Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра
з теми: **«УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ШТЕЙНЕРА У ПІВНОРМОВАНОМУ ПРОСТОРІ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ»**

Виконав: студент М1-М21 групи спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Мельник Микола Вікторович
Науковий керівник**:**
Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, доцент
Гнатюк Василь Олексійович
Рецензент:
Кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри комп'ютерних наук, доцент
Щирба Віктор Самуїлович

Кам'янець-Подільський – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Ця робота присвячена дослідженню узагальненої задачі Штейнера у півнормованому просторі та побудові збіжного чисельного методу її розв'язування.

Актуальність теми. Останніми десятиріччями в математиці та інших галузях науки підвищився інтерес до тематики, пов'язаної з дослідженням та застосуванням опуклих множин та опуклих функцій (див., наприклад, [1 - 5]).

Це пов'язано, зокрема, з необхідністю розв'язувати екстремальні задачі, які виникають в теорії та практиці (див., наприклад, [6 - 10]), в тому числі й задач апроксимації (див., наприклад, [11 - 23]), серед яких чільне місце займають задачі теорії найкращого у розумінні викривленої метрики наближення.

До таких задач відносяться, зокрема, задачі найкращого наближення за переднормою, будь-якою опуклою функцією (див., наприклад, [11, 14 - 16]), задача Чебишова – Стільтьєса, задача Поссе ([24]) та ін.

Узагальненням задачі найкращого наближення у розумінні норми (півнорми) елемента лінійного нормовано простору множиною цього простору (див., наприклад, [11 – 12]), задачі відшукання відносної точки Штейнера та «зваженої» точки Штейнера у розумінні норми кількох точок лінійного нормованого простору (див., наприклад, [24 – 26]) є узагальнена задача Штейнера у півнормованому просторі, яка розглядається у дипломній роботі.

Результати дослідження узагальненої задачі Штейнера в півнормованому просторі, отримані в дипломній роботі, та побудований в ній збіжний чисельний метод її розв'язування представляють самостійний інтерес та дозволяють з єдиної точки зору подивитись на відомі результати дослідження та чисельного розв'язування інших задач, які є її частковими випадками.

Ці результати можна використати при дослідженні й інших задач, які вкладаються у схему постановки розглядуваної задачі та подібних до неї задач.

Постановка задачі. Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, X^* - простір, спряжений з X, K – опукла слабко* компактна та симетрична множина простору $X^*, p(x) = \max_{x \in K} f(x), x \in X$, - півнорма, задана на X. Тоді (X, p) – півнормований простір. Нехай, крім того, $\text{в}_\text{i}, \text{i} = \overline{1, \text{m}}$, - фіксовані елементи X, $c_\text{i}, \text{i} = \overline{1, \text{m}}$, додатні дійсні числа, $V \subset X$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$E_V^*\left(\{\text{в}_\text{i}\}_{i=1}^{m}\right) = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^{m} c_i p\,(x - \text{в}_\text{i}), \qquad (0.1)$$

яку й назвемо узагальненою задачею Штейнера у півнормованому просторі (X, p). Якщо існує елемент $\text{x}^* \in V$, для якого

$$\sum_{i=1}^{m} c_i p\,(x^* - \text{в}_\text{i}) = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^{m} c_i p\,(x - \text{в}_\text{i}) = E_V^*\left(\{\text{в}_\text{i}\}_{i=1}^{m}\right),$$

то його будемо називати узагальненою точкою Штейнера у розумінні півнорми p у множині V системи точок $\text{в}_\text{i}, \text{i} = \overline{1, \text{m}}$, або екстремальним елементом для задачі відшукання величини (0.1)

Мета, об’єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є:

1) ознайомлення з поняттями півнорми, півнормованого та півметричного простору, прикладами півнорми, властивостями півнорми, доведенням окремих з них;
2) з’ясування властивостей цільової функції задачі відшукання величини (0.1);
3) встановлення існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадках, коли V є локально компактною та замкненою множиною, скінченновимірним підпростором, компактом, скінченновимірним лінійним многовидом, слабко компактною множиною простору X;

4) доведення еквівалентності задачі відшукання величини (0.1) у випадку, коли V є скінченновимірним підпростором, деякій узагальненій задачі Штейнера у півнормованому просторі відносно обмеженої множини, задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень;
5) побудова чисельного методу розв'язування задачі відшукання величини (0.1) у цьому випадку, доведення його збіжності, отримання двосторонніх оцінок збіжності, які дозволяють знайти величину (0.1) з наперед заданою точністю.

Об'єктом дослідження є узагальнена задача Штейнера в півнормованому просторі.

Предметом дослідження є проблема існування узагальненої точки Штейнера в півнормованому просторі, побудова збіжного чисельного методу відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента.

Задачами дослідження є:

1. Ознайомлення з поняттями півнорми, півнормованого та півметричного простору, прикладами півнорми, властивостями півнорми, доведенням окремих з них.
2. З'ясування властивостей цільової функції задачі відшукання величини (0.1);
3. Встановлення умов існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку локально компактної множини V.
4. Доведення теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку, коли V є скінченновимірним лінійним підпростором (многовидом), компактом, слабко компактною множиною.
5. Зведення задачі відшукання величини (0.1) у випадку, коли V є скінченновимірним підпростором, до еквівалентної узагальненої задачі Штейнера в півнормованому просторі відносно обмеженої множини.

6. Доведення еквівалентності задачі відшукання величини (0.1) і її екстремального елемента деякій задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень.
7. Побудова чисельного методу відшукання величини (0.1) і її екстремального елемента у випадку, коли V є скінченновимірним підпростором простору X, доведення його збіжності, отримання двосторонніх оцінок збіжності, які дозволяють знайти величину (0.1) з наперед заданою точністю.

При виконанні поставлених задач в дипломній роботі використовувались загальні методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорії оптимізації та апроксимації, зокрема, теорії двоїстості, лінійного програмування тощо.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному.

1. З'ясовано властивості цільової функції узагальненої задачі Штейнера у півнормованому просторі (задачі відшукання величини (0.1)).
2. Встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку локально компактної множини V.
3. Доведено твердження про те, що скінченновимірний лінійний підпростір, скінченновимірний лінійний многовид, компакт та слабко компактна множина лінійного нормованого простору X є множинами існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1).
4. Зведено задачу відшукання узагальненої точки Штейнера кількох точок півнормованого простору $(X, p,)$ у його скінченновимірному підпросторі до еквівалентної узагальненої задачі Штейнера в півнормованому просторі відносно обмеженої множини скінченновимірного підпростору.
5. Встановлено еквівалентність задачі відшукання величини (0.1) і її екстремального елемента деякій задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень.

6. Побудовано чисельний метод відшукання величини (0.1) і її екстремального елемента у випадку, коли V є скінченновимірним підпростором простору X.
7. Доведено збіжність побудованого чисельного методу відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента;
8. Отримано двосторонні оцінки збіжності побудованого чисельного методу відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента, які дозволяють знайти величину (0.1) з наперед заданою точністю.

Практичне значення отриманих результатів.

Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати можуть використовуватися при дослідженні задач теорії наближення, задач відшукання узагальненої точки Штейнера в метричних та півметричних просторах, при вирішенні задач практичного змісту щодо оптимального розміщення різного роду об’єктів тощо.

Апробація результатів роботи.

Результати роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи “Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень”, яка функціонує при кафедрі математики.

Структура роботи.

Структуру роботи становлять вступ, три розділи, висновки та використаних джерел.

У першому розділі:

розглянуто поняття півнорми, півнормованого та півметричного простору, наведено відповідні приклади, розглянуто з доведеннями деякі властивості півнорми, окремі з яких використано при дослідженні поставленої задачі.

У другому розділі:

- розглянуто півнорму, яка є опорною функцією опуклої слабко* компактної симетричної множини простору X^*, спряженого до лінійного нормованого простору X;

- поставлено узагальнену задачу Штейнера у півметричному просторі, що визначається півнормою (задача відшукання величини (0.1);
- з'ясовано властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.1);
- встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку локально компактної множини V;
- встановлено, що множинами існування екстремального елемента для величини (0.1) є скінченновимірний лінійний многовид, компакт та слабко компактна множина лінійного нормованого простору X.

У третьому розділі:

- розглядається задача відшукання величини (0.1) у випадку, коли V є скінченновимірним підпростором лінійного простору X;
- вищеназвану задачу зведено до відповідної узагальненої задачі Штейнера відносно обмеженої замкненої підмножини V, що дозволило побудувати збіжний чисельний метод розв'язування задачі (0.1) в цьому випадку;
- встановлено еквівалентність задачі відшукання величини (0.1) в розглядуваному випадку деякій задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень;
- побудовано збіжний чисельний метод розв'язування задачі відшукання величини (0.1), отримано двосторонні оцінки збіжності, які дозволяють знайти цю величину з наперед заданою точністю.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі:

1. З'ясовано властивості цільової функції узагальненої задачі Штейнера у півнормованому просторі (задачі відшукання величини (2.16)).
2. Встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.16) у випадку локальної компактності множини V.
3. Доведено твердження про те, що скінченновимірний лінійний підпростір, скінченновимірний лінійний многовид, компакт, та слабко компактна множина лінійного нормованого простору X є множинами існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.16).
4. Зведено задачу відшукання узагальненої точки Штейнера кількох точок півнормованого простору (X, ρ) у його скінченновимірному підпросторі до задачі еквівалентної узагальненій задачі Штейнера в півнормованому просторі відносно обмеженої множини скінченновимірного підпростору.
5. Встановлено еквівалентності задачі відшукання величини (2.16) і її екстремального елемента деякій задачі лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень.
6. Побудовано чисельний метод відшукання величини (2.16) і її екстремального елемента у випадку, коли V є скінченновимірним підпростором простору X.
7. Доведено збіжність побудованого чисельного методу відшукання величини (2.16) та її екстремального елемента.
8. Отримано двосторонні оцінки збіжності побудованого чисельного методу відшукання величини (2.16) та її екстремального елемента, які дозволяють знайти величину (2.16) з наперед заданою точністю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Рокафеллар Р. – М.: Мир, 1973. – 472 с.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. Лейтхвей К. Выпуклые множества / К. Лейтхвей. – М.: Наука, 1985. – 335 с.
4. Моклячук М.П. Основи опуклого аналізу / М.П. Моклячук. – Київ: ТВіМС, 2004. – 240 с.
5. Гудима У.В. Опуклий аналіз: навчальний посібник ‖ У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. -Кам'янець – Подільський: Кам'янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.
6. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании / Е. Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
7. Йоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Йоффе, В.М. Тихомир. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
8. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1982. – 144 с.
9. Моклячук М.П. Негладкий аналіз та оптимізація: навчальний посібник / М.П. Моклячук. – К.: Видавничо – поліграфічний центп «Київський університет», 2008. – 399 с.
10. Гудима У.В. Співвідношення двоїстостіта критерії екстремальності елемента для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк ‖ Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / інститут кібернетики імені В.М. Грушкова Національної академії наук України, Кам'янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка. - Кам'янець – Подільський: Кам'янець – Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. – вип. 18 – С. 65 - 77.

11. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
12. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
13. Дзядык В.К. Введения в теорию равномерного приближения / В.К. Дзядык. В.М. – М.: Наука, 1977. – 510 с.
14. Гнатюк В.А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой нерперывной функции / В.А. Гнатюк. В.С. Щирба ‖ Укр. мат. журн. 1982. – 4, № 5, - С. 608 – 613.

Ахиезер Н.Н. О ннекоторых вопросах теории моментов | Н.Н. Ахиезер, М.Г. Крейн. – Харьков: ГОНТИ, 1938 – 254 с.

15. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово – опуклою функцією наближення кількох елементів та критерій елемента найкращого наближення | Ю.В. Гнатюк ‖ Доп. НАН України. – 1995. - № 6. – с. 23 – 26.
16. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів | Ю.В. Гнатюк ‖ Укр. мат. журн. - 1996. – 48, № 9, - с. 1183 – 1193.
17. Степанец А.И. Методы теории приближений | А.И. Степанец. – Киев.: Ин – т математики НАН Украины, 2002. – ч.1. – 427 с.
18. Степанец А.И. Методы теории приближений | А.И. Степанец. – Киев.: Ин – т математики НАН Украины, 2002. – ч. 11. – 468 с.
19. Гнатюк Ю.В. Найкраще рівномірне наближення сім’ї неперервних на компакті функцій | Ю.В. Гнатюк ‖ Укр. мат. журн. - 2002. – 54, № 11. - С. 1574 – 1580.
20. Гнатюк Ю.В. Алгоритм найкращого одночасного рівномірного наближення сім’ї неперервних на компакті функцій чебишевським підпростором | Ю.В. Гнатюк ‖ Укр. мат. журн. - 2003. – 55, № 2. - С. 291 – 307.

21. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень | У.В. Гудима. || Укр. мат. журн. - 2005. – 57, № 12, - с. 1601 – 1619.
22. Гнатюк Ю.В. Критерій екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень | Ю.В. Гнатюк, У.В. Гудима || Доп. НАН України. - 2005. – № 6. - С. 19 – 23.
23. Гнатюк Ю.В. Найкраща рівномірна апроксимація в метричному просторі неперервних відображень з компактними опуклими образами | Ю.В. Гнатюк || Укр. мат. журн. - 2010. – 62, № 12, - с. 1620 – 1633.
24. Крейн М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи| М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. М.: Наука, 1973. – 552 с.
25. Зуховицкий С.И. Линейное и выпуклое программирование| С.И. Зуховицкий, Л.И Авдеева. - М.: Наука, 1967. – 460 с.
26. Рубинштейн Г.Ш. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве | Г.Ш. Рубинштейн || Сиб. мат. журн. - 1965. – 6, № 3, - с. 711 – 714.
27. Рудин У. Функциональный анализ| У. Рудин - М.: Мир, 1975. – 433 с.
28. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа | С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: Изд – во Ин – та математики, 2000. – 366 с.
29. Люстерник Л.А. Елементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
30. Бердышев В.И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения | В.И. Бердышев, Л.В. Петрак. – Екатеринбург: УрОНАН, 1999, - 297 с.

31. Юдин Д.Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) | Д.Б. Юдин, Е.Г.Г. Гольштейн. – М.: Физмат ГПЗ, 1963. - 774 с.
32. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник. У двох частинах. Частина 1 | А.Я. Дороговцев. К.: - Либідь, 1993. - 320 с.
33. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник. У двох частинах. Частина 2 | А.Я. Дороговцев. - К.: - Либідь, 1994. - 304 с.