Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **"ДОСЛІДЖЕННЯ ГІПОТЕЗИ СЕЙМУРА"**

Виконала: студентка 2 курсу
ступеня вищої освіти магістр,
групи М1-М21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Гончар Ірина Володимирівна

Керівник: **Зеленський О. В.,**
кандидат фізико-математичних наук

Рецензент: **Кріль С. О.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам'янець-Подільський – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Гіпотеза Сеймура – одна з найвідоміших у теорії графів невирішених математичних проблем, яку сформулював Пол Сеймур у 1990 році. Ця проблема також відома під назвою “задача другої околиці”.

Розглянемо соціальну мережу, у якій жодні дві людини одночасно не знають один одного, як орієнтований граф. Ця гіпотеза стверджує, що знайдеться хоча б одна людина, для якої знайомих знайомих буде не менше, ніж знайомих.

Означення та базові теореми теорії графів описані в [1–4].

Для довільного графа гіпотеза Сеймура залишається невирішеною, проте вже існують доведення для часткових випадків та для деяких видів графів, які наведені у [5–7].

Деякі властивості можливих мінімальних контрприкладів представлені у [8].

Актуальність обраної теми дослідження визначається стрімкими темпами розвитку сучасної теорії графів, які пов’язані із розширенням її сфери використання: бізнес, логістика, туризм і, головне, створення комп’ютерних програм. Окрім цього, теорія графів і досі залишається малодослідженою, особливо в Україні.

Метою наукової роботи є оцінка значень діаметрів та щільностей можливих контрприкладів до гіпотези Сеймура, застосування штрафної функції при дослідженні таких контрприкладів та порівняння звичайної гіпотези Сеймура з її узагальненою версією на вершинно-зважених графах.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- проаналізувати сучасний стан дослідженості гіпотези Сеймура;

- оцінити діапазон значень діаметрів та щільностей – величин, що характеризують можливі контрприклади;

- з використанням штрафної функції довести, що графи з певними властивостями не можуть бути контрприкладами до гіпотези Сеймура з найменшою кількістю вершин;

- встановити зв’язок між гіпотезою Сеймура та її вершинно-зваженою варіацією.

Об’єктом дослідження є математична проблема теорії графів – гіпотеза Сеймура.

Предметом дослідження є можливі контрприклади до гіпотези Сеймура.

Наукова новизна основних результатів роботи:

- побудовано нову функцію для орієнтованих графів та розглянуто її основні властивості;

- сформульовано нову гіпотезу, яка стверджує, що для довільної кількості вершин $n \geq 5$ у кожному орієнтованому сильнозв'язному графі D сума штрафів усіх вершини є не меншою певного значення;

- доведено гіпотезу Сеймура для певних видів графів, а саме: для графа діаметра два, для графа-кактуса, для лінійно впорядкованого, а також для двочасткового та планарного графів;

- розроблено новий вид графа – майже лінійно впорядкований, для якого було доведено існування вершини Сеймура;

- доведено нову достатню умову справедливості гіпотези Сеймура.

- доведено, що з існування хоча б одного контрприкладу випливає існування контрприкладів зі щільностями, близькими до 0 і до 1, а також випливає існування контрприкладів із довільним діаметром, не меншим за 3;

- показано, що для доведення гіпотези Сеймура достатньо довести її лише для орієнтованого графа діаметра 3;

- використано штрафну функцію для доведення того, що деякі графи не можуть бути вершинно-мінімальними контрприкладами до досліджуваної гіпотези;

- доведено еквівалентність вершинно-зваженої гіпотези Сеймура та звичайної гіпотези Сеймура.

Практичне значення цієї роботи полягає в тому, що проведені в ній дослідження можуть використовувати учні, які готуються до різних математичних конкурсів, учителі математики та математики, які цікавляться теорією графів.

Основні твердження цього дослідження є ефективними доповненнями відомої гіпотези, оскільки вони визначають важливі властивості можливих контрприкладів, що може допомогти в остаточному розв’язанні поставленої проблеми.

Створена штрафна функція може бути застосована в задачах криптографії. Розглянуті та доведені у роботі твердження сприятимуть розвитку сучасної теорії графів.

Під час дослідження використовувалися комбінаторні методи дослідження та методи теорії графів.

ВИСНОВКИ

Робота присвячена вивченню гіпотези Сеймура та дослідженню властивостей можливих контрприкладів до цієї гіпотези.

У роботі розглянуто формулювання гіпотези, а також охарактеризовано рівень дослідженості проблеми шляхом аналізу вже доведених тверджень для графів з різними властивостями.

В роботі розроблено штрафну функцію для орієнтовних графів, яка показує наскільки граф є віддаленим від контрприкладу до гіпотези Сеймура, пояснено зв’язок функції із цією гіпотезою. Визначено значення штрафної функції для невеликих сильнозв’язних графів.

Сформульовано нову гіпотезу, яка стверджує, що для довільної кількості вершин $n \geq 5$ у кожному орієнтованому сильнозв'язному графі D сума штрафів усіх вершини є не меншою певного значення.

Наведено алгоритм побудови орієнтованого сильнозв'язного графа з довільною кількістю вершин, для якого нижня межа висунутої гіпотези є досяжною.

Доведено гіпотезу Сеймура для різних видів графів, а саме для графа діаметра два, для графа-кактуса, для лінійно впорядкованого, а також для двочасткового та планарного графів.

Сформульовано та доведено нову достатню умову справедливості гіпотези Сеймура.

Встановлено діапазон значень діаметрів та щільностей – величин, що характеризують можливі контрприклади.

Доведено, що якщо існує хоча б один контрприклад до гіпотези Сеймура, то існують контрприклади з довільним діаметром, що більший або рівний 3, та існують контрприклади як з великою (близькою до 1), так із малою (близькою до 0) щільністю.

Обґрунтовано, що з доведення гіпотези Сеймура лише для графа діаметра 3 випливає доведення гіпотези Сеймура загалом.

З використанням штрафної функції було доведено, що графи із певними властивостями не можуть бути контрприкладами до гіпотези Сеймура з найменшою кількістю вершин.

Доведено, що при додаванні однієї дуги загальний штраф графа може зменшитись не більше, ніж на 2.

Розглянуто узагальнену варіацію гіпотези Сеймура, у якій кожна вершина має певну додатню вагу.

Доведено еквівалентність початкової гіпотези Сеймура вершинно-зваженій гіпотезі Сеймура.

Ця дипломна робота може бути корисною всім, хто цікавиться сучасною математикою та теорією графів. Представлені у ній твердження можуть бути використані для подальшого просування у бік вирішення розглянутої проблеми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Теорія графів у задачах / К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. 90 с.
2. Дяченко М. П. Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи з дисципліни "Дискретні структури" / К.: МАУП, 2018. 77 с.;
3. Шевченко Г.В. Дискретна математика / К.: ДУТ, 2015. 158 с.
4. Diestel R. Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 173, 2nd ed. 2000. P. 7.
5. Fisher D.C. Squaring a tournament: a proof of Dean's conjecture. J. Graph Theory. Vol 23, No. 1. 1996. P. 43-48.
6. Seacrest T. The Arc-Weighted Version of the Second Neighborhood Conjecture. Journal of Graph Theory 78(3). 2015. P. 219-228.
7. Chen G., Shen J., Yuster R. Second neighborhood via first neighborhood in digraphs. Ann. Comb. Vol. 7, Issue 1. 2003. P. 15-20.
8. Brantner J., Brockman G., Kay B., Snively E. Contributions to Seymour's second neighborhood conjecture. Involve. Vol. 2, No. 4. 2009. P. 390.
9. Сарана О. А. Про добуток перодичних функцій. У світі математики. 2015. Вип. 21(3). С. 20-27.
10. Bermond J.C. 1-graphs reguliers de girth donne. Cahiers du C.E.R.O. Bruxelles, №17. 1975. P. 123-135;
11. Hamidoune Y.O. A note on the girth of digraphs. Combinatorica, №2. 1982. P. 143-147;
12. Hoang C.T., Reed B. A note on short cycles in digraphs. Discrete Math, №66. 1987. P. 103-107;
13. Kaneko Y., Locke S.C. Notes on Seymour's second neighborhood conjecture. Abstracts of 33 Southeastern International Conference on Combin. Graph Theory, and Computing, Baton Rouge. 2002.