Міністерство освіти і науки України

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Кафедра математики

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

___________Сморжевський Ю.Л.

«_____»___________2022 р.

ДИПЛОМНА РОБОТА

« Обернені теореми для деякого елемента f банахового простору B »

студента фізико-математичного факультету

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Яценюка Валерія Івановича

Науковий керівник:

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Ковальська Ірина Борисівна

Кам'янець-Подільський, 2022

Зміст

Вступ

Основна задача теорії наближень полягає в тому, щоб, грунтуючись на досліджуваних властивостях даної функції, встановити властивості її апроксимаційних характеристик.

Коли можна проаналізувати, як ведуть себе послідовності $E_n(f)$ найкращих наближень функції f деякими поліномами P_n, виходячи з інформації про поведінку узагальненої похідної даної функції, то тоді кажуть про постановку і доведення прямих теорем теорії наближень.

Якщо ж навпаки – аналізуючи швидкість спадання послідовності $E_n(f)$, досліджувати властивості самої функції $f \in B$ і її узагальнених похідних, то тоді мова йде про доведення обернених теорем теорії наближень, тобто, про встановлення диференціально-різницевих характеристик функції f на основі вивчення поведінки послідовності її найкращих наближень.

Вперше обернені теореми розглядав С. Н. Бернштейн [7] на початку 20 ст. Їх доведення грунтується на використанні нерівностей між нормами самих поліномів та їх похідних. Ці нерівності відтоді називають нерівностями Бернштейна. Як частковий випадок, вони можуть бути отримані з теореми, розглянутої в даній роботі. В цьому напрямку також проводили дослідження Б. Надь [12], М. П. Корнійчук [4] , В. М. Тихоміров [2] , О. І. Степанець [9,10], О. К. Кушпель [3] та інші.

У банаховому просторі B були досліджені фундаментальні поняття повноти цього простору, найкращого наближення $E_n(f)$ деякого елемента

$f \in B$, узагальненої похідної $\partial_\varphi^\lambda f = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(f, \varphi_m^* \right) \varphi_m$. цього елемента $f \in B$ та інше.

Банахові простори названі на честь польського математика Стефана Банаха, який запровадив це поняття та систематично вивчав його у 1920–1922 роках разом з Гансом Ганом та Едуардом Хеллі. Моріс Рене Фреше був першим, хто використав термін "простір Банаха", а Банах, у свою чергу, потім ввів термін

" простір Фреше ". Банахові простори відіграють центральну роль у функціональному аналізі. В інших областях аналізу, досліджувані простори також часто є просторами Банаха.

За визначенням, нормований простір є *банаховим простором* тоді і тільки тоді, коли є повним метричним простором, або тільки тоді, коли канонічна метрика є повною метрикою.

Метою дипломної роботи є розгляд обернених теорем для деякого елемента f банахового простору B.

Об'єктом дослідження є поведінка найкращих наближень деякого елемента f банахового простору B.

Завданням дипломної роботи є дослідження диференціально-різницевих характеристик функції f на основі вивчення поведінки послідовності її найкращих наближень.

Висновок

Дипломна робота складається з двох розділів. Перший розділ містить 4 пункти. У них вводяться основні поняття та твердження, які використовують при дослідженні даної теми. У першому пункті розділу І «Лінійні простори» розглядаються означення та приклади лінійних просторів, лінійну залежність, підпростори, приклади власних підпросторів, фактор-простори, лінійні функціонали, приклади лінійних функціоналів. У другому пункті «Опуклі множини. Теорема Гана-Банаха» розглядаються опуклі множини та опуклі тіла, теорема Гана-Банаха, віддільність опуклих множин у лінійному просторі, означення та приклади нормованих просторів, приклади нормованих множин, підпростори нормованого простору. У третьому пункті «Класи диференційованих функцій» розглядаються суми Фур'є, їх ядра Діріхле, спряжені частинні суми Фур'є, знаходяться формули для величин $\rho_n(f,x) = f(x) - S_{n-1}(f,x),$ вводяться класи функцій, що допускають звичайне диференціювання в розумінні Вейля. У четвертому пункті «Пряма та обернена теорема в просторі L_2» розглядаються наближення індивідуальних функцій з множин $L^{\overline{\psi}} L_2$, де $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ - пара довільних систем чисел $\psi_1(k), \psi_2(k), k = 0,1,...,$ $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0.$

Другий розділ містить 3 пункти. У першому пункті «Поширення на випадок повних ортонормованих систем», розглядається $\varphi = \{\varphi_n\}, n \in N$ - ортонормована система комплексних функцій, заданих на проміжку $[a;b]$, ряди Фур'є функції $f \in L^{\varphi}$ по системі $\{\varphi_n\}$, також із твердження 1 даного пункту другої частини випливає, що $\forall f \in L_2$ її ψ - похідна при $\psi(k) = E_k(f)_2$ не може належати до L_2. У другому пункті «Нерівності Джексона в просторі L_2», розглядаються нерівності (або теореми) Джексона про оцінку швидкості збіжності до нуля наближень поліномами в залежності від диференціально-різницевих властивостей функції, які характеризуються її модулем неперервності або модулем неперервності її деякої похідної.

Такі твердження отримали назву в честь Д. Джексона, який ще в 1911 році довів, що коли $f^{(r)} \in C, r = 0,1,\ldots, f^{(0)}(\bullet) \overset{df}{=} f(\bullet)$, то

$$E_n(f)_C \le C_{r\omega}\left(f^{(r)}; n^{-1}\right),$$

де C_r - величина, рівномірно обмежена по n. У третьому пункті «Обернені теореми», розглядається обернена теорема для функції f – використовуючи властивості послідовності найкращих наближень $E_n(f)$, встановлюються диференціально-різницеві характеристики функції f.

Результатом дипломної роботи є:

Теорема 1. Нехай ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{n_{l+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right) E_{n_l}(f,\varphi)$ збігається. Тоді $f \in V\,(\partial_\varphi^\lambda)$ і

$$E_{n_j}\left(\partial_\varphi^\lambda f, \varphi\right) \le 2\sum_{l=j}^{\infty} \mu_{n_{l+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right) E_{n_l}(f,\varphi).$$

Наслідок 1. Нехай f належить $L_P[0; 2\pi]$, $1 \le p < \infty$ і $E_n(f)_p$ – найкращі наближення тригонометричними поліномами степеня не вище $n-1$. Тоді, якщо пара $(\psi;\ \beta) \in B_p$ і ряд $\sum_{m=1}^{\infty} E_m(f)_p(\psi(m))^{-1}$ збігається, то для функції f існує $(\psi; \beta)$ - похідна f_β^ψ, яка належить L_P і для якої виконується нерівність:

$$E_n(f_\beta^\psi)_p \le K\sum_{m=n}^{\infty} E_m(f)_p(\psi(m))^{-1},\ \ n \in N,$$

де K - величина, що може залежати від $\psi(\cdot)$.

Список використаної літератури

1. Ус С.А. Функціональний аналіз. Навч. посібник. – Д.: Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.

2. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307с.

3. Степанец А.И., Кушпель А.К. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций, - Киев, 1984. – 44с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 84.15).

4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320с.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В..Элементы теории функций и функционального анализа. Изд-во «Вища школа», 1974, 456 с. (на украинском языке).

6. Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных. - Изд-во АН СССР. Серия матем. – 1981. – Т. 45. – С. 3-22.

7. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени . Соч. – М.: Изд- во АН СССР, 1952. – 1. – С. 11-104.

8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. - М.: Мир, 1965. - Т.1,

9. Степанец А. И. Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427с.

10. Степанец А. И. Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. – 468с.

11. Степанец А.И., Жукина Е.И. Обратные теоремы приближения $(\psi; \beta)$ - дифференцируемых функций. Укр. мат. журн. – 1989. – 41, №8. – С. 1106 – 1112.

12. Nagy B. Uber geuisse Extremalfragenbei transtormierten trigonometrischen Entwicklungen // Berichte Acad. D. Wiss. – 1938. – 90. – P.103-134.

13. Szergo G. Uber einen satz des Hern Serge Bernstein. Schrift. Konigsberg. Gelehrten Gesellschaft. – 1928. – V. 5, №4. – P. 59-70.