимуть вид

$$K(t, s) = -[a_1 + a_2(t - s)]. \quad (1.71)$$

Вільні члени, з врахуванням нульових початкових умов, відповідно до (1.69) будуть наступними:

$$N_1(t) = f_1(t), \quad N_2(t) = f_2(t). \quad (1.72)$$

1.4. Інтегральні рівняння нелінійних електричних кіл

Перехідні опори і провідності. У роботі [91] запропонований метод отримання інтегральних рівнянь електричних кіл (метод Пухова), заснований на поняттях перехідних опорів і провідностей пасивних і активних двополосників.

Цей метод є фундаментальним положенням для складання непараметричних інтегральних моделей електричних кіл довільного вигляду, як *стаціонарних*, так і *нестационарних* та *нелінійних*, внаслідок введення поняття закону Ома-Дюамеля.

Різні методи розрахунку електричних кіл ґрунтуються, як відомо, на трьох групах рівнянь, а саме, на рівняннях, що будуються за першим законом Кірхгофа для вузлів; рівняннях, що будуються за другим законом Кірхгофа для контурів; і, нарешті, на рівняннях, що будуються для кожного з елементів електричного кола так, щоб вони відображали зв'язки між струмами і напругами елемента визначеними його властивостями.

Рівняння останньої групи можуть бути представлені у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь відносно дійсних струмів і напруг, рівнянь зв'язку між операторними струмами і напругами, рівнянь зв'язку між їх комплексними амплітудами для різних гармонік і т.д. [10, 74].

Є підстава припускати, що методи, розраховані на використання комп'ютера все більш розвиватимуться так, щоб на всіх етапах розрахунку не виникало необхідності в переробці інформації в операторній, комплексній і тому подібних формах. Особливо це відноситься до методів розрахунку нелінійних кіл і кіл зі змінними параметрами.

Можливість успішного розвитку різних методів у напрямку, орієнтованому на широке застосування обчислювальної техніки, зрозуміло, в значній мірі залежить від того, наскільки зручними будуть рівняння, що будуються для кожного з елементів електричного кола так, щоб вони відображали зв'язки між струмами і напругами елемента визначеними його властивостями.

У роботі [61] розглянуто можливості отримання і застосування інтегральних методів, заснованих на представленні рівнянь зв'язків

між струмами і напругами елемента в дійсній формі з використанням модифікованих інтегралів Дюамеля.

Для активного двополюсника з постійними параметрами зв'язок між струмом та напругою на його полюсах можливо записати у вигляді інтегрального рівняння

$$\int_0^t i(s) ds = \int_0^t y(t-s)[u(s) - \bar{u}(s)] ds = \int_0^t y(s)[u(t-s) - \bar{u}(t-s)] ds, \quad (1.73)$$

чи рівняння

$$\int_0^t u(s) ds = \int_0^t z(t-s)[i(s) - \bar{i}(s)] ds = \int_0^t z(s)[i(t-s) - \bar{i}(t-s)] ds. \quad (1.74)$$

В цих рівняннях $y(t)$, $z(t)$ – перехідна провідність та перехідний опір відповідно по відношенню до одиничної напруги та одиничного струму; $\bar{u}(t)$, $\bar{i}(t)$ – напруга холостого ходу та струм короткого замикання двополюсника; s – змінна інтегрування. Інтеграли правих частин, вищенаведених рівнянь, називаються інтегральними згортками відповідних функцій. Тому рівняння (1.73) говорить про те, що інтеграл від струму двополюсника дорівнює згортці перехідної провідності та відповідної різниці напруг, а рівняння (1.74) – що інтеграл від напруги двополюсника дорівнює згортці перехідного опору та відповідної різниці струмів.

Вирази (1.73) і (1.74) є модифікованими інтегралами Дюамеля та при постійних $y(t)$ і $z(t)$ переходять у звичайний закон Ома. Тому існує твердження, що для двополюсника з постійними параметрами має місце закон Ома-Дюамеля, математичним виразом якого є рівняння (1.73) і (1.74) і які визначають в загальному випадку зв'язок між струмом та напругою на полюсах двополюсника.

Дані методи при розрахунку перехідних процесів мають певні переваги, з яких істотними представляються наступні дві: 1) інтегральні методи дозволяють просто переходити від загальних виразів до чисельних шляхом використання відомих формул чисельного інтегрування і отримувати при цьому точніші результати, ніж при використанні скінченно-різницевого методу; 2) при вживанні інтегральних методів полегшуються чисельні розрахунки перехідних процесів електричних кіл з нелінійними і змінними параметрами у порівнянні з методами, заснованими на перетвореннях функцій по Лапласу і Фур'є, оскільки при цьому не виникає необхідності у виконанні операцій встановлення зв'язків між струмами і напругою нелінійних елементів і елементів зі змінними параметрами в операторній і комплексній формах. Більш докладно практичне застосування методу розглянуто в п. 2.4 даної роботи.

Спосіб отримання інтегральних рівнянь для нелінійних кіл з використанням операторного методу. Розрахункові операції, властиві нелінійній задачі, можуть виявитися достатньо громіздкими. Розв'язування такої задачі може бути полегшеним, якщо ці операції будуть віднесені тільки до нелінійної частини схеми [33, 34].

При розрахунках як усталених, так і перехідних процесів звичайно задаються діючі у гілках кола джерела е. р. с., параметри лінійних і характеристики нелінійних елементів. Ці характеристики задаються аналітично, графічно чи у вигляді таблиць. В будь-якому з цих випадків нелінійна залежність, при необхідності, може бути представлена степеневим рядом. Постійний член ряду та член, що містить змінну величину в першому степені, представляють при цьому лінійну частину характеристики нелінійного елемента. Таким чином, при необхідності можна вважати, що кожен нелінійний елемент складається з двох елементів – лінійного та нелінійного.

В кожному контурі багатоконтурної схеми з лінійними та нелійними елементами можливо представити різницю суми е. р. с. та спадів напруг на нелінійних елементах у вигляді деякої напруги, що діє на лінійну частину контура і тим самим нелінійність задачі віднести до нелінійної залежності цієї напруги від струму і виділити лінійну частину задачі, до якої можливо застосовувати методи розрахунку лінійних кіл.

Для отримання розв'язку сформульованої таким чином задачі може застосовуватись запропонований операторний метод. В цьому випадку зображення напруги, що діє на лінійну частину контура, отримується як різниця зображень заданих е. р. с. та зображень падіння напруги на нелінійних елементах, що є невідомими. При цьому розв'язування нелінійних задач може бути зведене до розв'язання інтегрального рівняння, в якому лінійна частина задачі визначає відому функцію від часу, а під знак інтеграла попадають тільки нелінійні частини характеристик. Отримані інтегральні рівняння можуть бути розв'язані відомими математичними методами. Вищенаведені викладки можна проілюструвати наступним чином.

Для схеми з m гілок та n вузлів на основі другого закону Кірхгофа можливо записати $m - n + 1$ незалежних рівнянь. Для деякого s -го контура рівняння має вигляд

$$\sum_s e_q(p) - \sum_s u_q(p) = \sum_s i_q(p) Z_q(p). \quad (1.75)$$

В цьому рівнянні через $e_q(p)$, $u_q(p)$, $i_q(p)$, $Z_q(p)$ відповідно позначені е. р. с., падіння напруги на нелінійному елементі, струми і опори лінійного елемента q -ї гілки схеми. Підсумовування прово-

диться по гілках, що входять в s -й контур. Всі зображення $e_q(p)$ і $Z_q(p)$ відомі на початку розв'язування задачі, а зображення $u_q(p)$ та $i_q(p)$ – невідомі. Характеристика нелінійного елемента q -ї гілки задана у вигляді залежності деякої величини $v_q(p)$ (опору, ємності, потокозчеплення, напруги тощо) від струму $i_q(p)$. Операторний вигляд виразу для напруги на нелінійному елементі матиме вигляд

$$u_q(p) = v_q(p)f_q(p),$$

де $f_q(p)$ – зображення залежності, що зв'язує $v_q(p)$ і $u_q(p)$.

В доповнення до рівнянь, що отримуються на основі другого закону Кірхгофа складаємо відповідну кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа. Розв'язуючи всі m рівнянь, отримаємо вирази для струмів у всіх гілках кола. Так, вираз для струму в деякій k -й гілці схеми буде мати вигляд

$$i_k(p) = \sum_{s=1}^{m-n+1} \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \sum_s [e_q(p) - v_q(p)f_q(p)], \quad (1.76)$$

де Δ – визначник системи m рівнянь з m невідомими струмами; Δ_{ks} – алгебраїчні доповнення, що отримуються шляхом викреслювання з визначника Δ k -го стовпця та s -го рядка і множення на $(-1)^{k+s}$.

Після перетворень отримаємо рівняння (1.76) у вигляді

$$i_k(p) = F_k(p) - \sum_{q=1}^m v_q(p)\psi_{kq}(p), \quad (1.77)$$

де $F_k(p) = \sum_{s=1}^{m-n+1} \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \sum_s e(p)$; ψ_{kq} – коефіцієнти, що залежать від номера гілки, в якій протікає струм.

Оригінал від зображення (1.77) запишеться у вигляді інтегрального рівняння

$$i_k(t) = F_k(t) + \int_0^t \sum_{q=1}^m v_q(\tau)\psi_{kq}(t-\tau)d\tau. \quad (1.78)$$

В цьому рівнянні всі v_q є невідомими нелінійними функціями струмів i_q , які є невідомими функціями часу.

Наведений метод може бути використаний при розв'язанні різних нелінійних задач.

Отримання інтегральних рівнянь методом «розщеплення». Розвитком вищенаведених методів є методика опису довільного електричного кола за частинами, коли будь-яка лінійна підсхема представляється інтегральними рівняннями з ядрами, тобто перехідними характеристиками ділянок (або ваговими функціями), які можуть бути визначені аналітично. Аналогом такої методики розділення і опису електричного кола є еквівалентне перетворення диференціальних рівнянь в інтегральні, яке може бути назване «методом розщеплення» оператора рівняння на лінійну і нелінійну частини з подальшим розв'язуванням рівняння лінійної частини як самостійного рівняння.

Можливі різні способи розщеплення, один з яких проілюструємо таким чином. Задано диференціальне рівняння

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i y^{(n-i)}(t) + F[y(t)] = f(t). \quad (1.79)$$

Приймаємо початкові умови відомими і розв'язуємо рівняння як лінійне операторним методом

$$V(p)Y(p) + S(p) = \Phi(p) + Q(p),$$

де $S(p)$ – зображення від $F[y(t)]$

$$Q(p) = Q[p, y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)] = q(t), \quad (1.80)$$

$$Y(p) = K(p)[\Phi(p) + Q(p)] - K(p)S(p), \quad (1.81)$$

$$K(p) = \frac{1}{V(p)}. \quad (1.82)$$

Від рівняння зображень переходимо до рівняння в оригіналах

$$y(t) = \int_0^t k(t-s) [f(s) - q(s, y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))] ds - \int_0^t k(t-s) F[y(s)] ds, \quad (1.83)$$

яке і є інтегральним рівнянням. Його ядро $k(t)$ може трактуватися як перехідна характеристика лінійної частини електричного кола.

Застосування перехідних характеристик елементів і ділянок електричних кіл є відзеркаленням поняття післядії лінійної системи і приводить до практичного використання інтегральних операторів і рівнянь як основних математичних моделей [23].

У інтегральні рівняння входить оператор Вольтерри

$$A_B [\varphi] = \int_{t_0}^t k(t,s)\varphi(s)ds = \psi(t), \quad (s \leq t), \quad (1.84)$$

особливість якого полягає в тому, що $\psi(t)$ визначається значеннями функції $\varphi(t)$ при $s < t$; це відповідає опису процесів з післядією.

Оператори Вольтерри володіють двома властивостями, що мають важливе значення при їх числовій реалізації:

- 1) безпосереднє застосування квадратурних формул приводить до рекурентних розрахункових виразів;
- 2) допускається застосування «методу рухомого початку», тобто замість початкового рівняння може вирішуватися еквівалентне йому рівняння:

$$y(t) + \int_{t_1}^t k(t,s)y(s)ds = f(t) - \int_{t_0}^{t_1} k(t,s)y(s)ds, \quad t \in (t_1, T), \quad (1.85)$$

де інтеграл в правій частині обчислюється заздалегідь.

Існують особливості в якісному дослідженні задач. Зокрема, якщо ядро $k(t,s)$ лінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду при $x, s \in [t_0, T]$ неперервне всередині і на сторонах трикутника $s = t_0, t = T, t = s$ в $[t_0, T]$ має кінцеве число точок розриву, але $\int_{t_0}^T |f(s)|ds \leq const$, то розв'язок існує і він єдиний.

Далі, в якості прикладу, розглянемо *стаціонарне нелінійне електричне коло*, яке складається з довільного числа резистивних елементів, ємнісних елементів, індуктивних та взаємно індуктивних елементів, елементів з нелінійним опором залежним від струму чи напруги, а також незалежних генераторів струму і напруги [102, 105].

Для отримання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри, розділимо ці елементи на групи: до першої віднесемо всі лінійні зв'язані між собою елементи з параметрами R, L, C, M які можна трактувати, як лінійний багатополосник N , а до другої – нелінійні опори, а також незалежні генератори струму і напруги, які приєднаємо до входів лінійного багатополосника N . Оскільки L, C , та M , є лінійними елементами, то можна представити початкові величини напруг чи струмів у цих елементах відповідно у формі генераторів напруги чи струму і трактувати їх надалі, як незалежні вимушені напруги або струми. Гілки, в яких шукатимемо реакції на задані вимушені дії, представимо у формі закритих (коли в цій гілці шукаємо струм) або відкритих (якщо шукаємо напругу) входів, як показано на рис. 1.12.

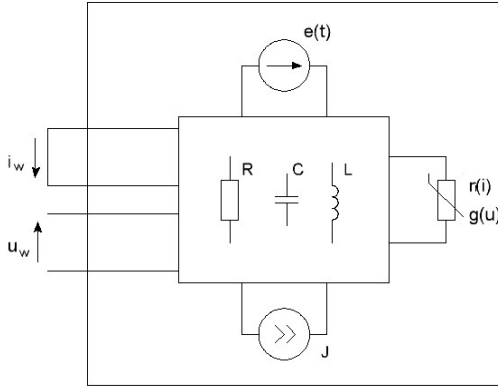


Рис. 1.12. Загальна схема досліджуваного нелінійного кола

Далі приймемо, що інтегральне рівняння Вольтерри шукаємо у наступному вигляді

$$x(t) = v(t) + \int_0^t h(t - \tau) G[x(p)] dp, \quad (1.86)$$

де

$$x(t) = [u_1, \dots, u_m, i_{m+1}, \dots, i_n]^t \quad (1.87)$$

вектор напруг і струмів в нелінійних елементах, а також початкові умови в них; $v(t)$ – вектор незалежних генераторів напруги і струму;

$$G[x(t)] = [g_1(u_1), \dots, g_m(u_m), r_{m+1}(i_{m+1}), \dots, r_n(i_n)]^t \quad (1.88)$$

є вектором характеристик нелінійних елементів, залежних від напруги (m) і від струму ($n - m$); $h(t - p)$ – квадратна матриця порядку $n \times n$, що залежить від характеристик лінійного багатополосника N .

Щоб визначити гібридну матрицю H_0 [129] лінійного багатополосника N , потрібно всі елементи, приєднані до його входів (за винятком незалежних генераторів) замінити керованими генераторами, керованими напругою або струмом в цій же гілці. Входи, до яких приєднуємо генератори напруги, називаємо входами напруги, а входи, до яких приєднуємо генератори струму, назвемо входами струму. Як очевидно з виразу (1.88), зручніше було б замінити нелінійні резистори з опором, залежним від напруги генераторами напруги, а елементи залежні від струму – генераторами струму. Тоді вектор $G(x)$ буде вектором керованих генераторів. Проте це не завжди можливо. Може виникнути ситуація, в якій певна кількість входів напруги створюватиме контур або деяка кількість входів струму – перерізи.

Це приводить до виникнення неоднозначності струмів або напруг в електричному колі, а тим самим робить неможливим побудови гібридної матриці. Чи наступить така ситуація – залежить від топології багатополюсника N . Цю незручність можна усунути, якщо не приписувати його входам характер струму або напруги.

З цієї точки зору, на рис. 1.13. керовані генератори напруги і струму, що отримані в результаті заміни ними нелінійних елементів, представлені символічно за допомогою круга без опису.

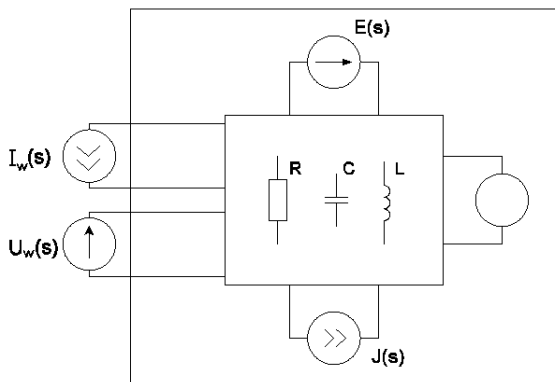


Рис. 1.13. Розрахункова схема досліджуваного нелінійного кола

Якщо ж в перспективі будемо стверджувати, що дані входи мають характер напруги, або ж струму, то тоді необхідно замінити приєднаний там елемент таким керованим генератором, який виникає в залежності (1.87). Якщо ж характер входів інший, ніж це впливає з (1.87), то далі, щоб отримати узгодження характеру входів і приєднаного генератора, слід змінити характеристику, що описує даний елемент (ці характеристики матимуть відповідно форму $r^{-1}(u)$ або $g^{-1}(i)$).

Позначимо через b ціле число входів багатополюсника N , а через g – число його гілок. Далі запишемо залежності всіх лінійних елементів гілок у формі одного матричного рівняння

$$\begin{bmatrix} F_i & F_u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_g \\ U_g \end{bmatrix} = 0, \quad (1.89)$$

де F_i , F_u – матриці розмірністю $g \times g$ кожна, ранг матриці $\begin{bmatrix} F_i & F_u \end{bmatrix}$ дорівнює g .

Елементами цієї матриці є вирази типу sL , sM , sC , R , G , а також числа 1, а до складу I_g і U_g входять одновимірні трансформації Лапласа струмів і напруг гілок. Слід зазначити, що ці вирази при од-

наковому напрямі напруг і струмів на елементах електричного кола, мають завжди один і той самий знак.

З метою отримання гібридної матриці, що описує дану систему, поступимо таким чином:

1. Виберемо дерево T електричного кола N . Далі припускаємо, що граф є зв'язаним і має w вузлів.

Можемо створити дерево цього графа через вибір $w - 1$ гілок. Оскільки входи ще не є визначеними (входи напруги або входи струму), то будь-яка кількість входів може міститися в дереві (протидереві), якщо тільки вони не створюють контурів (перерізів). Розділимо гілки цього електричного кола на чотири групи:

- db – гілка дерева, яка одночасно є входом;
- dn – гілка дерева, яка одночасно не є входом;
- cb – хорди, які одночасно є входами;
- cn – хорди, які одночасно не є входами.

Очевидно виникає наступна залежність: $db + cb = b$, $dn + cn = g$.

Нехай при такому вибраному дереві T матриця B буде головною матрицею контурів, а Q – головною матрицею перерізів [46]

$$B = \begin{bmatrix} E & 0 & F_{cb,dn} & F_{cb,db} \\ 0 & E & F_{cn,dn} & F_{cn,db} \end{bmatrix} = [E \quad B_1], \quad (1.90)$$

де 0 – нульова матриця, E – одинична матриця,

$$Q = \begin{bmatrix} -B_1^t & E \end{bmatrix}. \quad (1.91)$$

Матриці у виразі (1.90) можна поділити на підматриці наступним чином

$$[F_{idn} \quad F_{ucn} \quad F_{udn} \quad F_{icn}] \times \begin{bmatrix} I_{dn} \\ U_{cn} \\ U_{dn} \\ I_{cn} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.92)$$

2. Запишемо тепер вирази за першим та другим законом Кірхгофа, а також співвідношення у гілках кола у вигляді одного загального матричного рівняння

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & B \\ F_{i0} & F_{u0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{gb} \\ U_{gb} \end{bmatrix} = 0, \quad (1.93)$$

де $F_{i0} = [F_i \quad 0]$, $F_{u0} = [F_u \quad 0]$, $I_{gb} = [I_g^t \quad I_b^t]^t$, $U_{gb} = [U_g^t \quad U_b^t]^t$.

Після підстановки (1.90), (1.91), (1.92) до (1.93), а також впорядкування рядків та стовпців отримаємо

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 & -F_{cn,dn}^t & 0 & 0 & 0 & -F_{cb,dn}^t \\ 0 & E & F_{cn,dn} & 0 & 0 & 0 & F_{cn,db} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{cn,db}^t & E & 0 & 0 & -F_{cb,db}^t \\ 0 & 0 & F_{cb,dn} & 0 & 0 & E & F_{cb,db} & 0 \\ F_{idn} & F_{ucn} & F_{udn} & F_{icn} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{dn} \\ U_{cn} \\ U_{dn} \\ I_{cn} \\ I_{db} \\ U_{cb} \\ U_{db} \\ I_{cb} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.94)$$

У рівнянні (1.94) перший та третій рядок відповідає першому закону Кірхгофа, а другий та четвертий – другому закону Кірхгофа. В цих рядках нижні індекси вказують на порядок підматриць. В останньому рядкові кожна підматриця має g рядків, а на число стовпців вказує відповідний нижній індекс. Вектори I_{dn} , U_{cn} можуть бути легко вилучені з рівняння (1.94) через вираження їх з перших двох рівнянь і подальшої підстановки до останнього рівняння, що приводить до наступної залежності

$$\begin{bmatrix} F_{cb,dn} & 0 & 0 & E & F_{cb,dn} & 0 \\ 0 & -F_{cn,db}^t & E & 0 & 0 & -F_{cb,dn}^t \\ F_{udn}^I & F_{icn}^I & 0 & 0 & F_{udb}^I & F_{icb}^I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{dn} \\ I_{cn} \\ I_{dn} \\ U_{cb} \\ U_{db} \\ I_{cb} \end{bmatrix} = 0, \quad (1.95)$$

де

$$F_{udn}^I = F_{udn} - F_{ucn} \times F_{cn,dn}, \quad F_{icn}^I = F_{icn} - F_{idn} \times F_{cn,dn}, \\ F_{icb}^I = F_{idn} \times F_{cb,db}^t, \quad F_{udb}^I = -F_{ucn} \times F_{cn,db}.$$

Рівняння (1.95) можна представити в згорнутому вигляді

$$[L_1 \ ; \ L_2] \times \begin{bmatrix} U_{dn} \\ I_{cn} \\ \dots \\ I_{dn} \\ U_{cb} \\ U_{db} \\ I_{cb} \end{bmatrix} = 0, \quad (1.96)$$

а визначення матриць L_1 і L_2 впливає з порівняння рівнянь (1.95) і (1.96).

3. Далі безпосереднє виключення U_{dn} , I_{cn} з рівняння (1.96) є в загальному випадку неможливим. Однак ці вектори можуть бути вилучені через застосування елементарних операцій із рядками матриці $[L_1 \mid L_2]$, що дає в підсумку верхньо-трикутну матрицю коефіцієнтів [32]

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{dn} \\ I_{cn} \\ I_{db} \\ U_{cb} \\ U_{db} \\ I_{cb} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.97)$$

Із властивостей матриць залежностей у гілках для всіх елементів в системі N багатополюсника ранги матриць $[F_{idn} \ F_{ucn}]$ і $[F_{udn} \ F_{icn}]$ рівні і становлять g . Розв'язуючи далі рівняння (1.96) і (1.97) можна зауважити, що ранг матриці L_1 є рівним g , а ранг матриці $[L_1 \mid L_2] - g + b$. З тверджень наведених в [32] випливає, що матриця A_3 утворена в результаті перестановки рядків матриці $[L_1 \mid L_2]$ і має ранг рівний b . Рівняння, що виражає залежності між напругами і струмами входів, набуває вигляду

$$[A_3] \times \begin{bmatrix} I_{db} \\ U_{cb} \\ U_{db} \\ I_{cb} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.98)$$

4. Оскільки ранг матриці A_3 становить b , то можна так переставити стовпці цієї матриці щоб по ліву сторону була підматриця A_4 порядку $b \times b$ і рангу b , тобто $[A_3] \Rightarrow [A_4 \ A_5]$.

Позначимо через P матрицю порядку $2b \times 2b$, яка виконує перегрупування стовпців матриці A_3 до виду $[A_4 \ A_5]$. Така матриця є неособливою матрицею з наступними властивостями: $P = P^{-1}$, $\det P = 1$, $p_{ij} = +1, -1$, або 0 . Рівняння (1.98) тепер можливо представити у наступному вигляді

$$[A_3 \times P] \times P^{-1} \times \begin{bmatrix} I_{db} \\ U_{cb} \\ U_{db} \\ I_{cb} \end{bmatrix} = [A_4 \ A_5] \times \begin{bmatrix} Y_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = 0, \quad (1.99)$$

де

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = P^{-1} \times \begin{bmatrix} I_{db} \\ U_{cb} \\ U_{db} \\ I_{cb} \end{bmatrix}, \quad Y_1, X_1 \in R^b. \quad (1.100)$$

Оскільки $\det A_4 \neq 0$, то відповідно до рівняння (1.99) отримуємо

$$Y_1 = -A_4^{-1} \times A_5 \times X_1 = H_0 \times X_1. \quad (1.101)$$

Матриця H_0 є гібридною матрицею, яка описує лінійний багатополосник N . Ця матриця має порядок $b \times b$, елементами якої є функції комплексної змінної s . Вектори X_1 і Y_1 мають порядок $b \times 1$, а їх i -тим елементом є напруга або струм i -того входу, $i = 1, 2, \dots, b$. Про те, чи i -тим елементом вектора X_1 є напруга чи є струм, говорить матриця переходу P . Взагалі існує більш ніж одна така матриця.

На підставі вищенаведених розрахунків можна i -тому входу визначити тип залежності від напруги (b_u – кількість таких входів), якщо i -тим елементом вектора X_1 є напруга, і тип залежності від струму, якщо i -тим елементом вектора X_1 є струм (b_i – кількість таких входів).

На підставі рівняння (1.101), а також залежностей нелінійних елементів гілок одержуємо також рівняння, що описує нелінійне електричне коло N в часовому просторі. Для цього розділимо всі входи багатополосника N на дві незв'язані групи b_u і b_i . До групи b_u будуть належати входи, до яких приєднуються такі елементи:

- опори, залежні від струму (nr),
- всі вихідні струми (niw),
- всі незалежні генератори напруги (ne),

а в групу b_i -ті входи, до яких приєднуються такі елементи:

- опори, залежні від напруги (ng),
- всі вихідні напруги (nvw),
- всі незалежні генератори струму (nj).

Як слідує з рівняння (1.101), до складу вектора X_1 можуть входити ті напруги чи струми, які в окремих входах багатополосника можна замінити відповідно генераторами напруги або генераторами струму. Цей вектор гарантує обов'язкове існування опису цієї системи за допомогою гібридної матриці H_0 . Отже, можна знайти матрицю переходу P таку, щоб вектор

$\begin{bmatrix} I_{db}^t & U_{cb}^t & U_{db}^t & I_{cb}^t \end{bmatrix}$ можливо

було перетворити в нижче наведену формулу (якщо така матриця

переходу не існує то це означає, що дане нелінійне коло не можна описати інтегральними рівняннями у вказаній вище формі):

$$X_1 = [J^t, E^t, I_g^t, U_r^t, O^t, O^t]^t, \quad (1.102. а)$$

$$Y_1 = [I^t, U^t, U_g^t, I_r^t, I_w^t, U_w^t]^t, \quad (1.102. б)$$

де J, E – незалежні генератори струму та е. р. с.; U, I – напруги на J та струми в E ; U_g, U_r, I_g, I_r – напруги і струми на елементах відповідно до множин ng і nr ; U_w, I_w – напруги і струми які необхідно визначити.

Введемо далі наступні позначення:

$$W = \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix} - \text{вектор незалежних генераторів струму та е. р. с.};$$

$$X = \begin{bmatrix} U_g \\ I_r \end{bmatrix} - \text{вектор напруг та струмів на елементах відповідно}$$

до поділу ng і nr ;

$$Y = \begin{bmatrix} I_w \\ U_w \end{bmatrix} - \text{вектор величин, які необхідно визначити};$$

$G[x(t)] = [g_1(u_1), \dots, g_{ng}(u_{ng}), r_1(i_1), \dots, r_{nr}(i_{nr})]^t$ – вектор характеристик нелінійних елементів відповідно до поділу ng і nr .

Можна зазначити, що

$$\begin{bmatrix} I_g \\ U_g \end{bmatrix} = L \left\{ G \times \begin{bmatrix} u_g \\ i_g \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.103)$$

де L – оператор перетворення Лапласа, u_g і i_g оригінали відповідних напруг і струмів, що виражені в просторі часу.

Запишемо рівняння (1.103) ще раз, враховуючи введені позначення

$$\begin{bmatrix} I \\ U \\ \dots \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W \\ L\{G[x]\} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.104)$$

де $H_{ij}, i, j = 1 \dots 3$ є підматрицями матриці H_0 порядку, відповідного до поділу векторів X_1 і Y_1 на підвектори.

Невідомі рівняння Вольтерри є другим та третім рядком рівняння (1.104) і представлені в просторі зображень за Лапласом:

$$X = H_{21} \times W + H_{22} \times L\{G[x]\}, \quad (1.105. \text{ а})$$

$$Y = H_{31} \times W + H_{32} \times L\{G[x]\}. \quad (1.105. \text{ б})$$

Тільки перше з цих рівнянь необхідно розв'язати відносно X . Вектор величин, що необхідно знайти можна розрахувати з другого рівняння, підставивши відомі величини W , а також X . Звідси видно, що вектор X є такою множиною змінних, знаючи які, можливо розрахувати довільні напруги чи струми в колі N (рис. 1.13). Назвемо його основним вектором. Елементами основного вектора є керуючі величини нелінійних елементів.

Після застосування операції оберненого перетворення Лапласа до обох складових виразу (1.104) отримаємо шукані інтегральні рівняння типу Вольтерри другого роду, що описують коло N в просторі часу:

$$x(t) = \int_0^t h_{21}(t-p)w(p)dp + \int_0^t h_{22}(t-p)G[x(p)], \quad (1.106. \text{ а})$$

$$y(t) = \int_0^t h_{31}(t-p)w(p)dp + \int_0^t h_{32}(t-p)G[x(p)], \quad (1.106. \text{ б})$$

де $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$, $w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$, $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ – зворотнє перетворення Лапласа від відповідних величин.

Розв'язування рівняння (1.106) можливо проводити не тільки в часовому просторі, а також і в просторі зображень за Лапласом (вираз 1.105), як описано в [34].

Приклад 1.5. Для підтвердження працездатності методу отримаємо інтегральне рівняння для нелінійного кола рис. 1.14 [102]. Це коло містить одне незалежне джерело $e_1(t)$, а також два нелінійні опори $r_3(i)$ і $r_6(i)$, залежні від струму. Нехай струм в ємності C_4 буде невідомою величиною, яку необхідно знайти, як реакцію на дію $e_1(t)$.

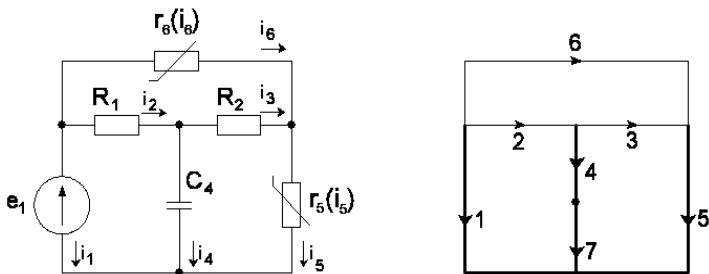


Рис. 1.14. Розрахункова схема та її граф

Представимо це коло у вигляді багатополосника, як показано на рис. 1.15.

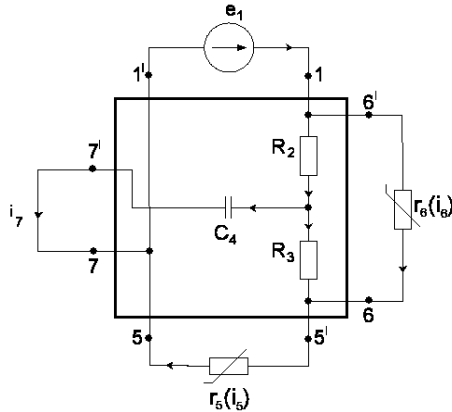


Рис. 1.15. Розрахункова схема у вигляді багатополосника

До його відповідних входів підключимо: джерело напруги $e_1(t)$, два нелінійні опори $r_5(i)$ і $r_6(i)$, а також гілку зі струмом i_4 . Замінимо далі нелінійні елементи залежними генераторами, без приписування цим входам характеру струму чи напруги, відповідно до рис. 1.15. Виберемо далі дерево T електричного кола N (на рис. 1.16 дерево зображено жирними лініями). До множини db будуть належати входи $5-5'$, $1-1'$, $7-7'$, до множини dn ємність C_4 , до множини cb вхід $6-6'$, а до множини cn резистори R_1 і R_2 .

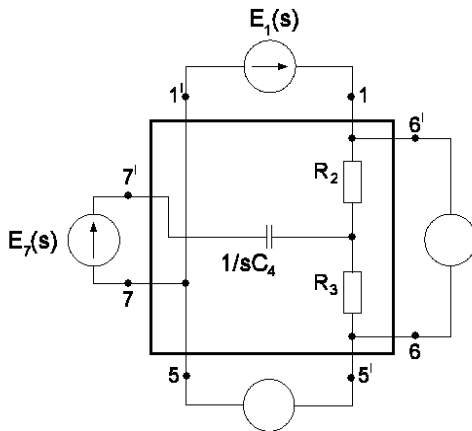


Рис. 1.16. Перетворена розрахункова схема

Матричне рівняння в просторі зображень за Лапласом має вигляд

$$\begin{array}{c}
 4 \\
 4 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\
 -1 & 0 & 0 & sC_4 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & R_3
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} I_4 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}
 \end{array}
 = 0.$$

$$F_{idn} \quad F_{ucn} \quad F_{udn} \quad F_{icn}$$

Після підстановки вищенаведених залежностей до виразу (1.99)

та виключення векторів I_4 , а також $[U_2 \quad U_3]^t$, отримаємо рівняння (1.100) в наступному вигляді

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 sC_4 \\
 -1 \\
 -1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 -1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} U_4 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_1 \\ I_7 \\ E_6 \\ E_5 \\ E_1 \\ E_7 \\ I_6 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 U_{dn} \\
 I_{cn} \\
 I_{dn} \\
 U_{cb} \\
 U_{db} \\
 I_{cb}
 \end{array}
 \end{array}
 = 0.$$

Після виконання операцій відповідно до виразів (1.103), а також (1.104) отримаємо гібридне рівняння багатополосника N в наступному вигляді

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} I_1 \\ U_6 \\ I_5 \\ I_7 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{s+1}{s+2} & -1 & \frac{2s}{s+2} & \frac{-0,5}{s+0,5} \\
 \frac{2s}{s+2} & 0 & \frac{-2s}{s+2} & 0 \\
 \frac{2s}{s+2} & 1 & -\frac{s+1}{s+2} & \frac{-0,5}{s+0,5} \\
 \frac{2s}{s+2} & 0 & \frac{2s}{s+2} & \frac{1}{s+0,5}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} E_1 \\ I_6 \\ U_5 \\ E_7 \end{bmatrix}
 \end{array}
 .$$

На основі виразу (1.103), а також після трансформації в простір часу отримуємо наступні інтегральні рівняння Вольтерри:

$$\begin{bmatrix} u_6 \\ i_5 \end{bmatrix} = \int_0^t h_{21}(t-p)e_1(p)dp + \int_0^t h_{22}(t-p) \begin{bmatrix} g_6(p) \\ r_5(p) \end{bmatrix} dp,$$

$$i_7 = \int_0^t h_{31}(t-p)e_1(p)dp + \int_0^t h_{32}(t-p) \begin{bmatrix} g_6(p) \\ r_5(p) \end{bmatrix} dp,$$

де

$$h_{21}(t) = \begin{bmatrix} 2\delta(t) - 4e^{-2t} \\ \delta(t) - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \times 1(t), \quad h_{22}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2\delta(t) + 4e^{-2t} \\ \delta(t) & -\delta(t) + e^{-2t} \end{bmatrix} \times 1(t),$$

$$h_{31}(t) = [\delta(t) - 2e^{-2t}] \times 1(t), \quad h_{32}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \delta(t) - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \times 1(t).$$

В даному прикладі представлено спосіб отримання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду разом з основними рівняннями. Показано, що в цьому описі як невідомі виступають керуючі величини всіх нелінійних елементів. Продемонстровано як на основі застосування матриці переходу P можна визначити які з нелінійних елементів повинні отримати характеристики струму-напруги, залежні від напруги, а які – від струму, у разі, коли нелінійні елементи створюють (разом з незалежними генераторами напруги) контури або (разом з незалежними генераторами струму) перерізи.

Алгоритм складання інтегральних рівнянь полягає в розташуванні незалежних генераторів струму і напруги, нелінійних елементів, а також гілок, в яких шукаємо реакції на входах лінійного багатополосника, а далі в заміні нелінійних елементів невизначеними керуваними генераторами. В ході отримання гібридних рівнянь, що описують цей багатополосник, можна встановити які з нелінійних резистивних елементів можуть бути залежними від напруги, а які – від струму. Завдяки цьому можна вибрати як вектор незалежних змінних сукупність керуючих величин всіх нелінійних елементів.

1.5. Формування інтегральних моделей нестационарних (параметричних) електричних кіл

У даному підрозділі будуть розглянуті методи розрахунку передіхних процесів в електричних колах за наявності в них елементів зі змінними параметрами, в т.ч. нелінійних, засновані на використанні різних форм закону Ома-Дюамеля (1.73, 1.74), та вперше згадані в роботах Г. Є. Пухова [91]. Загальні переваги при застосуванні таких методів описані раніше в підрозділі 1.4.

Розглянемо розрахунок перехідного процесу в електричному колі з одним нелінійним або змінним параметром. В цьому випадку електричне коло завжди можна представити у вигляді двополюсника 1, що має постійні параметри, і двополюсника 2, що має змінну або нелінійну провідність, індуктивність, ємність (рис. 1.17).

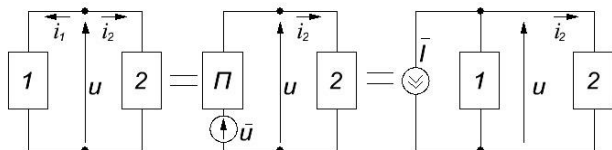


Рис. 1.17. Отримання еквівалентного двополюсника

Нехай двополюсник 2 є двополюсником зі змінною омичною провідністю $g = g(t)$. Тоді можна записати рівняння:

$$\int_0^t i_1(s) ds = \int_0^t y(t-s)[u(s) - \bar{u}(s)] ds, \quad i_1(t) + i_2(t) = 0, \quad i_2(t) = g(t)u(t), \quad (1.107)$$

$$i_1(t) + i_2(t) = 0, \quad i_2(t) = g(t)u(t).$$

Виключаючи звідси струми i_1 і i_2 , отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_0^t [y(t-s) + g(s)]u(s) ds = \int_0^t y(t-s)\bar{u}(s) ds, \quad (1.108)$$

розв'язування якого дає напругу $u = u(t)$ на змінній провідності $g = g(t)$.

При чисельних розрахунках замість (1.108) розв'язуватиметься система лінійних скінченних рівнянь.

Розглянемо випадок коли двополюсник 2 є нелінійною омичною провідністю. В цьому випадку для електричного кола (рис. 1.17) можна записати рівняння:

$$\int_0^t i_1(s) ds = \int_0^t y(t-s)[u(s) - \bar{u}(s)] ds, \quad (1.109)$$

$$i_1(t) + i_2(t) = 0, \quad i_2(t) = i(u),$$

де $i(u)$ – відома функція напруги u .

Виключаючи з цих рівнянь струми, отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^t \{y(t-s)u(s) + i[u(s)]\} ds = \int_0^t y(t-s)\bar{u}(s) ds, \quad (1.110)$$

яке дозволяє визначати напругу на нелінійній провідності. При чисельних розрахунках замість (1.110) вирішуватиметься система нелінійних скінченних рівнянь.

Приклад 1.6. Для ілюстрації розрахункової схеми розглянемо приклад.

Нехай електричне коло, що складається з послідовно сполучених постійної індуктивності L , постійного опору R і змінної провідності $g(t) = at$, вмикається на джерело з постійною е. р. с. E (рис. 1.18). Необхідно визначити напругу на провідності $g(t)$.

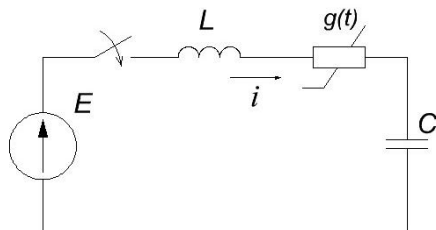


Рис. 1.18. Розрахункова схема

В даному випадку

$$y(t) = \frac{1 - e^{-\frac{Rt}{L}}}{R}, \quad \bar{u} = E.$$

Інтегральне рівняння для визначення невідомої напруги має вигляд:

$$\int_0^t \left(\frac{1 - e^{-\frac{Rt}{L}}}{R} + as \right) u(s) ds = \int_0^t \frac{1 - e^{-\frac{Rt}{L}}}{R} E ds.$$

При знаходженні чисельних результатів за допомогою формули прямокутників приходимо до системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} (y_1 + g_0)u_0 &= y_1 E, \\ (y_2 + g_0)u_0 + (y_2 + g_1)u_1 &= (y_2 + y_1)E, \\ (y_3 + g_0)u_0 + (y_2 + g_1)u_1 + (y_1 + g_2)u_2 &= \\ &= (y_3 + y_2 + y_1)E \end{aligned}$$

і т. д.

В даній системі рівнянь $y_k = \frac{1}{R}(1 - w^k)$, $g_k = kah$, $w = e^{-\frac{R}{L}h}$, a – коефіцієнт формули прямокутників. Значення напруги u_k при $t = t_k = kh$ визначаються послідовно: з першого рівняння знаходимо u_0 , з другого – u_1 , з третього – u_2 і так далі.

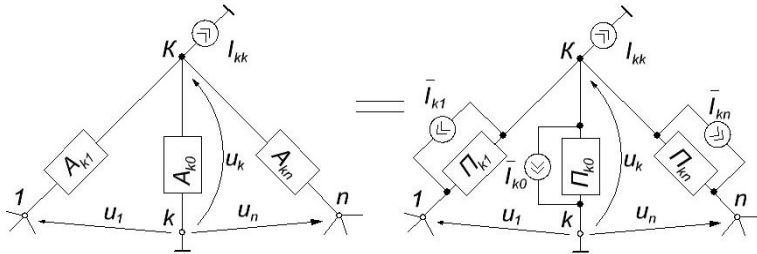


Рис. 1.19. Схема заміщення

Розглянемо інтегральні методи вузлової напруги і контурних струмів. Використовуючи схеми заміщення активних двополюсників, закон Ома-Дюамеля для кожного з них і, вибираючи як визначувані невідомі, вузлову напругу ланцюга (рис. 1.19), легко встановити, що вектор вузлової напруги може бути визначений шляхом розв'язання наступного інтегрального рівняння:

$$\int_0^t Y(t-s)u(s)ds = \int_0^t Y(s)u(t-s)ds = \int_0^t i(s)ds, \quad (1.111)$$

в якому $u(t)$ – вектор вузлових напруг:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad (1.112)$$

$i(t)$ – вектор струмів короткого замикання:

$$i(t) = \begin{pmatrix} \bar{i}_1(t) \\ \bar{i}_2(t) \\ \dots \\ \bar{i}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{i}_{10}(t) + \bar{i}_{11}(t) + \bar{i}_{12}(t) + \dots + \bar{i}_{1n}(t) \\ \bar{i}_{20}(t) + \bar{i}_{21}(t) + \bar{i}_{22}(t) + \dots + \bar{i}_{2n}(t) \\ \dots \\ \bar{i}_{n0}(t) + \bar{i}_{n1}(t) + \bar{i}_{n2}(t) + \dots + \bar{i}_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (1.113)$$

$Y(t)$ – матриця власної і взаємної перехідної провідностей:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & -y_{12}(t) & \dots & -y_{1n}(t) \\ -y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & -y_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y_{n1}(t) & -y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (1.114)$$

де

$$y_{kk}(t) = y_{k0}(t) + y_{k1}(t) + \dots + y_{kn}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.115)$$

При постійній перехідній провідності матрично-векторне інтегральне рівняння (1.111) вироджується в рівняння

$$Yu = \bar{i} \quad (1.116)$$

звичайного методу вузлової напруги.

Звернемося тепер до інтегрального методу контурних струмів. Використовуючи схеми заміщення елементарних двополюсників і враховуючи, що алгебраїчна сума всіх напруг в кожному із замкнутих контурів електричного кола повинна дорівнювати нулю, можна отримати матрично-векторне інтегральне рівняння

$$\int_0^t Z(t-s)i(s)ds = \int_0^t Z(s)i(t-s)ds = \int_0^t \bar{u}(s)ds, \quad (1.117)$$

де $i(s)$ – вектор контурних струмів; $\bar{u}(t)$ – вектор, компонентами якого є алгебраїчні суми напруг холостого ходу елементів кола, що входять в замкнуті контури; $Z(t)$ – матриця власних і взаємних опорів контурів. При постійних перехідних опорах інтегральне рівняння (1.117) вироджується в рівняння

$$Zi = \bar{u} \quad (1.118)$$

звичайного методу контурних струмів.

Розглянемо інтегральний метод розрахунку електричного кола з декількома нелінійними і змінними параметрами.

Електричне коло, що містить n двополюсників з нелінійними і змінними параметрами, завжди може бути представлено у вигляді лінійного багатополюсника A з постійними параметрами і приєднаними до нього двополюсників $1, 2 \dots, n$, з нелінійними і змінними параметрами (рис. 1.20, а). Схеми заміщення електричного кола з джерелами напруги $\bar{u}_k = \bar{u}_k(t)$, рівними напругам холостого ходу, і з джерелами струму $\bar{i}_k = \bar{i}_k(t)$, рівними струмам короткого замикання (рис.1.20 б і в), отримуються як просте узагальнення двополюсних схем заміщення на випадок багатополюсників.

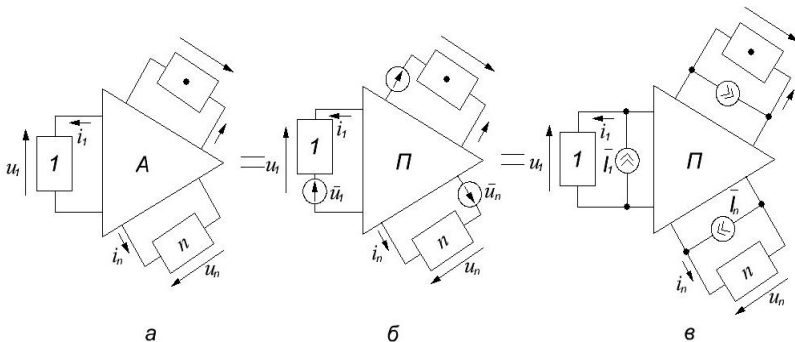


Рис. 1.20. Схема заміщення складного кола

Позначивши через u вектор напруг двополюсників $1, 2, \dots, n$, через \bar{u} і \bar{i} – вектор напруги \bar{u}_k і струмів \bar{i}_k і, також, через $Y(t)$ і $Z(t)$ – матриці власної і взаємної перехідної провідності і опорів лінійного багатополюсника, отримаємо рівняння для визначення вектора u у випадку, коли двополюсники $1, 2, \dots, n$ є двополюсниками зі змінними омичними провідностями. Очевидно, що для багатополюсника має місце інтегральне рівняння

$$\int_0^t Y(t-s)[u(s) - \bar{u}(s)]ds = -\int_0^t i(s)ds, \quad (1.119)$$

а для системи двополюсників – рівняння

$$i(t) = Gu(t), \quad (1.120)$$

де $G = G(t)$ – діагональна матриця змінної провідності

$$G = \begin{vmatrix} g_1(t) & & & \\ & g_2(t) & & \\ & & \dots & \dots \\ & & & g_n(t) \end{vmatrix}. \quad (1.121)$$

Виключаючи з наведених рівнянь вектори струму $i(t)$, отримаємо шукане інтегральне рівняння

$$\int_0^t [Y(t-s) + G(s)]u(s)ds = \int_0^t Y(t-s)\bar{u}(s)ds \quad (1.122)$$

для визначення вектора напруги $u = u(t)$.

Отримане рівняння залишається справедливим і у випадку, коли двополюсники $1, 2, \dots, n$ є двополюсниками з нелінійною омичною провідністю $g_s = g_s(u_s)$, відомим чином залежною від напруги u_s , причому $s = 1, 2, \dots, n$.

У випадку, якщо двополюсники представляють не омичні, а нелінійні і змінні індуктивності чи ємності, інтегральні рівняння, що описують стан електричного кола, отримуються аналогічно. Нехай, наприклад, нелінійні двополюсники є нелінійними індуктивностями, для кожного з яких відома залежність між потокозчепленням і струмом

$$i_k = i_k(\psi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.123)$$

У векторній формі ця система запишеться так

$$\bar{i} = \bar{i}(\psi). \quad (1.124)$$

Вектор напруги на нелінійних індуктивностях має вигляд

$$u = \frac{d\psi}{dt}. \quad (1.125)$$

Інтегруючи цей вираз від $t = 0$ до t , отримаємо

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t u(s) ds . \quad (1.126)$$

З іншого боку, для багатополосника можна записати інтегральне рівняння

$$\int_0^t Z(t-s)[i(s) - \bar{i}(s)] ds = - \int_0^t u(s) ds , \quad (1.127)$$

з якого, враховуючи вирази (1.125) і (1.126), можна виключити вектори $u(t)$ і $i(t)$. Виконавши це, отримаємо інтегральне рівняння

$$\psi + \int_0^t Z(t-s)i(\psi) ds = \psi(0) + \int_0^t Z(t-s)\bar{i}(y) ds , \quad (1.128)$$

що дозволяє визначити вектор потокозчеплень в індуктивностях, а потім вже з виразів (1.123) і компоненти вектора струмів.

При чисельних розрахунках слід замінити інтеграли відповідними сумами і розв'язати отриману таким чином систему нелінійних алгебраїчних рівнянь.

1.6. Електричні кола зі структурою, що змінюється (схеми з ідеальними ключами)

Задача аналізу динаміки пристроїв перетворювальної техніки в сучасних електроенергетичних напівпровідникових (НВП) і надпровідникових (НДП) пристроях і системах є однією з найбільш складних [13, 47, 83, 88, 107, 112]. При цьому треба передбачати аналіз не лише однієї схеми перетворювача, але і систем, що містять один або декілька перетворювачів (в разі надпровідникових систем, розташованих в різних температурних зонах), фільтрувально-компенсуючих і розподільних пристроїв, пристроїв захисту, різних видів навантажень, підсистем з розподіленими параметрами. Еквівалентні схеми таких систем містять велику кількість лінійних двополосників (індуктивностей, ємностей, опорів, джерел енергії) і описуються, зазвичай, диференціальними рівняннями високих порядків і вимагають значних витрат машинних ресурсів для їх розв'язування.

Специфіка все ширше використовуваних надпровідникових перетворювальних систем (зокрема для енергозабезпечення надпровідникових магнітних комплексів) полягає в тому, що виконавчі елементи, виконані із надпровідникових матеріалів, розташовані в зоні криогенних температур, а узгодження параметрів первинного джерела живлення і надпро-

віднікових магнітних комплексів здійснюється за допомогою напівпровідникового автономного інвертора в напівпровідниковій зоні. При цьому значно знижуються втрати енергії в криозоні системи.

Звідси слідує необхідність розробки нових методів, алгоритмів і програм аналізу перехідних процесів електричних кіл [29, 37, 93, 97], що дозволяють підвищити ефективність використання обчислювальних засобів при аналізі складних напівпровідникових і надпровідникових перетворювальних схем.

Далі наводиться один з можливих підходів до побудови алгоритмів аналізу великих напівпровідникових і надпровідникових перетворювальних схем і автономних систем електропостачання. Він характеризується наступними особливостями:

- 1) початковий опис системи з перетворювачами формується у вигляді системи інтегральних рівнянь;
- 2) він є методом аналізу по частинах (декомпозиційним);
- 3) відноситься до класу обчислювально-аналітичних методів.

В основу підходу покладемо застосування інтегрального методу моделювання і аналізу динамічних об'єктів і систем [21].

Питання чисельного дослідження кусково-неперервних процесів в напівпровідникових і надпровідникових перетворювальних пристроях методом інтегральних рівнянь розглядалися в роботах [65, 82, 83, 136]. Проте його можливості в даному напрямі використовуються ще далеко не в повній мірі.

Доцільність подальшого розвитку і застосування методу інтегральних рівнянь до аналізу перехідних процесів в напівпровідникових і надпровідникових вентильних перетворювачах обумовлена, перш за все, згладжувальними властивостями інтегральних операторів, а також можливістю побудови ненасичуваних і оптимальних з огляду точності обчислювальних алгоритмів розв'язування рівнянь, що вивчаються.

Математична модель. Напівпровідникові і надпровідникові електроенергетичні системи з перетворювальними пристроями є складними, суттєво нелінійними системами. Пристрої перетворювальної техніки можна віднести до динамічних кусково-неперервних і, зокрема, кусково-поліноміальних систем. Системи цього класу сполучають в собі риси неперервних і дискретних динамічних систем. Щоб уникнути громіздкості основна увага буде приділена достатньо простим кусково-лінійним розщепленим системам.

Проте при розв'язуванні багатьох задач аналізу систем з перетворювальними пристроями поняття кусково-лінійної розщепленої системи є дуже широким. Воно не враховує такої особливості цих напівпровідникових або надпровідникових систем, як наявність в їх еквівалентних схемах великої кількості лінійних двополюсників та

ідеальних ключів. Основні витрати машинного часу, як показано в [1], відводяться на формування і розв'язування рівнянь кусково-лінійного кола, і доходять до 80% від всього машинного часу. Причому із збільшенням кількості елементів в моделі ця частка збільшується. Для того, щоб програмне забезпечення було економічним і в той же час достатньо універсальним, відповідна йому математична модель реального об'єкта має бути, по можливості, простою і достатньо універсальною, щоб мати можливість відображати різні системи з різним рівнем адекватності і в різних режимах їх роботи.

Одним з найпотужніших прийомів підвищення ефективності процедур аналізу є застосування методу декомпозиції великих систем на частини. Не дивлячись на глибоке теоретичне вивчення і широке застосування цього методу при аналізі електронних схем і електроенергетичних систем [89, 98, 113], застосування його при аналізі схем перетворювальної техніки має свої істотні особливості, пов'язані з наявністю в їх еквівалентних схемах великого числа ідеальних ключів.

Склад кусково-лінійного кола дуже різномірний. До нього входять як лінійні, так і кусково-лінійні напівпровідникові і надпровідникові елементи (трансформатори, ідеальні ключі), функціональні кола, що відображають як силову схему, так і систему управління. Одна можливість розбиття кусково-лінійного кола пов'язана з тим, що система управління напівпровідникового або надпровідникового статичного перетворювача визначає тільки моменти зміни стану його вентиляльних елементів, тому з кусково-лінійного кола структурно можна виділити два функціональні кола: одне – для відображення аналогової частини системи управління, а інше – для відображення цифрової частини силових схем. Хоча істотного виграшу у витратах машинного часу від виділення двох функціональних кіл чекати важко, це дозволить спростити математичний опис і програмне забезпечення.

Друга, і найістотніша можливість розбиття кусково-лінійного кола, що безпосередньо приводить до необхідності використання інтегральних рівнянь, пов'язана з виділенням лінійних елементів в один або декілька лінійних багатополосників і об'єднанням ідеальних ключів в один або декілька комутаторів. При цьому виділення лінійних багатополосників має бути виконане так, щоб зв'язок між ними здійснювався тільки за допомогою струмів і напруги зовнішніх полюсів. Лінійні багатополосники в цьому випадку описуються системою алгебро-диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, які формуються тільки один раз при розв'язуванні задачі. Для спрощення математичного опису елементи з кусково-постійними параметрами до складу теоретичної моделі можуть не включатися. Така заборона на застосування елементів з кусково-постійними параметрами

не обмежує можливостей математичної моделі, оскільки будь-яку кусково-лінійну характеристику можна відобразити набором лінійних елементів та ідеальних ключів.

Отже, структура математичної моделі систем із статичними напівпровідниковими і надпровідниковими перетворювачами (рис. 1.21) визначається наступними блоками: комутатором (КОММ), складеним з ідеальних ключів; лінійними багатополюсниками (ЛБП_k, $k = 1, 2, \dots$); джерелами напруги і струму; функціональним колом (ФЛ-1, що визначає значення джерел; обробляючим функціональним колом (ФЛ-2); компараторами (КОМП); кінцевими автоматами (АВТ).

Блоки КОМП і АВТ керують станом ключів, що входять в КОМ, ФЛ-1 і ФЛ-2. Основу моделі складає частина структури, що складається з комутатора і лінійних багатополюсників.

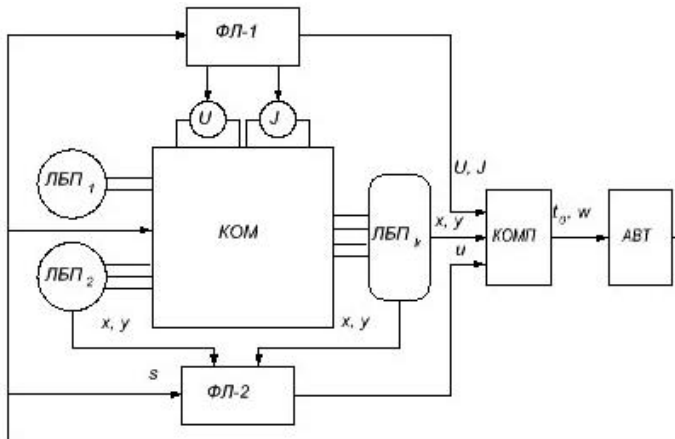


Рис. 1.21. Структура моделі із напівпровідниковими та надпровідниковими перетворювачами

Для ілюстрації методу розглянемо аналіз системи, що складається з двох лінійних багатополюсників (рис. 1.22 а).

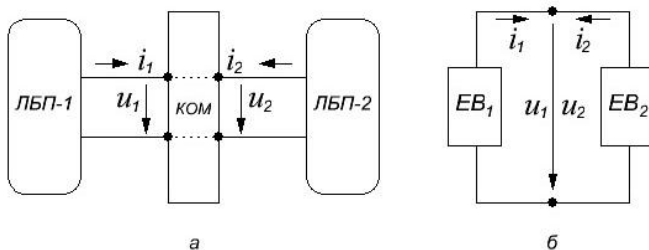


Рис. 1.22. Структура моделі з двома лінійними багатополюсниками

Лінійні багатополюсники описуються системою лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, розв'язання якої можливо записати у вигляді

$$X_i(t) = \Phi_i(t)X_i(0) + \int_0^t \Phi_i(t-\tau)B_iU_i(\tau)d\tau, \quad (1.129)$$

де X – вектор змінних стану; U – вектор джерел; B – матриці коефіцієнтів; Φ – фундаментальний розв'язок; i – індекс, що вказує на приналежність до багатополюсника. Реакцію лінійного багатополюсника на дію джерела можна представити у вигляді

$$i_i = C_i\Phi_i(t)X_i(0) + \int_0^t g_i(t-\tau)U_i(\tau)d\tau + D_iU_i(t), \quad (1.130)$$

де $g_i = C_i\Phi_i B_i$ – перехідна характеристика i -го лінійного багатополюсника.

При аналізі системи в цілому кожен лінійний двополюсник можна замінити однією еквівалентною гілкою, що описується рівнянням (1.130). При цьому від початкового електричного кола переходимо до розгляду еквівалентного електричного кола. На відміну від гілок початкового електричного кола гілки еквівалентного електричного кола описуються інтегральними співвідношеннями. Для кожного стану комутатора після видалення розімкнених ключів і об'єднання вершин, зв'язаних замкнутими ключами, виходить часткове еквівалентне електричне коло, яке для системи, що наведена на рис. 1.22 а, складається тільки з двох еквівалентних гілок, сполучених так, як показано на рис. 1.22 б.

Рівняння з'єднання еквівалентних гілок тут мають простий вигляд

$$i_1 + i_2 = 0, \quad U_1 + U_2 = 0. \quad (1.131)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (1.130) і (1.131), отримаємо

$$\int_0^t G(t-\tau)V(\tau)d\tau + DV(t) = F(t), \quad (1.132)$$

де $G = g_1 + g_2$, $V = U_1 = U_2$, $D = D_1 + D_2$, $F(t) = S(t)X(0)$, $S(t) = [C_1\Phi_1(t) \ C_2\Phi_2(t)]$, $X_0 = (i_1(0), i(0))^T$.

Рівняння (1.132) є інтегральним рівнянням відносно тільки однієї невідомої функції V . Таким чином, отримаємо опис схеми з двома лінійними блоками лінійним інтегральним рівнянням з однією невідомою функцією і виразами для змінних стану (1.129) кожного двополюсника окремо. А використання структурних особливостей аналізованої системи (аналіз її за частинами) приводить до формулювання

задачі у вигляді лінійних інтегральних рівнянь замість диференціальних, які зазвичай використовуються.

Розв'язування інтегрального рівняння (1.132) може вестися будь-яким з відомих методів, зокрема, методом квадратур.

Особливістю рівнянь, що описують систему, що аналізується, є наявність, окрім інтегрального рівняння (1.132), ще і виразів (1.129) для змінних стану лінійного багатополосника. Тому в процедуру розв'язування необхідно ввести другий етап, для якого характерні всі переваги методу аналізу за частинами. Тут, за обчислених значення збуджуючого джерела, з виразу (1.129) визначаються змінні стану кожного лінійного багатополосника окремо, незалежно один від одного. Інтеграл може обчислюватися за тими ж квадратурними формулами, що і на першому етапі. При обчисленнях всередині міжкомутаційної ділянки немає необхідності визначати змінні стану лінійного багатополосника в кожній точці, оскільки струми і напруга ідеальних ключів можуть обчислюватися, виходячи із змінних зовнішніх полюсів лінійного багатополосника. Тому можна визначати їх тільки в останній точці.

Витрати машинного часу визначаються в основному кількістю операцій множення. Якщо простежити за послідовністю обчислень, то загальне число операцій множення, приведене до кроку h , для методу інтегральних рівнянь буде наступним:

$$P_n = \left[l^2 + n_1^2 + n_2^2 + (l+1)(n_1 + n_2) \right] / l,$$

де l – порядок квадратурної формули; n_1, n_2 – порядок системи диференціальних рівнянь першого і другого лінійних двополосників відповідно.

Для методів, що використовують диференціальні рівняння, розглядається послідовність часткових лінійних еквівалентних схем. Для кожної з них складається і розв'язується система диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Блокова структура системи при цьому не враховується. Для наведеної на рис. 1.22 а схеми порядок часткової системи диференціальних рівнянь близький до $N = n_1 + n_2$. Розв'язування диференціальних рівнянь виконується методами чисельного інтегрування. Оскільки всі часткові системи диференціальних рівнянь лінійні, можна застосовувати явну формулу їх розв'язування, як це робиться в [37]. Для обчислення змінних стану в новій точці необхідно матрицю Φ порядку $(N \times N)$ помножити на вектор X_i порядку N . Кількість операцій множення на одному кроці при цьому складе $P_\Phi = (n_1 + n_2)^2$. Якщо порядок обох лінійних багатополосників прийняти рівним $n_1 = n_2 = 5$, то при використанні формул другого порядку метод інтегральних рівнянь виявиться більш ніж в два рази

економніший за метод чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, а при використанні квадратурних формул п'ятого порядку – майже в чотири рази. Подальше збільшення порядку квадратурної формули є недоцільним. Оптимальне значення порядку квадратури для кожного лінійного багатополосника можна оцінити за формулою $t_{opt} = n / m$, де n – порядок системи диференціальних рівнянь лінійного багатополосника; m – кількість його зовнішніх полюсів. Із збільшенням порядку системи диференціальних рівнянь (збільшенням розмірів лінійного багатополосника) ефективність використання інтегральних рівнянь в порівнянні з диференціальними зростатиме.

При розв'язуванні часткової системи лінійних диференціальних рівнянь методами чисельного інтегрування типу Рунге-Кутти кількість операцій множення також значно зростає при збільшенні порядку системи. Однак матриці коефіцієнтів для моделей з великими лінійними частинами часто є розрідженими. Кількість операцій множення при використанні алгоритмів роботи з розрідженими матрицями можна зменшити пропорційно коефіцієнту заповнення. В цьому випадку метод Рунге-Кутти четвертого порядку стає співставним з методом інтегральних рівнянь при коефіцієнті заповнення матриць коефіцієнтів нижче 5%, що для систем з перетворювачами буває не часто.

Таким чином, інтегральний метод при розрахунку на міжкомутаційних інтервалах систем з великими лінійними частинами є більш економічним за методи, засновані на використанні диференціальних рівнянь. Процедури формування рівнянь на новому міжкомутаційному інтервалі для інтегрального методу будуть також більш економічні, оскільки кількість еквівалентних гілок (а операції формування проводяться тільки з ними) значно менше всіх елементів в системі.

1.7. Електричні кола, що містять елементи з розподіленими параметрами

В роботі Д. Р. Карсона [56] вперше розглянутий, а в роботах Г. Є. Пухова [91-93] розвинутий підхід до аналізу перехідних процесів в лініях з розподіленими параметрами, заснований на побудові інтегральних моделей для аналізу перехідних процесів. Відповідно до цього підходу, як лінія з розподіленими параметрами, так і будь-яке електричне коло із зосередженими параметрами розглядається як чотириполосник з двома вхідними (1-1') і двома вихідними затискачами (2-2') (рис. 1.23). Коли вихідні затискачі 2-2' коротко замкнуті, а між вхідними прикладена одинична напруга, між вихідними затискачами протікає струм $g_{11}(t)$, а між вихідними затискачами струм $g_{21}(t)$.

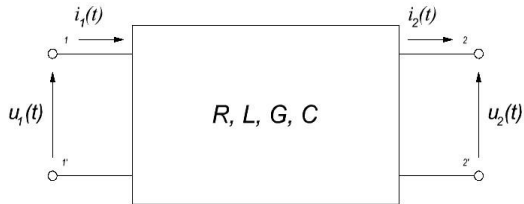


Рис. 1.23. Чотириполюсник з розподіленими параметрами

В такому випадку $g_{11}(t)$ називають власною перехідною провідністю (функцією) чотириполюсника, а $g_{21}(t)$ – зворотною взаємною перехідною провідністю (функцією). Нехай тепер вхідні затискачі коротко замкнуті, а до вихідних затискачів 2-2' прикладена одинична напруга, тоді між останніми протікає струм $g_{22}(t)$, а між вхідними затискачами протікає струм $g_{12}(t)$. Внаслідок відсутності внутрішніх джерел енергії справедлива теорема взаємності [74]

$$g_{21}(t) = g_{12}(t) . \quad (1.133)$$

Три функції $g_{11}(t)$, $g_{12}(t) = g_{21}(t)$, $g_{22}(t)$ повністю визначають властивості чотириполюсника.

Нехай тепер між вхідними затискачами діє напруга $u_1(t)$ і між вихідними затискачами діє напруга $u_2(t)$. Тоді на основі принципу суперпозиції $i_1(t)$ на початку лінії буде визначатися сумою струмів

$$i_1(t) = i_{11}(t) + i_{12}(t) , \quad (1.134)$$

де складова $i_{11}(t)$ – визначається тільки напругою $u_1(t)$, а складова $i_{12}(t)$ – тільки напругою $u_2(t)$. Ці складові струму $i_1(t)$ пов'язані з напругою $u_1(t)$ та $u_2(t)$ залежностями, отриманими на основі закону Ома-Дюамеля у формі, запропонованій Карсоном [56]:

$$i_{11}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t g_{11}(t-\tau) u_1(\tau) d\tau , \quad i_{12}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t g_{12}(t-\tau) u_2(\tau) d\tau . \quad (1.135)$$

Якщо підставити (1.134) у співвідношення (1.133), отримаємо наступні співвідношення для струму $i_1(t)$:

$$i_1(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t g_{11}(t-\tau) u_1(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t g_{12}(t-\tau) u_2(\tau) d\tau . \quad (1.136)$$

В свою чергу, для вихідного струму $i_2(t)$ справедливі співвідношення:

$$i_2(t) = i_{21}(t) + i_{22}(t) ,$$

$$\text{де } i_{21}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t g_{21}(t-\tau) u_1(\tau) d\tau , \quad i_{22}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t g_{22}(t-\tau) u_2(\tau) d\tau .$$

Отже,

$$i_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t g_{21}(t-\tau) u_1(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t g_{22}(t-\tau) u_2(\tau) d\tau. \quad (1.137)$$

Якщо в якості чотириполюсника розглядається довга лінія, то рівняння (1.136) та (1.137) описують перехідний процес в ній. При цьому перехідні провідності можуть бути визначені шляхом розв'язування телеграфних рівнянь при відповідних умовах.

Використання описаного підходу має ряд суттєвих переваг. Інтегральна математична модель (рівняння (1.136) та (1.137)) може використовуватися як для електричних кіл з розподіленими параметрами, так і для кіл із зосередженими параметрами. Використання ідентичних математичних моделей до електричних кіл з розподіленими і зосередженими параметрами дає змогу побудувати єдині обчислювальні схеми для аналізу перехідних процесів в колах, що включають ті чи інші елементи, не вдаючись в їх фізичну сутність (наприклад, лінії, що включені між вузлами із зосередженими елементами).

Труднощі такого підходу пов'язані з питаннями розв'язування рівнянь (1.134) і (1.135), які являються інтегральними рівняннями Вольтерри [25, 56], аналітичний розв'язок яких можливий лише в деяких найбільш простих випадках. При використанні таких моделей для аналізу перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами отримання аналітичного розв'язку навіть для найпростіших задач є неможливим внаслідок розривності ядер інтегральних рівнянь Вольтерри, представлених перехідними провідностями ліній. Побудова чисельних розв'язків рівнянь вигляду (1.134) на необмеженому інтервалі часу також пов'язана з труднощами обчислювального характеру викликаними розривністю ядер і накопиченням похибки обчислень [25].

Наведені в роботах [6, 7] обчислювальні схеми для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри, засновані на теорії дискретно-неперервних диференціальних перетворень [91, 93] дозволяють подолати перераховані труднощі і отримати розв'язки рівнянь (1.135), (1.136) стосовно електричних кіл з розподіленими параметрами.

Наведений метод, будучи чисельно-аналітичним, дозволяє отримати розв'язок як в чисельному вигляді, так і представити його на певних інтервалах аналітично за допомогою локальних рядів Тейлора, що розширює можливості застосування методу і аналізу результатів розрахунку.

Істотні переваги математичних моделей, заснованих на інтегральному законі Ома-Дюамеля у формі, запропонованій Карсоном, відкриваються при використанні запропонованого підходу при аналізі перехідних процесів в електричних колах, що містять різнорідні елементи внаслідок використання єдиного підходу та ідентичних обчислювальних схем.

2. ЯКІСНІ ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Аналіз стійкості електричних кіл за їх інтегральними динамічними моделями

Однією з основних задач аналізу електроенергетичних систем є оцінка стійкості їхніх режимів під час найрізноманітніших збурень. Ці збурення бувають неглибокими, у вигляді збурень нормального режиму за рахунок малих нерегулярних відхилень параметрів від їхніх стаціонарних значень (наприклад, відхилень ЕРС генераторів, потужностей двигунів тощо). Здатність системи при неглибоких збуреннях режиму повертатися до вихідного (чи близького до нього) стану, зазвичай, називають *статичною стійкістю* системи.

Збурення режиму електроенергетичних систем бувають раптовими та глибокими (наприклад, у вигляді коротких замикань, розривів електропередач тощо). Вони, зазвичай, короткотривалі (у випадку коротких замикань пошкодження ліквіднуються швидкодіючим релейним захистом). Під час таких збурень можуть настати значні відхилення координат режиму систем від їхніх вихідних значень. Залежно від розвитку перехідного процесу, що визначається вихідним станом, параметрами системи та тривалістю дії завад, система зберігає чи не зберігає стійкість режиму. Здатність системи після раптових короткотривалих глибоких збурень режиму повертатися до стану рівноваги називають *динамічною стійкістю* системи.

Очевидно, якщо система стійка динамічно, то вона стійка і статично. Виняток становлять лише випадки, коли для поліпшення статичної стійкості вживають заходів, неефективних щодо стійкості динамічної. Формально відмінність обох понять стійкості тільки кількісна.

З математичного погляду дослідження стійкості режиму електроенергетичної системи традиційно зводиться до оцінки стійкості розв'язків диференціальних рівнянь її стану при відповідних збуреннях, що в найзагальнішому випадку можна здійснити шляхом інтегрування таких рівнянь за умови забезпечення обчислювальної стійкості інтегрування.

Стійкість стану рівноваги енергетичних систем у загальному випадку, зазвичай, оцінюють на основі методів Ляпунова [87], суть яких полягає у дослідженні стійкості розв'язків диференціальних рівнянь стану цих систем.

Оцінку стійкості стану рівноваги системи (оцінку статичної стійкості системи) в загальному випадку можна здійснити шляхом розв'язування характеристичного рівняння лінеаризованої системи диферен-

ціальних рівнянь. Числові значення коренів характеристичного рівняння показують ступінь стійкості стану системи (величини дійсних складових коренів) і характер перехідних процесів при збуреннях їх нормального стану (апериодичний чи коливальний). Цей метод оцінки стійкості слід вважати особливо ефективним у зв'язку з швидким удосконаленням комп'ютерних засобів моделювання, на базі яких реалізують алгоритм чисельних методів розв'язування рівнянь.

Складність безпосереднього обчислення коренів характеристичних рівнянь зумовила створення спеціальних методів оцінки стійкості стану рівноваги системи без прямого розв'язування характеристичного рівняння. У випадку використання таких непрямих способів оцінки характеру коренів критерії стійкості ґрунтуються на посередніх ознаках, необхідних і достатніх чи тільки достатніх умов стійкості, які можна встановити без розв'язування характеристичного рівняння на основі наведених вище міркувань (критерії стійкості). Метод визначення основного критерію стійкості є по суті способами обчислення коренів рівнянь (алгебраїчних чи трансцендентних), з усіма можливими труднощами розв'язування цих рівнянь.

На сучасному етапі розвитку електроенергетичних систем з'явилися нові задачі, які викликані появою імпульсних перетворювачів великої потужності та широким використанням в електроенергетичних системах комп'ютерних засобів. Специфіка нових задач полягає в тому, що приходиться мати справу не лише з неперервними сигналами, але й з імпульсними, які описуються функціями, що мають розриви першого роду. При цьому існуючі традиційні методи дослідження сучасних електроенергетичних систем, зокрема систем з імпульсними елементами, у багатьох випадках є погано пристосованими, а в окремих випадках просто непридатними для практичного використання. Зокрема, причиною вказаних труднощів є те, що переважна більшість обчислювальних методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь не передбачає можливості використання сигналів без умови їх неперервної диференційованості. Отже, подальший розвиток методів дослідження електроенергетичних систем можливий при залученні інших підходів до побудови їх математичних моделей, а саме використання *апарату інтегральних рівнянь*. Оскільки на даний час для дослідження стійкості систем розроблено теоретичні основи лише для математичних моделей, поданих у диференціальній формі, природнім чином виникає задача дослідження стійкості електроенергетичної системи за її інтегральною моделлю.

Будемо розглядати лінійне неперервне електричне коло, процеси в якому описуються багатовимірним лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри II роду

$$\dot{k}(t)\dot{y}(t) + \int_{t_0}^t \dot{K}(t, \tau)\dot{y}(\tau)d\tau = \dot{l}(t)\dot{x}(t) + \int_{t_0}^t \dot{L}(t, \tau)\dot{x}(\tau)d\tau + \dot{f}(t, t_0). \quad (2.1)$$

У рівнянні (2.1) і надалі використовуються наступні позначення:

$\dot{y}(t) = (y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t))^T$ – n -вимірний вектор вихідних сигналів (струмів, напруг) системи;

$\dot{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))^T$ – m -вимірний вектор вхідних впливів (струмів, напруг) на систему;

$$\dot{K}(t, \tau) = K_{i, j}(t, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\dot{L}(t, \tau) = L_{i, j}(t, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m};$$

$\dot{K}(t, \tau)$, $\dot{L}(t, \tau)$ – ядра інтегральних операторів Вольтерри, що відображають динамічні характеристики системи;

$$\dot{k}(t, \tau) = k_{i, j}(t, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\dot{l}(t, \tau) = l_{i, j}(t, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m};$$

$\dot{k}(t, \tau)$, $\dot{l}(t, \tau)$ – змінні матриці, причому, якщо не зазначено додатково, матриця $\dot{k}(t, \tau)$ вважається рівною одиничній матриці I ; t_0 – момент початку функціонування системи (подачі керуючого впливу); t – поточний момент часу; $f(t, t_0) = (f^1(t, t_0), f^2(t, t_0), \dots, f^1(t, t_0))^T$ – вільний член, що містить всю інформацію, необхідну для однозначного знаходження $y(t)$ для всіх $t \geq t_0$.

Елементи всіх виписаних матриць і векторів вважаємо достатньо гладкими функціями часу для того, щоб всі перетворення були правомірні (зокрема, щоб рівняння (2.1) мало єдиний розв’язок $y(t)$).

Рівняння (2.1) описує лінійну систему і має властивість лінійної залежності розв’язку від правої частини рівняння і, отже, від вхідного впливу [15]. Вираз (2.1) описує систему, що фізично реалізується, так як значення вихідного сигналу в момент t обумовлюється лише значеннями вхідного впливу в цей і в попередній моменти і не залежить від наступних змін сигналу $x(t)$.

Стійкість на нескінченному проміжку часу. Розглянемо інтегральну модель (2.1), приймаючи $k(t) \equiv I$

$$y(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)y(\tau)d\tau = g(t), \quad (2.2)$$

де I – одинична матриця,

$$g(t) = l(t)x(t) + \int_{t_0}^t L(t, \tau)x(\tau)d\tau + f(t, t_0).$$

За допомогою резольвенти розв'язок інтегрального рівняння (2.2) записується у такий спосіб:

$$y(t) = g(t) + \int_{t_0}^t R(t, \tau)g(\tau)d\tau.$$

Підставляючи в цю формулу вираз для функції $g(t)$, після еквівалентних перетворень знаходимо

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad (2.3)$$

де

$$y_1(t) = \int_{t_0}^t w(t, \tau)x(\tau)d\tau; \quad (2.4)$$

$$y_2(t) = \int_{t_0}^t w_f(t, \tau)f(\tau, t_0)d\tau; \quad (2.5)$$

$$w(t, \tau) = l(t)\delta(t - \tau) + L(t, \tau) + R(t, \tau)l(\tau) + \int_{t_0}^t R(t, u)L(t, \tau)du; \quad (2.6)$$

$$w_f(t, \tau) = \delta(t - \tau) + R(t, \tau); \quad (2.7)$$

$\delta(t)$ – дельта-функція Дірака.

Перейдемо до основних визначень, використовуючи для математичного опису системи інтегральну модель (2.1) при $k(t) \equiv I$. Розв'язок рівняння (2.1) відповідно до формули (2.3) складається із двох складових

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

де $y_1(t)$ – вимушені коливання на виході системи, які викликані вхідним впливом і визначаються за формулою (2.4); $y_2(t)$ – вільні коливання, які однозначно знаходяться із виразу (2.5) і залежать лише від початкового запасу енергії та властивостей системи.

Поширюючи відомі формулювання [42] на розглянутий випадок, назвемо систему (2.1):

- стійкою (асимптотично), якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0 \quad (2.8)$$

для довільної припустимої функції $f(t, t_0)$, яка визначається початковим запасом енергії в системі;

- нерезонансною (стійкою в смислі: обмежений вхід – обмежений вихід), якщо з обмеженості вхідного впливу $\|x\| < \infty$ випливає, що відповідна реакція системи також обмежена $\|y\| < \infty$.

Перейдемо до аналізу умов стійкості. З формули (2.5) для функції $y_2(t)$ випливає, що властивість стійкості, в основному, залежить від виду резольвентного ядра $R(t, \tau)$ і, в деякій мірі, від структури вільного члена $f(t, t_0)$. Остання особливість характерна для лінійних систем з невідродженими ядрами, рівняння яких не можуть бути зведені до диференціальних рівнянь. Отже, стійкість системи, головним чином, визначається властивостями ядра $K(t, \tau)$, що значною мірою аналогічно традиційному випадку, коли стійкість взаємно однозначно пов'язана з розташуванням полюсів передатної функції. Крім того, можна довести наступне твердження: якщо знайдеться такий момент часу $t_1 < \infty$, що для всіх $\tau \in [t_1, t]$ функція $K(t, \tau)$ задовольняє умовам

$$\left. \begin{aligned} K(t, \tau) \leq 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} K(t, \tau) < 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

а функція $f(t, t_1)$ може бути вибрана від'ємною на відрізку $[t_1, \infty)$ і додатною на деякій множині ненульової міри, то система (2.1) нестійка.

Насправді, припустимо для визначеності, що $f(t_1, t_1) > 0$, $f(t, t_1) \geq 0$ і неперервна, а ядро $K(t, \tau)$ сумовне по τ на відрізку $[t_1, t]$.

Тоді, приймаючи у рівнянні (2.1) відповідно принципу суперпозиції $x(t) \equiv 0$, знаходимо

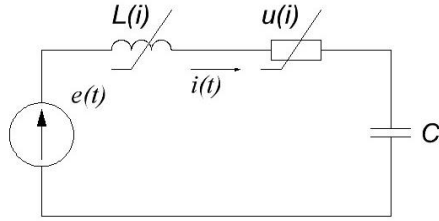
$$y_2(t_1) = f(t_1, t_1) > 0, \quad y_2(t) = f(t, t_1) - \int_{t_1}^t K(t, \tau) y_2(\tau) d\tau \geq 0$$

для всіх $t \geq t_1$, оскільки $-K(t, \tau) \geq 0$. Крім того, з виразів (2.9) випливає, що $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) > 0$, що суперечить вимозі (2.8). Отже, умови (2.9) є

достатніми умовами нестійкості і у загальному випадку не можуть бути ослаблені, як показують наведені нижче приклади. Відзначимо також, що для стійкості системи необхідно, щоб порушувалась, принаймні, одна з нерівностей (2.9).

Таким чином, розглянуті методи дослідження стійкості електроенергетичних систем за їх інтегральними моделями дозволяють значно розширити клас досліджуваних електричних та електронних кіл, включаючи системи автоматичного керування з електронними імпульсними елементами.

Приклад 2.1. Для електричної схеми, що наведена на рис. 2.1, розглянемо питання стійкості стану рівноваги нелінійного R , L , C кола при нелінійності котушки індуктивності та резистора.


 Рис. 2.1. Нелінійне R, L, C коло

Рівняння стану цього кола

$$\frac{d\psi(i)}{di} \frac{di}{dt} + u_r(i) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = e(t). \quad (2.10)$$

Розглянемо спочатку традиційний підхід до вирішення цієї задачі на основі використання диференціальної моделі.

Лінеаризоване, відповідне [87] однорідне рівняння матиме вигляд

$$\left(\frac{d\psi(i)}{di} \right)_{i_0} \frac{d\Delta i}{dt} + \left(\frac{du(i)}{di} \right)_{i_0} \Delta i + \frac{1}{C} \int_0^t \Delta i(t) dt = 0. \quad (2.11)$$

Диференціальне однорідне рівняння запишемо у вигляді

$$\left(\frac{d\psi(i)}{di} \right)_{i_0} \frac{d^2 \Delta i}{dt^2} + \left(\frac{du(i)}{di} \right)_{i_0} \frac{d\Delta i}{dt} + \frac{1}{C} \Delta i = 0. \quad (2.12)$$

Корені характеристичного рівняння, відповідного рівняння (2.12):

$$p_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\left(\frac{r}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad p_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\left(\frac{r}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad (2.13)$$

де

$$r = \left(\frac{du(i)}{di} \right)_{i_0}, \quad L = \left(\frac{d\psi(i)}{di} \right)_{i_0}. \quad (2.14)$$

Для $\psi(i)$ у вигляді основної кривої намагнічування динамічна індуктивність L завжди додатна. За цієї умови корені (2.13) матимуть додатну дійсну частину тільки при $r < 0$. Вони можуть бути як дійсними так і комплексно-спряженими.

Отже, стан рівноваги (2.11) може бути нестійким тільки на спадаючих ділянках вольт-амперної характеристики $u(i)$. Причому, як впливає з (2.12), під час коливального процесу, незалежно від значення r , на таких ділянках рівновага завжди нестійка. Порушення рівноваги може носити аперіодичний характер (корені дійсні) або коливальний характер (корені комплексно-спряжені).

З'ясуємо питання стійкості стану рівноваги наведеного електричного кола на основі інтегральної динамічної моделі. Спочатку шляхом інтегрування вихідного рівняння (2.10) отримаємо еквівалентне інтегральне рівняння. Еквівалентне інтегральне рівняння матиме вигляд

$$\Delta i(t) + \int_0^t \left[\frac{r}{L} + \frac{1}{LC}(t-s) \right] \Delta i(s) ds = f(t), \quad (2.15)$$

де $f(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e(s) ds$, r і L – визначаються за виразами (2.14);

$K(t-s) = \left[\frac{r}{L} + \frac{1}{LC}(t-s) \right]$ – ядро інтегрального рівняння.

Ядро $K(t-s) = \left[\frac{r}{L} + \frac{1}{LC}(t-s) \right]$ буде додатне для всіх $t \geq s$, а та-

кож $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t, s) \geq 0$ для будь-якого фіксованого $s \leq t$, тільки при $r > 0$.

Отже, порушуються обидві умови нестійкості системи (2.9), а це означає, що стан рівноваги кола може бути нестійким тільки на спадаючих ділянках вольт-амперної характеристики $u(i)$.

2.2. Оцінка точності інтегрального методу розрахунку електричних кіл

В задачах аналізу стійкості динамічних систем та точності їх моделювання важлива роль належить оціночним нерівностям [110]. Так, наприклад, нерівності Гронуолла-Беллмана [8] використовують для аналізу стійкості та точності розв'язків диференціальних рівнянь, оскільки вони, зазвичай, зводяться до визначення оцінок розв'язків інтегральних нерівностей (лінійних та нелінійних) виду

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(t_1) u(t_1) dt_1, \quad (2.16)$$

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(t_1) \Phi(u(t_1)) dt_1, \quad (2.17)$$

де $c > 0$; $f(t) \geq 0$ та $u(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$; $\Phi(u)$ – додатна неспадна функція. До визначення оцінок розв'язків нерівностей типу (2.16) та (2.17) можливо також зводити і задачі дослідження стійкості та точності розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерри [24].

Рівняння для похибок і оцінки. Задача аналізу похибок наближених розв'язків інтегральних рівнянь розглядалася в цілому ряді робіт, наприклад у роботі [66], проте не втратила своєї важливості у зв'язку зі все більш широким застосуванням обчислювальних алгоритмів з великою різноманітністю джерел і характеристик первинних похибок, що особливо актуальним є при дослідженні електричних кіл.

Необхідним етапом в аналізі похибок розв'язків, зазвичай, є отримання рівнянь, яким вони підпорядковуються. Далі розглянемо питання знаходження рівнянь для похибок розв'язків, а також інтегральних нерівностей, що з них випливають для деяких типів рівнянь Вольтерри II роду, у тому числі *лінійного* рівняння вигляду

$$u(x) = f(x) - \int_0^x K(x, s)u(s)ds. \quad (2.18)$$

При цьому будемо орієнтуватися на використання отриманих в [24] інтегральних оцінок функцій для оцінки похибок розв'язків даних рівнянь.

Якщо $K(x, s) = a(x)b(s)$, тобто має місце найпростіший випадок виродженого ядра, вихідне рівняння набуває вигляду

$$u(x) = f(x) - a(x) \int_0^x b(s)u(s)ds. \quad (2.19)$$

Тоді реально рівняння, що розв'язується з комплексним врахуванням первинних похибок набуває вигляду

$$u(x) + \Delta u(x) = f(x) + \Delta f(x) - [\alpha(x) + \Delta \alpha(x)] \int_0^x [\beta(s) + \Delta \beta(s)] \times [u(s) + \Delta u(s)] ds, \quad (2.20)$$

де $\Delta f(x), \Delta \alpha(x), \Delta \beta(x)$ – похибки обчислення (моделювання) відповідних функцій, які можуть бути як *спадковими*, так і *інструментальними* і *методичними*. Віднімаючи (2.18) від (2.19), одержуємо інтегральне рівняння для похибки $\Delta u(x)$ розв'язку (2.19)

$$\Delta u(x) = h(x) - \alpha^*(x) \int_0^x \beta^*(x) \Delta u(s) ds, \quad (2.21)$$

де

$$\begin{aligned} h(x) &= \Delta f(x) - \alpha(x) \int_0^x \Delta \beta(s) u(s) ds + \Delta \alpha(x) \beta^*(s) u(s) ds, \\ \beta^*(x) &= \beta(x) + \Delta \beta(x), \\ \alpha^*(x) &= \alpha(x) + \Delta \alpha(x). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Від рівняння (2.21), що дає якісну картину процесу утворення похибки, перейдемо до більш близького для практичного використання рівняння відносно наближеної похибки $\Delta u(x)$

$$\Delta u(x) = h(x) - \alpha^*(x) \int_0^x \beta^*(s) \Delta u(s) ds, \quad (2.23)$$

яке відрізняється вільним членом

$$h(x) = \Delta f(x) - \alpha^*(x) \int_0^x \Delta \beta(s) u^*(s) ds + \Delta \alpha(x) \int_0^x \beta^*(s) u^*(s) ds,$$

де $u^*(x)$ – реально отриманий наближений розв’язок.

Якщо відомі похибки $\Delta f(x), \Delta \alpha(x), \Delta \beta(x)$, то для визначення похибки моделювання достатньо розв’язати рівняння (2.23). В практичних цілях є сенс мати можливість оцінювати похибку $\Delta u(x)$ на основі відомостей про максимальні значення похибок $\Delta f(x), \Delta \alpha(x), \Delta \beta(x)$, у зв’язку з чим отримаємо необхідні для цього нерівності.

Оцінюючи (2.21) за модулем, отримаємо інтегральну нерівність

$$|\Delta u(x)| \leq |u(x)| + |\alpha^*(x)| \int_0^x |\beta^*(s)| |\Delta u(s)| ds. \quad (2.24)$$

Будемо вважати, що функції $f^*(x), \alpha^*(x), \beta^*(x)$ та $f(x), \alpha(x), \beta(x)$ неперервні. Це, в свою чергу, визначає неперервність $u(x)$ та $u^*(x)$, а значить, і $h(x)$. Тоді для оцінки $u(x)$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} |\Delta u(x)| &\leq |h(x)| + \exp\left[\int_0^x |\beta^*(s)| |\alpha^*(s)| ds\right] \times \\ &\times |\alpha^*(x)| \int_0^x |\beta^*(s)| |h(s)| \exp\left[-\int_0^s |\beta^*(\tau)| |\alpha^*(\tau)| d\tau\right] u^*(\tau) d\tau ds. \end{aligned} \quad (2.25)$$

При обчисленнях оцінок (2.25) необхідно замість $|\beta^*(x)|, |\alpha^*(x)|, |f^*(x)|$ підставити:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(x) &= |\beta(x)| + \max |\beta(x)| \geq |\beta^*(x)|, \\ \bar{\alpha}(x) &= |\alpha(x)| + \max |\alpha(x)| \geq |\alpha^*(x)|, \quad \bar{f}(x) = |f(x)| + \max |f(x)| \geq |f^*(x)|. \end{aligned}$$

При визначенні $|h(x)|$ ідеальну функцію $u(x)$ можна замінити наближеним розв’язком $u^*(x)$ чи її оцінкою:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |f(x)| + |\alpha(x)| \exp\left\{\int_0^x |\beta(s)| |\alpha(s)| ds\right\} dx \int_0^x |\alpha(s)| |\beta(s)| \times \\ &\times \exp\left\{-\int_0^s |\beta(\tau)| |\alpha(\tau)| d\tau\right\} ds = \bar{u}(x). \end{aligned}$$

Кількість обчислень при визначенні оцінки (2.25) можна зменшити, якщо замість нерівності (3.19) [13] використовувати більш зручний вираз

$$|\Delta u(x)| \leq h_m + \alpha_{m_m} \int_0^x |\beta^*(s)| |\Delta u(s)| ds,$$

де

$$h_m \geq \max |h(x)|; \alpha_m \geq \max |\beta^*(s)|.$$

Тоді оцінка (2.25) набуде вигляду

$$|\Delta u(x)| \leq h_m \exp\{\alpha_m \int_0^x |\beta^*(s)| ds\}.$$

Отримаємо рівняння і оцінку похибки моделювання рівняння (2.18) при

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(s)$$

з врахуванням первинних похибок задання функцій $f(x), \alpha_i(x), \beta_i(x)$.

В цьому випадку реально будемо розв'язувати рівняння

$$u(x) + \Delta u(x) = f(x) + \Delta f(x) + \sum_{i=1}^n [\alpha_i(x) + \Delta \alpha(x)] \int_0^x [\beta_i(s) + \Delta \beta(s)] [u(s) + \Delta u(s)] ds. \quad (2.26)$$

Віднімаючи (2.18) від (2.26), отримаємо

$$\Delta u(x) = \Delta f(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \int_0^x \Delta \beta_i(s) u(s) ds + \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i(x) \int_0^x \beta_i(s) u(s) ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \int_0^x \beta_i(s) \Delta u(s) ds. \quad (2.27)$$

Переходячи від даного рівняння до інтегральної нерівності

$$|\Delta u(x)| \leq |h(x)| + \sum_{i=1}^n |\alpha_i(x)| \int_0^x |\beta_i(s)| |\Delta u(s)| ds, \quad (2.28)$$

отримаємо можливість оцінювати $|\Delta u(x)|$.

Нелінійні рівняння. Оцінимо похибку розв'язку нелінійного рівняння Вольтери II роду з виродженим ядром

$$u(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \int_0^x \beta_i(s) F[u(s)] ds. \quad (2.29)$$

Приймемо спочатку $n = 1$, $(\alpha_1(x) = \alpha(x); \beta_1(x) = \beta(x))$. Отримаємо рівняння для реального розв'язку

$$u^*(x) = f^*(x) - \alpha^*(x) \int_0^x \beta^*(s) F[u(s)] ds, \quad (2.30)$$

де $u^*(x) = u(x) + \Delta u(x)$, $f^*(x) = f(x) + \Delta f(x)$,

$$\alpha^*(x) = \alpha(x) + \Delta \alpha(x), \quad \beta^*(x) = \beta(x) + \Delta \beta(x),$$

а також будемо вважати, що ці функції неперервні, а $F[u(x)]$ – диференційована по u .

Представимо $F^*[u(x)]$ у вигляді виразу

$$F^*[u(x)] = F[u(x) + \Delta u(x)] \approx F[u(x)] + \frac{\partial F[u(x)]}{\partial u(x)} \Delta u(x), \quad (2.31)$$

яке підставимо у (2.30):

$$\begin{aligned} u(x) + \Delta u(x) &= f^*(x) - \\ &- \alpha^*(x) \int_0^x \beta^*(s) \left\{ F[u(x)] + \frac{\partial F[u(x)]}{\partial u(x)} \Delta u(s) \right\} ds. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Після віднімання (2.29) від (2.32) отримаємо рівняння для похибки:

$$\Delta u(x) = \eta(x) - \alpha^*(x) \int_0^x \beta^*(s) \frac{\partial F[u(x)]}{\partial u(x)} \Delta u(s) ds, \quad (2.33)$$

де

$$\eta(x) = \Delta f(x) - \alpha(x) \int_0^x \Delta \beta(s) F[u(s)] ds - \Delta \alpha(x) \int_0^x \beta^*(s) F[u(s)] ds. \quad (2.34)$$

Таким чином, отримано лінійне інтегральне рівняння для похибки $\Delta u(x)$. Однак, щоб знайти і вільний член в правій частині цього рівняння, необхідне знання точного розв'язку $u(x)$ рівняння (2.29). Тому доцільно використовувати оцінки як при обчисленні $u(x)$, так і при обчисленні похибки $\Delta u(x)$.

Аналогічно можна отримати рівняння для похибки при розв'язуванні (2.29) для випадку $n > 1$ [24].

Розглянемо випадок різницевого ядра, характерного для випадку аналізу динаміки електричних кіл виду, де $K(x, s) = K(x - s)$. Вихідне лінійне рівняння має вигляд

$$u(x) + \int_0^x K(x - s) u(s) ds = f(x). \quad (2.35)$$

З врахуванням похибок (2.35) приймає вигляд

$$u(x) + \Delta u(x) = f(x) + \Delta f(x) - \int_0^x [K(x-s) + \Delta K(x-s)][u(s) + \Delta u(s)] ds. \quad (2.36)$$

Отримаємо:

$$\Delta u(x) = h(x) = \int_0^x K(x-s)\Delta u(s) ds, \quad (2.38)$$

де

$$h(x) = \Delta u(x) - \int_0^x \Delta K(x-s)u(s) ds. \quad (2.39)$$

Припустимо, що різницеве ядро обмежене

$$|K(x)| \leq G(x), \quad x \geq 0, \quad (2.40)$$

та може бути зведене до виродженого, що дозволяє оперувати оцінкою

$$|K(x-s)| \leq G(x-s) \leq G_1(x)G_2(s), \quad (2.41)$$

де $G_1(x)$, $G_2(s)$ – додатні функції.

Нерівність $|K(x-s)| \leq G(x-s) \leq G_1(x-s)$ впливає з (2.39).

Тоді рівняння (2.37) можна привести до виду

$$|\Delta u(x)| \leq |h(x)| + G_1(x) \int_0^x G_2(s) |\Delta u(s)| ds. \quad (2.41)$$

Звідси, припускаючи що $|h(x)|$ диференційована (в протилежному випадку її можливо замінити оцінкою зверху, що є диференційованою функцією) відповідно до теореми (3.1) [24] можемо записати:

$$|\Delta u(x)| \leq \exp \left[\int_0^x G_1(s)G_2(s) ds \right] G_1(x) \frac{|h(0)|}{G_1(0)} + \int_0^x \left[\frac{h(s)}{G_1(s)} \right] \exp \left[- \int_0^s G_1(\tau)G_2(\tau) d\tau \right]. \quad (2.42)$$

2.3. Дослідження впливу завад на точність реалізації інтегральних моделей

Для ряду прикладних задач моделювання динамічних систем, у тому числі і для розглянутих в даній роботі, є можливість подання математичних моделей в еквівалентних формах (диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних), тобто таких, що допускають отримання тієї або іншої математичної моделі методом еквівалентних перетворень. Відповідно аналітичні розв'язки, якщо їх можливо отримати, є однаковими для різних форм математичних моделей. Проте похибки чисельних розв'язків, навіть заснованих на аналогічних методах, очевидно різним чином залежать від рівня точності задання початкових даних і рівня та виду завад для різних форм математичних моделей. Тому для оцінки умов застосовності і визначення області *переважного використання* математичних моделей динамічних систем, що допускають їх подання в різних формах, необхідно дослідити похибки чисельних розв'язків у співставних умовах, відповідних умовам реального функціонування. Методика такого дослідження передбачає наступні кроки:

1. Отримання математичної моделі електротехнічного об'єкта, виходячи з фізичних законів функціонування або на основі експериментальних даних.
2. Подання отриманої математичної моделі в різних формах (диференціальній, інтегральній та інтегро-диференціальній) методами еквівалентних перетворень.
3. Задання параметрів умов реального функціонування електротехнічного об'єкта в однаковому вигляді для кожної з моделей.
4. Чисельна реалізація отриманих математичних моделей в однакових умовах функціонування і на основі одних і тих же чисельних методів.
5. Оцінка залежності точності розв'язків різних моделей при їх чисельній реалізації від параметрів умов функціонування.

По запропонованій методиці виконано дослідження і порівняльний аналіз завадостійкості математичних моделей електротехнічних систем при їх чисельній реалізації у випадку дії завади різної частоти на прикладі типової лінійної моделі електротехнічної системи зі зворотнім зв'язком.

Нехай електричне коло описується інтегро-диференціальним рівнянням

$$u_2''(t) + 2u_2'(t) + 175u_2(t) + 72 \int_0^t e^{-10(t-s)} u_2'(s) ds = u_1(t), \quad (2.43)$$

де $u_1(t)$, $u_2(t)$ – відповідно вхідна, та вихідна напруга схеми.

Еквівалентне диференціальне рівняння має вигляд
 $0,05u_2'''(t) + 0,6u_2''(t) + 13,35u_2'(t) + 87,5u_2(t) = 87,5g(t) + 8,75g'(t).$ (2.44)

Застосовуючи до останнього метод послідовного інтегрування отримуємо еквівалентне інтегральне рівняння

$$u_2(t) + \int_0^t K(t-s)u_2(s) ds = f(t), \quad (2.45)$$

де

$$K(t-s) = \frac{1}{0,05} \sum_{i=1}^3 \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} a_i, \quad a = (0,6; 13,35; 87,5),$$

$$f(t) = \frac{1}{0,05} \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} (87,5g(s) + 8,75g'(s)) ds.$$

Тут $u_1(t) = 175g(t)$ – вхідна напруга ($g(t)$ – одинична ступінчата функція), на яку накладена адитивна завада у вигляді гармонічного сигналу $u_{\text{sin}}(t) = 0,05\sin(\omega t)$. При чисельних розрахунках ступінчата функція апроксимується функцією $e^{-0,02/t}$.

Розв’язування рівнянь здійснювалося за допомогою методів одного порядку точності.

На рис. 2.2 наведена отримана залежність похибки розв’язку від частоти завади. Середня похибка на всій смузі частот для інтегродиференціальної моделі складає 0,0051, для диференціальної моделі – 0,0064 і для інтегральної – 0,0057.

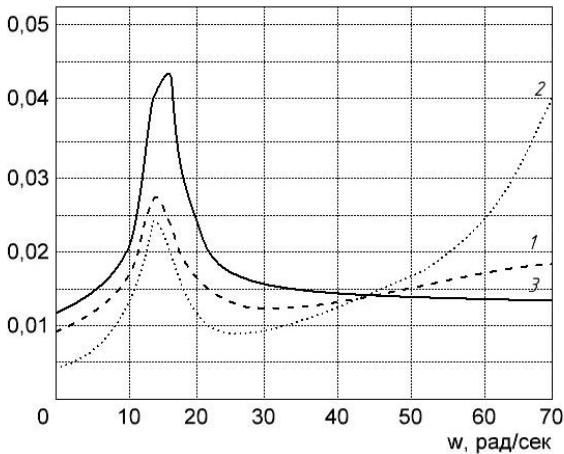


Рис. 2.2. Залежність похибки розв’язку від частоти завади, для інтегродиференціальної (1), диференціальної (2) та інтегральної (3) моделей

Якщо змінити частотні характеристики досліджуваної системи шляхом зменшення її коефіцієнта підсилення, то отримаємо залежність похибки розв'язку від частоти завади, що наведена на рис. 2.3.

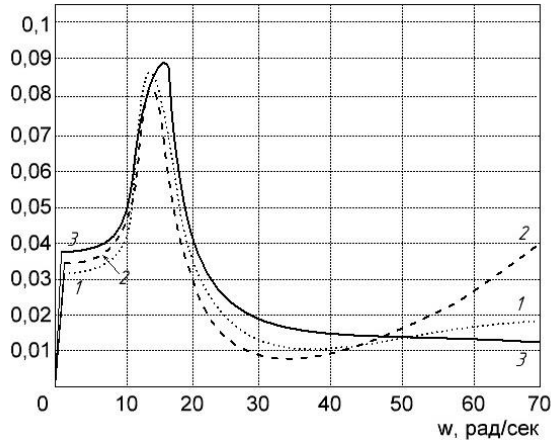


Рис. 2.3. Залежність похибки розв'язку від частоти завади, для інтегро-диференціальної (1), диференціальної (2) і інтегральної (3) моделей

Середня похибка на всій смузі частот для інтегро-диференціальної моделі складає 0,0125, для диференціальної моделі – 0,0121 і для інтегральної – 0,0132.

Подібний характер залежності, що досліджувалась, має і при зміні інших параметрів системи. Таким чином, проведені дослідження показали, що вибір тієї або іншої математичної моделі в значній мірі залежить від частоти завади, що діє на систему. Очевидно, що в області низьких частот, для даної системи, слід віддати перевагу диференціальній моделі. Проте, із зростанням частоти завади точність розв'язку диференціальної моделі зменшується та більш доцільною є інтегральна та інтегро-диференціальна моделі. При цьому, якщо в області високих частот гладкість розв'язку інтегральної моделі виявляється значно вищою, то в області середніх частот, очевидно, перевага інтегро-диференціальної моделі.

3. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

3.1. Характеристики та особливості методів та алгоритмів розв'язування інтегральних рівнянь

При чисельному розв'язуванні інтегральних рівнянь електричних кіл будь-якими методами неминуче доводиться замінювати інтеграли, що входять до них, скінченними сумами. При цьому отримані скінченні співвідношення можуть бути допоміжними або несять самостійний характер як остаточні розрахункові вирази [100].

Метод квадратур (механічних квадратур, скінченних сум, квадратурні формули) полягає у складанні і безпосередньому використанні розрахункових виразів (скінченних рівнянь, рекурентних формул), отриманих шляхом заміни інтегральних операторів скінченними сумами на основі застосування різних квадратурних формул [24, 25].

Особливості застосування квадратур. Інтеграл із змінною верхньою межею, що міститься в даних рівняннях вносить певні особливості в застосування квадратурних формул. При чисельних розрахунках змінна межа інтегрування фіксується і тому в цьому випадку також застосовуються формули для наближеного обчислення визначеного інтеграла, вони мають в загальному випадку вигляд

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x_i) + R[\varphi], \quad (3.1)$$

де x_i – фіксовані абсциси проміжку $[a, b]$ чи вузли (вузли інтерполяції), A_i – числові коефіцієнти, $R[\varphi]$ – залишковий член (похибка)

формули; звичайно $A_i \geq 0$ і $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$. Існує велика кількість квадратурних формул вигляду (3.1), побудова яких заснована на заміні підінтегрального виразу інтерполяційними многочленами [67, 68]. Якщо кінці a і b проміжку інтегрування є вузлами інтерполяції, а сам проміжок розбивається на $n - 1$ рівних частин, то відповідні квадратурні формули називаються формулами замкнутого типу. Якщо ж проміжок інтегрування розбивається на $n + 1$ рівних частин і вузли інтерполяції не містять точок a і b , то отримані при цьому квадратурні формули є формулами відкритого типу (незамкнутими).

При рівновіддалених вузлах $x_i = a + (i - 1)h$, $i = 1, 2, \dots, n$ і поділі проміжку інтегрування на $n - 1$ рівних частин крок інтегрування рів-

ний $h = \frac{b-a}{n-1}$. В табл. 3.1 наведені значення вузлів і коефіцієнтів для деяких найпоширеніших квадратурних формул вигляду (3.1). При розв'язуванні інтегральних рівнянь на комп'ютері достатньо широко застосовуються формули прямокутників і трапецій, що є формулами замкнутого типу.

Ряд квадратурних методів розв'язування рівнянь Вольтерри побудований на сумісному застосуванні замкнутих формул і формул відкритого типу [24, 25]. Незамкнуті формули застосовуються зазвичай для обчислення інтегралів на малих проміжках, що дозволяє без істотних обчислювальних витрат продовжити таблицю шуканої функції на додаток до раніше отриманих її значень.

Наведемо приклади незамкнутих формул [67]. Для меж інтегрування 0 і h :

$$\int_0^h \varphi(x) dx = \frac{h}{12} [5\varphi(0) + 8\varphi(h) - \varphi(2h)] + \frac{h^4}{24} \varphi^{(4)}(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 2h,$$

$$\int_0^h \varphi(x) dx = \frac{h}{24} [9\varphi(0) + 19\varphi(h) - 5\varphi(2h) + \varphi(3h)] + \frac{19}{720} h^5 \varphi^{(5)}(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 3h;$$

для меж 0 і $2h$:

$$\int_0^{2h} \varphi(x) dx = \frac{h}{3} [\varphi(0) + 4\varphi(h) + \varphi(2h)] - \frac{h^5}{90} \varphi^{(5)}(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 2h;$$

для меж 0 і $3h$:

$$\int_0^{3h} \varphi(x) dx = \frac{3h}{8} [\varphi(0) + 3\varphi(h) + 3\varphi(2h) + \varphi(3h)] - \frac{3h^5}{80} \varphi^{(5)}(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 3h.$$

Таблиця 3.1

Найбільш поширені квадратурні формули

Формула	Коефіцієнти і вузли
Формула прямокутників	$A_i = \frac{b-a}{n-1},$
Загальна формула трапеції	$x_i = a + h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad h = \frac{b-a}{n-1}$
Загальна формула Сімпсона при $n = 2m + 1, m = 1, 2, 3.$	$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h,$ $x_i = a + h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad h = \frac{b-a}{n-1}$

Продовження таблиці 3.1.

<p>Формула Гауса при $n = 7$ $a = -1, b = 1$</p>	$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3},$ $A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{2},$ $A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3},$ $x_i = a + h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots n.$
<p>Формула Чебишева при $n = 6, a = -1, b = 1$</p>	$A_1 = A_7 = 0,1294849662$ $A_2 = A_6 = 0,2797053915$ $A_3 = A_5 = 0,3818300505$ $A_4 = 0,4179591837$ $-x_1 = x_7 = 0,9491079123$ $-x_2 = x_6 = 0,7415311856$ $-x_3 = x_5 = 0,4058451514$ $x_4 = 0$ $-x_1 = x_6 = 0,8662468181$ $-x_2 = x_5 = 0,4225186538$ $-x_3 = x_4 = 0,2666354015$ $A_1 = A_2 = \dots = \frac{2}{n} = \frac{1}{3}$

Важливою особливістю інтегралів із змінною межею є можливість використання кожного значення підінтегральної функції для обчислення не одного, а багатьох значень функції, що є результатом інтегрування (інтегрального перетворення). Це дозволяє застосовувати такі квадратурні формули [68], які забезпечують потрібну точність результату при невеликій кількості обчислень.

При розв'язуванні рівнянь Вольтерри потрібно також враховувати можливість обчислень з великим числом кроків. Така ситуація має місце при моделюванні динамічних об'єктів в реальному часі, коли проміжок інтегрування може бути дуже великим або навіть наперед невідомим. Важливою особливістю обчислень, при цьому, є накопичення похибок із зростанням числа кроків, яке визначається не стільки величиною кроку і точністю обчислень на ньому, скільки вдалим або невдалим вибором способу заміни інтеграла скінченною сумою.

Щоб застосувати до розв'язування лінійного рівняння Вольтерри метод квадратур, необхідно використати вираз

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, s)y(s)ds = f(x_i) \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2)$$

який виходить з початкового рівняння при фіксованих значеннях x_i незалежної змінної x . Значення x_i можуть бути обрані спеціальним чином або задані наперед, якщо, наприклад, права частина $f(x)$ задана таблицею. Приймаючи значення x_i за вузли квадратурної формули і замінюючи за її допомогою інтеграл в (3.2) скінченною сумою, отримуємо систему

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) = f(x_i) + R_i[y], \quad (3.3)$$

де $R_i[y]$ – похибка апроксимації. Отримання виразів (3.3) звичайно пов'язується з припущенням про неперервність ядра і вільного члена в заданих трикутнику і проміжку. Вважаючи похибки $R_i[y]$ малими і відкидаючи їх, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$y_i - \sum A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad (3.4)$$

де введені наступні позначення, яких дотримуватимемося і надалі:

$$\tilde{y}(x_i) = y_i, f(x_i) = f_i, K(x_i, x_j) = K_{ij}$$

Розв'язування (3.4) дає наближені значення шуканої функції $\tilde{y}(x_i) = y_i$ у вузлах x_i . Система (3.4) може бути приведена до вигляду

$$-\sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j + (1 - A_i K_{ii}) y_i = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.5)$$

або

$$\begin{array}{ccccccc} 1 - A_1 K_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & f_1 \\ -A_1 K_{21} & 1 - A_2 K_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & y_2 & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_1 K_{i1} & -A_2 K_{i2} & \cdot & 1 - A_i K_{ii} & \cdot & y_i & f_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_1 K_{n1} & -A_2 K_{n2} & \cdot & -A_i K_{ni} & \cdot & 1 - A_n K_{nn} & y_n & f_n \end{array} \times \cdot = \cdot \quad (3.6)$$

звідки видно, що матриця коефіцієнтів системи – трикутна. Це дає змогу послідовно знайти y_1, y_2, \dots, y_n за рекурентною формулою

$$y_i = (1 - A_i K_{ii})^{-1} (f_i + \sum A_j K_{ij} y_j) \quad (3.7)$$

при умові

$$(1 - A_i K_{ii}) \neq 0, \quad (3.8)$$

яку завжди можна виконати шляхом вибору вузлів і забезпечення достатньої малості коефіцієнтів A_i .

У разі застосування формули трапецій формула (3.7) приймає вигляд

$$y_i = \left(1 - \frac{h}{2} K_{ii}\right)^{-1} \left(f_i + \frac{h}{2} k_{i1} y_1 + h \sum_{j=2}^{i-1} K_{ij} y_j\right). \quad (3.9)$$

Відзначимо особливість виразу (3.9), що полягає у зростанні кількості обчислень разом з номером кроку дискретизації через збільшення членів суми, причому значення коефіцієнтів $A_j K_{ij}$ при y_i міняються для кожного i , що в загальному випадку не дозволяє скористатися результатами обчислень на попередніх кроках. Крім того, є особливості в застосуванні різних квадратурних формул. Наприклад, застосування формули Сімпсона повинно чергуватися для непарних вузлів з яким-небудь іншим правилом, наприклад з формулою прямокутників або формулою трапецій. Виникають складнощі при застосуванні формул Гауса, Маркова, Чебишева. Достатньо простим і у багатьох випадках досить ефективним є застосування формули трапецій [25].

Метод коллокації. Метод коллокації відноситься до проєкційних методів [25] та заснований на отриманні розв'язку на відрізках, довжина яких вибирається, і застосовується на кожному з них апроксимуючий вираз з невеликим числом координатних функцій. При розв'язуванні систем інтегральних рівнянь Вольтерри, що описують складні електричні кола, добре зарекомендував себе метод коллокації, заснований на заміні функцій кусково-гладкими поліномами, утвореними на ділянках з поліномів вигляду

$$P_{i,k+1}(x) = P_{i,k}(x_{k,0}) + \sum_{j=1}^l \frac{C_{i,k,j}}{j!} (x - x_{k,0})^j, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (3.10)$$

де $x_{k,v} = (kl + v)h + a$, $v = 0, l$, $k = 0, M-1$ – фіксовані вузли проміжку інтегрування $[a, b]$ (індекс k відповідає $(k+1)$ -ій ділянці (відрізка $x_k \leq x \leq x_{k+1}$), а індекс j – підвідрізка всередині відрізка $x_{k,j} \leq x \leq x_{k,j+1}$ всередині ділянки; $l \geq 1$ – кількість підвідрізків; при цьому $x_{k,l} = x_{k+1,0}$; $x_{0,0} = a$).

Вважаючи $P_i(x) \in C[a, b]$, отримаємо

$$P_{i,k}(x_{k,0}) = P_{i,k-1}(x_{k-1,l}).$$

Значення $P_{i,0}(x_{0,0}) = y_{i,0}(y_{i,0} = y_i(a))$, $i = 1, 2, \dots, n$ вважають відомими.

Значною перевагою алгоритмів на основі методу коллокації є велика гнучкість при виборі параметрів заміни функцій кусково-гладкими поліномами.

Метод вироджених ядер. Властивість зростання об'єму обчислень по мірі збільшення номера кроку відноситься, перш за все, до випадку розв'язування рівнянь з довільними ядрами. Збільшити швидкість обчислень дозволяє метод вироджених ядер, особливістю якого є незмінне число обчислень на кроці [24, 25]. Так, для інтегрального оператора Вольтерри з виродженим ядром матимемо:

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = \int_a^x \sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\beta_i(s)y(s)ds = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s)y(s)ds. \quad (3.11)$$

Після апроксимації інтеграла в (3.11) і застосуванні квадратурних сум отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_a^{x_i} K(x, s)y(s)ds = \\ & = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^{x_i} \beta_i(s)y(s)ds = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(x_j)y(x_j) = \\ & = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \left[\beta_i(x_n)y(x_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(x_j)y(x_j) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\beta_i(x_n)y(x_n) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(x_j)y(x_j). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Значення суми $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(x_j)y(x_j)$ відоме, оскільки воно обчислено на попередньому $(i - 1)$ -му кроці. Тому залишається обчислити значення суми, яке вимагає проведення незмінної кількості операцій на кожному i -му кроці.

Інтегральні оператори і рівняння, що зустрічаються при аналізі динаміки електричних кіл, містять різницеві ядра, представлені в аналітичному вигляді і володіють властивістю розділення, тобто можуть бути зведені до вироджених. Переваги використання методу вироджених ядер стосовно скалярних інтегральних рівнянь Вольтерри наведені в [85]. Методи апроксимації ядра виродженим описані в [24, 25].

Адаптивні алгоритми. Прагнення покращення точності розв'язування систем інтегральних рівнянь привели до необхідності розробки адаптивних алгоритмів. Якщо розв'язки системи інтегральних рівнянь швидко змінюються на інтервалі інтегрування, тоді для їх отримання

доцільно застосовувати адаптивні алгоритми, які адаптують сітку апроксимації відповідно до поведінки розв'язків. Оскільки алгоритми розв'язування систем інтегральних рівнянь містять в собі операції обчислення визначеного інтеграла, розглянемо підходи до побудови адаптивних алгоритмів обчислення визначеного інтеграла.

Автоматичний квадратурний алгоритм стосовно обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ призначений [58] для автоматичного

підбору кроку інтегрування h на основі вхідної інформації – функції f , відрізка $[a, b]$ і необхідної точності ε і обчислює результат Q і оцінку похибки E , які, як можна очікувати, задовольняють нерівності

$$|Q - I| < E < \varepsilon,$$

де I – точне значення інтеграла. Про функцію f не робиться ніяких припущень, окрім одного: за допомогою зовнішньої підпрограми можна обчислювати значення $f(x)$ для будь-яких заданих x .

Застосування автоматичних квадратурних алгоритмів завжди вимагає великих обчислювальних затрат у порівнянні з тими, які знадобляться, якщо, вивчивши конкретну задачу, скористатися її характерними особливостями і спеціальним чином організувати процес обчислень. Часто додаткові витрати складають до декількох сотень, а іноді і тисяч відсотків. Проте автоматичні алгоритми квадратури зручні, і для багатьох задач загальний комп'ютерний час виявляється все ж таки достатньо малим, щоб виправдати затрати. Зокрема, така ситуація, зазвичай, має місце на початковій стадії обчислювального експерименту. Потім, на більш пізніх стадіях експерименту, виникає потреба визначити, яку вигоду в економії людського і машинного часу приносить додатковий аналіз.

Розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри з підвищеною точністю. При моделюванні сучасних складних електротехнічних систем часто виникає необхідність у відтворенні властивостей окремих елементів схеми з високим ступенем адекватності. Оскільки електротехнічні системи в багатьох випадках є нелінійними об'єктами, доводиться мати справу із нелінійними моделями, в тому числі у вигляді нелінійних інтегральних рівнянь та їх систем [96].

Для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри пропонуються високоточні алгоритми. Алгоритми базуються на застосуванні до інтегрального члена рівняння п'яти- і семиточкових квадратурних формул Ньютона-Котеса замкнутого типу. Алгоритми передбачають відшукання початкових значень таблиці числового розв'язку. Після того, як початок таблиці визначено, для знаходження розв'язків у наступних вузлах розв'язується лише одне нелінійне рів-

няння. Для обчислення значень шуканого розв'язку на початку таблиці, як і для обчислення значень у наступних вузлах, використаємо метод диференціювання за параметром [96]. Оскільки в основі високоточних алгоритмів лежить один і той же метод, обмежимося викладаками лише для алгоритму порядку $O(h^8)$.

Нехай на відріжку $[t_0, t_0 + L]$ потрібно знайти розв'язок нелінійного інтегрального рівняння

$$y(t) = f(t) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, y(\tau)) d\tau, \quad (3.13)$$

де функції $f(t)$ і $F(t, \tau, y(\tau))$ мають гладкість, яка необхідна для застосування відповідних квадратурних формул.

Розглянемо рівняння (3.13) у вузлових точках дискретизації з кроком h $t_i = t_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N; Nh = L$) деякої рівномірної сітки. Маємо

$$y(t_i) = f(t_i) + \int_{t_0}^{t_i} F(t_i, \tau, y(\tau)) d\tau, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (3.14)$$

Для застосування до інтегрального члена рівняння (3.14) семиточкової квадратурної формули Ньютона-Котеса

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+6}} f(t) dt &= \frac{h}{140} [41f(t_i) + 216f(t_{i+1}) + 27f(t_{i+2}) + \\ &+ 272f(t_{i+3}) + 27f(t_{i+4}) + 216f(t_{i+5}) + 41f(t_{i+6})] - \\ &- \frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\xi), \quad \xi \in (t_i, t_{i+6}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

подамо його для $i \geq 7$ у вигляді

$$\begin{aligned} y(t_i) &= f(t_i) + \int_{t_0}^{t_k} F(t_i, \tau, y(\tau)) d\tau + \int_{t_k}^{t_i} F(t_i, \tau, y(\tau)) d\tau, \\ &(i = 7, 8, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.16)$$

де індекс $k = i - 6$ entier ($i/6$). Значення шуканого розв'язку рівняння (3.13) у вузлах t_1, t_2, \dots, t_6 (початок таблиці) обчислюються особливим способом, про що буде сказано нижче.

Застосовуючи тепер до першого інтеграла рівняння (3.16), формулу (3.15) із кроком $h_k = \frac{kh}{6}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), а до другого – (3.15) із кроком h і, відкидаючи відповідний залишковий член R_1 порядку $O(h^8)$, отримаємо систему нелінійних рівнянь

$$y_i = f_i + \frac{kh}{6} \sum_{j=0}^6 A_j F_{i, \frac{kj}{6}} + h \sum_{j=k}^{i-1} A_j F_{ij} + h A_i F_{ii}, \quad (i = 7, 8, \dots, N). \quad (3.17)$$

У системі (3.17) символами $y_i, f_i, F_{i, \frac{kj}{6}}$ та F_{ij} позначені, відповідно, наближені значення шуканого розв'язку $y(t)$, відомих функцій $f(t), F(t, \tau, y(\tau))$ у точках $(t = t_i, t = t_{\frac{kj}{6}})$ для першої суми і у точках $(t = t_i, t = t_j)$ для другої суми; A_j – вектор коефіцієнтів квадратурної формули (3.15).

Із формул (3.16) і (3.17) і умови Ліпшиця, якій задовольняє за третім аргументом функція $F(t, \tau, y(\tau))$, випливає справедливості нерівності

$$|\varepsilon_i| = |y(t_i) - y_i| \leq \frac{R_1}{1 - hC} \exp\left(\frac{CL}{1 - hC}\right), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (3.18)$$

де C – деяка константа, що залежить від коефіцієнтів квадратурної формули і константи Ліпшиця; $y(t_i)$ і y_i – відповідно значення точного і наближеного розв'язку рівняння (4.13) у вузлі дискретизації t_i . Оскільки для досить гладких функцій $f(t), F(t, \tau, y(\tau))$ і $y(\tau)$ залишковий член R_1 має порядок $O(h^8)$, то і $|\varepsilon_i|$ має такий же порядок. А це значить, що процес на основі формули (3.17) сходиться, причому порядок збіжності рівний восьми.

Якщо початок таблиці розв'язків рівняння (3.13) складено, то значення шуканого розв'язку у проміжних вузлах $t_{\frac{kj}{6}}, y_{\frac{kj}{6}}$ ($k, j = 1, 2, \dots, 6$), які необхідні для обчислення значень $F_{i, \frac{jk}{6}}$ на відрізьку $[t_0, t_k]$, обчислюються тільки один раз за інтерполяційними формулами Лагранжа.

Похибка апроксимації R_2 за формулами (3.15) має порядок точності $O(h^7)$. Оскільки ці формули використовуються у рівнянні (3.15), то сумарна похибка апроксимації вихідної задачі (3.13) скінченно-різницевою задачею (3.17) $R = R_1 + h \cdot R_2$ матиме порядок $O(h^8)$.

Отже, розв'язання вихідної задачі звелось до послідовного розв'язування нелінійних рівнянь, що дають наближений розв'язок рівняння (3.13) у вузлових точках t_i ($i = 7, 8, \dots, N$) з точністю $O(h^8)$.

Для розв'язування нелінійних рівнянь (3.17) застосуємо метод диференціювання за параметром. Для цього введемо у рівняння (3.17) параметр λ і поряд із системою (3.17) розглянемо систему рівнянь

$$y_i = \psi_i + \lambda h A_i F_{ii}, \quad (i = 7, 8, \dots, N), \quad (3.19)$$

$$\psi_i = f_i + \frac{kh}{6} \sum_{j=0}^6 A_j F_{i, \frac{kj}{6}} + h \sum_{j=k}^{i-1} A_j F_{ij}, \quad (i = 7, 8, \dots, N). \quad (3.20)$$

Система (3.19) при $\lambda = 1$ співпадає із системою (3.17), а при $\lambda = 0$ розв'язується відносно невідомих

$$y_i \big|_{\lambda=0} = \psi_i, \quad (i = 7, 8, \dots, N). \quad (3.21)$$

Припускаючи, що y_i диференційовані функції відносно параметра λ , і диференціюючи (3.19) по λ у кожній вузловій точці, одержимо диференціальні рівняння першого порядку:

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = \frac{h A_i F_{ii}}{1 - \lambda h A_i \frac{\partial F_{ii}}{\partial y_i}}, \quad (i = 7, 8, \dots, N). \quad (3.22)$$

Рівняння (3.22) чисельно інтегрується на сегменті $[0, 1]$ з урахуванням початкових умов (3.21). Числове значення розв'язку задачі (3.22) з початковими умовами (3.21) при $\lambda = 1$ є наближеним розв'язком рівняння (3.17) для будь-якого $i = 7, 8, \dots, N$, а отже, і вихідного рівняння (3.13) у відповідних точках. Таким чином, розв'язування вихідної задачі зведено до розв'язування задачі Коші для рівнянь першого порядку (3.22) з початковими умовами (3.21). Якщо початок таблиці вже визначений, то розв'язок (3.22) знаходиться за формулами (3.20) і (3.18).

Розглянемо тепер алгоритм для визначення невідомих y_i у вузлових точках, що відповідають початку таблиці ($i = 1, 2, \dots, 6$). Для цього у зазначених точках запишемо рівняння (3.13) і до інтегрального члена кожного із шести рівнянь ($y_0 = f_0$) застосуємо квадратурну формулу (3.15), відповідно із кроками $h_k = \frac{kh}{6}$ ($k = 1, 2, \dots, 6$). Одержимо систему нелінійних рівнянь відносно невідомих y_1, y_2, \dots, y_6 :

$$y_i = f_i + \frac{i}{6} \frac{h}{140} \left(41F_{i0} + 216F_{i, \frac{i}{6}} + 27F_{i, \frac{i}{3}} + 272F_{i, \frac{i}{2}} + 27F_{i, \frac{2i}{3}} + 216F_{i, \frac{5i}{6}} + 41F_{ii} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (3.23)$$

де праву частину кожного рівняння замість y_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) підставляються їхні значення через y_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) відповідно до формули (3.18).

Для розв'язування отриманої системи шести рівнянь знову застосуємо метод диференціювання за параметром. Перед невідомими членами правої частини системи (3.23) уведемо параметр λ і розглянемо систему виду

$$y_i = f_i + \frac{i}{6} \frac{h}{140} 41F_{i0} + \lambda \frac{i}{6} \frac{h}{140} \left(216F_{i, \frac{i}{6}} + 27F_{i, \frac{i}{3}} + 272F_{i, \frac{i}{2}} + \right. \\ \left. + 27F_{i, \frac{2i}{3}} + 216F_{i, \frac{5i}{6}} + 41F_{ii} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.24)$$

Система (3.24) при $\lambda = 1$ переходить у систему (3.23), а при $\lambda = 0$ дає

$$y_i = f_i + \frac{i}{6} \frac{h}{140} 41F_{i0}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.25)$$

Передбачається, що y_i є диференційовними функціями за параметром λ . Тоді, диференціюючи (3.24) за λ , отримаємо систему диференціальних рівнянь ($i = 1, 2, \dots, 6$):

$$\lambda \frac{i}{6} \frac{h}{140} \left(216F_{i, \frac{i}{6}} + 27F_{i, \frac{i}{3}} + 272F_{i, \frac{i}{2}} + 27F_{i, \frac{2i}{3}} + 216F_{i, \frac{5i}{6}} + 41F_{ii} \right) + \\ + \lambda \frac{i}{6} \frac{h}{140} \left(216 \frac{\partial F_{i, \frac{i}{6}}}{\partial \lambda} + 27 \frac{\partial F_{i, \frac{i}{3}}}{\partial \lambda} + 272 \frac{\partial F_{i, \frac{i}{2}}}{\partial \lambda} + \right. \\ \left. + 27 \frac{\partial F_{i, \frac{2i}{3}}}{\partial \lambda} + 216 \frac{\partial F_{i, \frac{5i}{6}}}{\partial \lambda} + 41 \frac{\partial F_{ii}}{\partial \lambda} \right). \quad (3.26)$$

Підставляючи в (3.26) значення часток похідних, одержимо систему шести звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яку представимо у матричній формі

$$A \frac{\partial \vec{y}}{\partial \lambda} = \vec{b}, \quad A = \vec{b}. \quad (3.27)$$

Тут $\vec{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6]$,

$$b_i = \frac{i}{6} \frac{h}{140} \left(216F_{i, \frac{i}{6}} + 27F_{i, \frac{i}{3}} + 272F_{i, \frac{i}{2}} + 27F_{i, \frac{2i}{3}} + 216F_{i, \frac{5i}{6}} + 41F_{ii} \right), \\ (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Інтегруючи, з урахуванням початкових умов (3.25), систему (3.27) на сегменті $[0, 1]$ яким-небудь числовим методом, що має від-

повідний порядок точності, при $\lambda = 1$ одержимо наближені значення шуканого розв'язку y_1, y_2, \dots, y_6 , рівняння (3.13).

Маючи початок таблиці, отримаємо значення невідомої функції y_i ($i = 7, 8, \dots, N$), послідовно інтегруючи чисельно звичайне диференціальне рівняння (3.15) з початковими умовами (3.14).

Отже, задача чисельного розв'язування нелінійного інтегрального рівняння (3.13) звелась до розв'язування задачі Коші для одного звичайного диференціального рівняння у кожному вузлі сітки дискретизації, а для знаходження початку таблиці – до розв'язування системи шести звичайних диференціальних рівнянь, причому порядок точності отриманого розв'язку – $O(h^8)$.

Ітераційні методи. Для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри II роду і їх систем, що описують електричні кола, можливе застосування ітераційних методів. Існує багато різновидів ітераційних методів, що розрізняються областю і швидкістю збіжності, класом задач, що розв'язуються і т.д. Ітераційний метод, як інструмент отримання наближених чисельних розв'язків, може бути як самостійним, так і допоміжним, уточнюючим результати, отримані заздалегідь яким-небудь іншим методом, наприклад, методом квадратур або коллокації.

Широке застосування для розв'язування скалярних інтегральних рівнянь отримали метод простої ітерації [49] і метод Ньютона-Канторовича [73]. Експерименти над цими методами показали також їх ефективність у ряді випадків розв'язування систем інтегральних рівнянь. Метод простої ітерації стосовно систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду завжди сходиться при слабких обмеженнях на ядро і праву частину. При розв'язуванні нелінійних рівнянь область збіжності методу простих ітерацій звужується, а якщо процес і сходиться, то у багатьох випадках швидкість збіжності може виявитися дуже низькою. Одним з ефективних методів подолання вказаних труднощів є застосування методу Ньютона-Канторовича. Він дозволяє значно прискорити збіжність у порівнянні з методом простої ітерації.

3.2. Алгоритми розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду

Метод коллокації. При розв'язуванні систем *лінійних* інтегральних рівнянь Вольтерри II роду методом коллокації в основі алгоритму використовують рівняння

$$f(t_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.28)$$

де

$$u_k := u_k(0) = 0, \quad k = \overline{0, r-1}, \quad (3.29)$$

які дозволяють знайти значення $C_{i,k,1}, C_{i,k,2}, \dots, C_{i,k,m}, k = \overline{1, M-1}$.

Приклад 3.1. Нехай електричне коло описується системою лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду виду

$$\begin{cases} y_1(t) - \int_0^t y_1(\tau) d\tau - \int_0^t (1+t-\tau) y_2(\tau) d\tau = \\ = 5.5e^{-0.1t} + 1.5e^{-0.4t} + t - 6.5, \\ y_2(t) - \int_0^t (t-\tau) y_1(\tau) d\tau - \int_0^t y_2(\tau) d\tau = \\ = -50e^{-0.1t} - 1.4e^{-0.4t} - 5t + 51; \end{cases} \quad (3.30)$$

з точним розв'язком

$$y_1(t) = 0.5e^{-0.1t}, \quad y_2(t) = -0.4e^{-0.4t}. \quad (3.31)$$

Розв'яжемо (3.30) на відріжку часу $[0, 6]$ з такими параметрами: $m = 60$ – число розбиття відрізка інтегрування, $mm = 3$ – степінь полінома.

Результати розв'язування наведені на рис. 3.1 та 3.2. Похибки обчислень наведені на рис. 3.3, та рис. 3.4.

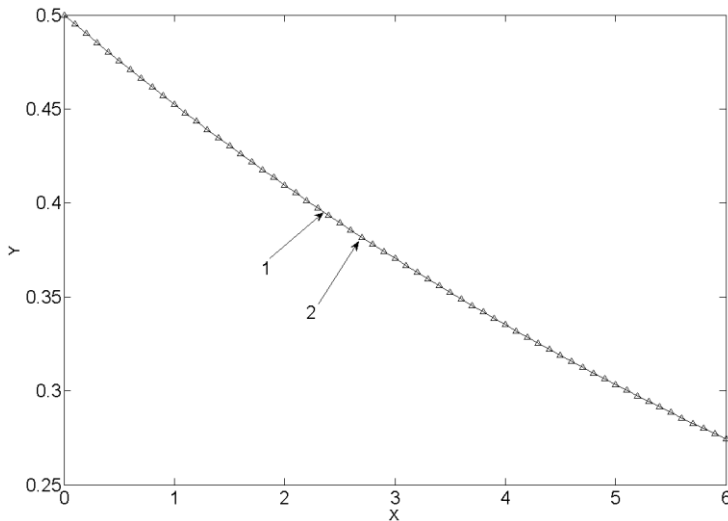


Рис. 3.1. Розв'язування системи інтегральних рівнянь (3.30) за формулою (3.28) (для функції y_1):
1 – точний розв'язок; 2 – наближений розв'язок

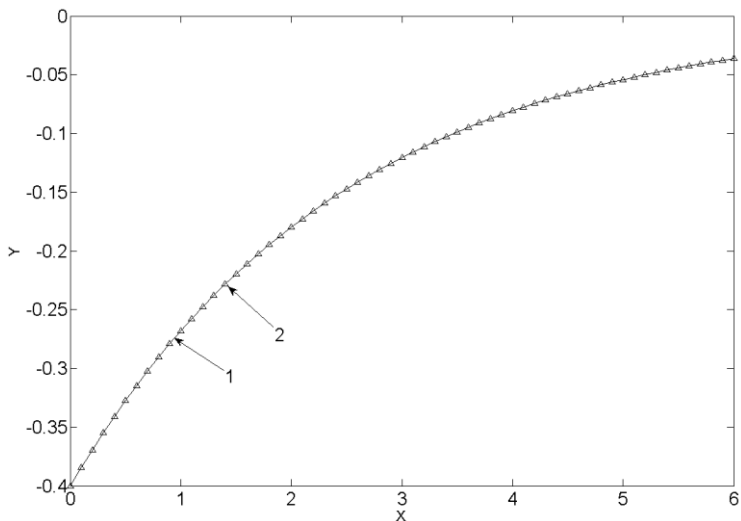


Рис. 3.2. Розв'язування системи інтегральних рівнянь (3.30) за формулою (3.28) (для функції u_2):
1 – точний розв'язок; 2 – наближений розв'язок

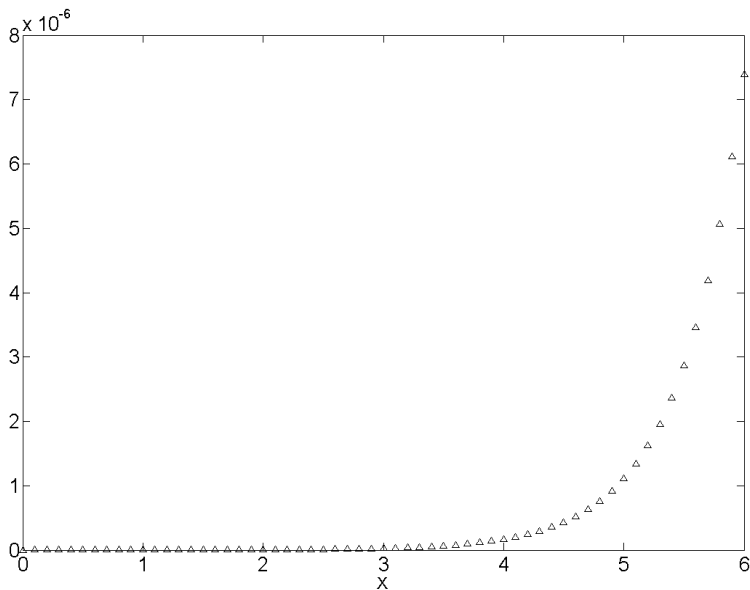


Рис. 3.3. Абсолютна похибка розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.30) за формулою (3.28) (для функції u_1)

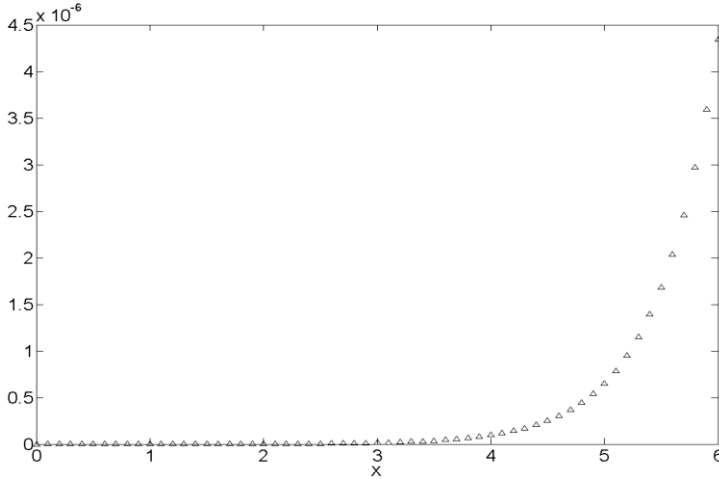


Рис. 3.4. Абсолютна похибка розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.30) за формулою (3.28) (для функції y_2)

Алгоритм розв'язування системи *нелінійних* інтегральних рівнянь Вольтерри II роду на основі методу колокації полягає у використанні виразів

$$\sum_{j=1}^n \int_{x_{k,0}}^{x_{k,v}} K_{ij} [x_{k,v}, s, P_{j,k}(s)] = f_i(x_{k,v}) - \psi_{i,k}(x_{x,v}), \quad (3.32)$$

де

$$\begin{aligned} \psi_{i,k}(x_{k,v}) = & \sum_{j=1}^n \int_a^{x_{1,0}} K_{ij}(x_{x,v}, s, P_{j,0}(s)) ds + \sum_{j=1}^n \int_a^{x_{1,0}} K_{ij}(x_{x,v}, s, P_{j,1}(s)) + \\ & + \dots + \sum_{j=1}^n \int_{x_{k-1,0}}^{x_{k,0}} K_{ij}(x_{x,v}, s, P_{j,k-1}(s)) ds, \quad k = \overline{1, M}, v = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Приклад 3.2. Нехай електричне коло описується системою нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду виду

$$\left\{ \begin{aligned} & y_1(t) - \int_0^t y^2(s) ds - \int_0^t (t-s+y(s)) ds = \\ & = -2 \sin t + 0.5 \sin t \cos t - 0.5t - 0.5t^2; \\ & y_2(t) - \int_0^x (t-s) y^2(s) ds - \int_0^t (t-y^2(s)) ds = \\ & = \cos t - \frac{5}{4} t^2 + \frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t; \end{aligned} \right. \quad (3.34)$$

з точним розв'язком

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sin(-t), \\ y_2(t) &= \cos(-t). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Розв'яжемо систему (3.34) за допомогою формул (3.32). Розрахунки проведемо на відрізку $[0, 6]$ з такими параметрами: $m = 60$ – число розбиття відрізка інтегрування, $mm = 3$ – степінь полінома.

Точний і наближений розв'язок представлено на рис. 3.5, 3.6, абсолютна похибка показана на рис. 3.7, 3.8. Максимальна відносна похибка методу склала 0,75%.

Адаптивні алгоритми. Наведені вище алгоритми розв'язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду розраховані на фіксовану сітку вузлів, в той же час для функцій, що швидко змінюються на інтервалі інтегрування, доцільним є наявність алгоритмів з адаптивним вибором вузлів інтегрування. Позитивні властивості і структурні особливості адаптивних алгоритмів були розглянуті раніше в підрозділі 3.1. Розглянемо деякі приклади із застосуванням адаптивних алгоритмів.

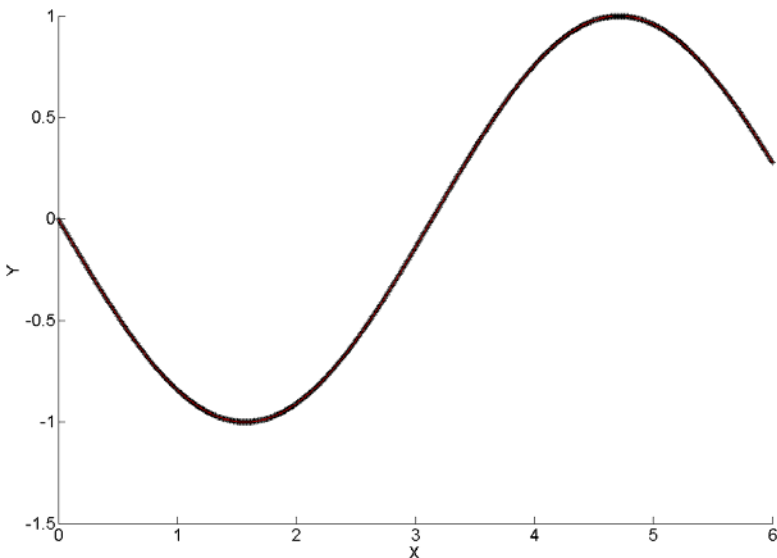


Рис. 3.5. Розв'язування системи інтегральних рівнянь (3.34) методом колокації (для функції y_1):

(-) – точний розв'язок; () – наближений розв'язок*

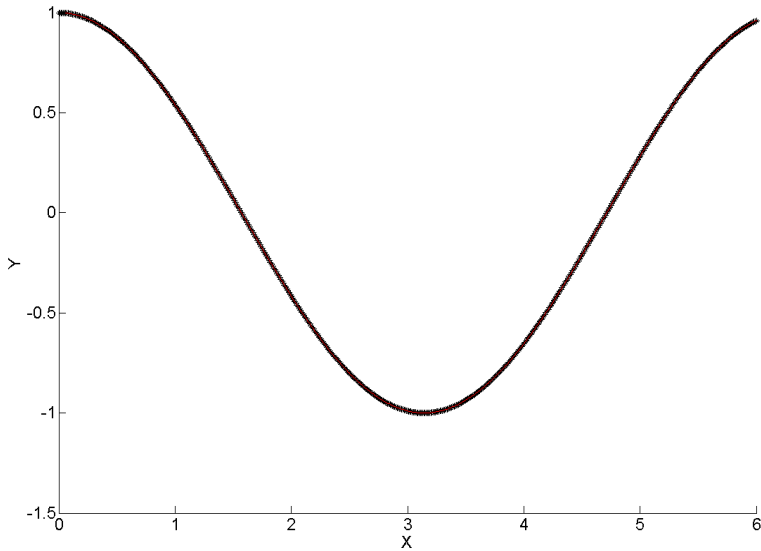


Рис. 3.6. Розв'язування системи інтегральних рівнянь (3.35) методом колокації (для функції u_1):
(-) – точний розв'язок; (*) – наближений розв'язок

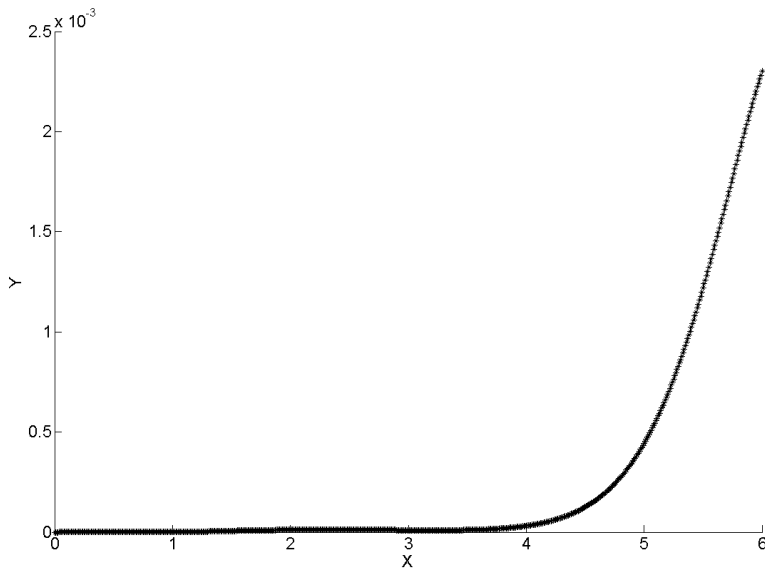


Рис. 3.7. Абсолютна похибка розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.35) методом колокації (для функції u_1)

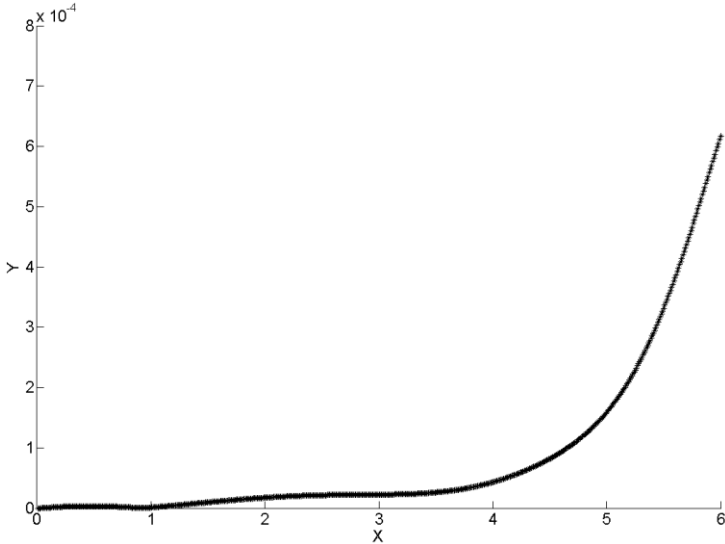


Рис. 3.8. Абсолютна похибка розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.35) методом колокації (для функції y_2)

Приклад 3.3. Нехай електричне коло описується системою лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду виду

$$\begin{cases} y_1(t) - \int_0^t (t-\tau)y_1(\tau)d\tau - \int_0^t (t-\tau)y_2(\tau)d\tau = \\ = 2(1-t)\sin t - \cos t - t + 1; \\ y_2(t) - \int_0^t (t-2\tau)y_1(\tau)d\tau - \int_0^t (2t-\tau)y_2(\tau)d\tau = \\ = (2-t)\sin t + (2-t)\cos t - t - 1; \end{cases} \quad (3.36)$$

з точним розв'язком

$$y_1^T(t) = \sin t, \quad y_2^T(t) = \cos t. \quad (3.37)$$

Розв'яжемо систему (3.36) методом колокації з адаптивним вибором кроку на інтервалі часу $[0, 4]$ з початковим кроком $h = 0,2$. В процесі розв'язування були отримані наступні значення мінімального та максимального кроку: $h_{min} = 0,025$, $h_{max} = 0,1$; середнє значення кроку склало $h_{cp} = 0,0571$. Точний та наближений розв'язок системи наведені на рис. 3.9, та рис. 3.10, абсолютна похибка показана на рис. 3.11, та рис. 3.12. З результатів видно, що адаптивні алгоритми на базі методу колокації ефективні при розв'язанні даного виду систем інтегральних рівнянь.

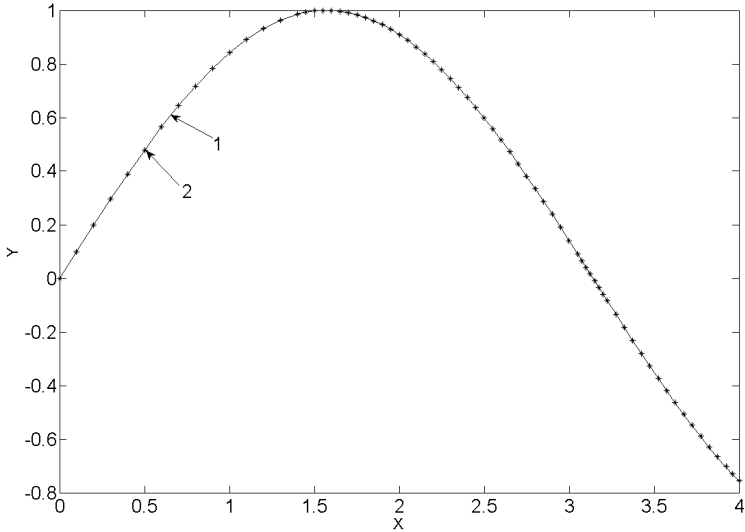


Рис. 3.9. Розв'язування системи інтегральних рівнянь (3.36) методом колокації з адаптивним вибором кроку інтегрування (для функції u_1):
1 – точний розв'язок; 2 – наближений розв'язок

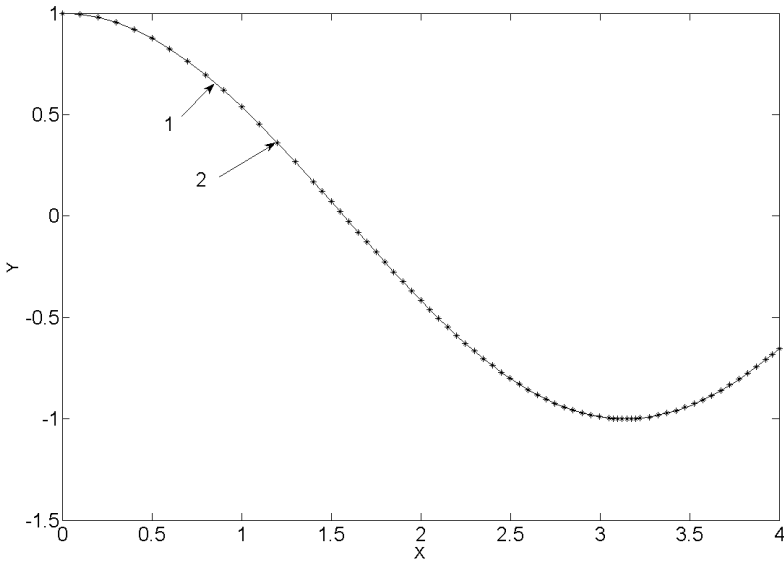


Рис. 3.10. Розв'язування системи інтегральних рівнянь (3.36) методом колокації з адаптивним вибором кроку інтегрування (для функції u_2):
1 – точний розв'язок; 2 – наближений розв'язок

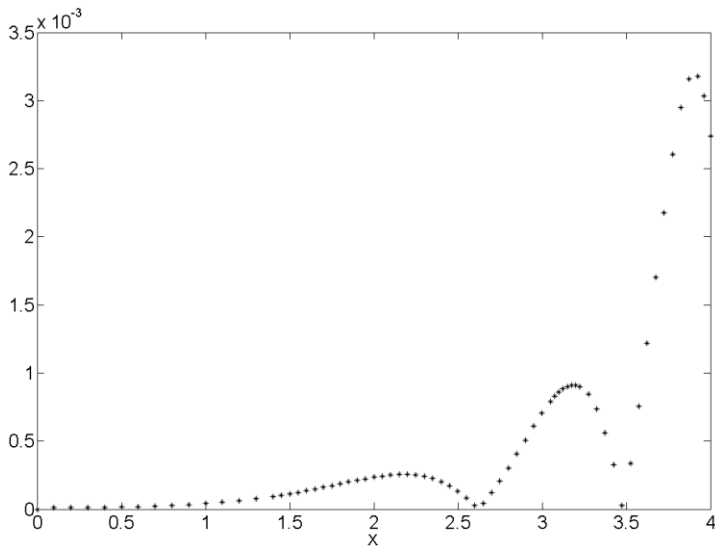


Рис. 3.11. Абсолютна похибка розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.36) методом коллокації з адаптивним вибором кроку інтегрування (для функції u_1)

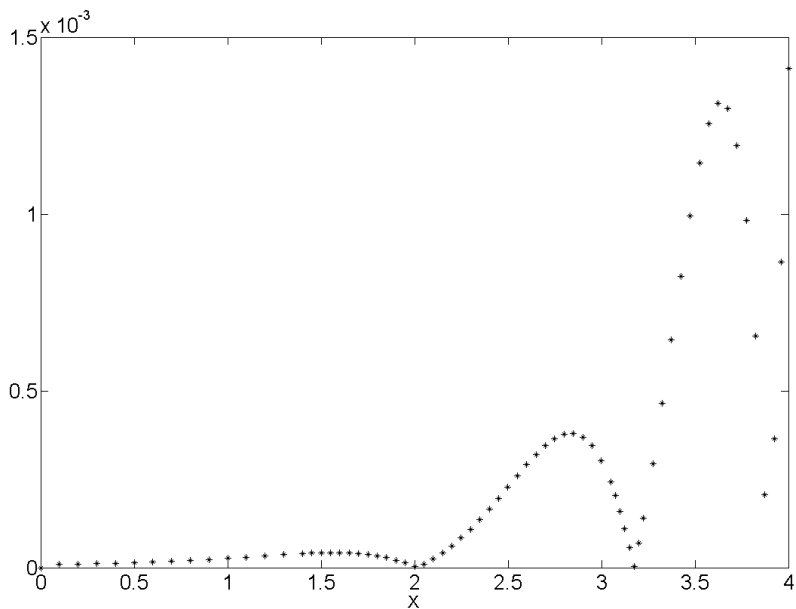


Рис. 3.12. Абсолютна похибка розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.36) методом коллокації з адаптивним вибором кроку інтегрування (для функції u_2)

Алгоритми на основі комбінації квадратурних формул Ньютона-Котеса закритого типу 8, 9, 10 та 11-го порядку. При малих похибках в початкових даних високу точність розв'язку можливо отримати шляхом використання алгоритму, заснованого на комбінації формул Ньютона-Котеса 8, 9, 10 и 11 порядку (НК 8-11). Нехай $x_i, i = 1, n$ – вузли сітки апроксимації, A_l – просте квадратурне правило порядку l , B_l – складена квадратурна формула порядку l . Тоді визначений інтеграл на сітці $[x_1, x_n]$ можливо представити у вигляді суми чотирьох інтегралів: перший інтеграл знаходиться по складеній формулі B_{11} , другий, третій та четвертий – за допомогою простих формул A_{10}, A_9, A_8 відповідно (табл. 3.2). Наприклад, при кількості вузлів $n = 86$ визначений інтеграл представляють у вигляді комбінації $(B_{11}, A_9, A_9, A_{10})$.

Таблиця 3.2

*Комбінації квадратурних формул 8-11-го порядку
для обчислення інтеграла на сітці $x_i, i = 1, n$*

n	Σ	n	Σ	n	Σ	n	Σ
2	A_2	12	(A_6, A_7)	22	(A_8, A_8, A_8)	10^*m+22	(B_{11}, A_8, A_8, A_8)
3	A_3	13	(A_7, A_7)	23	(A_8, A_8, A_9)	10^*m+23	(B_{11}, A_8, A_8, A_9)
4	A_4	14	(A_7, A_8)	24	(A_8, A_9, A_9)	10^*m+24	(B_{11}, A_8, A_9, A_9)
5	A_5	15	(A_8, A_8)	25	(A_9, A_9, A_9)	10^*m+25	(B_{11}, A_9, A_9, A_9)
6	A_6	16	(A_8, A_9)	26	(A_9, A_9, A_{10})	10^*m+26	$(B_{11}, A_9, A_9, A_{10})$
7	A_7	17	(A_9, A_9)	27	(A_9, A_{10}, A_{10})	10^*m+27	$(B_{11}, A_9, A_{10}, A_{10})$
8	A_8	18	(A_{10}, A_9)	28	(A_{10}, A_{10}, A_{10})	10^*m+28	$(B_{11}, A_{10}, A_{10}, A_{10})$
9	A_9	19	(A_{10}, A_{10})	29	(A_{10}, A_{10}, A_{11})	10^*m+29	$(B_{11}, A_{10}, A_{10}, A_{11})$
10	A_{10}	20	(A_{10}, A_{11})	30	(A_{10}, A_{11}, A_{11})	10^*m+30	$(B_{11}, A_{10}, A_{11}, A_{11})$
11	A_{11}	21	(A_{11}, A_{11})	31	(A_{11}, A_{11}, A_{11})	10^*m+31	$(B_{11}, A_{11}, A_{11}, A_{11})$

Порівняння точності комбінацій квадратурних формул Ньютона-Котеса закритого типу. З метою порівняння точності описаних вище алгоритмів розв'язання систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду на основі методу квадратур з використанням комбінацій замкнутих формул квадратури Ньютона-Котеса розв'яжемо тестовий приклад.

Приклад 3.4. Нехай електричне коло описується системою лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду виду

$$\begin{cases} y_1(t) - \int_0^t (t-s)y_1(s)ds - \int_0^t (t+s)y_2(s)ds = 2(1-t)\sin t - \cos t - t + 1; \\ y_2(t) - \int_0^t (t-2s)y_1(s)ds - \int_0^t (2t-s)y_2(s)ds = (2-t)\sin t + (2-t)\cos t - t - 1; \end{cases} \quad (3.38)$$

З точним розв'язком

$$y_1^T(t) = \sin t, \quad y_2^T(t) = \cos t. \quad (3.39)$$

Розрахунки проведемо на відрізку $[0, 2\pi]$ з кроком $h = 0,01$. В якості «розгінних» значень задамо значення в 21 точці.

З результатів розв'язання (табл. 3.3) видно, що з розглянутих методів за відсутності похибок у вихідних даних при розв'язуванні системи (3.38) найбільш точні результати дає метод квадратур з використанням формули НК 8-11. В точці $x = 2\pi$ абсолютна похибка методу НК 8-11 на 10 порядків менше абсолютної похибки методу трапецій.

При похибках в початкових даних точність методів падає, при великих похибках вона співставна з похибкою методу трапецій.

Таблиця 3.3

Результати розв'язування системи інтегральних рівнянь (4.53)

x	Точне розв'язання		Формула трапецій		Формула Сімсона-«греховських»		Формула НК 8-11	
	y1	y2	y1	y2	y2	y1	y1	y2
0,36	0,352274	0,935897	0,352264	0,935884	0,352274	0,935897	0,352274	0,935897
0,8	0,717356	0,696707	0,717312	0,696673	0,717356	0,696707	0,717356	0,696707
1,2	0,932039	0,362358	0,931923	0,362302	0,932039	0,362357	0,932039	0,362358
1,6	0,999574	-0,0292	0,999331	-0,02925	0,999574	-0,0292	0,999574	-0,029199
1,9	0,9463	-0,32329	0,945957	-0,32328	0,9463	-0,32329	0,946300	-0,323289
2,2	0,808496	-0,5885	0,808167	-0,58832	0,808496	-0,5885	0,808496	-0,588501
2,6	0,515501	-0,85689	0,515742	-0,85636	0,515501	-0,85689	0,515501	-0,856889
2,9	0,239249	-0,97096	0,240377	-0,9705	0,23925	-0,97096	0,239249	-0,970958
3,2	-0,05837	-0,99829	-0,05705	-0,99884	-0,05837	-0,9983	-0,058374	-0,998295
3,5	-0,35078	-0,93646	-0,352	-0,93848	-0,35078	-0,93647	-0,350783	-0,936457
3,8	-0,61186	-0,79097	-0,61688	-0,7914	-0,61186	-0,79097	-0,611858	-0,790968
4,4	-0,9516	-0,30733	-0,93443	-0,3051	-0,9516	-0,30734	-0,951602	-0,307333
4,8	-0,99616	0,087499	-1,03052	0,062255	-0,99617	0,087406	-0,996165	0,087499
5,6	-0,63127	0,775566	-0,61629	0,554144	-0,63121	0,774443	-0,631267	0,775566
6,1	-0,18216	0,983268	0,635223	1,986668	-0,18213	0,987526	-0,182162	0,983268
6,2	-0,08309	0,996542	1,890076	1,719072	-0,08259	0,998278	-0,083089	0,996542
6,27	-0,01318	0,999913	2,312106	0,959917	-0,01238	0,997473	-0,013185	0,999913

3.3. Застосування інтегро-апроксимаційного алгоритму для аналізу динаміки електричних кіл

Одною з основних математичних моделей опису та розрахунку перехідних процесів в електричних колах, як вже говорилося вище, є система диференціальних рівнянь виду

$$A(x)\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, H], \quad (3.40)$$

де \dot{x} – вектор змінних стану, компонентами якого є величини струмів і напруг відповідно індуктивних та ємнісних елементів схеми, почат-

кові значення яких є відомими; $A(x)$ – деяка матриця, що визначається структурою досліджуваного електричного кола та значеннями його параметрів; $f(t, x)$ – вектор діючих джерел е.р.с. та струму.

Найбільш часто подібні системи рівнянь на практиці розв'язують шляхом чисельного інтегрування, використовуючи різницеві методи, а також деякі інші, основою яких є різницеві методи [46, 47]. Однак, як відомо, такі методи, поряд з простотою, універсальністю та широким розповсюдженням, в тому числі в комп'ютерних математичних програмах, володіють таким великим недоліком, як насичуваність.

На основі синтезу інтегрального методу розрахунку електричних кіл [21, 25, 91] та апроксимаційного методу (α -методу) розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь [29, 49] розглядається питання застосування та чисельної реалізації ненасичуваного алгоритму розрахунку перехідних процесів в електричних колах, які можуть бути описані рівняннями виду (3.40) при виконанні умови, що елементи матриці $A(x)$ та вектора $f(t, x)$ є (чи можуть бути достатньо точно апроксимовані) алгебраїчними многочленами:

$$A(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^k(t), \quad f(t, x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^M b_{ij} t^i x^j(t), \quad (3.41)$$

де a_k і b_{ij} – деякі постійні коефіцієнти.

Побудова апроксимаційного многочлена [62, 103]. Згідно інтегрального методу розрахунку електричних кіл [22, 25], з урахуванням (3.41), можливо перейти від задачі (3.40) до еквівалентного їй інтегрального рівняння Вольтерри:

$$g[x(t)] = g(x_0) + \int_0^t f[s, x(s)] ds, \quad (3.42)$$

де

$$g[x(t)] = \sum_{k=0}^l \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}(t). \quad (3.43)$$

Відповідно до α -методу [25] поставимо рівнянню (3.42) у відповідність наближене інтегральне рівняння

$$g[x_n(t)] = g(x_0) + \int_0^t f[s, x_n(s)] ds - \varepsilon_N(t). \quad (3.44)$$

У цьому виразі $x_n(t)$ – розв'язок даного рівняння, що являє собою алгебраїчний многочлен степеня не вище n і може бути одного з наступних видів:

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k \quad \text{або} \quad x_n(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k T_k\left(\frac{2t}{H} - 1\right), \quad (3.45)$$

де α_k (або β_k) – невідомі коефіцієнти, які необхідно знайти; ε_N – нев'язка-многочлен

$$\varepsilon_N(t) = \sum_{k=n+1}^N \tau_k T_k\left(\frac{2t}{H} - 1\right), \quad (3.46)$$

де

$$N = \max(l + n, m + Mn + 1); \quad (3.47)$$

$T_k\left(\frac{2t}{H} - 1\right)$ – зміщені многочлени Чебишева першого роду; τ_k – невідомі допоміжні параметри.

Для знаходження коефіцієнтів α_k (або β_k), а також τ_k розглянемо відповідно до [29], наступну ітераційну схему

$$a_0 x_{nv}(t) = g(x_0) - \sum_{k=1}^l \frac{\alpha_k}{k+1} x_{nv-1}^{k+1}(t) + \int_0^t g[s, x_{nv-1}(s)] ds - \varepsilon_{Nv}(t), \quad (3.48)$$

де $v = 1, 2, 3, \dots$ – номер кроку ітерацій; $x_{nv}(t)$ і $\varepsilon_{Nv}(t)$ – многочлени відповідного виду (3.45) і (3.46) з коефіцієнтами α_{kv} (або β_{kv}) і τ_{kv} на v -му кроці ітерацій.

Далі, порівнюючи в (3.48) при кожному $v = 1, 2, 3, \dots$ відповідно до (3.41), (3.43) та (3.45)-(3.47) коефіцієнти при рівних степенях t , отримуємо для α_{kv} (або β_{kv}) і τ_{kv} деяку систему з $(N+1)$ -го лінійного алгебраїчного рівняння. В найпростішому випадку, коли $l = 0$ та $a_0 = 1$ така система в матричному поданні приймає вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 & d_{0,n+1} \dots d_{0N} \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & d_{1,n+1} \dots d_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & d_{n,n+1} \dots d_{n,N} \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & d_{n+1,n+1} \dots d_{n+1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots d_{N,N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{0,v} \\ d_{1,v} \\ \dots \\ d_{n,v} \\ \tau_{n+1,v} \\ \dots \\ \tau_{N,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ G_1(\alpha^{v-1}) \\ \dots \\ G_n(\alpha^{v-1}) \\ G_{n+1}(\alpha^{v-1}) \\ \dots \\ G_N(\alpha^{v-1}) \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

де $\{d_{ik}\}_{i,k=0}^N$ – коефіцієнти при t^i , отримані в результаті розкладання

многочлена $T_k\left(\frac{2t}{H} - 1\right)$ по степеням t згідно до (3.48);

$\alpha^{v-1} = (\alpha_{0,v-1}, \dots, \alpha_{n,v-1})$, $G_i(\alpha^{v-1})$ – коефіцієнти при t^i , отримані в результаті розкладання многочлена

$$\int_0^t g[s, x_{n,v-1}(s)] ds.$$

Використання алгоритму на практиці продемонструємо на простих прикладах.

Приклад 3.5. Для лінійного електричного кола, що наведене на рис. 3.13, необхідно визначити напругу $u(t)$ після комутації, використовуючи інтегро-апроксимаційний метод розрахунку перехідного процесу.

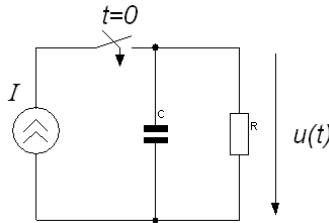


Рис. 3.13. Електрична схема до прикладу 3.5

Точний розв'язок даної задачі може бути легко знайдений одним із методів розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах. Застосуємо, наприклад, операторний метод і отримаємо вираз напруги на гілках кола

$$u(t) = IR(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (3.50)$$

Знайдемо наближений розв'язок, використовуючи інтегро-апроксимаційний алгоритм. Запишемо рівняння кола

$$C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{R} u(t) = I \quad (3.51)$$

з початковою умовою $u(0) = 0$. Нехай $I = 0,1$, $C = \frac{5}{30}$, $R = 6$, тоді рівняння (3.51) приймає вигляд

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{3}{5} - u(t), \quad u(0) = 0. \quad (3.52)$$

Помножимо (3.52) на $\frac{5}{3}$ і зробимо заміну $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $t \in [0, H]$. Рівняння (3.52) прийме вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1 - x(t), \quad x(0) = 0. \quad (3.53)$$

Відповідно до виразів (3.42) і (3.43) перейдемо до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри:

$$x(t) = \int_0^t (1 - x(s)) ds$$

або

$$x(t) = t - \int_0^t x(s) ds. \quad (3.54)$$

Далі згідно (3.48) і (3.49) запишемо наближене інтегральне рівняння, з якого будемо шукати розв'язок у вигляді многочлена $x_n(t)$:

$$x_{nv}(t) = t - \int_0^t x_{nv}(s) ds - \sum_{i=n+1}^{2n+1} \tau_{iv} T_i \left(\frac{2t}{H} - 1 \right). \quad (3.55)$$

При $n = 2$ та $H = 1$ для знаходження коефіцієнтів многочлена

$$x_{2v}(t) = \alpha_{0v} + \alpha_{1v}t + \alpha_{2v}t^2 \quad (3.56)$$

необхідно використати зміщені поліноми Чебишева [49]:

$$\begin{aligned} T_3(2t-1) &= 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1, \\ T_4(2t-1) &= 128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t + 1, \\ T_5(2t-1) &= 512t^5 - 1280t^4 + 1120t^3 - 400t^2 + 50t - 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Остаточо отримаємо

$$\begin{aligned} \alpha_{0v} + \alpha_{1v}t + \alpha_{2v}t^2 &= t - \int_0^t (\alpha_{0v} + \alpha_{1v}s + \alpha_{2v}s^2) ds - \\ &- (\tau_{3v}(32t^3 - 48t^2 + 18t - 1) + \tau_{4v} \times \\ &\times (128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t + 1) + \tau_{5v}(512t^5 - \\ &- 1280t^4 + 1120t^3 - 400t^2 + 50t - 1)). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Система (3.49) прийме вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & -32 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -48 & 160 & -400 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & -256 & -1120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & -1280 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 512 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_{0v} \\ \alpha_{1v} \\ \alpha_{2v} \\ \tau_{3v} \\ \tau_{4v} \\ \tau_{5v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 - \alpha_{0v} \\ (-1/2)\alpha_{1v} \\ (-1/3)\alpha_{2v} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (3.59)$$

Знаходимо розв'язки системи (3.59)

$$\alpha_{0v} = 0.0033 ,$$

$$\alpha_{1v} = 0.9381 ,$$

$$\alpha_{2v} = -0.3127 ,$$

$$\tau_{3v} = 0.0033 ,$$

$$\tau_{4v} = 0 , \tau_{5v} = 0 .$$

Остаточно напруга на елементах електричного кола

$$u(t) = \frac{3}{5} x_{2v}(t) = \dots \quad (3.60)$$

$$= 0.002 + 0.5629t - 0.1876t^2$$

Графіки точного розв'язку та наближеного з використанням інтегро-апроксимаційного алгоритму, а також графік відносної похибки зображені на рис. 3.14 та рис. 3.15 відповідно.

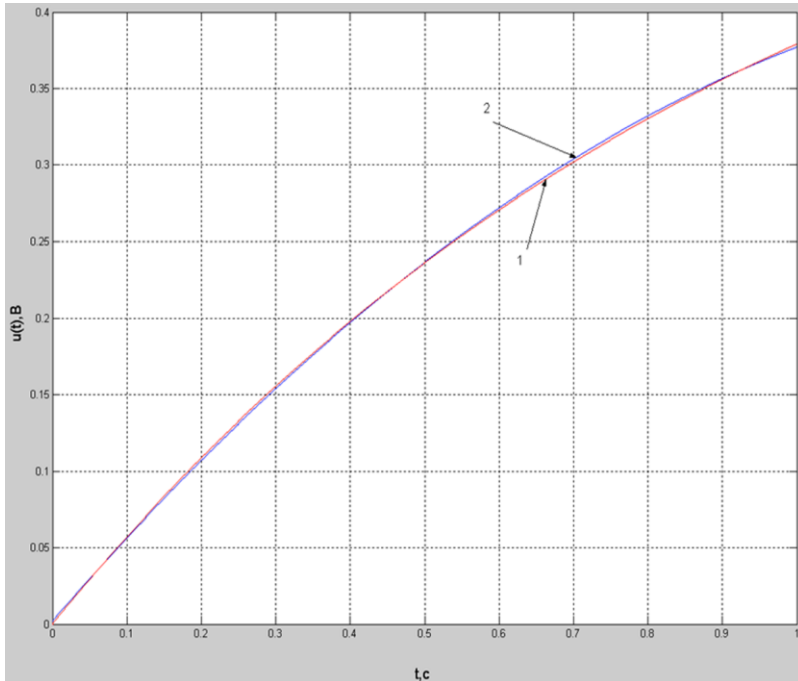


Рис. 3.14. Графіки напруги до прикладу 3.5:
 1 – точний розв'язок; 2 – наближений розв'язок
 з використанням інтегро-апроксимаційного алгоритму

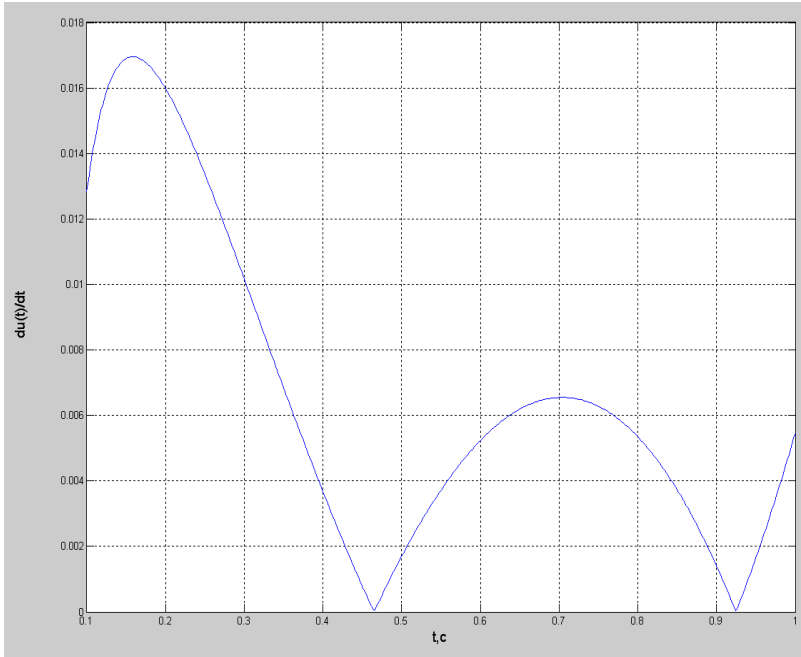


Рис. 3.15. Графік відносної похибки до прикладу 3.5

Приклад 3.6. Для нелінійного електричного кола, що наведене на рис. 3.16, необхідно визначити напругу $u(t)$ після комутації, використовуючи інтегро-апроксимаційний метод розрахунку перехідного процесу.

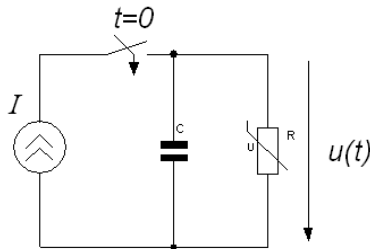


Рис. 3.16. Електрична схема до прикладу 3.6

Нехай струм через нелінійний резистор описується виразом $i(t) = pu^2(t)$. Запишемо рівняння кола

$$C \frac{du(t)}{dt} + pu^2(t) = I \quad (3.61)$$

з початковою умовою $u(0) = 0$. Нехай $I = 0,1$; $C = \frac{5}{30}$; $p = \frac{5}{18}$, тоді рівняння (3.61) приймає вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1 - x^2(t), \quad x(0) = 0, \quad (3.62)$$

де $x(t) = \frac{5}{3}u(t)$, $t \in [0, H]$, і точний розв'язок $x(t) = th(t)$.

Відповідно до виразів (3.97) і (3.98) перейдемо до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри

$$x(t) = \int_0^t (1 - x^2(s)) ds \quad \text{або} \quad x(t) = t - \int_0^t x^2(s) ds. \quad (3.63)$$

Далі згідно (3.48) і (3.49) запишемо наближене інтегральне рівняння, з якого будемо шукати розв'язок у вигляді многочлена

$$x_{nv}(t) = t - \int_0^t x_{nv}^2(s) ds - \sum_{i=n+1}^{2n+1} \tau_{iv} T_i \left(\frac{2t}{H} - 1 \right). \quad (3.64)$$

При $n = 2$ та $H = 1$ для знаходження коефіцієнтів многочлена

$$x_{2v}(t) = \alpha_{0v} + \alpha_{1v}t + \alpha_{2v}t^2 \quad (3.65)$$

необхідно використати зміщені поліноми Чебишева.

Остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} & \alpha_{0v} + \alpha_{1v}t + \alpha_{2v}t^2 = \\ & = t - \int_0^t (\alpha_{0v} + \alpha_{1v}s + \alpha_{2v}s^2)^2 ds - \\ & - (\tau_{3v}(32t^3 - 48t^2 + 18t - 1) + \tau_{4v} \times \\ & \times (128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t + 1) + \tau_{5v}(512t^5 - \\ & - 1280t^4 + 1120t^3 - 400t^2 + 50t - 1)). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Система (3.49) в даному випадку прийме вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & -32 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -48 & 160 & -400 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & -256 & -1120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & -1280 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 512 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_{0v} \\ \alpha_{1v} \\ \alpha_{2v} \\ \tau_{3v} \\ \tau_{4v} \\ \tau_{5v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 - \alpha_{0v}^2 \\ -\alpha_{0v}\alpha_{1v} \\ (-1/3)\alpha_{1v}^2 - (2/3)\alpha_{0v} \\ (-1/2)\alpha_{1v}\alpha_{2v} \\ (-1/5)\alpha_{2v}^2 \end{vmatrix}. \quad (3.67)$$

Знаходимо розв'язки (3.67)

$$\alpha_{0v} = -0.0043,$$

$$\alpha_{1v} = 1.0921,$$

$$\alpha_{2v} = -0.3246,$$

$$\tau_{3v} = -0.0033,$$

$$\tau_{4v} = 0.001, \quad \tau_{5v} = -4.1171.$$

Остаточню напругу на елементах електричного кола

$$u(t) = \frac{3}{5} x_{2v}(t) = \tag{3.68}$$

$$= -0.0026 + 0.6553t - 0.1948t^2.$$

Графіки точного розв'язку та наближеного з використанням інтегро-апроксимаційного алгоритму, а також графік відносної похибки зображені на рис. 3.17 та рис. 3.18 відповідно.

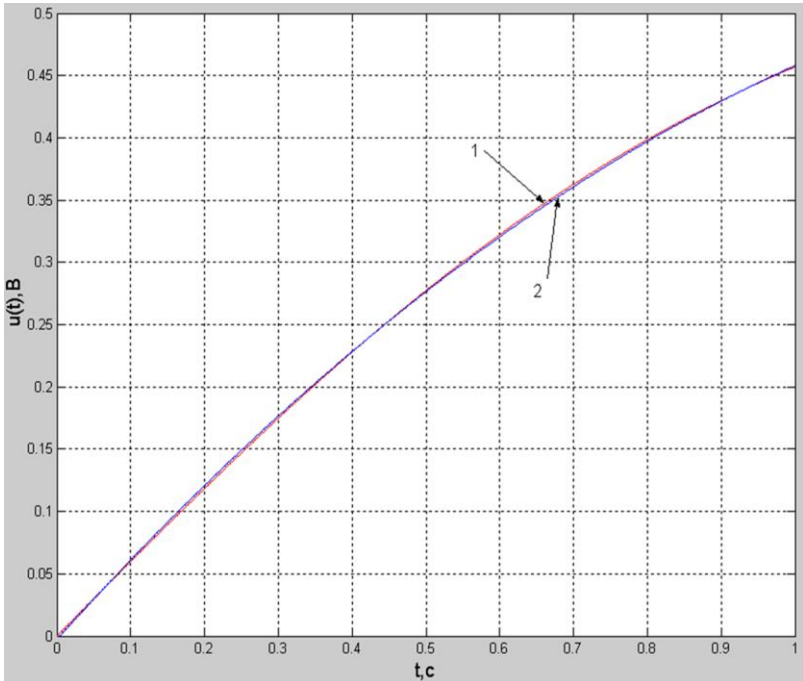


Рис. 3.17. Графіки напруги до прикладу 3.6:
 1 – точний розв'язок; 2 – наближений розв'язок з використанням інтегро-апроксимаційного алгоритму

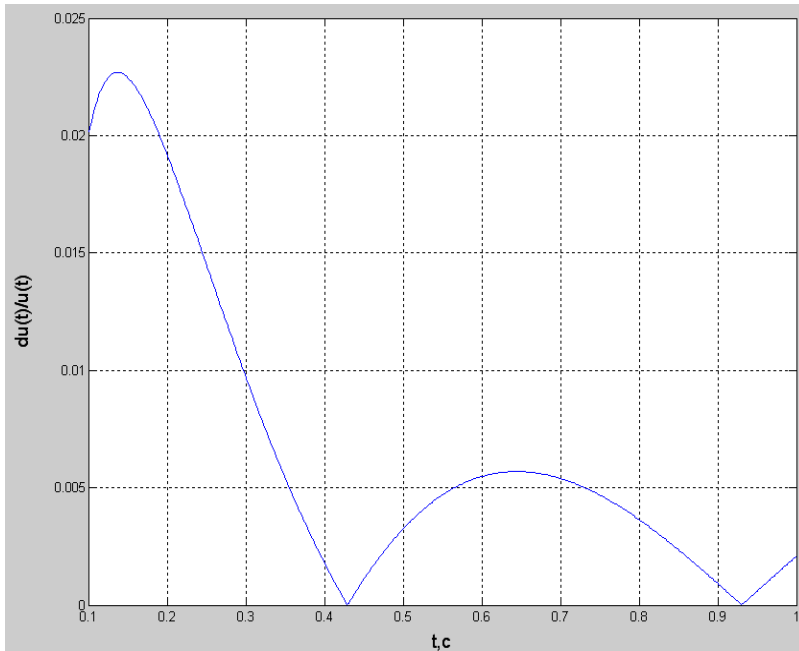


Рис. 3.18. Графік відносної похибки до прикладу 3.6

Таким чином на наочних прикладах показано, що розглянутий інтегро-апроксимаційний алгоритм дає можливість ефективно використовувати комп'ютер при реалізації ненасичуваних обчислювальних методів розрахунку як лінійних, так і нелінійних електричних кіл, що особливо важливо у випадку жорстких систем, а також отримати максимально можливу точність отримуваних поліноміальних розв'язків.

3.4. Розв'язування задачі ідентифікації інтегральних динамічних моделей

Під ідентифікацією в загальній теорії систем розуміють визначення вигляду і кількісних характеристик операторів, що описують дану систему. При цьому передбачається, що на систему можна подавати певні тестові дії і вимірювати відгуки на них. Отримана інформація служить основою для наближеної побудови відповідного оператора.

Якщо за оператор, що описує електричне коло, прийнята його електрична принципова схема, то задачею ідентифікації може служити визначення параметрів схеми. Подібна ж задача виникає при діагностиці кола, тобто при визначенні несправних елементів [31].

Задача ідентифікації електричних кіл є досить актуальною у зв'язку з необхідністю контролювати їх функціонування в процесі експлуатації, який, як правило, супроводжується природною зміною параметрів кіл. В такому випадку фактичні значення параметрів визначаються шляхом обробки експериментальних даних, отриманих при безпосередньому вимірюванні струмів чи напруг в точках контролю, кількість яких обмежена. Крім того, методи ідентифікації застосовуються для отримання макромодель сучасних складних електричних і електронних кіл, що дозволяє спростити задачі математичного моделювання при проектуванні пристроїв та створенні систем керування.

Традиційний підхід при розв'язуванні задачі параметричної ідентифікації передбачає, у переважній більшості випадків, знаходження коефіцієнтів диференціального рівняння, що описує електричне коло, оптимізаційними методами [39]. Проте можливості такого підходу до вирішення задачі ідентифікації обмежені перш за все при вимірюванні вхідних та вихідних сигналів на тлі високочастотних завад в тому числі і шумових. Далі будемо розглядати методи ідентифікації, пов'язані із застосуванням інтегральних динамічних моделей електричних кіл [21].

Застосування інтегральних динамічних моделей [27, 15] у багатьох випадках дозволяє отримувати стійкі по відношенню до похибок початкових даних алгоритми ідентифікації електричних кіл [27, 28].

Розглянемо *стаціонарне електричне коло*. Нехай електричне коло описується інтегральним рівнянням Вольтерри II роду

$$u(t) + \int_0^1 K(t, s)u(s)ds = F(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.69)$$

де

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^m p_j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!}, \quad m \in N,$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s)ds + \sum_{j=1}^{m-1} C_j \frac{t^j}{j!} + \sum_{j=1}^{m-1} p_j \sum_{k=0}^{m-j-1} C_k \frac{t^{k+j}}{(k+j)!}, \quad (3.70)$$

C_k – відомі величини; p_j – параметри, що ідентифікуються; $u(t)$, $f(t)$ – відповідно вхідний і вихідний сигнали досліджуваного електричного кола.

Неважко помітити, що рівняння (3.69) з ядром $K(t, s)$ та вільним членом $F(t)$ виду (3.70) еквівалентне диференціальному рівнянню вигляду

$$u^{(m)}(t) + p_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + p_m u(t) = f(t), \quad u^{(k)}(0) = C_k, \quad k = \overline{1, m-1}. \quad (3.71)$$

Проте при довільних $K(t, s)$ і $F(t)$ моделі вигляду (3.69) є більш загальними, ніж моделі вигляду (3.70), оскільки вони можуть містити розривні рішення.

Для формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів p_i , $i = \overline{1, m}$ рівняння (3.69) з урахуванням (3.70) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m p_i \left[\int_0^t \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} u(s) ds - \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t^{k+i}}{(k+i)!} \right] = \\ = \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds - u(t) + \sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{t^i}{i!}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

З (3.72) для точок фіксації (вимірювання), $t = t_j$, $j = \overline{1, N}$, де N – кількість фіксацій; $t_N = T$ – період вимірювань, $h = \frac{T}{N}$ – крок вимірювань, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів

$$\sum_{i=1}^m A_{ji} p_i = F_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (3.73)$$

де

$$A_{ji} = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{i-1}}{(i-1)!} u(s) ds - \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t_j^{k+i}}{(k+i)!}, \quad (3.74)$$

$$F_j = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds - u(t_j) + \sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{t_j^i}{i!}. \quad (3.75)$$

Використовуючи біном Ньютона для виразів $(t_j - s)^{i-1}$, $(t_j - s)^{m-1}$, запишемо інтеграли, що входять в (3.74) та (3.75):

$$B_{ji} = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{i-1}}{(i-1)!} u(s) ds = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{l=0}^{i-1} C_{i-1}^l t_j^{i-1-l} (-1)^l \int_0^{t_j} s^l u(s) ds, \quad (3.76)$$

$$R_j = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k t^{m-1-k} (-1)^{k-1} \int_0^{t_j} s^k f(s) ds, \quad (3.77)$$

$$\text{де } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Якщо для обчислення інтегралів

$$D_{jl} = \int_0^{t_j} s^l u(s) ds, \quad (3.78)$$

$$Q_{jk} = \int_0^{t_j} s^k f(s) ds$$

застосувати формулу трапецій, то отримаємо

$$\begin{aligned} D_{jl} &\approx [(jh)^l u(jh) + 2 \sum_{v=1}^{j-1} (vh)^l u(vh)]h, \\ Q_{jk} &\approx [(jh)^k f(jh) + 2 \sum_{v=1}^{j-1} (vh)^k f(vh)]h. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Розрахункові вирази для B_{ji} , R_j мають вигляд

$$\begin{aligned} B_{ji} &\approx \frac{1}{(i-1)!} \sum_{l=0}^{i-1} C_{i-1}^l t_j^{i-j-l} (-1)^l [(jh)^l u(jh) + 2 \sum_{v=1}^{j-1} (vh)^l u(vh)]h, \\ R_j &\approx \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k t_j^{m-1-k} (-1)^k [(jh)^k f(jh) + 2 \sum_{v=1}^{j-1} (vh)^k f(vh)]h. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Таким чином, елементи матриці системи лінійних рівнянь (3.73) і правої частини формуються згідно виразів

$$A_{ji} = B_{ji} - \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t_j^{k+i}}{(k+i)!}, \quad (3.81)$$

$$F_j = R_j - u(t_j) + \sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{t_j^i}{i!}, \quad (3.82)$$

і розв'язання системи (3.73) дає шукані коефіцієнти (параметри елементів електричного кола).

Розглянемо *нестаціонарне електричне коло*. Традиційний підхід при розв'язуванні вказаних задач ґрунтується, як правило, на застосуванні звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\sum_{i=0}^r A_i(t) u^{(r-i)}(t) = f(t), \quad (3.83)$$

де $f(t)$, $u(t)$ – як і раніше, вхідний і вихідний сигнали відповідно; $A_i(t)$ – змінні коефіцієнти.

Розглянемо алгоритми відновлення параметрів нестаціонарних електричних кіл на основі інтегральних рівнянь із застосуванням суматорних операторів.

Позначимо, відповідно до [67], через L_q^k – простір функцій, що мають на $[0, T]$ абсолютно неперервну похідну порядку $k-1$ і q -ту степінь модуля kq похідної, що інтегрується по Лебегу ($L_q^0 := L_q$).

Норма в цьому просторі визначається за формулами

$$|\varphi|_q := \left\{ \int_0^T |\varphi(t)|^q dt \right\}^{1/q} \quad \text{при } 1 \leq p \leq \infty, \quad (3.84)$$

а при $q = \infty$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} \text{Grai}|\varphi(t)|. \quad (3.85)$$

Припустимо, що значення вхідного і вихідного сигналів задані так само, як і в стаціонарному випадку.

Крім того, вважатимемо, що u, f належать відповідно деяким класам функцій $u \in Y \subset L_q^k, f \in F \subset L_1$.

Розглянемо задачу відновлення параметрів $\{A_i(t)\}_{i=0}^r$ нестационарного електричного кола з припущенням, що вони мають вигляд

$$A_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \varphi_j(t), \quad m_i \in N, \quad i = \overline{0, r}, \quad (3.86)$$

де a_{ij} – невідомі, підлягаючі визначенню числа; $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^m$ ($m := \max_{0 \leq i \leq r} m_i$) – деяка система лінійно незалежних функцій

$$\varphi_j \in L_\infty^k, \quad j = \overline{1, m}.$$

Щоб уникнути розв'язання некоректної задачі чисельного диференціювання і, відповідно до рекомендацій з робіт [18], перейдемо на підставі теореми еквівалентності з роботи [49] (через наші припущення про гладкість функцій u, f, φ_j) від моделі до інтегрального рівняння Вольтерри III роду:

$$A_0(t)u(t) + \int_0^T K(t, s)u(s)ds = F(t), \quad (3.87)$$

де

$$K(t, r) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} C_r^j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} A_0^{(j)}(s) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{r-k-1} \frac{B_j^{(r-k)}(A_{r-k}, u)}{r(j+k)!} t^{j+k} + l_r(f), \quad (3.88)$$

$$F(t) = \sum_{k=0}^r \sum_{j=0}^{r-k-1} \frac{B_j^{(r-k)}(A_{r-k}, u)}{r(j+k)!} t^{j+k} + l_r(f), \quad (3.89)$$

$$B_j^{(r-k)}(A_{r-k}, u) = \frac{r!}{j!} \sum_{v=0}^j C_j^v A_{r-k}^{(v)}(0) u_{j-v} \sum_{i=0}^v (-1)^i \frac{(j-k)!}{(r-k-v)!} C_v^i. \quad (3.90)$$

Через $l_r(f)$ позначений r -й інтеграл від вхідного сигналу:

$$l_r(f; t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s) ds, \quad (3.91)$$

$$u_k := u^k(0), \quad k = \overline{0, r-1}. \quad (3.92)$$

У зв'язку з тим, що на практиці, як правило, число вимірювань (точок квантування) N і число невідомих параметрів $M := \sum_{i=0}^r m_i$ не рівні, а також у зв'язку з необхідністю ефективного обчислення інтегралів в (3.87) і (3.88), розглянемо питання отримання нормальних систем лінійних рівнянь відносно $\{a_{ij}\}_{i=0, r}^{j=1, m_i}$ на основі попередньої апроксимації вихідних даних $u(t_i)$ і $f(t_i)$, $i = \overline{1, N}$, за допомогою суматорних операторів вигляду, що наведені в [24].

Не обмежуючи спільності міркувань і щоб уникнути громіздкості викладок, припускаємо надалі, що в (3.92)

$$u_k := u_k(0) = 0, \quad k = \overline{0, r-1}, \quad (3.93)$$

а функції $\{\varphi_i(t)\}$, $i = \overline{1, m}$, а також $\omega_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, такі, що інтеграли вигляду

$$\int \tau^v \omega_k(\tau) d\tau, \int \tau^v \omega_k(\tau) \varphi_i^{(j)}(\tau) d\tau, \quad v = 1, 2 \dots; \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{0, r},$$

обчислюються точно.

Інтегро-суматорний алгоритм відновлення параметрів полягає в наступному:

- 1) представляючи за допомогою суматорного оператора U_n вхідний і вихідний сигнали, переходимо від рівняння моделі до відповідної наближеної інтегральної моделі

$$A_0(t)U_n(\tilde{u}; t) + \int_0^t K(t, s)U_n(u; s) ds = l_r(U_n, f, t), \quad (3.94)$$

$$\text{де } l_r(U_n, \tilde{f}, t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{r-1} U_n(\tilde{f}; \tau) d\tau;$$

2) дискретизуючи рівняння (3.94) в яких-небудь точках, переходимо до наступної системи з лінійних алгебраїчних рівнянь відносно M невідомих наближених значень невідомих параметрів

$$\sum_{s=0}^r \sum_{\mu=0}^{m_s} a_{s\mu} \psi_{s\mu}(U_n u; \xi_i) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{\xi} (\xi_i - t)^{r-1} U_n(f; \tau) d\tau, \quad (3.95)$$

де при $S = 0$

$$\psi_{0\mu}(u_n \tilde{u}; \xi_i) = \varphi_{\mu}(\xi_i) U_n(\tilde{u}, \xi_i) + \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} C_r^j \int_0^{\xi} (\xi_i - \tau)^{j-1} \varphi_{\mu}^{(j)}(\tau) U_n(\tilde{u}; \tau) d\tau,$$

а при $s = \overline{1, r}$

$$\psi_{s\mu}(U_n u; \xi_i) = \sum_{j=0}^{r-s} C_{r-s}^j \frac{(-1)^{j-1}}{(s+j-1)!} \int_0^{\xi} (\xi_i - t)^{s+j-1} \varphi_{\mu}^{(j)} U_n(\tilde{u}; \tau) d\tau; \quad (3.96)$$

3) розв'язуючи систему (3.95), знаходимо матрицю $\{\tilde{a}_{ij}\}_{i=0, r}^{j=1, m_i}$ наближених значень відновлюваних параметрів.

Оцінка похибки інтегрального алгоритму ідентифікації параметрів електричного кола. Для оцінки похибки алгоритму ідентифікації [24] стаціонарного електричного кола введемо наступні норми векторів та матриць

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.97)$$

$$\|C\|_1 = \max_{i=1}^m |C_{ij}|, C = |C_{ij}|^m, i, j = 1. \quad (3.98)$$

Припустимо, що значення вхідного сигналу $f(t)$ вимірюються через рівні проміжки часу h в моменти часу $t_1 = t_0 + jh, j = \overline{1, m}$ з похибкою σ_1 , тобто

$$\bar{j}(t_j) = j(t_j) + \sigma_j, \max_j |\sigma_j| = \sigma, \quad (3.99)$$

де $j(t_1)$ – точні, а $\bar{j}(t_1)$ – виміряні значення вхідного сигналу.

Припустимо також, що в ці моменти часу відомі значення вихідного сигналу

$$\bar{u}(t_j) = u(t_j) + \varepsilon_j; j = \overline{1, N}, \max_j |\varepsilon_j| = \varepsilon. \quad (3.100)$$

Будемо вважати, що для обчислення інтегралів в (3.78) використовуються квадратурні формули виду

$$\int_0^{t_j} s^l u(s) ds = \sum_{k=1}^{n_j} \Theta_{kj} s_k^l u(s_k) + r_{1j}(h), l = \overline{0, m-1}; \quad (3.101)$$

$$\int_0^{t_j} s^l f(s) ds = \sum_{k=1}^{m_j} \Theta_{kj} s_k^l f(s_k) + r_{2j}(h), \quad (3.102)$$

з залишковими членами $O(h^\nu)$, тобто

$$r_{1j}(h) = a_1 h^\nu, \quad (3.103)$$

$$r_{2j}(h) = a_2 h^\nu, \quad (3.104)$$

де n_j, m_j – кількість вузлів квадратурної формули; Θ_{kj} – коефіцієнти квадратурної формули; a_1, a_2 – постійні.

При цих умовах замість системи рівнянь (3.73) відносно параметрів p_i розглянемо систему рівнянь відносно вектора наближених значень \bar{p}_i :

$$(A + \Delta A) \bar{p} = F + \Delta F, \quad (3.105)$$

де

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{l=0}^{i-1} C_{i-1}^l t_j^{i-1-l} (-1)^l (\alpha_j + a_1 h^\nu), \quad (3.106)$$

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^{m_j} \Theta_{kj} \varepsilon_k s_k^l, \quad (3.107)$$

$$\Delta F_j = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l t_j^{n-1-l} (-1)^l (\beta_j - \varepsilon_j), \quad (3.108)$$

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{m_j} \Theta_{kj} \varepsilon_k \omega \sigma_k^l. \quad (3.109)$$

Тоді справедливе наступне твердження.

Твердження. Для абсолютної та відносної похибок інтегрального методу ідентифікації параметрів p моделі (3.69) на основі обчислення інтегралів по формулам (3.101) і (3.102) та розв'язання системи рівнянь (3.105) справедливі оцінки

$$\|p - \bar{p}\| \leq \|A^{-1}\| \| [M_m(h, \sigma, \varepsilon) + v_m(h, \sigma, \varepsilon)] \| \|p\|, \quad (3.110)$$

$$\frac{\|\Delta p\|}{\|p\|} \leq \tau(A) \frac{v_m(h, \sigma, \varepsilon)}{\|F\|}, \quad (3.111)$$

де

$$M_m(h, \sigma, \varepsilon) = \left[\max_j \left(\sum_{k=1}^{m_j} \Theta_{kj} s_k^l \right) + a_1 h^\nu \right] \sum_1, \quad (3.112)$$

$$v_m(h, \sigma, \varepsilon) = \left[\sigma \max_j \left(\sum_{k=1}^{m_j} \Theta_{kj} s_k^l \right) + a_2 h^\nu \right] \sum_2 + m \varepsilon_0, \quad (3.113)$$

$$\sum_1 = \max_i \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{l-1} \frac{T^{i-1-l}}{l!(i-1-l)!}, \quad (3.114)$$

$$\sum_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{m-1} \frac{T^{i-1-l}}{l!(i-1-l)!}, \quad (3.115)$$

$\tau(A)$ – міра обумовленості матриці A .

Доведення вищенаведеного твердження міститься в [24].

Для оцінки похибки інтегро-суматорного алгоритму ідентифікації параметрів нестационарного електричного кола експериментально заданими вхідним і вихідним сигналами у вигляді (3.99) та (3.100) можливо скористатися теоремою (3.16) [24].

Приклад 3.7. Для підтвердження працездатності запропонованого методу та його особливостей було проведено ряд обчислювальних експериментів в програмному середовищі MATLAB, коли по заданій електричній схемі та відомими вхідному та вихідному сигналами, визначаються параметри елементів досліджуваного електричного кола. Визначається середньоквадратична похибка та її залежність від похибок вимірювання вихідного та вхідного сигналів.

Одна із схем модельних задач для ідентифікації параметрів подана на рис. 3.19.

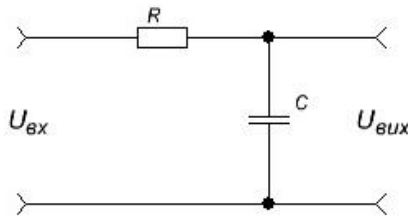


Рис. 3.19. Розрахункова схема модельної задачі

Диференціальне рівняння схеми має вигляд

$$\frac{dU_{вих}}{dt} + \frac{1}{RC}U_{вих} = \frac{1}{RC}U_{вх}, \quad U_{вих}(0) = 0, \quad 1/RC = 37. \quad (3.116)$$

З рівняння (3.116) шляхом еквівалентних перетворень отримуємо модель у вигляді інтегрального рівняння Вольтерри II-го роду

$$U_{вих} = U_{вих}(0) - \int_0^t \frac{1}{RC}(U_{вих} - U_{вх})ds. \quad (3.117)$$

Для формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів p_i (для даної схеми $p_i = 1/RC$, $i = 1$) рівняння (3.117) запишемо у вигляді

$$p_1(U_{вих} - U_{вих}(0)) = \int_0^t (U_{вх} - U_{вих}) ds . \quad (3.118)$$

Далі для точок фіксації (вимірювання) $t = t_j$; $j = \overline{1, N}$, де N – кількість фіксацій; $t_N = T$ – період вимірювання, $h = \frac{T}{N}$ – крок вимірювань, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів

$$A_j p_1 = F_j ,$$

де

$$A_j = U_{вих}(t_j) - U_{вих}(0) ,$$

$$F_j = \int_0^{t_j} (U_{вх}(t_j) - U_{вих}(t_j)) ds . \quad (3.119)$$

Використовуючи вирази (3.117)-(3.119) і квадратурну формулу трапецій для апроксимації інтегралів, що входять до виразу (3.119), отримуємо СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів, причому система є несумісною. Застосовуючи для її розв’язування метод найменших квадратів отримуємо значення невідомих коефіцієнтів – $p_1 = 37,0671$.

Порівнюючи розв’язки рівняння (3.116) відповідно при точному значення коефіцієнта $p_1 = 37$, та при отриманому значенні в результаті розрахунку $p_1 = 37,0671$, отримуємо середньоквадратичну похибку $\Delta = 1,2397 \times 10^{-4}$. Також було розраховано значення $p_1 = 37,2927$ на основі підходу, що базується на використанні диференціальних рівнянь, а середньоквадратична похибка в цьому випадку – $\Delta = 1,027 \times 10^{-3}$.

Розглянемо випадок коли до вихідного сигналу додаємо випадкову заваду, розподілену по нормальному закону. В табл. 3.4 наведені значення коефіцієнтів p_1 , отриманих при різних значеннях завад

Таблиця 3.4

Випадкова завада з середньоквадратичним відхиленням, В; (%)	Інтегральний метод		Диференціальний метод	
	p	Середньоквадратична похибка	p	Середньоквадратична похибка
0,001 (0,1)	37,0679	$1,2469 \times 10^{-4}$	30,6106	0,0276
0,01 (1)	37,0721	$1,4653 \times 10^{-4}$	1,6997	0,2006
0,1 (10)	37,3744	0,0014	0,2656	0,2126
0,2 (20)	35,9887	0,0044	–	–
0,4 (40)	29,5643	0,0323	–	–
0,6 (60)	22,0445	0,0689	–	–

Розглянемо далі випадок коли вихідний сигнал вимірюється з адитивною низькочастотною гармонічною завадою. В табл. 3.5 наведені значення коефіцієнтів p_1 , що отримані при різних значеннях завод.

Таблиця 3.5

Гармонічна завада ($T = 400$ С) з амплітудою, В; (%)	Інтегральний метод		Диференціальний метод	
	p	Середньо- квадратична похибка	p	Середньо- квадратична похибка
0,001 (0,1)	37,0340	$1,24 \times 10^{-4}$	37,2991	$1,01 \times 10^{-3}$
0,01 (1)	36,7348	$1,21 \times 10^{-3}$	36,5240	$2,1 \times 10^{-3}$
0,1 (10)	33,5338	0,0147	27,8045	0,0405
0,2 (20)	29,6113	0,0321	18,9139	0,0856
0,4 (40)	21,1760	0,0735	9,1441	0,1450
0,6 (60)	12,9129	0,1206	5,1478	0,1735

Розглянемо ще один випадок коли вихідний сигнал вимірюється з адитивною завадою постійного рівня. В табл. 3.6 наведені значення коефіцієнтів p_1 , які отримано при різних значеннях завод.

Таблиця 3.6

Завада постійного рівня з величиною, В; (%)	Інтегральний метод		Диференціальний метод	
	p	Середньо- квадратична похибка	p	Середньо- квадратична похибка
0,001 (0,1)	36,7996	$9,5287 \times 10^{-4}$	37,2186	$7,3476 \times 10^{-4}$
0,01 (1)	34,4185	0,0109	36,5519	0,002
0,1 (10)	12,9098	0,1206	29,8843	0,0309
0,2 (20)	- 6,9210	-	22,4759	0,0667
0,4 (40)	-	-	7,6592	0,1553
0,6 (60)	-	-	-	-

Таким чином, розглянутий метод може бути ефективно використаний при розв'язуванні задач параметричної ідентифікації електричних кіл, що характеризуються наявністю похибок у вихідних даних. Також метод може бути успішно використаний при знаходженні виду оператора об'єкта ідентифікації при структурно-параметричній ідентифікації.

4. МЕТОД ПІДСУМОВУВАННЯ СКІНЧЕННИХ ПРИРОСТІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ В НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

4.1. Аналог методу накладання для нелінійних кіл

Прийом, що узагальнює метод накладання на нелінійні кола, названий тут аналогом методу накладання для нелінійних кіл, вперше було викладено в роботі В. М. Бондаренка [12].

Якщо записати систему рівнянь будь-якого з методів розрахунку лінійного кола, то виявиться, що джерела енергії входять в праву частину складовими з постійними коефіцієнтами, тобто праві частини є лінійними комбінаціями величин джерел енергій (джерел е.р.с. і струму). Записавши за допомогою визначників кінцеві вирази для шуканих струмів або напруг, легко переконатися, що вони складаються з окремих доданків, рівних кількості джерел енергії. Величина кожного доданка є значенням джерела енергії, помноженим на коефіцієнт, який визначається величинами опорів кола і схемою їх з'єднання. З цієї обставини слідує метод накладання: визначаються часткові струми як результат окремої дії кожного джерела; шукане значення струму знаходиться як сума часткових струмів.

Механічне перенесення цього методу на нелінійні кола, природньо, призводить до невірному результату. Правильний результат може бути отриманий, якщо буде вироблено прийом, що може узагальнювати метод накладання в лінійних колах. А сам класичний метод накладання повинен бути окремим випадком такого узагальненого прийому, аналогічно як лінійні кола є окремим випадком нелінійних. Таким узагальненим прийомом є спосіб, що включає послідовне перенесення початку координат в робочі точки нелінійних характеристик.

Теорема 1. Аналог методу накладання для нелінійних кіл.

Часткові струми (або скінченні прирости струмів), викликані включенням нового джерела енергії в нелінійне коло, рівні відповідним струмам такого ж нелінійного кола, в якому:

- а) діє тільки знову введене джерело енергії;
- б) всі інші джерела енергії прирівняні до нуля;
- в) початки координат нелінійних характеристик перенесені в точки, відповідні попередньому режиму (до включення нового джерела енергії).

Примітка: нове джерело енергії включається таким чином, що якщо його величину прирівняти до нуля, то коло повернеться до попереднього режиму.

Спрощене доведення теореми виконано на прикладі кола, що описується системою двох нелінійних рівнянь [12]. Сума двох часткових розв'язків, отриманих в результаті роздільної дії правих частин системи при перенесенні початку координат, задовольняє вихідній системі рівнянь. Доведення приведено для випадку присутності в рівняннях функцій однієї змінної, тобто кіл з нелінійними двополюсниками.

Викладемо доведення для більш загального випадку функцій декількох змінних, тобто кіл з нелінійними багатополосниками. Нехай задане коло описується системою нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_1 + b_{n+1}, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Припустимо спочатку, що $b_{n+1} = 0$, і для цього випадку якимось способом отримано перший частковий розв'язок $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_n^{(1)})$, так що задовольняються співвідношення

$$\begin{aligned} f_1^{(1)} &= f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_n^{(1)}) = b_1, \\ f_2^{(1)} &= f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_n^{(1)}) = b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n^{(1)} &= f_n(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_n^{(1)}) = b_n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Переносимо початок координат функцій в точки, відповідні частковому розв'язку

$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} f_1^{(1)})$, $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} f_2^{(1)})$, ..., $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} f_n^{(1)})$, які на підставі (4.2) є

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} b_1), (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} b_2), \dots, (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} b_n).$$

У нових координатах позначимо незалежні змінні через $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, а відповідні функції як $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$. Тепер в нових координатах діє тільки перша частина b_{n+1} :

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= b_{n+1}, \\ \bar{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{f}_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Корені цієї системи $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$ є новими частинними значеннями шуканого розв'язку системи (4.1). Для підтвердження того, що значення

нійного кола. Дії, зазначені теоремою і її наслідками, при цьому є не чим іншим, як відомим методом накладання для лінійних кіл. Перенесення початку координат тут не має значення, оскільки не змінює виду вольт-амперної характеристики. Ця обставина дозволяє прийом, що вказується теоремою 1 і її наслідками, вважати аналогом методу накладання для нелінійних кіл. Таким чином, у зазначеному тут сенсі узагальнюється метод накладання на нелінійні кола.

Іншим відомим окремим випадком теореми 1 є спосіб еквівалентних лінійних схем заміщення при малих сигналах. При дії на коло великої є.р.с. постійного струму і малої є.р.с. змінного струму, спочатку знаходяться робочі точки як результат дії першої з них. Потім у робочих точках, зважаючи на малу величину другої є.р.с., виконується лінеаризація. Поведінка кола розглядається в сенсі малих приростів, тобто фактично виробляється перенесення початку координат в робочі точки. Кожен результуючий струм знаходиться як сума двох струмів, а саме: того, що визначає робочу точку та струму, викликаного малим сигналом.

4.2. Прирости в колах постійного струму

Розглянута вище теорема і її наслідки не накладали обмеження на величини є.р.с., що підключалися але і не вказували методів визначення частинних струмів. Теорема, що буде представлена нижче і її наслідки є граничними, оскільки мають справу з випадком, де є в наявності малі прирости є.р.с., напруг і струмів. Ця теорема і її наслідки мають важливе практичне значення, оскільки дозволяють перейти до чисельних методів і алгоритмів, що, в свою чергу, виводить представлений аналог методу накладання для нелінійних кіл до можливості практичного використання.

Теорема 2. Про прирости струмів і напруг в нелінійних колах постійного струму.

Для кола, що містить пасивні (при $u = 0$ та $i = 0$) нелінійні дво-полюсники, прикладену є.р.с. E розіб'ємо на h рівних частин ΔE . Прирости ж струмів (чи напруг гілок) на кожному кроці послідовного підключення малих є.р.с. будемо знаходити як результат впливу є.р.с. ΔE на пасивне лінійне коло, отримане з вихідного шляхом заміни нелінійних елементів лінійними, рівними їх динамічними провідностями в робочих точках, визначених як суми попередніх приростів струмів (напруг гілок кола). За умови неперервності нелінійних характеристик і обмеженості динамічних провідностей (опорів) наближеними значеннями невідомих струмів (напруг) будуть суми h їх приростів, які при $h \rightarrow \infty$ прямують до своїх істинних значень.

Для спрощеного доведення розглянемо коло з нелінійним елементом з відомою характеристикою i е.р.с. E (рис. 4.1, а). Розділимо е.р.с. на h рівних частин (рис. 4.1, б). На рис. 4.1,а зображено лінійне коло для знаходження частинних струмів

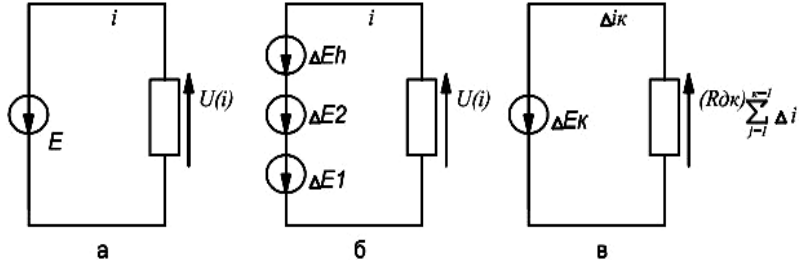


Рис. 4.1. Етапи застосування кола з нелінійним елементом

У цьому випадку

$$\Delta i_1 = \frac{\Delta E}{\left(\frac{du}{di}\right)_0}; \quad \Delta i_2 = \frac{\Delta E}{\left(\frac{du}{di}\right)_{\Delta i_1}}; \quad \Delta i_3 = \frac{\Delta E}{\left(\frac{du}{di}\right)_{(\Delta i_1 + \Delta i_2)}}; \dots \quad (4.6)$$

Близьке значення струму знаходимо як

$$i = \sum_{K=1}^h \Delta i_K, \quad (4.7)$$

або

$$i = \sum_{K=1}^h \frac{1}{\left(\frac{du}{di}\right)_{\sum_{j=1}^{K-1} \Delta i_j}} \Delta E. \quad (4.8)$$

Переходячи до межі при $h \rightarrow \infty$, коли $\sum_{K=1}^h \Delta E = E$ за умовою, вважаємо, що $i \rightarrow i^*$ (точніший розв'язок). Тоді

$$i^* = \frac{1}{\left(\frac{du}{di}\right)} de. \quad (4.9)$$

Оскільки для даного випадку $du = de$, то

$$i^* = \int_0^{i^*} di, \quad (4.10)$$

тобто припущення вірне і теорема доведена.

Наслідок 2-1. При обчисленні скінченних приростів струмів в колі, що містить нелінійні багатополіусники, останні повинні на кожному кроці представлятися рівняннями з малими приростами. Таке представлення дають відомі лінійні схеми заміщення, параметри яких в даному випадку міняються від кроку до кроку. Таким чином, лінійні схеми заміщення, що широко використовуються для дослідження малосигнальних кіл, придатні для обчислення статичних станів нелінійних кіл: в режимі великих сигналів.

Наслідок 2-2. Для наближених значень струмів і напруг, отриманих на підставі застосування теореми 2 при скінченному числі h , нев'язки можуть бути отримані у формі джерел струму і е.р.с. (джерела нев'язок). Тоді виявляється, що наближені значення є точними для вихідного кола, в якому включені джерела нев'язок. Невідомі струми і напруги можуть бути уточнені знаходженням часткових струмів від нових джерел енергії, рівних за величиною джерелам нев'язок і спрямованих протилежно (компенсуючих джерел). Останню процедуру, в разі необхідності, можна виконати також із застосуванням теореми 2.

Розглянуті співвідношення відносяться до варіанту підсумовування струмів. Теорема вказує також на варіант підсумовування напруг (вирази у дужках). При цьому вважаємо, що до нелінійного елемента з відомою залежністю $i = i(u)$ підключене джерело струму I^* . Цьому варіанту відповідають вирази

$$u = \sum_{K=1}^h \frac{1}{\left(\frac{di}{du}\right)_{\sum_{j=1}^{K-1} \Delta u_j}} \cdot \Delta I, \quad (4.11)$$

$$u^* = \int_0^{I^*} \frac{1}{\left(\frac{di}{du}\right)_{u(\bar{i})}} d\bar{i}. \quad (4.12)$$

Доведення теореми проводиться так само, як для варіанту підсумовування струмів.

Для більш складних кіл теорему можна довести аналогічно, розглядаючи співвідношення векторів струмів і напруг і їх приростів, із залученням узагальнених рівнянь нелінійних кіл [12].

4.3 Інтегральні аналоги законів Ома і Кірхгофа, інтегральні рівняння кіл постійного струму

В принципі інтеграл (4.9) встановлює залежність струму від прикладеної напруги у всьому інтервалі його вимірювання.

Тому

$$i(E) = \int_0^E \frac{1}{r_{\partial}(i(e))} de. \quad (4.13)$$

Таким чином, приходимо до інтегрального трактування задачі аналізу нелінійного кола постійного струму.

В окремому випадку лінійного кола, для якого інтегральне трактування не має важливого значення, $r_{\partial}(i(e)) = r$, тоді

$$i(E) = \frac{1}{r} \int_0^E de = \frac{E}{r}.$$

Тому співвідношення (4.1) можна тлумачити також як і інтегральний аналог закону Ома для нелінійного двополюсника. З цієї точки зору його доцільно записати у вигляді

$$i(u) = \frac{1}{r} \int_0^u \frac{1}{r_{\partial}(i(v))} dv. \quad (4.14)$$

Для зручності запису наступних рівнянь введемо позначення

$$\tilde{g}_{\partial}(i(v)) = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial i}\right)_{i(v)}} = \frac{1}{r_{\partial}(i(v))}, \quad (4.15)$$

$$\tilde{r}_{\partial}(u(\bar{i})) = \frac{1}{\left(\frac{\partial i}{\partial u}\right)_{u(\bar{i})}} = \frac{1}{g_{\partial}(u(\bar{i}))}. \quad (4.16)$$

Крім того, зробимо заміну змінних $\alpha u = v$, $\alpha i = \bar{i}$.

Тоді інтегральний аналог закону Ома для нелінійного двополюсника із заданою залежністю $i(u)$ приймає вигляд

$$i(\alpha u) = \int_0^{\alpha} \tilde{g}_{\partial}(i(\bar{\alpha}u)) \cdot u \cdot d\bar{\alpha}, \quad (4.17)$$

де інтегрування проводиться по безрозмірному параметру.

Для двополюсника із заданою залежністю $i(u)$, аналог закону Ома буде виглядати:

$$u(\alpha i) = \int_0^{\alpha} \tilde{r}_{\partial}(u(\bar{\alpha}i)) \cdot i \cdot d\bar{\alpha}. \quad (4.18)$$

Якщо двополосник містить паралельне джерело струму I , то співвідношення (4.17) представляється в наступному вигляді

$$i(\alpha u) = \int_0^{\alpha} [\tilde{g}_{\partial}(i(\bar{\alpha}u)) \cdot u + I] d\bar{\alpha} = \int_0^{\alpha} \tilde{g}_{\partial}(i(\bar{\alpha}u)) \cdot u \cdot d\bar{\alpha} + \alpha I. \quad (4.19)$$

При наявності послідовної є.р.с. E (4.18) перетворюється в

$$u(\alpha i) = \int_0^{\alpha} [\tilde{r}_{\partial}(u(\bar{\alpha}i)) \cdot i + E] d\bar{\alpha} = \int_0^{\alpha} \tilde{r}_{\partial}(u(\bar{\alpha}i)) \cdot i \cdot d\bar{\alpha} + E\alpha. \quad (4.20)$$

Використовуючи наведені залежності, запишемо інтегральні аналоги законів Кірхгофа. Інтегральний аналог першого закону Кірхгофа має вигляд

$$\sum_{K=0}^m \left[\int_0^{\alpha} \tilde{g}_{\partial,K}(i_K(\bar{\alpha}u_K)) \cdot u_K d\bar{\alpha} + \alpha I_K \right] = 0, \quad (4.21)$$

або

$$\int_0^{\alpha} \left[\sum_{k=0}^m \tilde{g}_{\partial,K}(i_K(\bar{\alpha}u_K)) \cdot u_K + I_K \right] d\bar{\alpha} = 0. \quad (4.22)$$

Інтегральний аналог другого закону Кірхгофа також представляється в двох варіантах:

$$\sum_{k=0}^n \left[\int_0^{\alpha} \tilde{r}_{\partial,K}(u_K(\bar{\alpha}i_K)) \cdot i_K \cdot d\bar{\alpha} + E_K \alpha \right] = 0, \quad (4.23)$$

$$\int_0^{\alpha} \left[\sum_{K=0}^n \tilde{r}_{\partial,K}(u_K(\bar{\alpha}i_K)) \cdot i_K + E_K \right] d\bar{\alpha} = 0. \quad (4.24)$$

Щоб отримати систему інтегральних рівнянь нелінійних кіл постійного струму, необхідно скористатися інтегральними аналогами законів Ома і Кірхгофа і узагальненими рівняннями нелінійних кіл [92].

Система інтегральних рівнянь нелінійного кола щодо напруг гілок запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \Pi \cdot \vec{i}(\alpha \vec{u}) + \alpha \vec{I} = \Pi \cdot \int_0^{\alpha} \tilde{G}_{\partial}(\vec{i}(\bar{\alpha} \vec{u})) \cdot \vec{u} \cdot d\bar{\alpha} + \alpha \vec{I} = 0, \\ \Gamma^t \cdot \alpha \vec{u} = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Система інтегральних рівнянь нелінійного кола щодо струмів гілок буде представлена у вигляді

$$\begin{cases} \Gamma^t \cdot \vec{u}(\alpha \vec{i}) + \alpha \vec{E} = \Gamma^t \cdot \int_0^\alpha \tilde{R}_\delta(\vec{u}(\vec{\alpha} \vec{i})) \cdot \vec{i} \cdot d\vec{\alpha} = 0, \\ \Pi \cdot \alpha \vec{i} = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Система інтегральних рівнянь щодо вузлових потенціалів нелінійного кола постійного струму має такий вигляд:

$$\begin{cases} \Pi \cdot \vec{i}(\alpha \Pi^t \vec{\varphi}) + \alpha \vec{I} = 0, \\ \vec{i}(\alpha \Pi^t \vec{\varphi}) = \int_0^\alpha \tilde{G}_\delta(\vec{i}(\vec{\alpha} \Pi^t \vec{\varphi})) \cdot \Pi^t \cdot \vec{\varphi} \cdot d\vec{\alpha}. \end{cases} \quad (4.27)$$

Система інтегральних рівнянь для контурних струмів записується таким чином:

$$\begin{cases} \Gamma^t \cdot \vec{u}(\alpha \Gamma^t \vec{I}_K) + \alpha \vec{E} = 0 \Gamma^t \cdot \int_0^\alpha \tilde{R}_\delta(\vec{u}(\vec{\alpha} \vec{i})) \cdot \vec{i} \cdot d\vec{\alpha} = 0, \\ \vec{u}(\alpha \Gamma^t \vec{I}_K) = \int_0^\alpha \tilde{R}_\delta(\vec{u}(\vec{\alpha} \Gamma^t \vec{I})) \cdot \Gamma^t \cdot d\vec{\alpha}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Матриці \tilde{G}_δ і \tilde{R}_δ є діагональними, їх елементи виражаються співвідношеннями (4.15) і (4.16) для кожної гілки.

Залучаючи узагальнені рівняння нелінійних кіл з багатополосними елементами [12], можна записати аналогічні інтегральні рівняння таких кіл.

Розв'язування систем нелінійних диференціальних рівнянь є важливою математичною задачею. Розвитку теорії нелінійних інтегральних рівнянь присвячений ряд робіт [20, 91]. Найбільш повно розвинутий метод ітерації для розв'язування таких рівнянь. Іншим поширеним способом є заміна певних інтегралів скінченними сумами. Обчислення струму в найпростішому колі за формулою (4.6) і (4.7) є використанням цього способу по відношенню до рівняння (4.9).

Спосіб аналізу нелінійного електричного кола постійного струму, який використовує наведені теореми, закони Ома і Кірхгофа в інтегральній формі і інтегральні рівняння кіл, які розв'язуються шляхом заміни певних інтегралів скінченними сумами, будемо називати методом Підсумовування Скінченних Приростів (метод ПСП).

4.4. Вихідний алгоритм методу підсумовування скінченних приростів

Теореми 1, 2 та їх наслідки становлять основу методу скінченних приростів. Теорема 1 представляє, головним чином, теоретичний інтерес. Вона розкриває можливість знаходження спільного струму нелінійного кола як суми часткових струмів. Теорема 2 визначає в загальних рисах обчислювальний процес, представляючи різноманітні можливості для конструювання обчислювальних процедур.

Звернемо увагу на випадок повільних процесів в нелінійних колах. Ці процеси мають місце, коли джерела живлення або впливаючі на коло сигнали змінюються в часі настільки повільно, що інерційні (реактивні) властивості кола не впливають на процес. Для отримання таблиці залежностей шуканих струмів і напруг від часу застосування теореми 1 з наслідками 1-1, 1-2 є природним. Використання при цьому в окремому випадку методу ПСП представляє конкретну обчислювальну процедуру. Якщо ж метою є знаходження режиму тільки одного статичного стану, то застосування методу ПСП призводить до появи штучних умов, що змінюються в часі джерел е.р.с. і струму.

Вихідний алгоритм є найпростішим варіантом реалізації методу ПСП. Викладається він для того, щоб показати основні прийоми алгоритмізації. Початку обчислювальних процедур алгоритму передують вибір величини h – кількості рівних частин (або числа кроків), на які розбиваються джерела е.р.с. Номер поточного кроку підсумовування позначимо через k , а відповідні цьому кроку струми нелінійних елементів – $\vec{i}^{(k)}$, напруги – $\vec{u}^{(k)}$, вузлові потенціали – $\vec{\varphi}^{(k)}$.

Алгоритм 1.

1. Вводяться вихідні дані про конфігурацію електричного кола і його параметри:
 - а) формальні параметри кола – кількість вузлів, гілок, джерел е.р.с. і струму, нелінійних елементів, типів нелінійних елементів;
 - б) список лінійних гілок із зазначенням їхніх вузлів, величин опорів, е.р.с. і джерел струму;
 - в) список нелінійних елементів, що містить для кожного з них номер його типу і перелік номерів вузлів його підключення (в заздалегідь установленому порядку);
 - г) масиви (списки) параметрів моделей нелінійних елементів для кожного типу (допускається задання таблиць характеристик).
2. Задається число кроків h і допустима похибка ε_u .

3. Присвоюються значення $k = 0$, $\vec{i}^{(0)} = 0$, $\vec{\varphi}^{(0)} = 0$.
4. Формується лінійне наближене коло:
 - а) джерела е.р.с. і струму вихідного кола замінюються в h разів меншими величинами;
 - б) нелінійні елементи замінюються лінійними, рівними за величиною їх динамічної провідності в точках $\vec{i}^{(K)}$.
5. Проводиться аналіз лінійного наближеного кола:
 - а) формується матриця провідностей $G^{(K)}$ і вектор правих частин $\Delta\vec{\Gamma}^{(K)}$ рівнянь методу вузлових потенціалів;
 - б) розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь
$$G^{(K)} \cdot \Delta\vec{\varphi}^{(K)} = \Delta\vec{\Gamma}^{(K)} \quad (3.29)$$і визначається вектор приростів вузлових потенціалів $\Delta\vec{\varphi}^{(K)}$;
 - в) обчислюються прирости струмів нелінійних елементів $\vec{i}^{(K)}$ (а також інших струмів).
6. Визначаються нові значення (проводиться накопичення змінних) вузлових потенціалів $\vec{\varphi}^{(K+1)} = \vec{\varphi}^{(K)} + \Delta\vec{\varphi}^{(K)}$, необхідних струмів $\vec{i}^{(K+1)} = \vec{i}^{(K)} + \Delta\vec{i}^{(K)}$.
7. Величина k зростає на одиницю $k = k_{cm} + 1$ (тут k_{cm} – значення k до виконання цього пункту).
8. Якщо $k \leq h$, то проводиться наступний цикл обчислень, починаючи з п. 4. Коли $k = h + 1$, то знаходяться напруги нелінійних елементів $u^{(h)} = f(i^{(h)})$, визначаються нев'язки за цими напругами, порівнюються з допустимими ε_u і відбувається перехід до обчислень за методом Ньютона. Якщо відсутня збіжність обчислень або виникає переповнення розрядної сітки комп'ютера, то обчислення повторюються починаючи з п. 3 при подвоєному числі кроків $h = 2h_{cm}$.

4.5. Кола з декількома стійкими станами

При розгляді теорем 1 і 2 мало уваги приділялося питанню про обмеження, які необхідно накласти на нелінійні функції характеристик нелінійних елементів. Це питання досить складне. При спрощеному розгляді можна зробити лише дуже загальні висновки. Так, теорема 1 вимагає тільки однозначності характеристик, які можуть мати скінченне число скінченних розривів. Теорема 2 справедлива за умо-

ви однозначності функцій, їх неперервності та існування обмежених похідних (динамічних опорів і провідностей) в інтервалі їх визначення (тобто функції повинні задовольняти умові Ліпшиця).

Незважаючи на зазначені обмеження, система нелінійних рівнянь кола може мати кілька розв'язків. Функції, які є характеристиками нелінійних елементів, зазвичай, отримуються в результаті апроксимації даних фізичних експериментів. Тому вони адекватні в певних межах, з урахуванням яких проведено експеримент і в яких нелінійний елемент на втрачає працездатність. Отримані в результаті розрахунку корені поза цими межами повинні бути відкинуті. Якщо всередині меж є кілька розв'язків, то це означає, що задане коло має кілька фізично реальних станів.

При використанні методу Ньютона, в разі неоднозначності, обчислені розв'язки сходяться до найближчого, по відношенню до початкових значень, кореня. Тому для отримання інших розв'язків необхідно підібрати інші початкові значення. У разі методу підсумовування скінчених приростів, різні корені можуть бути отримані зміною порядку введення джерел енергії, що діють в колі.

Розглянемо, наприклад, статичний тригер на 2-х транзисторах. Замість одного джерела живлення E включимо дві е.р.с. і такої ж величини відповідно для першого і другого транзисторів. Обчисливши часткові струми для E_1 , а потім для E_2 , отримаємо значення параметрів режиму одного стійкого стану (1-й транзистор закритий, 2-й відкритий). Проробивши ту ж процедуру спочатку для E_2 , а потім для E_1 , визначимо режим другого стану (1-й транзистор відкритий, 2-й закритий). Якщо на схему подано сигнал, що встановлює її в один зі станів, то режим буде отримано незалежно від черговості включення джерел. Якщо керуючі сигнали відсутні, а тригер повністю симетричний, то при включенні живлення одночасно на обидва транзистора метод ПСП дає значення третього нестійкого стану.

Застосування методу підсумовування скінчених приростів і наслідків 2-1, 2-2 відкриває інші можливості для виявлення декількох станів кола. Обчислювальний прийом зростання е.р.с. від нуля до номінального значення відображає фізичний процес включення приладу в мережу. Навіть якщо джерела живлення не містять елементів з тепловою інерцією (ниток розжарення), напруга живлення з'являється не відразу, а наростає протягом певного проміжку часу. Зміщуючи процес наростання окремих е.р.с. на кілька кроків в ту чи іншу сторону, можна також прийти до різних станів, якщо вони існують реально. Крім того, можливе введення в коло джерел, е.р.с. яких зростає від нуля до певної величини, а потім спадає до нуля. Вони, як і в ре-

льному пристрої, переводять схему з одного стійкого стану в інший. Ця обставина стає особливо важливою при побудові часових діаграм роботи цифрових пристроїв на базі потенційних елементів.

При зростанні е.р.с. робочі точки на характеристиках проходять ділянки з швидкою або повільною зміною похідних. Контролюючи ці зміни можна регулювати величину кроку наростання е.р.с., підвищуючи точність результату чи зменшуючи обсяг обчислень.

4.6. Порівняння і зв'язок методу підсумовування скінченних приростів з іншими методами, функціональне введення параметра

Розглянемо зв'язок методу ПСП з найбільш відомими методами розв'язування нелінійних рівнянь. Припустимо, що на задане коло впливають тільки джерела струму. Тоді при заданому числі кроків права частина виразу (4.29) дорівнює

$$\Delta \vec{I}^{(K)} = \frac{1}{h} \vec{I}. \quad (4.30)$$

На k -му кроці методу ПСП обчислений вектор $\vec{\varphi}^{(K)}$, для якого визначені динамічні провідності нелінійних елементів. На наступному етапі

$$\vec{\varphi}^{(K+1)} = \vec{\varphi}^{(K)} + \left[G^{(K)} \right]^{-1} \Delta \vec{I}^{(K)}, \quad (4.31)$$

що аналогічно формулі методу Ньютона [12]. Різниця полягає в тому, що права частина системи (4.29) в методі Ньютона визначається величинами нев'язок, а не приростами прикладених джерел струму. Іншою відмінністю є скінченне число кроків в методі ПСП на етапі зростання е.р.с. джерел до заданих значень. Зі встановленого зв'язку можна зробити висновок, що метод ПСП міг би бути отриманий з методу Ньютона заміною нев'язок приростами джерел.

Для з'ясування зв'язку з методом Матвеева [86] перетворимо (4.31) з урахуванням (4.30)

$$\vec{\varphi}^{(K+1)} = \vec{\varphi}^{(K)} + \frac{1}{h} \left[G^{(K)} \right]^{-1} \vec{I} = \vec{\varphi}^{(K)} + \frac{1}{h} \Delta \vec{\varphi}^{(K)}. \quad (4.32)$$

Подібний вираз для нового наближення має метод Матвеева, де величина h не є постійною на кожному кроці і знаходиться зі складних виразів, а отже і число кроків не є фіксованим.

Інший широко поширений метод Бройдена [67] використовує ідею методу Матвеева і відрізняється способами визначення коефіцієнта h . В одному з варіантів для його знаходження використовуються числа Фібо-

наччі [67], в більш простому – послідовно перевіряються на виконання умов збіжності різні значення параметра, наприклад 2, 4, 8 і т.д. Спільність методів ПСП і Матвєєва – Бройдена полягає в тому, що на кожному кроці використовується не повний приріст, який в разі лінійної схеми відразу давав би точний розв’язок, а тільки певна частина такого приросту. Різниця полягає в тому, що в методах Матвєєва і Бройдена праві частини здебільшого не розбиваються на скінченне число доданків. Крім того, у викладеному алгоритмі 1 на кожному кроці зростання е.р.с. джерел не проводиться обчислення нев’язок. Найбільш тісний зв’язок викладений вище метод має з відомим методом продовження розв’язку по параметру [84], який скорочено будемо називати методом ПРП. Він полягає в тому, що заданій системі нелінійних рівнянь $f(\vec{x}) = 0$ ставиться у відповідність інша система

$$F(\vec{x}, \lambda) = 0, \quad (4.33)$$

так, що при $\lambda = 0$ вона має відомий розв’язок $\vec{x}^{(0)}$, а при $\lambda = 1$ перетворюється у вихідну, тобто $F(\vec{x}, 1) = f(\vec{x})$. Отримали розвиток два підходи до розв’язування системи (4.33). У першому – шляхом диференціювання (4.33) отримується система диференціальних рівнянь

$$F'_x(\vec{x}, \lambda) \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot F'_\lambda(\vec{x}, \lambda) = 0, \quad (4.34)$$

яка розв’язується як задача Коші при $\vec{x}(0) = \vec{x}^{(0)}$ одним із обчислювальних методів інтегрування. У другому випадку проміжок $[0, 1]$ розбивається на нерівні частини $[\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m = 1]$ і для кожного λ_i знаходиться розв’язок (4.33) за методом Ньютона з початковими значеннями змінних, обчислених для λ_{i-1} . Можуть бути різні способи введення параметра λ . В одному з них він є множником перед вектором правих частин

$$F(\vec{x}) = \lambda \vec{b}. \quad (4.35)$$

Тоді система (4.34) перетворюється в

$$F'_x(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \vec{b}. \quad (4.36)$$

Якщо представити її в нормальній формі

$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = [F'_x(\vec{x})]^{-1} \cdot \vec{b} \quad (4.37)$$

і залучити до її розв’язання метод Ейлера, то отримаємо алгоритм, що співпадає з методом ПСП в його найпростішому варіанті. Метод ПСП був отриманий як розвиток аналога методу накладання для не-

лінійних кіл. Однак, з точки зору обчислювальної математики, можна вважати його одним з варіантів методу ПРП, коли параметр вводиться як множник перед правими частинами. У загальному випадку (наслідку 1-3, 1-4) він функціонально залежить ще від одного параметра

$$F(\vec{x}) = \vec{\alpha}(t) \cdot \vec{b}. \quad (4.38)$$

Тут $\vec{\alpha}(t)$ в загальному випадку є матрицею, вибір якої в значній мірі визначає успіх розрахунку.

Встановлений зв'язок методів є дуже корисним. Багато доказів і висновків, зроблені для методу ПРП мають важливе значення для методу ПСП. Крім того, деякі прийоми методу ПРП дозволяють розширити можливості методу ПСП.

Розглянемо докладніше зв'язок з варіантом методу ПРП, коли для кожного значення λ розв'язується система нелінійних рівнянь за методом Ньютона. Перш за все впадає в очі значно більший обсяг обчислень, у порівнянні з попереднім випадком. Кожен крок за методом Ньютона вимагає розв'язування лінійної системи рівнянь. Ці дії відповідають теоремі 1, коли для кожного приросту джерел енергії визначаються точні значення частинних струмів. Спробуємо для кожного λ робити один крок по методу Ньютона і при цьому нев'язки визначати як наслідок приростів джерел енергії (зміни параметра λ). При цьому отримаємо вихідний варіант методу ПСП, що вимагає один розв'язок лінійної системи для кожного λ . Звідси впливає можливість удосконалити метод ПСП, тобто включити в нев'язку наступного кроку, крім приростів джерел енергії, нев'язку попереднього кроку, викликану неточними значеннями шуканих величин на попередньому кроці.

При цьому на кожному кроці, як і раніше розв'язується одна лінійна система. Обсяг обчислень незначно зростає за рахунок необхідності обчислень значень нелінійних функцій. Однак точність обчислень на кожному кроці, а отже і кінцевого результату, суттєво підвищується.

Зупинимося на питанні введення функціонально-залежного параметра. У найпростішому випадку $\vec{\alpha}(t)$ в рівнянні (4.38) може бути діагональною матрицею з однаковими значеннями $\alpha(t)$ всіх діагональних елементів. Тут всі джерела енергії збільшуються одночасно і пропорційно, тобто $\vec{\alpha}(t)$ при $0 < t \leq h$ наростає лінійно від нуля до одиниці. При $t = h$, $\alpha = 1$, тобто джерела енергії беруть номінальні значення. Якщо продовжити обчислення для $t = h + 1$, $t = h + 2$, ..., залишаючи, $\alpha = 1$, то ми автоматично переходимо на метод Ньютона. В цьому випадку $\alpha(t)$ має вигляд, представлений на рис. 4.2. При системі двох рівнянь $\vec{\alpha}(t)$ може мати наступний вигляд

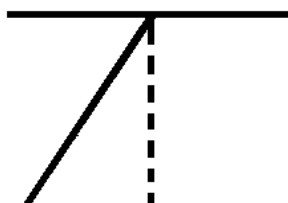
$$\bar{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) & 0 \\ 0 & \alpha_2(t) \end{pmatrix}$$


Рис. 4.2. Представлення параметра $\alpha(t)$ як діагональної матриці та його графічний вигляд

У загальному випадку параметр $\alpha(t)$ не є просто коефіцієнтом перед правою частиною, а відноситься до кожного джерела енергії. Форма його узгоджується з фізичним змістом і постановкою задачі аналізу кола. Оскільки в компоненти \vec{b} можуть входити кілька джерел енергії, то і $\bar{\alpha}(t)$ може бути недіагональною матрицею. При практичних розрахунках її не обов'язково записувати в явному вигляді, досить коефіцієнти $\alpha_{ij}(t)$ залишити перед відповідними компонентами джерел енергії.

4.7. Основний алгоритм методу підсумовування скінчених приростів

При практичній реалізації методу ПСП важливого значення набуває операція встановлення залежності джерел е.р.с. і струму від параметра t . Параметр α може бути представлений як відносний кут повороту регулятора кожного джерела, що змінює його значення від нуля до заданої величини. Залежно від $\alpha(t)$ встановлюють послідовності виведення джерел до номінальних значень, що забезпечують необхідний режим кола. Якщо виконати кінематичну схему реалізації залежності $\alpha(t)$, то параметр буде являти собою відносну зміну. Однак, більш природно цьому параметру поставити у відповідність час. Тоді джерела е.р.с. і струму будуть функціями часу, а визначенню заданого статичного режиму кола постійного струму буде передувати нескінченно повільний нестационарний режим зростання в часі е.р.с. джерел від нуля до заданих значень.

Тому в основному алгоритмі методу ПСП розглядаються залежності прикладених е.р.с. від часу $\vec{e}(t)$, які є кусково-лінійними функ-

ціями, аналогічними представленим на рис. 4.2. При цьому виникають поняття кроку за часом Δt , тривалості фронтів t_ϕ і пологих ділянок t_n , загального числа кроків h .

Про допустимі значення h_ϕ і h_n докладно говориться в роботі [68]. Тут зазначимо, що при наявності джерел струму можна вчинити аналогічно, створивши для їх обробки окрему процедуру. У реалізованому практичному алгоритмі необхідно замінити реальне джерело струму джерелом е.р.с.

Деяка складність введення $e(t)$ з лишком компенсується наступними перевагами:

- а) автоматичним переходом на метод Ньютона;
- б) можливістю легко задавати бажану черговість включення джерел живлення і керуючих сигналів;
- в) вхідний сигнал для отримання залежності $u_{\text{вих}}(u_{\text{вх}})$ представляється в вигляді послідовності наростаючих фронтів і пологих ділянок;
- г) те ж саме із застосуванням спадаючих фронтів виконується при дослідженні впливу складної послідовності імпульсів на коло, що містить потенційні елементи пам'яті;
- д) витримавши необхідні співвідношення між значеннями t_ϕ , t_n і Δt , можливо поставити такий режим обрахунку, коли через один або кілька кроків зі зміною е.р.с. відбуваються ітерації за методом Ньютона (з заданим числом кроків або з виходом по досягненні заданої точності).

При цьому обчислення проводяться в єдиному циклі, а масив вихідних даних $e(t)$ фактично керує ходом обчислювального процесу.

Для роботи нижчевикладеного алгоритму визначаються вихідні дані типів е.р.с. і координати точок зламу їх функцій (масив $e(t)$). Якщо обчислення проводяться при одночасному наростанні всіх е.р.с. рівної величини, то ми маємо справу з одним типом е.р.с. $e(t)$. Процедура, обробка масиву $e(t)$, має вектор приростів е.р.с. $\vec{\epsilon}^{(K)}$ на k -му кроці.

В алгоритмі 1 принциповим моментом є та обставина, що за істинні значення струмів нелінійних елементів приймаються суми їх скінченних приростів, обчислених з лінійного наближення кола. Напруги ж нелінійних елементів виходять, як функції цих струмів. Тому будемо говорити, що в алгоритмі 1 проводиться підсумовування скінченних приростів струмів (підсумовування струмів). Однак можливий дуальний варіант підсумовування скінченних приростів напруг.

Зупинимось на обчисленні нев'язки $\delta \vec{i}^{(K)}$ для обчисленого чергового значення вектора струмів нелінійних елементів $\vec{i}^{(K)}$. Перш за

все необхідно за допомогою моделей нелінійних елементів знайти вектор напруг $\vec{u}^{(K)} = f(\vec{i}^{(K)})$, потім слід замінити нелінійні елементи джерелами струму $\vec{i}^{(K)}$ і обчислити на них напруги $\vec{u}_n^{(K)}$, тоді $\delta \vec{u}^{(K)} = \vec{u}^{(K)} - \vec{u}_n^{(K)}$. При заміні нелінійних елементів джерелами струму потрібен додатковий аналіз кола. У разі явно вираженої лінійної частини [12], досить вектор струму помножити на заздалегідь підготовлену матрицю опорів багатополосника лінійної частини і додати вектор правих частин. Цей процес можна спростити, скориставшись методом накладання для лінійних кіл. На кожному кроці підсумовування скінченних приростів струмів буде, крім $\Delta \vec{i}^{(K)}$, також обчислюватись вектор $\Delta \vec{u}^{(K)}$, складений з приростів напруг нелінійних елементів, об-

числених для лінійного наближення кола. Тоді $\vec{u}_n^{(K)} = \sum_1^k \Delta \vec{u}^{(K)}$.

Така процедура, застосовна також і у варіанті підсумовування напруг, крім зменшення обсягу обчислень, виключає труднощі, пов'язані з проблемою виродженості матриць провідностей і опорів лінійної частини кола. Як показали дослідження [46], накопичення похибок зумовлених округленням не вносить в кінцевий результат значних похибок.

Нижче викладається в двох варіантах основний алгоритм методу ПСП. Перший Варіант (алгоритм 2а), відповідає методу підсумовування струмів. Другий варіант (алгоритм 2б) реалізує метод підсумовування напруг і для нього вирази включені у квадратні дужки.

Алгоритми 2 а, б.

1. Вводяться вихідні дані про конфігурацію кола і її параметри згідно п. 1 алгоритму 1, крім даних про джерела е.р.с. і струму. Замість цього вводиться:

а) список е.р.с., що містить для кожної з них номер типу, внутрішній опір і вузли підключення. Формується і вводиться масив $e(t)$.

2. Задається загальне число кроків h , крок Δt , вводиться величина допустимих похибок ε_i , ε_u .

3. Виконуються присвоєння

$$k = 0, \quad t^{(0)} = 0, \quad \vec{i}^{(0)} = 0, \quad \vec{u}^{(0)} = 0, \quad \vec{u}_n^{(0)} = 0 \left[\vec{i}_n^{(0)} \right];$$

4. Визначаються параметри лінійної наближеності кола:

а) значення динамічних провідностей нелінійних елементів в точках;

б) величини джерел е.р.с. (джерел струму) нев'язок

4. Метод підсумовування скінченних приростів для дослідження процесів...

$$\delta \bar{u}^{(K)} = \bar{u}^{(K)} - \Delta \bar{u}_n^{(K)} \left[\delta \bar{i}^{(K)} = \bar{i}^{(K)} - \bar{i}_n^{(K)} \right];$$

в) збільшення е.р.с. джерел живлення і вхідних впливів $\Delta \bar{e}^{(k)}$ для $t = t^{(k)}$.

5. Проводиться аналіз лінійної наближеності кола за методом вузлових потенціалів згідно п. 5 алгоритму 1. Обчислюють вектор приростів вузлових потенціалів $\Delta \bar{\varphi}^{(K)}$, а потім вектори приростів струмів $\Delta \bar{i}^{(K)}$ і напруг $\Delta \bar{u}^{(K)}$ нелінійних елементів k -го наближення.
6. Визначаються нові значення струмів нелінійних елементів – $\bar{i}^{(K+1)} = \bar{i}^{(K)} + \Delta \bar{i}^{(K)}$, напруг нелінійних елементів – $\bar{u}^{(K+1)} = \bar{u}^{(K)} + \Delta \bar{u}^{(K)}$, напруги на нелінійних елементах для отриманих струмів – $\bar{u}^{(K+1)} = f\left(\bar{i}^{(K+1)}\right)$, струми нелінійних елементів для отриманих напруг – $\bar{i}^{(K+1)} = f\left(\bar{u}^{(K+1)}\right)$, лінійні напруги – $\bar{u}_n^{(K+1)} = \bar{u}_n^{(K)} + \Delta \bar{u}^{(K)}$, лінійні струми – $\bar{i}_n^{(K+1)} = \bar{i}_n^{(K)} + \Delta \bar{i}^{(K)}$.
7. Якщо при зверненні до моделей нелінійних елементів виникне переповнення розрядної сітки комп'ютера або значення змінних вийдуть за обмежувальні межі, зазначені в списку параметрів моделі, то відбувається повернення в початкову точку найближчого фронту е.р.с. Проходження фронту повторюється, починаючи з п. 4, при $\Delta t = 0,5t_{cm}$. Для цього зберігаються значення змінних в момент початку кожного попереднього фронту, а величини k і h в момент переходу зазнають відповідні зміни.
8. Коли при виконанні п. 4 в $\left|\Delta \bar{e}^{(k)}\right| = 0$, тобто прирости е.р.с. відсутні, проводиться порівняння $\left|\Delta \bar{i}^{(k)}\right| \leq \varepsilon_i$, $\left|\delta \bar{u}^{(k)}\right| \leq \varepsilon_u \left[\left|\Delta \bar{u}^{(k)}\right| \leq \varepsilon_u, \left|\delta \bar{i}^{(k)}\right| \leq \varepsilon_i \right]$. При виконанні обох умов присвоюється t найближче значення, де починається наступний фронт однією з е.р.с., зі зміною значень k і h . Якщо після закінчення ділянки (де $\left|\Delta \bar{e}^{(k)}\right| = 0$) не виконувалися наведені порівняння, то відбувається повернення, зазначені в п. 7.
9. Обчислюється нове значення часу $t^{(K+1)} = t^{(K)} + \Delta t$, додається одиниця в лічильник циклів $k = k_{cm} + 1$ (якщо $k < h$, то виконується наступний цикл, починаючи з п. 4). При $k = h + 1$ циклічні обчислення закінчуються.

4.8. Точність, збіжність, вибір змінних

Для дослідження точності початкового варіанту методу ПСП скористаємося відомою оцінкою похибки методу Ейлера [49], враховуючи представлення системи рівнянь, що розв'язується (4.37).

Для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.39)$$

похибка розв'язку по методу Ейлера на j -му кроці має оцінку

$$|x_j - x_j^*| = |\varepsilon_j| \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{h} \left(e^{\frac{K_j}{h}} - 1 \right), \quad (4.40)$$

де h – величина, зворотна кроку і дорівнює числу розбиття заданого інтервалу; K – константа Ліпшиця для $f(x, y)$ по змінній y , тобто

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|; \quad (4.41)$$

величина M визначається зі співвідношення

$$M = \left| \frac{df(x, y)}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right|. \quad (4.42)$$

З цієї оцінки випливає, що при $j = m$ (тобто коли $\lambda = 1$) і кінцевих значеннях K і M величина x_m є наближеним значенням шуканого кореня x_m^* , похибка якого при $h \rightarrow \infty$ зі швидкістю геометричної прогресії прямує до нуля. Це можна розглядати як ще одне підтвердження справедливості теореми 2. Співвідношення (4.40) дозволяє практично в конкретних умовах заданого кола, встановивши константи K і M , зробити для обраного числа кроків h оцінку точності обчислень. Щоб полегшити цю процедуру, необхідно конкретизувати константи з урахуванням особливостей задачі, що розв'язується.

З огляду на систему (4.37), встановлюємо, що константа Ліпшиця K в нашому випадку повинна визначатися по змінній x для функції

$$f(\bar{x}, \lambda) = [F'_x(\bar{x}(\lambda))]^{-1} \bar{b}. \quad (4.43)$$

Тоді

$$M = \left| \frac{df(\bar{x}, \lambda)}{d\lambda} \right| = \left| \frac{df(\bar{x}, \lambda)}{dx} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\lambda} \right|. \quad (4.44)$$

Якщо константу Ліпшиця визначити як норму якобіана функції в області її визначення

$$K \geq \frac{df(\bar{x}, \lambda)}{dx}, \quad (4.45)$$

то можна прийняти, що

$$M \geq K \left| \frac{d\bar{x}}{d\lambda} \right|. \quad (4.46)$$

За цим виразом значення констант простіше визначати практично. Крім того, ці вирази дозволяють перейти до електротехнічного трактування оцінки похибки.

Нескладний аналіз співвідношення (4.40) показує, що точність розв'язку тим вище, чим менше значення мають константи K і M . У разі підсумовування струмів відповідна система рівнянь набуває вигляду

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = G_{\partial}(\vec{i}) \cdot \vec{e}(t), \quad (4.47)$$

для якої

$$K \geq \left| \left[G_{\partial}(\vec{i}) \cdot \vec{e}(t) \right]'_i \right|. \quad (4.48)$$

Зважаючи на те, що норма добутку менша добутків норм співмножників, можна прийняти наступне

$$K \geq \left| \left[G_{\partial}(\vec{i}) \right]'_i \right| \cdot |\vec{e}(t)|. \quad (4.49)$$

На підставі співвідношення (4.46)

$$M \geq K_j \cdot |G_{\partial}(\vec{i}) \cdot \vec{e}(t)|, \quad (4.50)$$

або

$$M_i \geq K_i |G_{\partial}(\vec{i})| \cdot |\vec{e}(t)|. \quad (4.51)$$

Для варіанту підсумовування кінцевих приростів напруг систему (4.39) представимо у вигляді

$$\frac{du}{dt} = R_{\partial}(\vec{u}) \cdot \vec{I}(t), \quad (4.52)$$

для якої

$$K_u \geq \left| \left[R_{\partial}(\vec{u}) \right]'_u \right|, \quad (4.53)$$

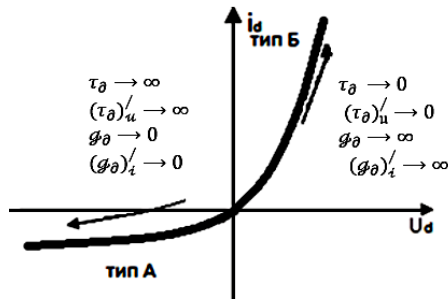
$$M_u \geq K_u |R_{\partial}(\vec{u})| \cdot |\vec{I}(t)|. \quad (4.54)$$

У найпростішому одновимірному випадку величини $|G_{\partial}(i)|$ і $|R_{\partial}(u)|$ перетворюються в максимальні значення динамічної провідності $g_{\partial \max}$ і опору $r_{\partial \max}$ без урахування знаку), а $\left| \left[G_{\partial}(\vec{i}) \right]'_i \right|$ і $\left| \left[R_{\partial}(\vec{u}) \right]'_u \right|$ – в найбільші значення похідних від функцій цих динамічних параметрів.

Як приклад корисно розглянути ідеальний діод, для якого співвідношення між струмом і прикладеною напругою визначається як

$$i_{\partial} = I_0 \left(e^{\frac{u_{\partial}}{\varphi_1}} - 1 \right). \quad (4.55)$$

З аналізу цього співвідношення випливає, що при зростанні u_{∂} в область позитивних напруг величини r_{∂} і $(r_{\partial})'_u$ прямують до нуля, а g_{∂} і $(g_{\partial})'_i$ до нескінченності. При збільшенні u_{∂} в область негативного зсуву має місце зворотна картина (рис. 4.3). З цього випливає, що з точки зору точності обчислень для позитивно зміщеного діода слід застосовувати підсумовування напруг, в разі зворотного зсуву – підсумовування струмів (рис. 4.3). При практичній реалізації алгоритмів на комп'ютері виявлено, що вибір додатних змінних істотно впливає на збільшення чи зменшення можливості переповнення розрядної сітки комп'ютера.



	Точність	Збіжність переповнення	Точність	Збіжність переповнення
$\sum U$	-	+	+	-
$\sum i$	+	-	-	+

Рис. 4.3. ВАХ діода та якісні властивості алгоритму розрахунку

Згідно з результатами, отриманими в [12], в області позитивних зміщень діод має характеристику типу Б, і для неї, з метою забезпечення умов збіжності методу Ньютона, обчислення слід вести щодо струму. В області ж негативних зсувів маємо характеристику типу А і збіжність забезпечується при обчисленнях щодо напруги. Переповнення розрядної сітки свідчить про повну відсутність збіжності.

Вимоги точності і усунення можливості переповнення знаходяться в протиріччі (рис. 4.3). Переповнення розрядної сітки призводить до збою обчислювача. Тому доводиться або жертвувати точністю, або приймати спеціальні заходи для запобігання переповнення.

Аналіз точності і збіжності обчислень за методом ПСП для діодної характеристики має вирішальне значення при розрахунку електронних схем з біполярними транзисторами, оскільки, після заміни останніх моделлю Еберса-Молла коло стає діодним. При розрахунку електричної або електронної схеми з нелінійними елементами довільного виду, для вирішення питання про те, чи щодо струму, чи щодо напруги для даного елемента проводити розрахунок (струм або напругу включати у вектор незалежних змінних), слід встановити тип характеристики в околі робочої точки де знаходиться нелінійний елемент в даний момент процесу накопичення змінних.

Виявлені особливості методу ПСП дозволяють ставити і вирішувати завдання про побудову оптимального обчислювального процесу в сенсі мінімальних витрат машинного часу і виконання умов збіжності. Основними принципами реалізації такого процесу можуть бути наступні положення:

1. На кожному кроці заново формується вектор незалежних змінних (гібридний вектор), виходячи з прийнятих критеріїв оптимальності.
2. У найпростішому варіанті вибір змінної обмежує тільки переповнення розрядної сітки.
3. У більш досконалому варіанті змінні вибираються виходячи з критерію максимальної точності. Якщо при виконанні наступного кроку виникне можливість переповнення, то обчислення даного кроку повторюються при новому векторі незалежних змінних, де на дуальні величини замінені змінні тих елементів, для яких виникло переповнення.

Алгоритм оптимального вибору змінних залежить як від складності прийнятого критерію оптимальності, так і від класу задач, що розв'язуються. Так, для напівпровідникових електронних схем в найпростішому випадку можна розглядати напрямок зміщення кожного переходу. Для закритих у вектор незалежних змінних слід включати напругу, для відкритих – струм. В даному випадку обчислювальний процес буде оптимальним в такому випадку: виконані умови збіжності і не буде переповнення розрядної сітки. Більш досконалий алгоритм, що враховує також напрямок руху по діодній характеристиці [47].

4.9. Оптимальний гібридний варіант методу підсумовування скінченних приростів

Нижче наведемо алгоритм аналізу за методом ПСП з визначенням оптимального гібридного вектора незалежних змінних (додатних параметрів режиму кола). При виконанні кожного кроку в процесі наростання е.р.с. спочатку як струми, так і напруги нелінійних елементів визначаються шляхом підсумовування лінійних приростів. Алгоритм оптимального вибору змінних вказує, для яких елементів в якості нових значень змінних прийняти струм, а для яких напругу.

Алгоритм 3.

1. Вводяться вихідні дані про параметри кола і його конфігурацію згідно п. 1а–1г алгоритму 1 (крім джерел е.р.с. і струму) і п.1д алгоритму 2. Виконується п. 2 алгоритму 2.

2. Присвоюються нульові значення:

$$k = 0, \quad t^{(0)} = 0, \quad \vec{i}^{(0)} = 0, \quad \vec{u}^{(0)} = 0, \quad \vec{u}_l^{(0)} = 0, \quad \vec{i}_l^{(0)} = 0.$$

3. Виконується алгоритм оптимального вибору змінних. Виходячи з умов точності, збіжність обчислень і запобігання переповнення розрядної сітки обчислювача, вказується, для яких елементів слід проводити підсумовування струмів (струмові аргументи), а для яких напруг (аргументи напруг).

4. Для струмових аргументів приймається нове значення $i^{(K+1)} = i_l^{(K)}$ і обчислюється $u^{(K+1)} = f(i^{(K+1)})$. Для аргументів напруг новими значеннями визначаються $u^{(K+1)} = u_l^{(K+1)}$ і обчислюються $i^{(K+1)} = f(u_l^{(K+1)})$.

5. Знаходяться параметри лінійного наближуючого кола:

а) величини динамічних провідностей $g^{(K)}$: для струмових аргументів – в точках $i^{(K)}$, для аргументів напруг – в точках $u^{(K)}$;

б) значення джерел струму нев'язок

$$\delta i^{(K)} = i^{(K)} - i_l^{(K)} + g^{(K)} (u^{(K)} - u_l^{(K)});$$

в) вектор приростів е.р.с. $\Delta \vec{e}^{(K)}$ згідно з масивом $\vec{e}(t)$ для $t = t^{(K)}$.

6. Виконується аналіз лінійного наближуючого за методом вузлових потенціалів відповідно до п.5 алгоритму 1. Знаходиться вектор приростів вузлових потенціалів $\Delta \vec{\varphi}^{(K)}$, а також вектори $\Delta \vec{i}^{(K)}$ і $\Delta \vec{u}^{(K)}$.

Обчислюються вектори

$$\vec{i}_a^{(K+1)} = \vec{i}^{(K)} + \Delta \vec{i}^{(K)}, \quad \vec{u}_a^{(K+1)} = \vec{u}^{(K)} + \Delta \vec{u}^{(K)}.$$

7. Так само, як і в п.8 алгоритму 2, на ділянках з незмінними значеннями е.р.с. перевіряються умови досягнення заданої точності. У разі їх виконання переходять до найближчого подальшого фронту е.р.с. При відсутності збіжності повертаються до початку попереднього фронту і проходження фронту повторюється зі зменшеним в два рази кроком за часом. Цикли зменшення кроку можуть повторюватися до тих пір, поки не виконаються умови збіжності.
8. Повторюється п. 9 алгоритму 2, де присвоюються нові значення t і k і робиться повернення для виконання нового циклу, починаючи з п. 3, або ж при $k = h + 1$ робиться зупинка.

5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

5.1. Загальна характеристика пакетів програм для комп'ютерного аналізу електричних кіл

При проектуванні електроенергетичних систем та їх складових обов'язковим етапом є їхнє попереднє моделювання на комп'ютері, що дає змогу прогнозувати їхнє функціонування при подальшій фізичній реалізації. Для цього застосовується програмне забезпечення, яке переважно використовує обчислювальні методи розрахунку, а іноді й аналітичні (символьні) методи [41, 127].

Історія комп'ютерного розрахунку динаміки електричних кіл розвивається впродовж багатьох десятиліть. На першому етапі в 60-70-ті роки розв'язувалися принципові питання створення математичного апарату автоматизованого проектування електричних кіл. Перехід до комп'ютерних розрахунків вимагав розробки адекватних математичних моделей електричних кіл та обчислювальних методів дослідження цих моделей. Тому для першого покоління засобів комп'ютерного розрахунку динаміки електричних кіл, головними були формалізація постановок проектних задач та вибір математичного апарату. Саме тоді були закладені математичні основи та створені обчислювальні алгоритми які в тих чи інших модифікаціях застосовуються і дотепер. Детальний та всебічний огляд пакетів прикладних програм моделювання електричних та електронних кіл наведений в [84].

Загальну структуру програмних пакетів аналізу електричних кіл можна подати у вигляді, показаному на рис. 5.1.

Крім основних традиційних блоків 3, 4 формування математичної моделі та її реалізації у сучасних пакетах програм аналізу наявні сервісні блоки 2, 5, які призначені для узгодження способів подання інформації про електричне коло у зручних для проектувальника та комп'ютера формах. Розроблені алгоритми реалізації інтегральних динамічних моделей електричних кіл лежать в основі функціонування блоків 3 і 4.

Нині відома велика кількість програм аналізу процесів в електричних та електронних колах [84]. Найпоширеніші з них SPICE, CircuitMaker 2000 (www.altium.com, www.circuit-maker.com), Electronics Workbench (www.interactiv.com), Micro-Cap (www.spectrum-soft.com), OrCAD (www.orcad.com), Protel DXP (www.protel.com), View Analog (www.innoveda.com), Workview Office (фірма розробник Viewlogic Systems). Ці програмні продукти є достатньо універсальними та орієнтованими на моделювання змішаних аналого-цифрових

пристроїв. Світовим лідером в області автоматизації проектування схемотехніки можна вважати програму SPICE [84]. Вона була розроблена в університеті Берклі, США в 1972 р. Різні версії цього алгоритму були в різний час запозичені виробниками програмного забезпечення для використання в своїх продуктах і в теперішній час під цією назвою відомий ряд програм різних фірм. Через використання єдиного обчислювального алгоритму програми різних виробників є за великим рахунком всього лише графічні оболонки, що надають користувачеві доступ до функцій програми SPICE, а також деякі додаткові можливості обробки отриманих даних. Перша версія цієї програми для персональних комп'ютерів PSpice була створена в 1985 р. В типовий набір методів аналізу входять статичний, динамічний і частотний види аналізу, змішане логіко-аналогове моделювання (mixed-signal simulation), температурний і шумовий аналізи, статистичні розрахунки по методу Монте-Карло, спектральний аналіз, максимізація швидкодії (оптимізується до 8 параметрів). Програма характеризується широким набором математичних моделей компонентів, включаючи моделі магнітних елементів з врахуванням насичення і гістерезису, довгих ліній з урахуванням затримок, втрат і перехресних перешкод, взаємодії аналогової і цифрової частин і ін. Бібліотека відкрита для включення моделей користувачів, є відповідні інструментальні засоби поповнення бібліотеки.

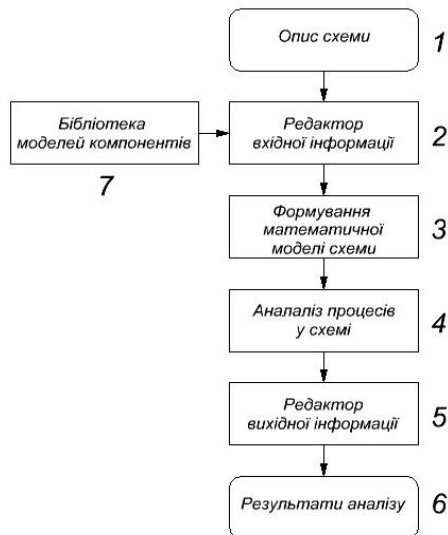


Рис. 5.1. Узагальнена блок-схема програми комп'ютерного аналізу електричних кіл

Серед великої кількості програм комп'ютерного розрахунку динаміки електричних кіл особливо можна виділити категорію програм, орієнтованих на моделювання на рівні структурних схем (імітаційне моделювання). В цьому випадку від програми вимагається більша гнучкість, наявність бібліотек функціональних модулів, можливість спряження з іншими системами моделювання. До такого типу програм можна віднести наступні: MATLAB (www.mathworks.com), System View (www.elanix.com), Microwave Office (www.mwoffice.com), Visual System Simulator (www.mwoffice.com).

В цій категорії лідером вважається програмний комплекс MATLAB фірми MathWorks, Inc. який відноситься до систем комп'ютерної математики. Система підтримує виконання операцій з матрицями, поліномами, розв'язування, нелінійних і диференціальних рівнянь, оптимізацію, інтерполяцію, побудову графіків, тривимірних фігур і багато чого іншого. MATLAB – інтерактивна система, основним об'єктом якої є масив, для якого не вимагається вказувати розмірність явно. Це дозволяє вирішувати багато обчислювальних задач, пов'язаних з векторно-матричними формулюваннями.

Головним розширенням системи MATLAB є програмний пакет Simulink. Вже через свою назву Simulink виконує як би симуляцію роботи модельованих систем і пристроїв, яку також називають імітаційним моделюванням. Для побудови функціональної блок-схеми Simulink має обширну бібліотеку блокових компонентів і зручного редактора блок-схем. Simulink автоматизує наступний, самий трудомісткий етап моделювання: він складає і розв'язує складні системи алгебраїчних рівнянь та диференціальних, що описують задану функціональну схему забезпечуючи зручний і наочний візуальний контроль за поведінкою створеного користувачем віртуального пристрою.

Цінність MATLAB/Simulink полягає в обширній, відкритій для вивчення і модифікації бібліотеці компонентів. Вона включає джерела сигналів з практично будь-якою часовою залежністю, масштабуючі, лінійні і нелінійні перетворювачі з різноманітними формами передавальних характеристик, квантуючий пристрій, інтегруючі і диференціюючі блоки і т.д. В бібліотеці є цілий набір віртуальних реєструючих пристроїв – від простих вимірювачів типу вольтметра або амперметра до універсальних осцилографів, що дозволяють переглядати часові залежності вихідних параметрів систем – струмів, напруг, потужностей тощо. Є графічний пристрій для створення фігур в полярній системі координат, наприклад фігур Ліссажу і фазових портретів коливань. Simulink має засоби анімації і звукового супроводу. А в додаткових бібліотеках можна відшукати і такі прилади, як аналізатори спектру складних сигналів, багатоканальні самописці і засоби анімації графіків.

Проте, однією з найважливіших і справедливо оцінених якостей системи MATLAB є можливість її модифікації з метою розв'язування нових науково-технічних задач. Система MATLAB має відкриту архітектуру, що дає повний доступ користувачам до її коду на гнучкій і потужній (і в той же час простій) мові програмування цієї системи. Вона є однією з кращих і високоефективних мов програмування для науково-технічних розрахунків і створення засобів моделювання різних пристроїв і систем. У тому числі зручних і дуже наочних візуально-орієнтованих засобів аналізу, ідентифікації, побудови і моделювання систем.

У зв'язку з вищевикладеним, саме пакет MATLAB був обраний як платформа для реалізації розроблених алгоритмів.

5.2. Структура комплексу програм

На основі розроблених алгоритмів розв'язування інтегральних рівнянь аналізу динаміки електричних кіл побудовані програми у вигляді модулів розширень системи MATLAB, які об'єднані в комплекс під назвою ІЕЕС (Integral Equation for Electrical Circuits). Комплекс програм представляє собою набір *m*-файлів, які виконують роль або основних, або допоміжних програм.

Структурна схема комплексу програм ІЕЕС наведена на рис. 5.2.

Комплекс вміщує два основні підкомплекси: SVIEEC – містить програми для розв'язування задач аналізу динаміки електричних кіл на основі інтегральних динамічних моделей; IDIEEC – містить програми для здійснення ідентифікації параметрів електричних кіл на основі інтегральних динамічних моделей.

Підмодулі містять кілька груп програм: SLVIE2 – містить програми для розв'язування систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду; SNLVIE2 – містить програми для розв'язування систем нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду; SLVIDE – містить програми для розв'язування систем лінійних інтегродиференціальних рівнянь Вольтерри; SNLVIDE – містить програми для розв'язування систем нелінійних інтегродиференціальних рівнянь Вольтерри; COMMON – набір допоміжних підпрограм, що використовуються основними програмами комплексу.

Група **SLVIE2** включає 12 модулів: *slvie2NC*, *slvie2NCad*, *slvie2NCdeg*, *slvie2NCdegad*, *slvie2open*, *slvie2openad*, *slvie2opendeg*, *slvie2opendegad*, *slvie2colloc*, *slvie2collocad*, *slvie2iter*, *slvie2iterdeg*. Група **SNLVIE2** включає 5 модулів: *snlvie2open*, *snlvie2openad*, *snlvie2colloc*, *snlvie2collocad*, *snlvie2NKant*. Група **SLVIDE** включає модулі: *slvide*. Група **SNLVIDE** включає модулі: *snlvide*.

До групи **COMMON** увійшли 8 модулів: *table*, *table_deg*, *Aquad*, *NKcoef11*, *coefNK2*, *coefNK2_3*, *coefNK3_4*, *coefNK8_11*.

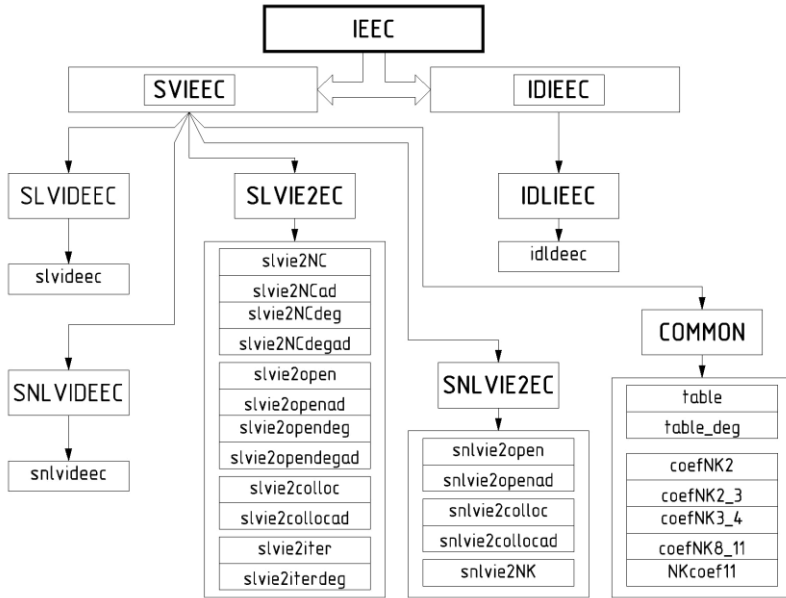


Рис. 5.2. Структура комплексу програм IEEC

Таблиця 4.1

Призначення основних модулів комплексу програм IEEC

Програма	Базовий обчислювальний метод	Призначення
Група SLVIE2 (лінійні електричні кола)		
slvie2NC	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратур на основі формул Ньютона-Котеса закритого типу	Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів.
slvie2NCdeg		Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з виродженими ядрами на фіксованій сітці вузлів.
slvie2NCad		Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів.
slvie2NCdegad		Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами, що розділяються, на адаптивній сітці вузлів.

Продовження таблиці 4.1

slvie2open	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратур на основі комбінації	Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів.
slvie2opendeg	формул Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з виродженими ядрами на фіксованій сітці вузлів
slvie2openad	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратур на основі комбінації	Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів
slvie2opendegad	формул Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами, що розділяються, на адаптивній сітці вузлів
slvie2colloc	Аналіз динаміки електричних кіл методом коллокації	Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
slvie2collocad	на основі кусково-гладких поліномів	Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів
slvie2iter	Аналіз динаміки електричних кіл методом простої ітерації	Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
slvie2iterdeg		Розв'язування системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з виродженими ядрами на фіксованій сітці вузлів
Група SNLVIE2 (нелінійні електричні кола)		
snlvie2open	Аналіз динаміки електричних кіл на основі комбінації формул квадратури Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язування системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
snlvie2openad	Аналіз динаміки електричних кіл на основі комбінації формул квадратури Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язування системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів

snlvie2colloc	Аналіз динаміки електричних кіл методом коллокації	Розв'язування системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
snlvie2collocad	на основі кусково-гладких поліномів	Розв'язування системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів
snlvie2NK	Аналіз динаміки електричних кіл методом Ньютона-Канторовича	Розв'язування системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів
Група SLVIDE (лінійні електричні кола)		
slvide	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратур і Рунге-Кутти	Розв'язування системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри
Група SNLVIDE (нелінійні електричні кола)		
snlvide	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратур і Рунге-Кутти	Розв'язування системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри
Група IDIEEC		
idldeec	Ідентифікація параметрів електричних схем на основі інтегро-суматорного алгоритму	Реалізація ідентифікації параметрів електричних схем на основі інтегральних динамічних моделей.

5.3. Організація модулів комплексу програм в середовищі MATLAB

До основних вимог програмного забезпечення для комп'ютерних досліджень на основі математичних моделей відносять ефективність і надійність обчислень. Під ефективністю мається на увазі досягнення якнайменшого процесорного часу і числа ітерацій, а також високої точності результатів досліджень. Під надійністю розуміють достовірність отриманих результатів обчислень, можливості обробки ситуацій з помилковими даними.

Також такі програмні засоби повинні володіти інтерфейсом, зручним для користувача: швидке введення початкових даних в програму, можливість виводу проміжної інформації, зручне представлення результатів обчислень, гнучкість програмного забезпечення.

З урахуванням зазначених вимог система комп'ютерного моделювання організована у вигляді комплексу програм для розв'язування систем лінійних і нелінійних інтегральних (інтегро-диференціальних) рівнянь з використанням модульного принципу організації, відповідно до якої програми розбиваються на декілька підпрограм і функцій, що допускають їх подальший розвиток і корекцію.

Ефективність додатків багато в чому залежить від організації розподілу пам'яті під створювані великі масиви. При розробці додатків MATLAB з обробкою великих масивів даних рекомендується дотримуватися таких рекомендацій [84]:

1. Звести використання циклів до мінімуму, оскільки процес інтерпретації займає багато часу при обробці великого об'єму даних.
2. Використовувати поелементні операції роботи з матрицями і векторами де це можливо замість використання циклів. Поелементні операції зменшують часові витрати в десятки і сотні разів. Проте поелементні операції не завжди можливі до застосування.
3. Видаляти з пам'яті змінні, які більше не знадобляться в програмі. Для цього в додатку використовується команда *clear*.
4. Якщо в поточному блоці програми масив обчислених значень більше не знадобиться, але знадобиться в іншому, необхідно записати дані, що містяться в ньому, на диск, видалити його з пам'яті і завантажувати у міру потреби. Для цього служать команди *save* і *load*. При використанні команди *save* змінні зберігаються в двійкових файлах з розширенням *mat*, які займають менше місця, ніж текстові, і записуються швидше. Для подальшого завантаження змінних застосовується команда *load*.
5. Для збільшення доступної пам'яті шляхом оптимізації розміщення даних, впорядкування їх в пам'яті можна використовувати команду *pack*. При такій організації пам'яті в Matlab доцільно вводити першими найбільші масиви.
6. Враховувати структуру і тип даних. Наприклад, матриці з великою кількістю нульових елементів слід зберігати в розрідженому вигляді. Якщо дані містять тільки цілі значення, то має сенс використовувати для їх зберігання цілочисельні масиви відповідного типу (*int8*, *uint16*, *int16*, *uint16*, *int32*, *uint32*) залежно від максимального і мінімального значень даних.
7. Ініціалізувати масив даних шляхом застосування функцій *ones*, *eye* і *zeros*. Попереднє виділення пам'яті під заповнюваний масив дозволяє скоротити час розрахунків і зменшує фрагментацію пам'яті у порівнянні з динамічним виділенням пам'яті під створюваний масив.

Всі розглянуті рекомендації були виконані при розробці модулів комплексу програм ІЕЕС і протестовані [75] на ряді тестових прикладів.

Для програм передбачені різні інтерфейси, які залежать від кількості параметрів, що передаються в програму. При передачі в програму не всіх вхідних параметрів, передбачених в ній, незадані параметри приймають значення за замовченням.

Для програм, призначених для розв'язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду, можливі два види інтерфейсу, який залежить від виду вихідної системи рівнянь: для систем з постійною матрицею коефіцієнтів при u необхідно ввести масив коефіцієнтів B і вектор початкових умов u_0 , для систем з одиничною матрицею коефіцієнтів ці два параметри передавати не обов'язково.

Для адаптивних алгоритмів розв'язок знаходиться на інтервалі $[a, b]$ з початковим кроком h . В процесі обчислень крок зменшується удвічі при незадоволенні похибки обчислень (більше заданої похибки E).

Модулі, які призначені для знаходження розв'язку на заданій сітці x розмірності n , в результаті своєї роботи повертають масив розмірності $m \times n$ значень функцій $y_l, l = 1, m$. Програми, що містять адаптивні алгоритми розв'язування, другим параметром повертають сітку x , на якій знайдено шуканий розв'язок.

Можливі два варіанти задання ядер і правих частин: в табличному і в аналітичному вигляді. При табличному заданні дані передаються для обробки у вигляді сформованих масивів числових даних. При такому представленні даних буде потрібно більше пам'яті обчислювача, проте витрати машинного часу будуть меншими у порівнянні з другим підходом. При аналітичному заданні ядер і правих частин передбачається формування спеціальних функцій або файлів, в яких містяться дані у функціональному вигляді. Такий підхід дозволяє економити пам'ять обчислювача, проте вимагає більше часу для обчислень. При користуванні програмами комплексу ІЕЕС можна скористатися будь-яким з цих підходів, оскільки передбачено задання даних як в аналітичному вигляді, так і в табличному.

Всі основні модулі, як результат, повертають масив розв'язків u , а адаптивні додатки ще і масив x , що містить сітку вузлів, на яких знайдений розв'язок. Крім того, функції, які реалізують ітераційні алгоритми, повертають параметр *countIter*, що містить число ітерацій необхідне для досягнення заданої точності.

Відповідно до вимог, що пред'являються до пакетів прикладних програм комп'ютерного моделювання, у всіх розроблених функціях здійснюється перевірка правильності задання вхідних даних, їх відповідність поставленій задачі, а також забезпечується коректне завершення роботи програми у разі виникнення помилки в ході розв'язування.

З використанням вищенаведених алгоритмів і відповідного програмного забезпечення можна встановити області доцільності засто-

сування інтегральних та інтегро-диференціальних моделей електричних кіл у випадку неточності задання початкових даних внаслідок впливу на систему завод різної частоти (результати розрахунку наведені у п. 2.3). Крім того, чисельна реалізація отриманих моделей та співставлення результатів їх моделювання з розрахунковими даними, отриманими іншими методами, дозволило підтвердити достовірність і ефективність запропонованих методів і засобів комп'ютерної реалізації інтегро-диференціальних та інтегральних моделей. Результати таких розрахунків наведені нижче у п. 5.4.

5.4. Розв'язування прикладних задач

Наведемо кілька прикладів прикладних задач аналізу динаміки, які підкреслюють необхідність використання сучасних методів дослідження.

Моделі систем захисту шахтних енергосистем від ємнісних струмів витоку. Для електрифікації ділянок вугільних шахт на Україні застосовуються трифазні електричні мережі змінного струму промислової частоти 50 Гц з ізольованою нейтраллю трансформатора. Системи з ізольованою нейтраллю трансформатора прийняті також на шахтах Болгарії, Угорщини, Польщі, Німеччини, Франції і більшості шахт США [35, 48, 115].

Безпека експлуатації таких мереж визначається не тільки імовірністю дотику людини до елементів електроустаткування, що знаходяться під напругою, але і станом ізоляції їх щодо землі [35]. Із збільшенням активного опору ізоляції струми витоку і, отже, небезпека ураження людей електричним струмом, імовірність виникнення пожеж і вибухів рудникової атмосфери, викликаних струмами витоку, зменшуються. Проте, як показали дослідження, ємності шахтних дільничних електричних мереж досягають таких значень, при яких струм враження людини в основному визначається ємнісною складовою повного опору ізоляції мережі [35, 48]. Тому при експлуатації таких мереж як один з методів захисту від електроураження застосовують автоматичну компенсацію від ємнісних струмів витоку.

Отже, при розробці і проектуванні апаратів захисту від струмів витоку необхідно розраховувати також параметри пристрою компенсації ємнісних струмів витоку. Очевидно, що моделювання подібної системи на комп'ютері дозволяє провести ефективне дослідження залежності струму витоку від характеристик захисної апаратури; вибрати найефективніший принцип управління налагодження дроселя в резонанс; визначити оптимальні значення параметрів пристрою керування; полегшити проектування системи. Захист від струмів витоку в шахтних електричних мережах заснований на компенсації їх ємнісних скла-

дових. Для цього паралельно ємностям фаз мережі щодо землі вмикається індуктивність, що створює з вказаними ємностями коливальний контур. Задача полягає в тому, щоб, знаючи ємність ізоляції мережі C_m , забезпечити настроювання контура в резонанс ($\omega L_k = 1/(\omega C_m)$) і цим самим компенсувати ємнісну складову струму витоку.

На практиці, ємність мережі постійно змінюється через включення і відключення відгалужень. Тому застосовуються автоматичні пристрої компенсації з настройкою в резонанс дроселями з підмагнічуванням, у яких величина струму підмагнічення підтримується залежно від величини ємності нормально працюючої мережі [48, 115].

На рис. 5.3 приведена схема мережі і векторна діаграма струмів, що пояснює принцип компенсації ємності мережі. При включенні між нейтраллю мережі і землею дроселя з індуктивністю L_k струм, що протікає крізь тіло людини, що доторкнулася до фази мережі, складатиметься з суми ємнісної, активної та індуктивної складових струму замикання на землю.

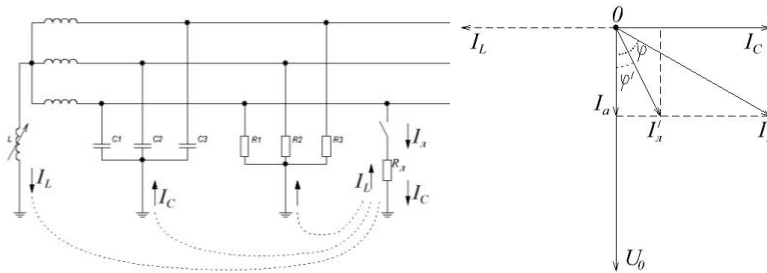


Рис. 5.3. Схема мережі та векторна діаграма струмів

В режимі повної (ідеальної) компенсації ємнісної і активної складових струму замикання на землю кут між напругою зсуву нейтралі і струмом, що протікає через тіло людини, буде рівний нулю, тобто

$$\varphi = \arctg R_n \left(3\omega C - \frac{1}{\omega L_k} \right) \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

В режимі недокомпенсації, коли має місце залишковий струм, що протікає через тіло людини – $\varphi > 0$, а при перекомпенсації – $\varphi < 0$.

Існують різні принципи побудови пристроїв компенсації. За способом включення в мережу компенсуючого дроселя пристрої автоматичного компенсування ємності діляться на два класи:

- пристрої з включенням компенсуючого дроселя між нейтраллю (або штучною нульовою точкою) мережі і землею;
- пристрої з пофазним включенням компенсуючих дроселів.

За принципами автоматичної компенсації ємності мережі пристрої також можна поділити на два великі класи:

- пристрої з настроюванням дроселя в резонанс при нормальній роботі мережі;
- пристрої з настроюванням дроселя в резонанс при виникненні струму витoku на землю.

Проте найбільш широко застосовуються пристрої з настроюванням в резонанс дроселів з підмагнічуванням, у яких величина підмагнічуючого струму підтримується залежно від величини ємності нормально працюючої мережі з включенням компенсуючого дроселя між нейтраллю трансформатора і землею. Тому, розглядатимемо далі даний клас пристроїв як систему, що моделюється.

Задачею моделювання системи компенсації ємнісних струмів витoku є вивчення процесів, що відбуваються в електричних мережах при зміні ємності ізоляції, визначення параметрів пристрою керування, що задовольняють вимогам, які пред'являються до компенсатора.

Для цього необхідно знати закон зміни струму через людину, що виявилася під напругою, величину і тривалість протікання цього струму. Враховуючи, що абсолютна більшість електротравм в шахтах відбувається при дотику до однієї фази мережі, а також мізерно малу імовірність одночасного замикання декількох фаз в різних видах електроустаткування, основним при розрахунку параметрів захисної апаратури прийнятий режим однофазного витoku при дотику людини до струмоведучих частин.

Розглянемо розрахункову схему шахтної електричної мережі, до фази якої доторкнулася людина, показану на рис. 5.4.

Враховуючи, що до моменту виникнення витoku (дотику людини до фази мережі) опори фаз мережі щодо землі були рівні і, отже, напруга і струм нульової послідовності були рівні нулю, а також рівна нулю сума фазних напруг, то розрахункову схему заміщення можна представити у вигляді еквівалентної схеми заміщення, наведеної на рис. 5.5.

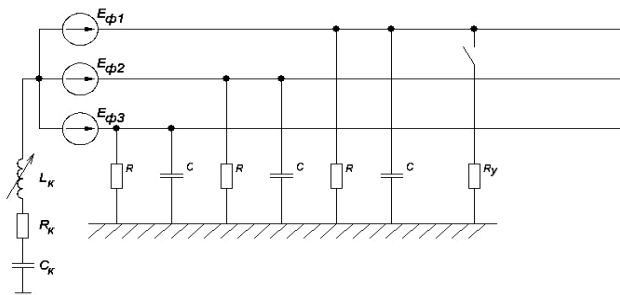


Рис. 5.4. Розрахункова схема шахтної електричної мережі з приєднаним до неї апаратом захисту від струмів витoku з пристроєм компенсації ємнісних струмів витoku

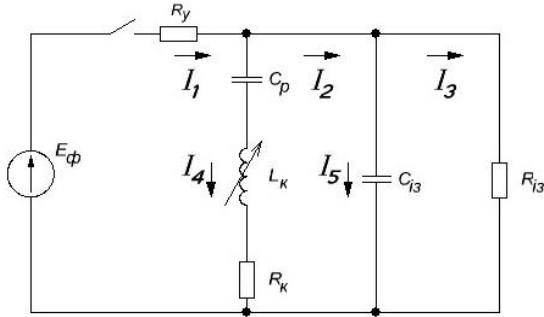


Рис. 5.5. Еквівалентна схема заміщення шахтної електричної мережі $C_{i3} = 3C$; $R_{i3} = R / 3$

Рівняння, що описують процеси які протікають в мережі, записані на основі законів Кірхгофа, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 R_y I_1 + \frac{1}{C_p} \int_0^t I_4 dt + L_k \frac{dI_4}{dt} + R_k I_4 &= E_\varphi; \\
 R_y I_1 + \frac{1}{C_{i3}} \int_0^t I_5 dt &= E_\varphi; \\
 R_y I_1 + R_{i3} I_3 &= E_\varphi; \\
 I_1 &= I_2 + I_4; \\
 I_2 &= I_3 + I_5.
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Виконавши еквівалентні перетворення, отримаємо систему інтегро-диференціальних рівнянь, а далі для визначення струмів I_1 та I_4 система може бути приведена до системи диференціальних рівнянь другого порядку (класичний підхід):

$$\begin{cases}
 \frac{d^2 I_4}{dt^2} = \frac{1}{L_k} \left(E'_\varphi - R_k \frac{dI_4}{dt} - \frac{1}{C_p} I_4 - R_y \frac{dI_1}{dt} \right); \\
 \frac{dI_1}{dt} = \frac{1}{R_y} \left(E'_\varphi - \frac{1}{C_{i3}} \left(-\frac{1}{R_{i3}} E_\varphi + \left(1 + \frac{R_y}{R_{i3}} \right) I_1 - I_4 \right) \right).
 \end{cases}
 \tag{5.3}$$

Початкові умови визначимо із законів комутації, та отримаємо, що *максимальний* струм проходить через людину, якщо вона доторкнеться до фази мережі у момент переходу миттєвої напруги цієї фази щодо землі через максимум, тобто при $t = 0$, $\varphi = \pi / 2$, *мінімальний* початковий струм витoku буде при $t = 0$, $\varphi = 0$.

Враховуючи велику *жорсткість* даної задачі пропонується поряд з традиційними диференціальними рівняннями використання альтернативного *інтегрального методу* формування математичної моделі.

Виконавши еквівалентні перетворення вихідної системи, отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned} & I_4 - \int_0^t \left(-\frac{R_y}{L_k} \right) I_1 d\tau - \int_0^t \left(-\frac{R_k}{L_k} - \frac{1}{L_k C_p} (t - \tau) \right) I_4 d\tau = \\ & = \frac{1}{L_k} \int_0^t E_\varphi d\tau, \\ & I_1 - \int_0^t \left(-\frac{1}{R_y C_{i3}} - \frac{1}{R_{i3} C_{i3}} \right) I_1 d\tau - \int_0^t \frac{1}{R_y C_{i3}} I_4 d\tau = \\ & = \frac{1}{R_y} E_\varphi + \frac{1}{R_y R_{i3} C_{i3}} \int_0^t E_\varphi d\tau. \end{aligned} \right. \quad (5.4)$$

Розрахункові графіки струму через опір однофазного витoku при початковій фазі $\varphi = 0$: в схемі, без резонансу струмів та в схемі, що настроєна в резонанс показані на рис. 5.6, а також при початковій фазі $\varphi = \pi/2$: в схемі, без резонансу струмів та в схемі, що настроєна в резонанс показані на рис. 5.7.

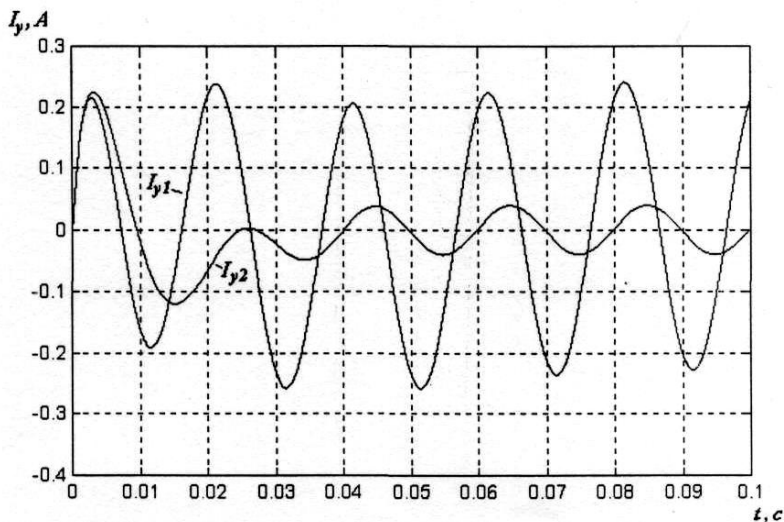


Рис. 5.6. Розрахункові графіки при початковій фазі $\varphi = 0$

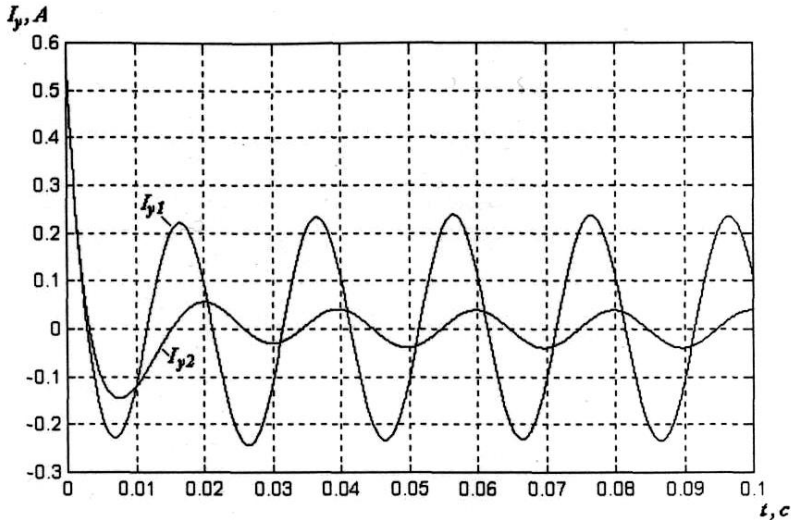


Рис. 5.7. Розрахункові графіки при початковій фазі $\varphi = \pi/2$

Отримана модель системи захисту від ємнісних струмів витoku у вигляді системи інтегральних рівнянь може бути використана для ефективного розв'язування наступних задач:

- визначення параметрів пристрою керування, що задовольняють вимогам які пред'являються до компенсатора;
- дослідження перехідних процесів, що виникають в електричній мережі при зміні ємності ізоляції мережі через включення і відключення відгалужень;
- визначення форми зміни і величини струму, що протікає крізь організм людини, що виявився під напругою, при різних параметрах мережі.

Моделі керованих джерел живлення. В системах електропостачання з різкозмінними і нелінійними навантаженнями, такими як прокатні стани, підйомно-транспортне устаткування, електродугові печі, устаткування електрозварювання і ін. виникає проблема усунення коливань напруги в мережі, викликаних стрибками реактивної потужності при пусках потужних електродвигунів і при експлуатаційних коротких замиканнях. При живленні від «слабкої електричної мережі» також виникає проблема пуску потужних асинхронних електродвигунів, особливо, під навантаженням. А у разі використання потужних систем електропостачання необхідно вирішувати проблему обмеження аварійних струмів короткого замикання і пускових струмів електродвигунів.

Застосовуючи пофазне, плавне і швидкодійне регулювання параметрів системи електропостачання (як поздовжніх – еквівалентного реактивного опору, так і поперечних – коефіцієнтів трансформації силових трансформаторів і реактивної потужності), реалізоване в *багатофункціональних пристроях регулювання* (БФПР) можна розв'язати вищенаведені проблеми. Крім того, за допомогою регулювання еквівалентного реактивного опору можна підвищити перепускну спроможність мережі, що необхідно, зокрема, для забезпечення пуску потужних асинхронних двигунів.

Таким чином, метою моделювання БФПР є визначення параметрів пристрою, при яких забезпечується можливість усунення коливань і несиметрії напруг, а також обмеження пускових струмів електродвигунів і струмів аварійних і коротких замикань. При цьому також розв'язується задача дослідження режимів силових елементів БФПР і принципів керування ключовими елементами як в пусковому, так і в робочому режимах асинхронного електроприводу.

Великими можливостями щодо усунення зазначених проблем володіє БФПР, принципова схема однієї фази якого наведена на рис. 5.8 [65]. БФПР має два плеча регулювання, що вмикаються симісторами $S1$, $S2$. Режим роботи БФПР вибирається їх перемиканням: при включенні $S1$ і вимкненому $S2$ (підключена тільки конденсаторна батарея C) відбувається підвищення напруги і зменшення еквівалентного індуктивного опору; при включенні $S2$ і вимкненому $S1$ (підключений тільки дросель L) – пониження напруги і збільшення еквівалентного реактивного опору; при одночасному включенні обох симісторів утворений дроселем і конденсатором LC – фільтр-пробка ефективно обмежує струм аварійного короткого замикання.

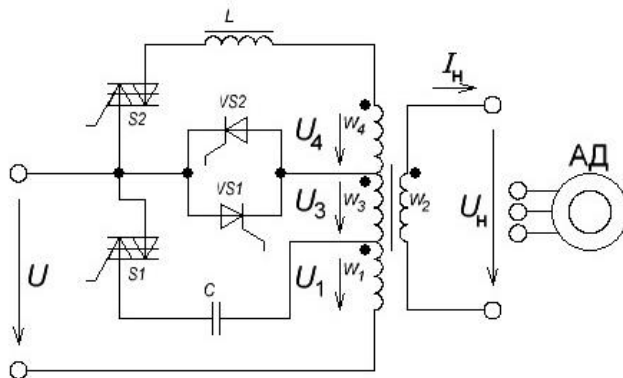


Рис. 5.8. Принципова схема БФПР

Для виключення надструмів при регулюванні плечем з конденсатором C комутація тиристорів $VS1$, $VS2$ здійснюється примусово шляхом їх виключення в кожному напівперіоді, в моменти часу, відповідно куту керування β (відраховується від кінця напівперіоду), тоді як включення $VS1$, $VS2$ відбувається в моменти рівності напруг регульовальної секції трансформатора і конденсатора $u_3(\beta) = u_c(\beta)$.

Регулювання напруги у бік її пониження і підвищення проводиться зміною кута керування β (відраховується від початку напівперіоду) тиристорів $VS1$, $VS2$ при включеному ключі $S2$. Комутація тиристорів в цьому випадку природна, що виключає виникнення перенапруг.

При коротких замиканнях ефективно обмеження струмів аварійних коротких замикань може бути проведено одночасним включенням двох плечей БФПР – з індуктивністю L і ємністю C , для чого симістори $S1$ і $S2$ повинні бути включені, а тиристори $VS1$, $VS2$ заблоковані.

Математичний опис подібних пристроїв, до яких входять трансформатори, ключові елементи, система автоматичного керування являє собою систему нелінійних диференціальних рівнянь високого порядку. Більш того, завдяки наявності в схемі керованих елементів, що працюють в ключових режимах, математична модель такої системи є дискретно-неперервною, в якій комутації ключів приводять до зміни не тільки порядку, але і структури самих рівнянь, відповідно комутаційним інтервалам.

Тому, представляється ефективним застосувати математичний опис БФПР у вигляді системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з безпосереднім її розв'язанням. Це пов'язано з тим, що традиційний спосіб розв'язування систем інтегро-диференціальних рівнянь шляхом їх зведення до диференціальних пов'язаних із збільшенням порядку вирішуваної системи, що є небажаним, особливо у разі нелінійної моделі.

При моделюванні керованих джерел живлення схему БФПР (Рис. 5.8) можна представити у вигляді еквівалентної принципової схеми, показаної на рис. 5.9.

В той же час, отримання розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь шляхом приведення її до системи інтегральних рівнянь, використовуючи еквівалентні перетворення, хоча і дозволяє використовувати швидкозбіжні і володіючі високою стійкістю методи розв'язування інтегральних рівнянь, проте важко здійсненні через складність подібних еквівалентних перетворень.

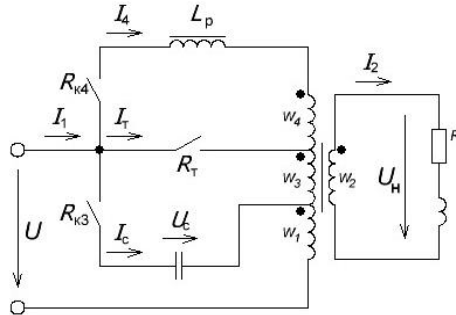


Рис. 5.9. Еквівалентна принципова схема БФПР

Тому для розв'язування системи доцільно застосувати квадратурно-різницевий метод безпосереднього розв'язування систем інтегродиференціальних рівнянь, заснований на поєднанні різницевих методів, відомих з теорії диференціальних рівнянь, і методів квадратурної апроксимації інтегрального оператора, що використовуються при чисельному розв'язуванні інтегральних рівнянь.

Система інтегро-диференціальних рівнянь БФПР, записана щодо поточкозчеплень обмоток $\psi_1 \dots \psi_4$, має вигляд

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = u - R_1 i_1 - \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_3) dt - R_{k3} (i_1 - i_3); \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -(R_m + R_2) i_2; \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_3) dt - R_3 i_3 - R_m (i_3 - i_4) + R_{k3} (i_1 - i_3); \\ \frac{d\psi_4}{dt} = R_m (i_3 - i_4) - (R_{k3} + R_4 + R_p) i_4, \end{cases} \quad (5.5)$$

де $R_1 \dots R_4, R_m$ – активні опори обмоток трансформатора і навантаження відповідно; R_{k3}, R_{k4}, R_m – опори керованих ключів; C – ємність конденсатора; $i_1 \dots i_4$ – струми в обмотках, що визначаються системою алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (L_1 + L_{\sigma 1}) i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 + M_{14} i_4 = \psi_1; \\ M_{21} i_1 + (L_2 + L_{\sigma 2} + L_m) i_2 + M_{23} i_3 + M_{24} i_4 = \psi_2; \\ M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + (L_3 + L_{\sigma 3}) i_3 + M_{34} i_4 = \psi_3; \\ M_{41} i_1 + M_{42} i_2 + M_{43} i_3 + (L_4 + L_{\sigma 4} + L_p) i_4 = \psi_4, \end{cases} \quad (5.6)$$

де $L_j = \frac{w_j^2}{R_\mu}$, $j = \overline{1,4}$; $L_{\sigma_1} \dots L_{\sigma_4}$ – індуктивності розсіювання;

$M_{ij} = \frac{w_i \cdot w_j}{R_\mu}$, $i, j = \overline{1,4}$ – взаємні індуктивності обмоток трансформатора;

$w_1 \dots w_4$ – число витків обмоток трансформатора; $R_\mu = \frac{H}{B} \cdot \frac{l_{cp}}{S}$ –

магнітний опір магнітопроводу трансформатора, що є нелінійною функцією сумарних ампер-витків всіх обмоток трансформатора;

$H = \frac{i_1 w_1 + i_2 w_2 + i_3 w_3 + i_4 w_4}{l_{cp}}$ – напруженість магнітного поля; B –

індукція магнітного поля в осердді трансформатора; l_{cp} , S – довжина середньої лінії і площа поперечного перетину магнітопроводу.

При розв'язуванні системи (5.5) значення магнітного опору R_μ вважають постійним. Це пов'язано з тим, що результати моделювання нелінійної системи рівнянь (5.6), коли магнітний опір є функцією струмів, якісно не відрізняються від відповідних їм для лінійної системи, проте алгоритм обчислення струмів значно ускладнюється через необхідність застосування спеціальних методів розрахунку, наприклад, методу Ньютона.

Досліджені наступні можливі режими роботи БПФР для двох можливих способів управління тиристорами VS – фазо-імпульсному і широтно-імпульсному:

- 1) включене плече з конденсатором C : $R_{k_3} = 0, R_{k_4} = \infty, R_m$ – регульоване.
- 2) включене плече з дроселем L_p : $R_{k_3} = \infty, R_{k_4} = 0, R_m$ – регульоване.
- 3) включені обидва плеча одночасно: $R_{k_3} = 0, R_{k_4} = 0, R_m = \infty$.

На рис. 5.10 показані результати моделювання режиму 1 для випадку широтно-імпульсного управління тиристорами VS .

При цьому способі управління включення і виключення зустрічно-паралельно включеної пари тиристорів VS проводилися на проміжку часу, відповідно цілому числу періодів шляхом одночасної подачі імпульсів управління на їх управляючі електроди. При цьому включення тиристорів VT проводилося в моменти t_1 рівності напруг u_c конденсатора і u_3 регульовальної обмотки w_3 , а їх виключення – в моменти t_2 при переходах струму тиристора i_m через нуль, цим забезпечувалася їх природна комутація.

Криві, приведені на рисунку, відповідають відношенню числа періодів ввімкнутого і вимкненого станів тиристорів VS , рівному одиниці.

Як видно з рисунку, комутація тиристорів відбувається без виникнення надструмів і перенапруг, при цьому форма вихідної напруги u_2 залишається синусоїдальною. Проте при цьому способі регулювання виникнення субгармонійних коливань на частотах низьких порядків є неминучим і їх амплітуда виявляється пропорційною прийнятому в режимі 1 діапазону регулювання БПФР.

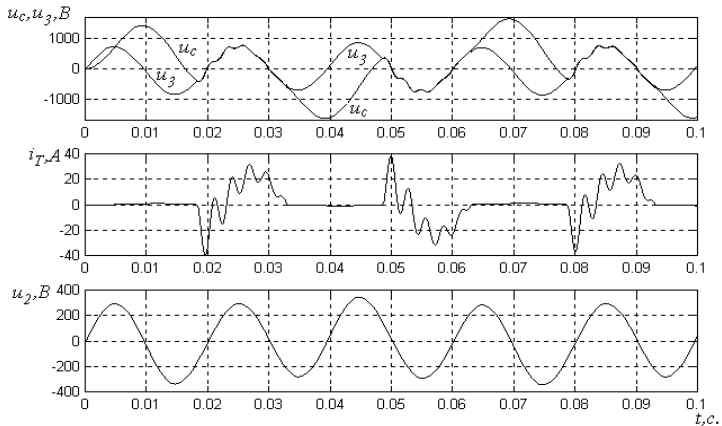


Рис. 5.10. Широтно-імпульсне управління

На рис. 5.11 приведено результати моделювання режиму 1 БПФР при фазо-імпульсному управлінні тиристорами VS для кута управління тиристорами, рівного 90° .

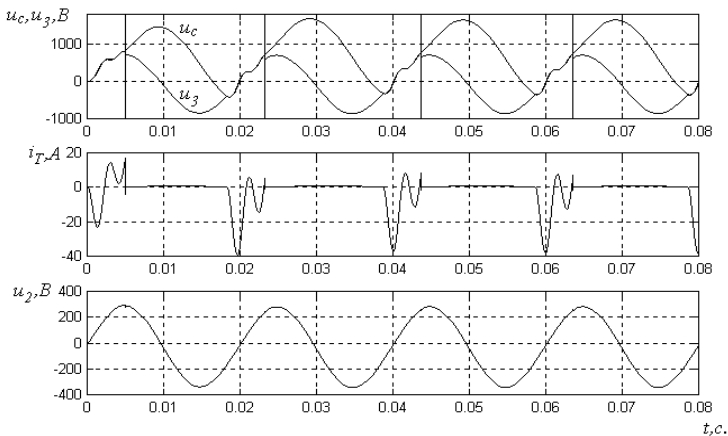


Рис. 5.11. Фазо-імпульсне управління

Як і у попередньому випадку включення тиристорів проводилося в моменти рівності напруг u_c і u_3 , тоді як їх виключення проводилося примусово, в моменти проходження струму i_m через чергове мінімальне значення в коливальному процесі його зміни.

Як видно з рисунку, надструмів при комутації тиристорів також не виникає, тоді як для зменшення перенапруг на тиристорах R_m було потрібно застосування демпфуючих RC -ланок. При цьому способі управління субгармонійних коливань не виникає. Несинусоїдність вихідної напруги u_2 , залежна від прийнятого діапазону регулювання напруги, істотно зменшується завдяки наявності конденсатора.

Моделювання проводилося для БПФР, виконаного на базі силового трансформатора потужністю 250 кВт, навантаженого асинхронним двигуном, потужністю 100 кВт. При цьому параметри БПФР мають наступні значення:

$$w_1 = 1300, w_2 = 52, w_3 = w_4 = 130, \frac{l_{cp}}{S} = 114.4 \frac{1}{\text{м}}, C = 79 \text{ мкФ},$$

$$R_1 = 3.397 \text{ Ом}, R_2 = 0.0492 \text{ Ом}, R_3 = R_4 = 0.3394 \text{ Ом}, R_p = 0.5 \text{ Ом},$$

$$R_m = 14300 \text{ Ом}, L_p = 0.127 \text{ Гн}, L_{\sigma 1} = 0.028 \text{ Гн}, L_{\sigma 2} = 3.8 \cdot 10^{-5} \text{ Гн},$$

$$L_{\sigma 3} = L_{\sigma 3} = 0.0029 \text{ Гн}.$$

Результати моделювання пристрою регулювання напруги співставлені з реальними експериментальними даними і встановлено, що запропонована математична модель у формі інтегро-диференціальних рівнянь повністю адекватна досліджуваному об'єкту, при цьому розмірність моделі нижча ніж для еквівалентної диференціальної моделі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агапова Н. Б., Федотов Ю. Б., Шаранов И. М. Моделирование трехфазного мостового выпрямителя на ЦВМ. *Силовые полупроводниковые приборы и преобразовательные устройства: Моделирование процессов в приборах и преобразователях*. Саранск: Морд. гос. ун-т, 1982. С. 79-84.
2. Апарцин А. С. Некоторые некорректные задачи в энергетике и их саморегуляризация. *Математическое моделирование в энергетике*. I. Киев: ИПМЭ АН Украины, 1990. С. 26-29.
3. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. 1104 с.
4. Арефьева М. Е. Асимптотические оценки точности оптимальных решений уравнения типа свертки. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1974. Т. 14 № 4. С. 838-851.
5. Баранов В. Л. Дифференциально-тейлоровская модель нелинейных краевых задач. *Электронное моделирование*. 2000. № 4. С. 25-31.
6. Безносова О. И. Интегральные уравнения в анализе переходных режимов в электрических сетях. *Тезисы докл. Республиканской конф. «Интегральные уравнения в прикладном моделировании»*. Киев: ИПМЭ АН УССР, 1986. Ч. I. С. 59-60.
7. Безносова О. И. ДТ-алгоритмы решения интегральных уравнений для задач анализа переходных процессов в электрических цепях с распределенными параметрами. *Сложные электромагнитные поля и электрические цепи: межвузовский сб.* Уфа: УАН, 1989. С. 112-115.
8. Бекенбах Э., Беллман Р. Неравенства. Москва: Мир, 1965. 165 с.
9. Бельтюков Б. А. К решению нелинейных интегральных уравнений методом Ньютона. *Дифференц. уравнения*. 1966. Т. 11. №6. С. 1072-1084.
10. Бобало Ю. Я., Мандзій Б. А., Стахів П. Г. та ін. Основи теорії електронних кіл / за ред. проф. Ю. Я. Бобала. Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2008. 332 с.
11. Боев В. М. Использование разрывных функций для расчета переходных процессов и импульсных воздействий в линейных электрических цепях. *Электронное моделирование*. 2002. № 6. С. 67-79.
12. Бондаренко В. М. Методы и алгоритмы анализа статистических и динамических режимов нелинейных цепей. Киев, 1974. 105 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т. электродинамики; № 66).
13. Бондаренко В. М. Вопросы анализа нелинейных электрических и электронных цепей. Киев: Наукова думка, 1967. 159 с.
14. Бондаренко В. М., Пфенинг В. В. Исследование и разработка алгоритмов и программ машинного проектирования электронных схем. Киев: ИЭД АН УССР, 1973. 68 с. (Препринт № 56).

15. Бондаренко В. М., Ронто Н. И. Численные методы получения вынужденных периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений электрических цепей. *Анализ электрических цепей и электромагнитных систем*. Киев: Наукова думка, 1967. С. 31-47.
16. Бондаренко В. М., Цап Н. С. Алгоритмы цифрового моделирования линейных электрических и электронных схем. Киев: ИЭД АН УССР, 1973. 41 с. (Препринт № 69).
17. Бондаренко В. М. Методы и алгоритмы анализа статических и динамических режимов нелинейных цепей. Киев: ИЭД АН УССР, 1974. 105 с. (Препринт № 66.)
18. Брикман М. С. Интегральные модели в современной теории управления. Рига : Зинатне, 1979. 224 с.
19. Верлань А. А., Ключка К. М., Осман И. С. Локализация неисправных подсхем в электронных устройствах в условиях разброса значений параметров и шумов измерений. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. С. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вип. 38. С. 94-101.
20. Верлань А. А., Ключка К. Н. Достаточные условия сходимости рядов Вольтерры для определенных классов нелинейных цепей. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. С. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вип. 45. С. 8-16.
21. Верлань А. Ф. Метод интегральных уравнений в задаче описания и расчета электрических цепей. *Электронное моделирование*. 1983. №5. С. 8-12.
22. Верлань А. Ф. О применении метода Ньютона-Канторовича к анализу процессов в нелинейных электрических цепях. *Теоретическая электротехника и электроника*. 1979. Вып. 26. С. 130-135.
23. Верлань А. Ф. Некоторые особенности интегрального метода математического моделирования. *Электроника и моделирование*. 1975. Вып. 5. С. 82-86.
24. Верлань А. Ф., Москалюк С. С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / отв. ред. Г. Е. Пухов; АН УССР; Ин-т проблем моделирования в энергетике. Киев: Наук. думка, 1988. 288 с.
25. Верлань А. Ф., Сизиков С. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 543 с.
26. Верлань А. Ф., Ситник О. О., Ключка К. М. Інтегральні рівняння аналізу нестационарних електричних систем. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка»*. 2009. № 637. С. 12-18.
27. Верлань А. Ф., Ключка К. Н. Метод интегральных уравнений в задаче идентификации параметров электрических цепей. *Вісник Черкаського державного технологічного університету*. 2011. № 1. С. 55-58.
28. Верлань А. Ф., Ситник О. О., Ключка К. М. Метод ідентифікації електричних кіл на основі інтегральних динамічних моделей. *Матеріали третьої міжнародної науково-технічної конференції «Моделирование в электротехнике, электронике и светотехнике МЭЭС'2010»*. Київ, 2010. С. 24-26.

29. Верлань А. Ф., Биленко В. И., Передерий П. Т. Интегроаппроксимационный алгоритм анализа переходных процессов в нелинейных электрических цепях. *Электричество*. 1990. №11. С. 305-311.
30. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. Пер. с англ. / под ред. П. И. Кузнецова. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 304 с.
31. Высоцкий В. М. Расчет в нелинейных электрических цепях путем решения интегральных уравнений на небольших участках. *Вестн. ЛПИ*. 1968. № 3. С. 23-28.
32. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.
33. Гинзбург М. М. Получение интегральных уравнений для нелинейных цепей с применением операторного метода. *Электричество*. 1960. № 5. С. 17-22.
34. Гинзбург М. М. Решение интегральных уравнений для нелинейных цепей, полученных с применением операторного метода. *Электричество*. 1962. № 12. С. 28-33.
35. Гладилин Л. В., Шуцкий В. И., Бацезев Ю. Г., Чеботаев Н. И. Электробезопасность в горнодобывающей промышленности. Москва: Недра, 1977. 327 с.
36. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 642 с.
37. Годлевский В. С. Экспоненциальный метод для решения систем обыкновенных дифференциальных и конечных уравнений при моделировании электрических цепей. *Электрон. моделирование*. 1960. № 2. С. 60-65.
38. Горошко И. О., Тихоход В. А. Компьютерная реализация решения систем интегральных уравнений Вольтерры при исследовании много-связных динамических объектов. *Электронное моделирование*. Киев, 2007. Т. 29. № 3. С. 101-107.
39. Гроп Д. Методы идентификации систем. Москва: Мир, 1979. 302 с.
40. Данилов Л. В., Матханов Н. П., Филиппов Е. С. Теория нелинейных электрических цепей. Ленинград: Энергоатомиздат, 1990. 256 с.
41. Данилов Л. В. Ряды Вольтерры-Пикара в теории нелинейных электрических цепей. Москва: Радио и связь, 1987. 224 с.
42. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез / под ред. Н. Т. Кузовкова. (Пер. с англ.). Москва: Машиностроение, 1974. 288 с.
43. Дашенко А. Ф., Кириллов В. Х., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф. MATLAB в инженерных и научных расчетах: моногр. Одесса: Астропринт, 2003. 215 с.
44. Демидович В. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Москва: Физматгиз, 1963. 400 с.
45. Демирчян К. С., Волков В. М., Карташев Е. Н. Сравнительный анализ методов численного интегрирования при расчете переходных процессов в электрических цепях. *Электричество*. 1976. № 9. С. 47-51.

46. Демирчян К. С., Бутырин П. А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей: учеб. пособие для электр. и электроэнерг. спец. вузов. Москва: Высш. шк., 1988. 335 с.
47. Демирчян К. С., Ракитский Ю. В., Бутырин П. А. и др. Проблемы численного моделирования процессов в электрических цепях. *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт*. 1982. № 2. С. 94-114.
48. Дзюбан В. С. Аппараты защиты от токов утечки в шахтных электрических сетях. Москва: Недра, 1982. 152 с.
49. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1988. 121 с.
50. Добкин Л. И. Интегральные методы расчета неустановившихся процессов в нелинейных электрических системах. *Изв. вузов. Радиоэлектроника*. 1972. № 5. С. 1134-1145.
51. Дьяконов В. П., Круглов В. В. Математические пакеты расширения Matlab: Специальный справочник. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 408 с.
52. Дьяконов В. П. Matlab 6.0: Учебный курс. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 592 с.
53. Дьяконов В. П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. Москва: СОЛОН-Пресс, 2005. 576 с.
54. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 584 с.
55. Кадымов Я. Б. Переходные процессы в системах с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1968. 191 с.
56. Карсон Д. Р. Электрические нестационарные явления и операционные исчисления. Киев: Гос. научн.-техн. изд-во Украины, 1934. 232 с.
57. Карпов Е. А. Применение интегральных уравнений к расчету периодических режимов в нелинейных цепях. *Теоретическая электротехника*. 1968. Вып. 5. С. 108-112.
58. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение / Пер с англ. под ред. Х. Д. Икрамова. Москва: Мир, 1998. 575 с.
59. Ключка К. М. Методи отримання інтегральних динамічних моделей електричних кіл. *Вісник Черкаського державного технологічного університету*. 2009. № 1. С. 28-30.
60. Ключка К. М. Метод аналізу електричних систем із змінними параметрами. *Вісник Черкаського державного технологічного університету*. 2009. № 3. С. 25-30.
61. Ключка К. М. Інтегральні моделі лінійних електричних кіл. *Збірник наукових праць (за матеріалами Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»)*. Кам'янець-Подільський, 2006. С. 156-161.
62. Ключка К. М. Застосування інтегроапроксимаційного алгоритму для аналізу динаміки електричних кіл. *Збірник тез (за матеріалами Всеукраїнської науково-технічної конференції «Комп'ютерна матема-*

- тика в науці, інженерії та освіті» на базі Полтавського національного технічного університету ім. Юрія Кондратюка). 2007. С. 19-20.
63. Ключка К. М. Обчислювальний експеримент для порівняння чисельних методів розрахунку диференціальної та інтегральної моделі електричного кола. *Збірник тез (за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів» на базі Черкаського державного технологічного університету)*. 2007. С. 35-37.
 64. Ключка К. М. Отримання інтегральних рівнянь в задачах динаміки електричних кіл. *Збірник наукових праць (за матеріалами III Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»)*. Кам'янець-Подільський, 2008. С. 64-69.
 65. Коротецкий Ю. Л. Многофункциональное устройство плавного регулирования переменного напряжения и реактивного сопротивления. *Электромашинобудоування та електроустановкаування: респ. міжвід. наук.-техн. зб.* Київ: Техніка, 1998. Вип. 50. С. 63-68.
 66. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. 2-е изд. Москва: Наука, 1976. 216 с.
 67. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. 2-е изд. Москва: Наука, 1967. 270 с.
 68. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. Москва: Наука, 1966. 372 с.
 69. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. В 2-х т. Москва: Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
 70. Лазарев Ю. Ф. Matlab 5.x. Київ: ВНУ, 2000. 384 с.
 71. Липаев В. В. Тестирование программ. Москва: Радио и связь, 1986. 296 с.
 72. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. Москва: Мир, 1977. 584 с.
 73. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Москва: Наука, 1989. 352 с.
 74. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. Москва, 1977. 272 с.
 75. Майерс Г. Искусство тестирования программ. Москва: Мир, 1982. 212 с.
 76. Метьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование Matlab. Москва: Изд. дом «Вильямс», 2001. 720 с.: ил.
 77. Matlab Documentation. URL: <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/helpdesk.html>.
 78. Мороз В. І. Ефективні рекурентні формули для комп'ютерного моделювання електромеханічних систем. *Електроенергетичні та електромеханічні системи*. 2007. № 597. С. 3-11.
 79. Мороз В. І. Вибір кроку дискретизації в цифрових моделях електромеханічних систем. *Електроенергетичні та електромеханічні системи*. 2010. № 671. С. 72-75.

80. Мороз В. І. Аналіз чисельних методів для аналізу керованих електромеханічних систем. *Тези доповідей 3-ої Міжнародної науково-технічної конференції «Математичне моделювання в електротехніці, електроніці та електроенергетиці»*, 25-30 жовтня 1999 р., Львів, Україна.
81. Мороз В. І. Інтегральні рівняння в моделюванні керованих електромеханічних систем. *Електротехніка і електромеханіка*. 2007. №3. С. 39-43.
82. Мустафа Г. М., Шарапов И. М., Тингаев В. Н. Система программ для моделирования устройств преобразовательной техники. *Электротехника*. 1978. № 6. С. 6-10.
83. Мустафа Г. М., Шаранов И. М. Математическое моделирование тиристорных преобразователей. *Электричество*. 1978. № 1. С. 40-45.
84. Обзор пакетов прикладных программ электронного проектирования. URL: <http://mirea.narod.ru/mfiles/okpandmres/obzor.pdf>.
85. Одокиенко С. Н. Реализация неявных интегральных динамических моделей посредством быстродействующих алгоритмов. *Моделювання та інформаційні технології*. Київ: ИПМЭ, 2006. Вып. 36. С. 51-59.
86. Оурк И. А. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем. Москва; Ленинград: Наука, 1965. 208 с.
87. Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики. Львів: Вища школа, 1989. 464 с.
88. Петренко А. И., Цирфа А. И. Развитие методов численного интегрирования в подсистемах автоматизированного проектирования электронных схем (аналитический обзор). *Электрон. моделирование*. 1991. Т. 13. № 1. С. 30-38.
89. Петренко А. И., Власов А. И., Тимченко А. П. Анализ сложных электронных схем методом разбиения. *Вычислительная техника в конструировании и технологии приборостроения*. Москва: Знание. 976 с.
90. Проблемы математического анализа, краевые задачи и интегральные уравнения / под ред. В. И. Смирнова. Ленинград: Изд-во Ленингр. унта, 1966. 179 с.
91. Пухов Г. Е. Интегральные методы расчета электрических цепей. *Теоретическая электротехника*. 1966. Вып. 2. С. 5-14.
92. Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Киев: Наукова думка, 1967. 570 с.
93. Пухов Г. Є. Перспективні методи математичного моделювання енергетичних об'єктів. *Вісн. АН УРСР*. 1988. № 1. С. 10-20.
94. Резцов В. Ф., Рамазанова З. У., Суржик Т. В. Особенности проявления неустойчивостей в линиях с распределёнными параметрами при зависимости проводимости тока утечек от температуры. *Доповіді НАН України*. 2005. № 5. С. 80-86.
95. Резцов В. Ф., Рамазанова З. У., Суржик Т. В., Хаджинов А. Л. Анализ неустойчивых пространственно неоднородных режимов в длинных линиях при зависимости проводимости тока утечек от напряжения и температуры. *Технічна електродинаміка*. 2005. № 2. С. 60-63.

96. Розенвассер Е. Н. Колебания нелинейных систем. Метод интегральных уравнений. Москва: Наука, 1969. 576 с.
97. Ронто Н. И., Семагина Э. П. Использование дифференциальных преобразований для расчета электрических цепей с кусочно-линейными характеристиками. *Математическое и программное обеспечение цифрового моделирования вентильных преобразователей*. Киев: Наук. думка, 1973. С. 27-29.
98. Саух С. Е. Методы математического моделирования энергетических цепей: монография. Киев: Три К, 2020. 278 с.
99. Сидоров Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения: монография. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 293 с.
100. Смирнов В. И. Курс высшей математики. В 5 т. Москва: Физматгиз, 1958. Т. 4. 478 с.
101. Солодов А. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Москва: Физматгиз, 1962. 324 с.
102. Ситник О. О., Верлань А. А., Ключка К. М. Метод формування інтегральних рівнянь нелінійних електричних кіл. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.С. Пухова НАН України*. Київ, 2008. Вип. 47. С. 59-71.
103. Ситник О. О., Ключка К. М. Застосування інтегроапроксимаційного алгоритму для аналізу динаміки електричних кіл. *Вісник Черкаського державного технологічного університету*. 2008. № 3. С. 69-73.
104. Ситник О. О., Ключка К. М. Один з методів застосування інтегральних рівнянь до аналізу лінійних стаціонарних електричних кіл із зосередженими параметрами. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. С. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вип. 43. С. 109-118.
105. Ситник О. О., Ключка К. М. Один з методів отримання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри на основі топології системи. *Збірник тез (за матеріалами II Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів» на базі Черкаського державного технологічного університету)*. 2009. С. 261-262.
106. Сытник А. А., Ключка К. Н., Протасов С. Ю. О реализации интегральных моделей в задаче динамической коррекции измерительного преобразователя. *Збірник тез (за матеріалами Міжнародної наукової конференції «Интегральные уравнения – 2009»)*. 2009. С. 131-133.
107. Тонкаль В. В., Тонкаль В. В., Руденко В. С. [и др.]. Вентильные преобразователи переменной структуры. Киев: Наук. думка, 1989. 336 с.
108. Федорчук В. А., Иванюк В. А., Верлань Д. А. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. 144 с.
109. Федий В. С. Исследование электромагнитных процессов в электрических цепях с коммутаторами. *Пр. ін-ту електродинаміки НАН України: зб. наук. пр.* Київ: ІЕД НАН України, 2007. № 1 (16). Ч. 2. С. 91-94.

110. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1976. 152 с.
111. Цалюк З. В. Интегральные уравнения Вольтерра. *Итоги науки и техники // ВИНИТИ. Мат. анализ.* 1977. Т. 15. С. 131-198.
112. Чиженко И. М., Руденко В. С., Сенько В. И. Основы преобразовательной техники. Москва: Высш. шк., 1974. 430 с.
113. Чуа Л. О., Пен-Мин-Лин. Машинный анализ электронных схем. Пер. с англ. Москва: Энергия, 1980. 620 с.
114. Юрьев М. Ю. Устанавливающие режимы в четырехполосниках с сосредоточенными и распределенными параметрами на основе операторного метода Хевисайда. Москва; Ленинград: ОНТИ, 1936. 203 с.
115. Ягудаев Б. М., Шишкин Н. Ф., Назаров В. В. Защита от электропоражения в горной промышленности. Москва: Недра, 1982. 152 с.
116. Яценко Ю. П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. Киев: Наукова думка, 1991. 220 с.
117. Bewley L. V. Travelling waves on transmission systems. New York, 1951. 543 p.
118. Beznosova O. I., Semagina E. P. Step-by-step numerical method for decision of Volterr kind integral equations. *Proceedings of the International Conference «Integral equations – 2010» dedicated to 50 years of the Department of Numerical Mathematic, 25-27 August 2010 (Lviv).* Lviv: PAIS, 2010. P. 11-16.
119. Birkeland Illustrated Mathematics: Visualization of Mathematical Concepts with Mathcad PLUS 6.0 / Birkeland, Byrge., Studentlitteratur, Lund, Sweden, 1997.– 316 p.
120. Breiteneker F., Husinsky I. Results of the EUROSIM Comperision Lithium Cluster Dynamics. *Trends in Continuous Simulation Software. EUROSIM'95.* P. 9-15.
121. Brulinski P., Zielinski I. S. Comparison of Some Algorithms Applied to Digital Ccalculations of transient phenomena in transmission lines with distributed parameters. *Rozprawy elektrotechniczne.* Warszawa, 1983. Т. 29. P. 3-15.
122. Building GUIs with Matlab. – The MathWorks Inc., 1997. URL: www.mathworks.com.
123. Carson J. R. Theory and calculation of variable electrical systems. *Phys. Rev.* 1921. Vol. 7. № 2. P. 116-134.
124. Chang R. Y., Wang M. L. Optimal control of lumped parameter systems via shifted Legendre polynomial approximation. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 1985. Vol. 45. № 2. P. 313-324.
125. Chou J. H., Horng I. R. Double-shifted Chebyshev series for convolution integral and integral equations. *Int. J. Control.* 1985. Vol. 42. № 1. P. 225-232.
126. Hsiao C. H., Chen C. F. Solving integral eqvations via Walsh functions. *Comput. Elect. Eng.* 1979. № 6. P. 279-292.

127. Hwang Ch., Shih Y. P. Solution of integral equations via Laguerre Polynomials. *Comput. and Elect. Eng.* 1982. Vol. 9. № 34. P. 123-129.
128. Kung F. C., Chen S. Y. Solution of integral equations using a Set of Block-Pulse Functions. *J. Franklin Inst.* 1978. Vol. 306. № 4. P. 83-291.
129. Lin P. M. Formulation of hybrid matrices for linear multiports containing controlled sources. *IEEE Trans. on CAS.* 1974. Vol. CAS-21. № 2. P. 169-175.
130. Malina L. A. stable methods of high order for Volterra integral equations. *Appl. Math.* 1975. Vol. 20. № 5. P. 336-344.
131. Miller A. K. Nonlinear Volterra integral equations. Menlo Park (Calif.): Benjamin, 1971. X, 468 p.
132. Miller K. Three circle theorems in partial differential equations and applications to improperly posed problems. *Arch. Ration. Mech. and Anal.* 1964. Vol 16. № 2. P. 126-154.
133. Miller K. Eigenfunction expansion methods for problems with overspecified data. *Ann. Scuola. Norm. Super. Pisa. Sci. fis. e mat.* 1965. Vol. 19. P. 397-405.
134. Miller K. Least squares methods for ill-posed problems with a prescribed bound. *SIAM J. Math. Anal.* 1970. Vol 1. № 1. P. 52-74.
135. Morchalo J. O przyblizonym rozwiazaniu nieliniowych rownan calkowych typu Volterra w przestrzeni funkcji ciaglych. *Fasc. math.* 1972. № 6. P. 31-40.
136. Poch H., Rebovlet C., Shonek J. A general digital computer simulation programme for thiristor static converters (programme SACSO): Applications examples «Contr. Power Electron, and Elec. Drevor». Proc. 2-nd IFAC Sgmp. Düsseldorf, 1977. P. 1-5.
137. Reinsh C. H. Smoothing by spline functions. *Numer. Math.* 1967. Vol. 10. № 5. P. 177-183.
138. Semagina E. P., Beznosova O. I. Numerical Algorithms of Integral Models Analysis for Systems with Distributed and Lumped Parameters. *Proc. of IXth Int. Workshop «Computational Problems of Electrical Engineering» (CPEE'08) Alushta, Sept. 16-20, 2008.* P. 151-152.
139. Shampine L., Reichelt M. The MATLAB ODE Suite. URL: http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/otherdocs/-odesuite.pdf.
140. Shampine L. F. Implementation of implicit formulas for the solution of ODE's. *SIAM J. Sci. Statist. Comput, flal.* 1980. P. 103-118.
141. Stefan Steinhaus. Comparison of mathematical programs for data analysis. *Steinhaus Stefan University of Frankfurt.* 1999. 50 p.
142. The MathWorks, Inc. Numerical Computing with MATLAB. 2004. URL: <http://www.mathworks.com/moler>.
143. The Student edition of MATLAB for MS-DOS personal computers. The MathWorks, Inc., 1992. 215 p.

144. Volterra V. Sulle inversione degli integrali definiti. *Nota I, Atti R. Accad. Sci. Torino*. 1896. Vol. 31. P. 311-323.
145. Volterra V. Sopra alcune questioni di integrali definitive. *Ann. Mat. Pura Appl.* 1897. Vol. (2) 25. P. 139-178.
146. Wang J. Y., Goulard R. Information content in remote sensing: comment. *J. fld.* 1974. Vol. 13. №11. P. 2467-2468.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ФОРМУВАННЯ ТА ОСОБЛИВОСТІ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	6
1.1. Інтегральні рівняння Вольтерри	6
1.2. Модифікація класичного методу аналізу перехідних процесів в електричних колах.....	10
1.3. Отримання інтегральних рівнянь кіл за диференціальними рівняннями на основі еквівалентних перетворень.....	22
1.4. Інтегральні рівняння нелінійних електричних кіл.....	26
1.5. Формування інтегральних моделей нестационарних (параметричних) електричних кіл	42
1.6. Електричні кола зі структурою, що змінюється (схеми з ідеальними ключами)	48
1.7. Електричні кола, що містять елементи з розподіленими параметрами	54
2. ЯКІСНІ ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ	57
2.1. Аналіз стійкості електричних кіл за їх інтегральними динамічними моделями	57
2.2. Оцінка точності інтегрального методу розрахунку електричних кіл.....	63
2.3. Дослідження впливу завад на точність реалізації інтегральних моделей	69

3. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	72
3.1. Характеристики та особливості методів та алгоритмів розв'язування інтегральних рівнянь	72
3.2. Алгоритми розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду.....	83
3.3. Застосування інтегро-апроксимаційного алгоритму для аналізу динаміки електричних кіл	93
3.4. Розв'язування задачі ідентифікації інтегральних динамічних моделей	102
4. МЕТОД ПІДСУМОВУВАННЯ СКІНЧЕННИХ ПРИРОСТІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ В НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ	113
4.1. Аналог методу накладання для нелінійних кіл	113
4.2. Прирости в колах постійного струму.....	116
4.3. Інтегральні аналоги законів Ома і Кірхгофа, інтегральні рівняння кіл постійного струму.....	119
4.4. Вихідний алгоритм методу підсумовування скінченних приростів	122
4.5. Кола з декількома стійкими станами	123
4.6. Порівняння і зв'язок методу підсумовування скінченних приростів з іншими методами, функціональне введення параметра	125
4.7. Основний алгоритм методу підсумовування скінченних приростів	128
4.8. Точність, збіжність, вибір змінних.....	132
4.9. Оптимальний гібридний варіант методу підсумовування скінченних приростів	136

5. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ.....	138
5.1. Загальна характеристика пакетів програм для комп'ютерного аналізу електричних кіл	138
5.2. Структура комплексу програм.....	141
5.3. Організація модулів комплексу програм в середовищі MATLAB	144
5.4. Розв'язування прикладних задач	147
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	159

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВЕРЛАНЬ Анатолій Федорович,

член-кореспондент НАПН України, доктор технічних наук, професор

ВЕРЛАНЬ Андрій Анатолійович,

доктор технічних наук, старший науковий співробітник,
професор кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів
і систем Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
Норвежський університет науки і технологій

КЛЮЧКА Костянтин Миколайович,

кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електротехнічних систем
Черкаського державного технологічного університету

ФЕДОРЧУК Володимир Анатолійович,

доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук
Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

ІНТЕГРАЛЬНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

МОНОГРАФІЯ

Підписано до друку 1.07.2022 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк цифровий.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 10. Обл.-вид. арк. 10,4.
Тираж 200. Зам. № 982.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Віддруковано згідно з наданим оригінал-макетом
у друкарні ТОВ «Друкарня "Рута"»,
свід. Серія ДК № 4060 від 29.04.2011 р.
вул. Руслана Коношенка, 1, м. Кам'янець-Подільський, 32305.