

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

# **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Технічні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 22**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка  
2021

УДК 004.94:53.072

ББК 30

М34

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:  
Серія КВ № 14522-3493Р від 25.06.2008 р.

Збірник включено до Переліку наукових фахових видань України категорії Б  
галузь «Технічні науки» (спеціальність 012 «Комп'ютерні науки»)  
наказ Міністерства освіти і науки України № 409 від 17.03.2020 р.

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського  
національного університету імені Івана Огієнка,  
протокол № 14 від 25 листопада 2021 року.

### Редакційна колегія:

- О. М. Хіміч**, академік НАНУ,  
доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);  
**А. Ф. Верлянь**, член-кореспондент НАПНУ,  
доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);  
**В. А. Федорчук**, доктор технічних наук, професор (*відповідальний секретар*);  
**Т. Бокалруд**, доктор філософії, професор, Норвегія;  
**В. П. Боюн**, академік НАНУ, доктор технічних наук, професор;  
**Д. Г. Вєлєв**, доктор філософії, професор, Болгарія;  
**А. А. Верлянь**, доктор технічних наук, професор, Норвегія;  
**В. К. Задірака**, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;  
**В. А. Заславський**, доктор технічних наук, професор;  
**О. Є. Коваленко**, доктор технічних наук, доцент;  
**І. М. Конет**, доктор фізико-математичних наук, професор;  
**С. А. Положаєнко**, доктор технічних наук, професор;  
**Б. А. Худаяров**, доктор технічних наук, професор, Узбекистан.

**Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки** : зб.  
**М34** наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної  
академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка ; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. Кам'янець-  
Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана  
Огієнка, 2021. Вип. 22. 124 с.

У збірнику друкуються результати досліджень, що стосуються проблем  
застосування математичних моделей у різних галузях людської діяльності.

Збірник включений до бази даних наукових журналів Норвегії.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, докторантів, аспірантів,  
студентів вищих навчальних закладів.

УДК 004.94:53.072

ББК 30

ISSN 2308-5916

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2021

© Кам'янець-Подільський національний  
університет імені Івана Огієнка, 2021

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of National Academy of Sciences of Ukraine  
Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University

# **MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING**

**Series: Technical sciences**

Scientific journal

**ISSUE 22**

Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University  
2021

### Editorial board:

- O. Himich**, Academician of the NAS of Ukraine, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);  
**A. F. Verlan**, Corresponding Member of the NAPS of Ukraine, Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);  
**V. Fedorchuk**, Doctor of Technical Science, Professor (*Responsible Secretary*);  
**T. Bokalrud**, Associate Professor, Norway;  
**V. Boyun**, Academician of the NAS of Ukraine, Doctor of Technical Science, Professor;  
**B. Khudayarov**, Doctor of Technical Science, Professor, Uzbekistan;  
**I. Konet**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;  
**O. Kovalenko**, Doctor of Technical Science, Associate Professor;  
**S. Polozhaenko**, Doctor of Technical Science, Professor;  
**D. Velev**, PhD, Professor, Bulgaria;  
**A. A. Verlan**, Doctor of Technical Science, Professor, Norway;  
**V. Zadiraka**, Academician of the NAS of Ukraine, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;  
**V. Zaslavskiy**, Doctor of Technical Science, Professor.

**Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences:** scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University ; [Editorial Board: O. Himich (Executive Editor) and others]. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, 2021. ISSUE 22. 124 p.

The journal publishes results of studies on the mathematical models' application problems in various areas of human activity.

Joint with NTNU the journal has been included to the database of Norwegian Register for Scientific Journals, Series and Publishers.

Intended for scientific and engineering staff, researchers, undergraduate, graduate and PhD students, post-graduates.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of NAS of Ukraine, 2021

© Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko  
National University, 2021

ISSN 2308-5916

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22

УДК 519.6

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.5-20

**М. В. Бойчура**, канд. техн. наук,

**А. Я. Бомба**, д-р техн. наук, професор,

**О. Р. Мічута**, канд. техн. наук

Національний університет водного господарства  
та природокористування, м. Рівне

## **ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЗГЛАДЖЕННЯ НЕГЛАДКОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

Сформульовано задачу моделювання руху частинок (зарядів, рідини тощо) в однозв'язній чотирикутній криволінійній області, обмеженій гладкими двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями. При цьому, якщо останні «стикуються» не під прямим кутом і відповідне середовище є ізотропним, то, згідно методу квазіконформних відображень, матимуть місце сингулярності в околах рівно чотирьох точок границі. З метою уникнення даних особливостей, запропоновано підхід до апроксимації межі досліджуваної області (кубічними бісплайнами) із застосуванням спеціально розробленої процедури «фіктивної ортогоналізації». Сформульовано відповідну пряму та обернену задачі на квазіконформні відображення. При цьому, пропонуються (для порівняння) два способи формування ортогональності на гладких ділянках границі (за допомогою деяких «дво-» та «п'ятиточкової» схем; наведено відповідні різниці задачі та алгоритми їх розв'язання). Запропоновано підхід до оцінки точності виконання властивостей квазіконформності, окремо обчислюючи усереднені нев'язку ортогональності та узагальнену нев'язку відношення довжин суміжних відрізків в малому. Проведено числові експерименти та здійснено їх аналіз. Зокрема, розподіли обох видів нев'язок і кількість вузлів, в яких мають місце особливості при різних розбиттях сіток, проілюстровано на графіках. Як і очікувалось, «фіктивна ортогоналізація» при достатньо «густій» дискретизації забезпечує можливість вирішення проблеми сингулярності у точках «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній, сприяє підвищенню точності квазіконформних відображень та збільшенню «прозорості» ходу розв'язання відповідної задачі. Також, як і очікувалось, «п'ятиточкова» схема «забезпечення ортогональності» на гладких лініях границі, показала більшу ефективність в порівнянні з «двоточковою».

У якості перспективи подальшого застосування розробленої процедури «фіктивної ортогоналізації» описано механізм її адаптації на прикладі задач електричної томографії.

**Ключові слова:** математичне моделювання, нелінійні задачі, квазіконформні відображення, числові методи.

**Вступ.** Як правило [1-5], в основу математичних моделей фільтрації рідин, руху зарядів покладають закон Дарсі, Ома тощо  $\vec{v} = \kappa \text{grad } \varphi$ , де  $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$  — це вектор швидкості (густини струму),  $\varphi = \varphi(x, y)$  — квазіпотенціал, а  $\kappa = \kappa(x, y, \varphi, \text{grad } \varphi, \dots)$  — коефіцієнт фільтрації (електричної провідності). Застосувавши припущення, що  $\text{div } \vec{v} = 0$  приходять до задач еліптичного типу. При цьому, при проведенні досліджень в однозв'язних криволінійних областях (рис. 1, а) із границями виду  $\partial G_z = \{z = x + iy : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), \tau \in [0, 1], \tilde{x}(0) = \tilde{x}(1) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = \tilde{y}_0, \text{ де } \tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau) \text{ — визначені неперервно диференційовані функції, } O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \text{ — задана точка відліку} \}$  та при відсутності анізотропії, крайові умови зазвичай задаються у вигляді [1-3]:  $\varphi|_{AB} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{CD} = \varphi^*$ ,  $\varphi'_n|_{DA \cup BC} = 0$ . Тут  $A, B, C, D$  — відмічені точки на  $\partial G_z$ ;  $DA, BC$  — лінії течії;  $AB, CD$  — екіпотенціали;  $\vec{n}$  — вектор нормалі до відповідної кривої. При вказаних припущеннях, як відомо [1], можливим є введення квазігармонічної функції течії  $\psi = \psi(x, y)$ , комплексно спряженої до  $\varphi = \varphi(x, y)$ . Тоді вихідна задача запишеться наступним чином:

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*; \quad (2)$$

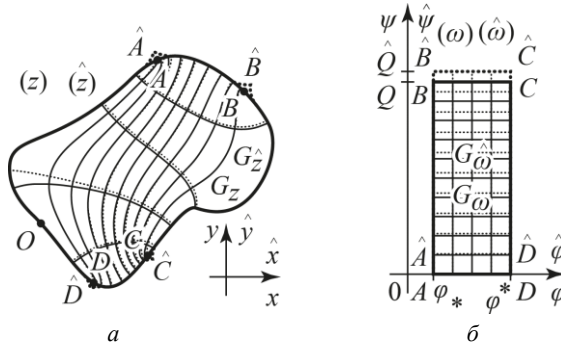
$$\psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (3)$$

де  $Q = \int_{AB} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl$  — невідомий параметр (повна фільтраційна витрата),

$dl$  — елемент дуги кривої  $AB$ ,  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  — область комплексного квазіпотенціалу для  $G_z$  (рис. 1, б).

Очевидно, що в області, зображеній на рис. 1, а, неможливо забезпечити виконання умов (1) (ортогоналізуючу їх складову [1]) рівно у чотирьох точках:  $A, B, C, D$ . З іншого боку, з роботи [6] слідує, що сингулярності, які виникають при розв'язанні відповідної задачі (1)-(3) є локалізованими, і що це запобігає суттєвому поширенню відповідних похибок на віддалені території. Проте, у багатьох випадках ідентифікації, дані особливості можуть мати відчутний негативний вплив на отримувані результати. Наприклад, це стосується

використання апріорної інформації в певних околах таких точок. У галузі електричної томографії, окрім цього, дослідники здійснюють ще й низку усереднень, використовують методи регуляризації, певним чином намагаються враховувати «шум» у вхідних даних, ігнорують особливості у точках виду  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  тощо [4]. Відповідні похибки взаємодоповнюються, через що, як правило, отримувани розв'язки є досить низької якості (роздільної здатності).



**Рис. 1.** Фізична область (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (б); штрихами позначено лінії, що схематично відповідають ФО зображенням

У роботі [1] для забезпечення виконання умов виду (1) в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  користуються прийомами умовного розрізування досліджуваної області. Проте вони підходять лише для окремих випадків задання крайових умов, структур об'єктів і середовищ (відмінних від (2), (3) та рис. 1, а). Тому загалом проблема залишається відкритою.

**Метою роботи** є реалізація механізму підвищення точності квазіконформних відображень в точках «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній (а, отже, й в області загалом [6]) із розробленням спеціальної процедури «фіктивної ортогоналізації» (ФО). При наближеному розв'язанні відповідних задач важливою є ще й оцінка впливу «густини» розбиття відповідних гідродинамічних сіток і способу формування ортогональності вздовж границі області на величини нев'язок квазіконформності.

**Підхід до вирішення проблеми неортогональності у точках «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній.** Застосування подібного до [1] прийому умовних розрізів в області виду рис. 1, а при умовах (2) та (3) є недоцільним, оскільки накладатимуться певні обмеження на можливі траєкторії руху частинок. Замість цього ми пропонуємо застосовувати алгоритм ФО, який описано нижче. Він передбачає внесення певних невеликих збурень форми

вихідної області таким чином, щоб граничні лінії течії та еквіпотенціальні лінії «стикувались» під прямими кутами.

ФО здійснюватимемо стосовно областей, границі яких визначаються функціями  $x = \tilde{x}(\tau)$  та  $y = \tilde{y}(\tau)$  при параметрах  $\tau = \tau_A$ ,  $\tau = \tau_B$ ,  $\tau = \tau_C$ ,  $\tau = \tau_D$  задання точок  $A, B, C, D \in \partial G_z$ . На відрізках

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \tilde{x}(\{\tau_D + \Delta_D^L\}), \tilde{y}(\{\tau_D + \Delta_D^L\}) \right), \left( \tilde{x}(\{1 + \tau_A - \Delta_A^R\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_A - \Delta_A^R\}) \right) \right], \\ & \left[ \left( \tilde{x}(\{\tau_A + \Delta_A^L\}), \tilde{y}(\{\tau_A + \Delta_A^L\}) \right), \left( \tilde{x}(\{1 + \tau_B - \Delta_B^R\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_B - \Delta_B^R\}) \right) \right], \\ & \left[ \left( \tilde{x}(\{\tau_B + \Delta_B^L\}), \tilde{y}(\{\tau_B + \Delta_B^L\}) \right), \left( \tilde{x}(\{1 + \tau_C - \Delta_C^R\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_C - \Delta_C^R\}) \right) \right], \\ & \left[ \left( \tilde{x}(\{\tau_C + \Delta_C^L\}), \tilde{y}(\{\tau_C + \Delta_C^L\}) \right), \left( \tilde{x}(\{1 + \tau_D - \Delta_D^R\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_D - \Delta_D^R\}) \right) \right] \end{aligned}$$

шляхом інтерполяції (наприклад, за допомогою методу найменших квадратів) фрагментів  $\partial G_z$  будемо кубічні бісплайни [7]

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{D}\hat{A}}-1} x_k^{\hat{D}\hat{A}} b_{k,3}^{\hat{D}\hat{A}}(\tau), & y &= \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{D}\hat{A}}-1} y_k^{\hat{D}\hat{A}} b_{k,3}^{\hat{D}\hat{A}}(\tau), \\ x &= \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{A}\hat{B}}-1} x_k^{\hat{A}\hat{B}} b_{k,3}^{\hat{A}\hat{B}}(\tau), & y &= \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{A}\hat{B}}-1} y_k^{\hat{A}\hat{B}} b_{k,3}^{\hat{A}\hat{B}}(\tau), \\ x &= \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{B}\hat{C}}-1} x_k^{\hat{B}\hat{C}} b_{k,3}^{\hat{B}\hat{C}}(\tau), & y &= \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{B}\hat{C}}-1} y_k^{\hat{B}\hat{C}} b_{k,3}^{\hat{B}\hat{C}}(\tau), \\ x &= \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{C}\hat{D}}-1} x_k^{\hat{C}\hat{D}} b_{k,3}^{\hat{C}\hat{D}}(\tau), & y &= \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{C}\hat{D}}-1} y_k^{\hat{C}\hat{D}} b_{k,3}^{\hat{C}\hat{D}}(\tau) \end{aligned}$$

за даними координатами  $(\tilde{x}(\tau_k^{DA}), \tilde{y}(\tau_k^{DA}))$ ,  $(\tilde{x}(\tau_k^{AB}), \tilde{y}(\tau_k^{AB}))$ ,  $(\tilde{x}(\tau_k^{BC}), \tilde{y}(\tau_k^{BC}))$ ,  $(\tilde{x}(\tau_k^{CD}), \tilde{y}(\tau_k^{CD}))$ , відповідно, де

$$\tau_k^{DA} = \{\tau_D + \Delta_D^L + k\{\tau_A - \Delta_A^R - \tau_D - \Delta_D^L\} / n^{DA}\} \quad (k = \overline{0, n^{DA}}),$$

$$\tau_k^{AB} = \{\tau_A + \Delta_A^L + k\{\tau_B - \Delta_B^R - \tau_A - \Delta_A^L\} / n^{AB}\} \quad (k = \overline{0, n^{AB}}),$$

$$\tau_k^{BC} = \{\tau_B + \Delta_B^L + k\{\tau_C - \Delta_C^R - \tau_B - \Delta_B^L\} / n^{BC}\} \quad (k = \overline{0, n^{BC}}),$$

$$\tau_k^{CD} = \{\tau_C + \Delta_C^L + k\{\tau_D - \Delta_D^R - \tau_C - \Delta_C^L\} / n^{CD}\} \quad (k = \overline{0, n^{CD}}),$$

$$b_{k,0}^{MN}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tau \notin [\hat{\tau}_k^{MN}, \hat{\tau}_{k+1}^{MN}), \\ 1, & \text{якщо } \tau \in [\hat{\tau}_k^{MN}, \hat{\tau}_{k+1}^{MN}), \end{cases} \quad \hat{\tau}_k^{MN} = 0 \quad (k = \overline{0, 3}),$$

$$\hat{\tau}_{m^{MN}+k}^{MN} = 1 \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \hat{\tau}_k^{MN} = \hat{\tau}_{k-1}^{MN} + (m^{MN} - 3)^{-1} \quad (k = \overline{4, m^{MN}}),$$



$$b_{k,r}^{MN}(\tau) = \frac{\tau - \hat{\tau}_k^{MN}}{\hat{\tau}_{k+r}^{MN} - \hat{\tau}_k^{MN}} b_{k,r-1}^{MN}(\tau) + \frac{\hat{\tau}_{k+r+1}^{MN} - \tau}{\hat{\tau}_{k+r+1}^{MN} - \hat{\tau}_{k+1}^{MN}} b_{k+1,r-1}^{MN}(\tau),$$

а кількості  $m^{\hat{D}\hat{A}}$ ,  $m^{\hat{A}\hat{B}}$ ,  $m^{\hat{B}\hat{C}}$ ,  $m^{\hat{C}\hat{D}}$  контрольних точок  $(x_k^{\hat{D}\hat{A}}, y_k^{\hat{D}\hat{A}})$ ,  $(x_k^{\hat{A}\hat{B}}, y_k^{\hat{A}\hat{B}})$ ,  $(x_k^{\hat{B}\hat{C}}, y_k^{\hat{B}\hat{C}})$ ,  $(x_k^{\hat{C}\hat{D}}, y_k^{\hat{C}\hat{D}})$ , точок дискретизації ділянок границі вихідної області  $n^{DA}$ ,  $n^{AB}$ ,  $n^{BC}$ ,  $n^{CD}$  та «околи»  $\Delta_A^{(p)L}$ ,  $\Delta_A^{(p)R}$ ,  $\Delta_B^{(p)L}$ ,  $\Delta_B^{(p)R}$ ,  $\Delta_C^{(p)L}$ ,  $\Delta_C^{(p)R}$ ,  $\Delta_D^{(p)L}$ ,  $\Delta_D^{(p)R}$  вважаємо заданими. Додовнюємо початки та кінці бісплайнів  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$  контрольними точками

$$\begin{aligned} &(\tilde{x}(\{\tau_D + 0.5\Delta_D^R\}), \tilde{y}(\{\tau_D + 0.5\Delta_D^R\})), \\ &(\tilde{x}(\{\tau_A + 0.5\Delta_A^R\}), \tilde{y}(\{\tau_A + 0.5\Delta_A^R\})), \\ &(\tilde{x}(\{\tau_B + 0.5\Delta_B^R\}), \tilde{y}(\{\tau_B + 0.5\Delta_B^R\})), \\ &(\tilde{x}(\{\tau_C + 0.5\Delta_C^R\}), \tilde{y}(\{\tau_C + 0.5\Delta_C^R\})) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} &(\tilde{x}(\{1 + \tau_A - 0.5\Delta_A^L\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_A - 0.5\Delta_A^L\})), \\ &(\tilde{x}(\{1 + \tau_B - 0.5\Delta_B^L\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_B - 0.5\Delta_B^L\})), \\ &(\tilde{x}(\{1 + \tau_C - 0.5\Delta_C^L\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_C - 0.5\Delta_C^L\})), \\ &(\tilde{x}(\{1 + \tau_D - 0.5\Delta_D^L\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_D - 0.5\Delta_D^L\})), \end{aligned}$$

відповідно. Отримані функції позначимо через  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$ . Додаємо до обох сторін побудованих бісплайнів контрольні точки  $(x_{\hat{A}}, y_{\hat{A}})$ ,  $(x_{\hat{B}}, y_{\hat{B}})$ ,  $(x_{\hat{C}}, y_{\hat{C}})$ ,  $(x_{\hat{D}}, y_{\hat{D}})$ , відповідно, на початки  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$  та кінці  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ , підбираючи значення  $x_{\hat{A}}$ ,  $x_{\hat{B}}$ ,  $x_{\hat{C}}$ ,  $x_{\hat{D}}$  так, щоб утворені таким чином функції  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$  задовольняли умовам ортогональності:

$$\begin{aligned}\tilde{x}'_{\hat{A}\hat{B}}(0)\tilde{x}'_{\hat{D}\hat{A}}(1) + \tilde{y}'_{\hat{A}\hat{B}}(0)\tilde{y}'_{\hat{D}\hat{A}}(1) &= 0, \\ \tilde{x}'_{\hat{B}\hat{C}}(0)\tilde{x}'_{\hat{A}\hat{B}}(1) + \tilde{y}'_{\hat{B}\hat{C}}(0)\tilde{y}'_{\hat{A}\hat{B}}(1) &= 0, \\ \tilde{x}'_{\hat{C}\hat{D}}(0)\tilde{x}'_{\hat{B}\hat{C}}(1) + \tilde{y}'_{\hat{C}\hat{D}}(0)\tilde{y}'_{\hat{B}\hat{C}}(1) &= 0, \\ \tilde{x}'_{\hat{D}\hat{A}}(0)\tilde{x}'_{\hat{C}\hat{D}}(1) + \tilde{y}'_{\hat{D}\hat{A}}(0)\tilde{y}'_{\hat{C}\hat{D}}(1) &= 0,\end{aligned}$$

де точки  $(x_{\hat{A}}, y_{\hat{A}})$ ,  $(x_{\hat{B}}, y_{\hat{B}})$ ,  $(x_{\hat{C}}, y_{\hat{C}})$ ,  $(x_{\hat{D}}, y_{\hat{D}})$  обираються з боку зовнішньої нормалі до  $\partial G_z$ ,

$$\begin{aligned}y_{\hat{A}} &= 0.5\left(\tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(0) + \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(1)\right) - \left(\tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(0) - \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(1)\right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(x_{\hat{A}} - 0.5\left(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(0) + \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(1)\right)\right)\left(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(0) - \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(1)\right), \\ y_{\hat{B}} &= 0.5\left(\tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(0) + \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(1)\right) - \left(\tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(0) - \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(1)\right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(x_{\hat{B}} - 0.5\left(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(0) + \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(1)\right)\right)\left(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(0) - \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(1)\right), \\ y_{\hat{C}} &= 0.5\left(\tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(0) + \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(1)\right) - \left(\tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(0) - \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(1)\right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(x_{\hat{C}} - 0.5\left(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(0) + \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(1)\right)\right)\left(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(0) - \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(1)\right), \\ y_{\hat{D}} &= 0.5\left(\tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(0) + \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(1)\right) - \left(\tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(0) - \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(1)\right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(x_{\hat{D}} - 0.5\left(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(0) + \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(1)\right)\right)\left(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(0) - \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(1)\right).\end{aligned}$$

Утворену таким чином збурену область позначимо через  $G_z$  (рис. 1, а). Для неї постановка задачі матиме аналогічний до (1)-(3) вигляд при заданих квазіпотенціалах  $\varphi_*$  і  $\varphi^*$  на відповідних ділянках  $\hat{A}\hat{B}$  і  $\hat{C}\hat{D}$  та шуканих квазігармонічних комплексно спряжених функціях  $\hat{\phi} = \hat{\phi}(x, y)$ ,  $\hat{\psi} = \hat{\psi}(x, y)$  і повній витраті  $\hat{Q}$ . Тут  $G_{\hat{\phi}} = \{\hat{\omega} = \hat{\phi} + i\hat{\psi} : \varphi_* < \hat{\phi} < \varphi^*, 0 < \hat{\psi} < \hat{Q}\}$  (рис. 1, б).

Відповідна обернена задача на квазіконформне відображення  $\hat{z} = \hat{z}(\hat{\omega}) = \hat{x}(\hat{\phi}, \hat{\psi}) + i\hat{y}(\hat{\phi}, \hat{\psi})$  при шуканих  $\hat{x} = \hat{x}(\hat{\phi}, \hat{\psi})$ ,  $\hat{y} = \hat{y}(\hat{\phi}, \hat{\psi})$ , аналогічно до [1], запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \hat{\phi}} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{\phi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{\psi}} \left( \kappa \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{\psi}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\phi}} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\phi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{\psi}} \left( \kappa \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\psi}} \right) &= 0,\end{aligned} \quad (\hat{x}, \hat{y}) \in G_z; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(\hat{\phi}, 0) &= \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau_{\hat{D}\hat{A}}(\hat{\phi})), \quad \hat{y}(\hat{\phi}, 0) = \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau_{\hat{D}\hat{A}}(\hat{\phi})), \\ \hat{x}(\hat{\phi}, \hat{Q}) &= \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau_{\hat{B}\hat{C}}(\hat{\phi})), \quad \hat{y}(\hat{\phi}, \hat{Q}) = \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau_{\hat{B}\hat{C}}(\hat{\phi})), \quad \hat{\phi} \in [\varphi_*, \varphi^*], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(\varphi_*, \hat{\psi}) &= \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau_{\hat{A}\hat{B}}(\hat{\psi})), \quad \hat{y}(\varphi_*, \hat{\psi}) = \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau_{\hat{A}\hat{B}}(\hat{\psi})), \\ \hat{x}(\varphi^*, \hat{\psi}) &= \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau_{\hat{C}\hat{D}}(\hat{\psi})), \quad \hat{y}(\varphi^*, \hat{\psi}) = \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau_{\hat{C}\hat{D}}(\hat{\psi})), \quad \hat{\psi} \in [0, \hat{Q}]; \\ \tilde{x}'_{\hat{D}\hat{A}}(\tau) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, 0) &+ \tilde{y}'_{\hat{D}\hat{A}}(\tau) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, 0) = 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{x}'_{\hat{B}\hat{C}}(\tau) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) + \tilde{y}'_{\hat{B}\hat{C}}(\tau) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) = 0, \quad \hat{\phi} \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (6)$$

$$\tilde{x}'_{\hat{A}\hat{B}}(\tau) \hat{x}'_{\hat{\phi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) + \tilde{y}'_{\hat{A}\hat{B}}(\tau) \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) = 0,$$

$$\tilde{x}'_{\hat{C}\hat{D}}(\tau) \hat{x}'_{\hat{\phi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) + \tilde{y}'_{\hat{C}\hat{D}}(\tau) \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) = 0, \quad \hat{\psi} \in [0, \hat{Q}],$$

де  $\tau_{\hat{D}\hat{A}}(\hat{\phi})$ ,  $\tau_{\hat{B}\hat{C}}(\hat{\phi})$ ,  $\tau_{\hat{A}\hat{B}}(\hat{\psi})$ ,  $\tau_{\hat{C}\hat{D}}(\hat{\psi})$  — розрахункові залежності параметрів задання граничних вузлів від значень функцій квазіпотенціалу та течії на ділянках  $\hat{D}\hat{A}$ ,  $\hat{B}\hat{C}$ ,  $\hat{A}\hat{B}$ ,  $\hat{C}\hat{D}$ , відповідно. При цьому, замість умови (6) інколи використовують наступну (див., напр., [1]; далі порівнюватимемо ефективності застосування цих виразів):

$$\hat{x}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, 0) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, 0) + \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, 0) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, 0) = 0,$$

$$\hat{x}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) + \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) = 0, \quad \hat{\phi} \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (7)$$

$$\hat{x}'_{\hat{\phi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) + \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) = 0,$$

$$\hat{x}'_{\hat{\phi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) + \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) = 0, \quad \hat{\psi} \in [0, \hat{Q}].$$

**Різницеві аналоги задач (4)-(6) і (4), (5), (7).** Наближене представлення формул (4)-(7) у рівномірній сітковій області  $G_{\hat{\omega}}^z = \{\hat{\omega}_{i,j} = (\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_j) : \hat{\phi}_i = \varphi_* + i \Delta \hat{\phi}, \quad i = \overline{0, m+1}; \hat{\psi}_j = j \Delta \hat{\psi}, \quad j = \overline{0, n+1};$

$$\Delta \hat{\phi} = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \Delta \hat{\psi} = \frac{\hat{Q}}{n+1}, \quad \hat{\gamma} = \Delta \hat{\phi} / \Delta \hat{\psi}, \quad m, n \in \mathbb{N}\} \text{ при заданому } \kappa(\hat{x}, \hat{y})$$

і позначеннях  $\hat{d}_{i+0.5,j} = \sqrt{(\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i,j})^2 + (\hat{y}_{i+1,j} - \hat{y}_{i,j})^2}$ ,  $\hat{x}_{i,j} = \hat{x}(\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_j)$ ,  $\hat{y}_{i,j} = \hat{y}(\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_j)$ ,  $\hat{\kappa}_{i,j} = \kappa(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_{i,j})$ ,  $\tau_{\hat{A}\hat{B}_j} = \tau_{\hat{A}\hat{B}}(\hat{\psi}_j)$ ,  $\tau_{\hat{C}\hat{D}_j} = \tau_{\hat{C}\hat{D}}(\hat{\psi}_j)$ ,

$\tau_{\hat{D}\hat{A}_i} = \tau_{\hat{D}\hat{A}}(\hat{\phi}_i)$ ,  $\tau_{\hat{B}\hat{C}_i} = \tau_{\hat{B}\hat{C}}(\hat{\phi}_i)$ ,  $\hat{d}_{i,j+0.5} = \sqrt{(\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j})^2 + (\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j})^2}$  запишемо наступним чином [1, 3, 8]:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i,j} &= \left( \hat{x}_{i+1,j} + \hat{x}_{i-1,j} + \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j}^2 (\hat{x}_{i,j-1} + \hat{x}_{i,j+1}) + 0.25 \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j} (\hat{x}_{i,j+1} - \right. \\ &\quad \left. - \hat{x}_{i,j-1}) ((\hat{\kappa}_{i,j})'_x (\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j-1}) + (\hat{\kappa}_{i,j})'_y (\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j-1})) \right) - \\ &\quad - 0.25 ((\hat{\kappa}_{i,j})'_x (\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i-1,j}) + (\hat{\kappa}_{i,j})'_y (\hat{y}_{i+1,j} - \hat{y}_{i-1,j})) (\hat{x}_{i+1,j} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\hat{x}_{i-1,j} / \hat{\kappa}_{i,j}) 0.5 / (1 + \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j}^2), \\
 \hat{y}_{i,j} = & \left( \hat{y}_{i+1,j} + \hat{y}_{i-1,j} + \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j}^2 (\hat{y}_{i,j-1} + \hat{y}_{i,j+1}) + 0.25 \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j} (\hat{y}_{i,j+1} - \right. \\
 & \left. - \hat{y}_{i,j-1}) \left( (\hat{\kappa}_{i,j})'_{\hat{x}} (\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j-1}) + (\hat{\kappa}_{i,j})'_y (\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j-1}) \right) - \right. \\
 & \left. 0.25 \left( (\hat{\kappa}_{i,j})'_{\hat{x}} (\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i-1,j}) + (\hat{\kappa}_{i,j})'_y (\hat{y}_{i+1,j} - \hat{y}_{i-1,j}) \right) (\hat{y}_{i+1,j} - \right. \\
 & \left. - \hat{y}_{i-1,j}) / \hat{\kappa}_{i,j} \right) 0.5 / (1 + \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j}^2);
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{4}{(m+1)(n+1)} \times \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{(\hat{d}_{i+0.5,j} + \hat{d}_{i+0.5,j+1})(\hat{d}_{i,j+0.5} + \hat{d}_{i+1,j+0.5})^{-1}}{\hat{\kappa}_{i,j} + \hat{\kappa}_{i+1,j} + \hat{\kappa}_{i,j+1} + \hat{\kappa}_{i+1,j+1}}; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i,0} &= \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau_{\hat{D}\hat{A}}), \quad \hat{y}_{i,0} = \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau_{\hat{D}\hat{A}}), \\
 \hat{x}_{i,n+1} &= \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau_{\hat{B}\hat{C}}), \quad \hat{y}_{i,n+1} = \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau_{\hat{B}\hat{C}}), \\
 \hat{x}_{0,j} &= \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau_{\hat{A}\hat{B}}), \quad \hat{y}_{0,j} = \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau_{\hat{A}\hat{B}}), \\
 \hat{x}_{m+1,j} &= \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau_{\hat{C}\hat{D}}), \quad \hat{y}_{m+1,j} = \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau_{\hat{C}\hat{D}});
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}'_{\hat{D}\hat{A}}(\tau)(\hat{y}_{i,1} - \hat{y}_{i,0}) + \tilde{y}'_{\hat{D}\hat{A}}(\tau)(\hat{x}_{i,1} - \hat{x}_{i,0}) &= 0, \\
 \tilde{x}'_{\hat{B}\hat{C}}(\tau)(\hat{y}_{i,n} - \hat{x}_{i,n+1}) + \tilde{y}'_{\hat{B}\hat{C}}(\tau)(\hat{x}_{i,n} - \hat{x}_{i,n+1}) &= 0, \\
 \tilde{x}'_{\hat{A}\hat{B}}(\tau)(\hat{y}_{1,j} - \hat{y}_{0,j}) + \tilde{y}'_{\hat{A}\hat{B}}(\tau)(\hat{x}_{1,j} - \hat{x}_{0,j}) &= 0, \\
 \tilde{x}'_{\hat{C}\hat{D}}(\tau)(\hat{y}_{m,j} - \hat{x}_{m+1,j}) + \tilde{y}'_{\hat{C}\hat{D}}(\tau)(\hat{x}_{m,j} - \hat{x}_{m+1,j}) &= 0;
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 & (4\hat{x}_{i,1} - 3\hat{x}_{i,0} - \hat{x}_{i,2})(\hat{x}_{i+1,0} - \hat{x}_{i-1,0}) + \\
 & + (4\hat{y}_{i,1} - 3\hat{y}_{i,0} - \hat{y}_{i,2})(\hat{y}_{i+1,0} - \hat{y}_{i-1,0}) = 0, \\
 & (3\hat{x}_{i,n+1} + \hat{x}_{i,n-1} - 4\hat{x}_{i,n})(\hat{x}_{i+1,n+1} - \hat{x}_{i-1,n+1}) + \\
 & + (3\hat{y}_{i,n+1} + \hat{y}_{i,n-1} - 4\hat{y}_{i,n})(\hat{y}_{i+1,n+1} - \hat{y}_{i-1,n+1}) = 0, \\
 & (4\hat{x}_{1,j} - 3\hat{x}_{0,j} - \hat{x}_{2,j})(\hat{x}_{0,j+1} - \hat{x}_{0,j-1}) + \\
 & + (4\hat{y}_{1,j} - 3\hat{y}_{0,j} - \hat{y}_{2,j})(\hat{y}_{0,j+1} - \hat{y}_{0,j-1}) = 0, \\
 & (3\hat{x}_{m+1,j} + \hat{x}_{m-1,j} - 4\hat{x}_{m,j})(\hat{x}_{m+1,j+1} - \hat{x}_{m+1,j-1}) + \\
 & + (3\hat{y}_{m+1,j} + \hat{y}_{m-1,j} - 4\hat{y}_{m,j})(\hat{y}_{m+1,j+1} - \hat{y}_{m+1,j-1}) = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

При цьому,  $G_z^{\hat{z}} = \{\hat{z}_{i,j} = \hat{x}_{i,j} + i \hat{y}_{i,j} : \hat{z}_{i,j} \in G_z, i = \overline{0, m+1}, j = \overline{0, n+1}\}$ .

**Алгоритм розв'язання задачі (8)-(11) ((8)-(10), (12)).** Спершу задаємо границю фізичної області  $G_z$  (функціями  $x = \tilde{x}(\tau)$ ,  $y = \tilde{y}(\tau)$ ) і

параметри  $\tau = \tau_A$ ,  $\tau = \tau_B$ ,  $\tau = \tau_C$ ,  $\tau = \tau_D$ . Далі здійснюємо ФО згідно підходу, що описаний вище. Задаємо квазіпотенціали  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$ , кількості вузлів розбиття  $m$ ,  $n$  та параметр точності  $\varepsilon$ . Обчислюємо крок  $\Delta\hat{\varphi} = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1)$  та координати кутових точок  $\hat{x}_{m+1,0} = \tilde{x}_{DA}(0)$ ,  $\hat{y}_{m+1,0} = \tilde{y}_{DA}(0)$ ,  $\hat{x}_{0,0} = \tilde{x}_{AB}(0)$ ,  $\hat{y}_{0,0} = \tilde{y}_{AB}(0)$ ,  $\hat{x}_{m+1,n+1} = \tilde{x}_{CD}(0)$ ,  $\hat{y}_{m+1,n+1} = \tilde{y}_{CD}(0)$ ,  $\hat{x}_{0,n+1} = \tilde{x}_{BC}(0)$ ,  $\hat{y}_{0,n+1} = \tilde{y}_{BC}(0)$ .

Формуємо початкові наближення координат граничних  $\hat{x}_{0,j}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{0,j}^{(0)}$ ,  $\hat{x}_{m+1,j}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{m+1,j}^{(0)}$ ,  $\hat{x}_{i,0}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{i,0}^{(0)}$ ,  $\hat{x}_{i,n+1}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{i,n+1}^{(0)}$  та внутрішніх  $\hat{x}_{i,j}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{i,j}^{(0)}$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) вузлів і квазіконформного інваріанту  $\hat{\gamma}^{(0)}$  (за формулою (9)).

Розпочинаємо ітераційний процес почергової параметризації граничних і внутрішніх вузлів сіткових областей, а також квазіконформного інваріанту з використанням ідей методу блочної ітерації [1, 9]. А саме: розв'язуємо системи рівнянь (10), (11) ((10), (12)) стосовно  $\hat{x}_{0,j}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{0,j}^{(l)}$ ,  $\hat{x}_{m+1,j}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{m+1,j}^{(l)}$ ,  $\hat{x}_{i,0}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{i,0}^{(l)}$ ,  $\hat{x}_{i,n+1}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{i,n+1}^{(l)}$  (тут  $l = 0, 1, \dots$  — номер наближення), потім застосовуємо формули (8) до вузлів  $\hat{x}_{i,j}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{i,j}^{(l)}$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ), після чого уточнюємо  $\hat{\gamma}^{(l)}$ , використовуючи (9). Умовами завершення ітераційного процесу можуть бути [1]. Остаточно, при необхідності, обчислюємо повну витрату  $\hat{Q} = (n+1)\Delta\hat{\varphi} / \hat{\gamma}^{(l)}$ , нев'язку квазіконформності, виводимо на екран гідродинамічну сітку тощо [1-3].

**Порівняння ефективності розв'язання задачі моделювання при застосуванні різних підходів до забезпечення виконання умов ортогональності на границі.** Нехай межа досліджуваної (вихідної) області задається за допомогою бісплайнних функцій

$$x = \tilde{x}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^*-1} x_k^* b_{k,3}^*(\tau), \quad y = \tilde{y}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^*-1} y_k^* b_{k,3}^*(\tau) \quad [7], \quad \text{утворених}$$

$m^* = 12$  контрольними точками, а саме:

$$\begin{aligned} (x_0^*, y_0^*) &= (272, 379), & (x_1^*, y_1^*) &= (260, 269), & (x_2^*, y_2^*) &= (360, 189), \\ (x_3^*, y_3^*) &= (433, 335), & (x_4^*, y_4^*) &= (556, 260), & (x_5^*, y_5^*) &= (711, 373), \\ (x_6^*, y_6^*) &= (694, 493), & (x_7^*, y_7^*) &= (549, 544), & (x_8^*, y_8^*) &= (456, 444), \\ (x_9^*, y_9^*) &= (357, 516), & (x_{10}^*, y_{10}^*) &= (281, 455), & (x_{11}^*, y_{11}^*) &= (272, 379), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \tau_k &= \tau_{k-1} + (m^* - 3)^{-1} \overline{(k = 4, m^*)}, \\ b_{k,r}^*(\tau) &= \frac{\tau - \tau_k}{\tau_{k+r} - \tau_k} b_{k,r-1}^*(\tau) + \frac{\tau_{k+r+1} - \tau}{\tau_{k+r+1} - \tau_{k+1}} b_{k+1,r-1}^*(\tau), \\ b_{k,0}^*(\tau) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tau \notin [\tau_k, \tau_{k+1}), \\ 1, & \text{якщо } \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \end{cases} \\ \tau_{m^*+k} &= 1 \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \tau_k = 0 \quad (k = \overline{0, 3}). \end{aligned}$$

Точки  $A, B, C, D \in \partial G_z$  визначатимемо параметрами  $\tau_A = 0.58$ ,  $\tau_B = 0.68$ ,  $\tau_C = 0.04$ ,  $\tau_D = 0.042$ . Сталі  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$  задаємо рівними 0 і 1, відповідно. При наведених даних і різних параметрах розбиття  $m$ ,  $n$  розв'язано задачі моделювання руху частинок як в області  $G_z$ , так і в

$G_z$  (процедура ФО виконувалась при  $m^{\hat{D}\hat{A}} = 269$ ,  $m^{\hat{A}\hat{B}} = 9$ ,  $m^{\hat{B}\hat{C}} = 364$ ,  $m^{\hat{C}\hat{D}} = 139$ ,  $n^{DA} = 2680$ ,  $n^{AB} = 40$ ,  $n^{BC} = 3630$ ,  $n^{CD} = 690$ ,

$\Delta_A^L = \Delta_A^R = \Delta_B^L = \Delta_B^R = 0.418311$ ,  $\Delta_C^L = \Delta_C^R = \Delta_D^L = \Delta_D^R = 13.892004$ ). В обох випадках обчислено усереднені нев'язку ортогональності

$$\varepsilon^{\angle} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \varepsilon_{i,j}^{\angle} \text{ та узагальнену нев'язку відношення дов-$$

жин суміжних відрізків  $\varepsilon' = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \varepsilon_{i,j}'$  в малому, де  $\varepsilon_{i,j}'$  та

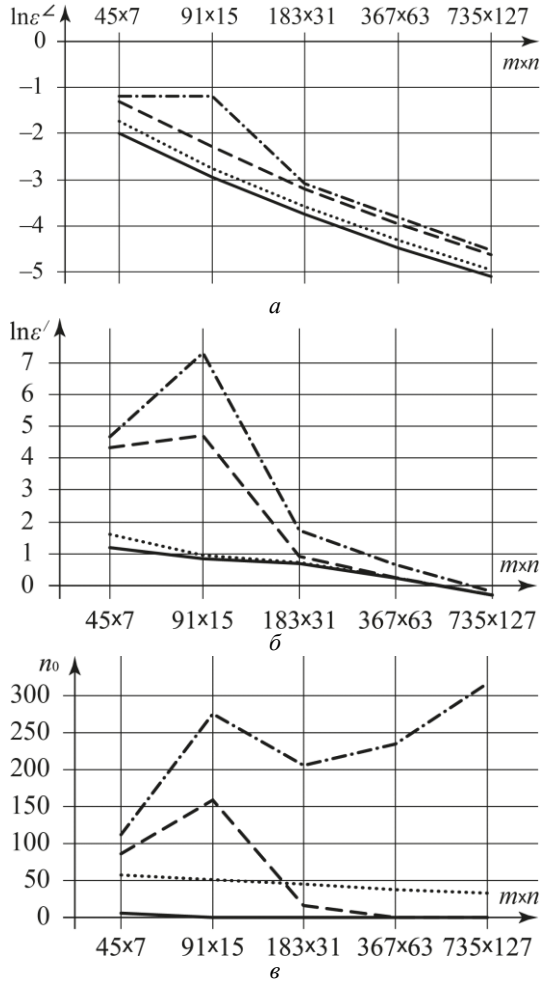
$\varepsilon_{i,j}^{\angle}$  в області  $G_{\hat{\omega}}^{\hat{\gamma}}$  розраховуються за формулами:

$$\max \left( \hat{d}_{i+0.5,j} / (\hat{\gamma} \hat{\kappa}_{i,j} \hat{d}_{i,j+0.5}), \hat{\gamma} \hat{\kappa}_{i,j} \hat{d}_{i,j+0.5} / \hat{d}_{i+0.5,j} \right) - 1$$

та

$$\left| \arcsin \frac{(\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i,j})(\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j}) + (\hat{y}_{i+1,j} - \hat{y}_{i,j})(\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j})}{\hat{d}_{i+0.5,j} \hat{d}_{i,j+0.5}} \right|,$$

відповідно. Графіки розподілу величин  $\varepsilon_{i,j}'$  та  $\varepsilon_{i,j}^{\angle}$ , зважаючи на різність порядків їх значень, зображено, подібно до [10], у логарифмічному вигляді (рис. 2, а та рис. 2, б). При цьому, для спрощення аналізу результатів, із розрахунків  $\varepsilon'$  (рис. 2, б) виключено вузли з особливостями, для яких  $\varepsilon_{i,j}' > 10^6$ , але пораховано їх кількість  $n_0$  (рис. 2, в).



**Рис. 2.** Усереднені нев'язка ортогональності (а) та узагальнена нев'язка відношення довжин суміжних відрізків (б) в малому, а також кількість вузлів з особливостями (в); тут зображено результати у випадку ФО (—, — —), без ФО (....., —. —), при застосуванні формул (11) (— —, —. —) та виразів (12) (—, .....

Як видно з рис. 2, застосування формул (11) при порівнянні малий кількості вузлів є неефективним. Але починаючи з розбиття  $183 \times 31$ , похибки квазіконформності, очікувано [6], локалізуються у точках  $A, B, C, D$  ( $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ ). Процедура ж ФО дозволяє взагалі позбавитись особливостей в околах «стику» граничних ліній течії та ек-

віпотенціальних ліній (хоча й тут спостерігається певна залежність від параметрів «густини» розбиття).

Також, як і очікувалось, зі збільшенням кількості вузлів розбиття рівень похибок квазіконформності зменшується. Найефективнішим з цієї точки зору є застосування процедури ФО та різницевих рівнянь (12). Подальша градація наступна: без ФО та із задіюванням виразів (12), при збуреннях за допомогою ФО та використанні (11), за умови гладкої границі області та реалізації формул (11). Варто зауважити, що в 2-му та 4-му серед перелічених випадків мають місце особливості у певних околах особливих точок. Тому, наприклад, при розв'язанні задач електричної томографії [2, 3], апріорними даними на відповідних ділянках, у багатьох випадках, доводиться нехтувати (для забезпечення вищого рівня коректності за Адамаром [4]).

**Перспективи подальших досліджень у задачах електричної томографії.** У роботах [2, 3] при розв'язанні задач електричної томографії (реконструкції зображення) використовувались формули (11) стосовно областей із гладкими границями. Проте, як видно з рис. 2, можливо досягнути суттєво вищої точності отримуваних розв'язків із застосуванням процедури ФО та виразів (12). Зокрема, суттєвою перевагою тут стає уникнення вузлів із особливостями, які мають місце в околах точок «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній.

У такому випадку, замість чотирьох бісплайнів виду  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau))$  будуються  $\tilde{p}$  четвірок  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{(p)}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{(p)}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{(p)}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{(p)}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{(p)}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{(p)}(\tau))$  при заданих  $\tau = \tau_A^{(p)}$ ,  $\tau = \tau_B^{(p)}$ ,  $\tau = \tau_C^{(p)}$ ,  $\tau = \tau_D^{(p)}$ . При цьому, оскільки значення  $\tilde{p}$  у задачах томографії може досягати кількох сотень [2], то очевидно є перевага в описаному вище саме автоматизованому алгоритмі ФО.

Тоді задачі виду (4), (5), (7) на знаходження функцій  $\hat{x}_{i,j} = \hat{x}(\hat{\varphi}_i, \hat{\psi}_j)$ ,  $\hat{y}_{i,j} = \hat{y}(\hat{\varphi}_i, \hat{\psi}_j)$ ,  $\hat{\kappa}_{i,j} = \kappa(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_{i,j})$  із врахуванням інжекційності [2, 3] (з доданням індексу  $p$  до відповідних змінних та параметрів, яке означає належність до конкретного ситуаційного випадку розміщення ділянок прикладання квазіпотенціалів) та доповнені умовами [3]

$$\begin{aligned} x^{(p)}(\hat{\varphi}, 0) &= \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}\left(\tau_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}(\hat{\varphi})\right), \quad y^{(p)}(\hat{\varphi}, 0) = \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}\left(\tau_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}(\hat{\varphi})\right), \\ x^{(p)}(\varphi_*, \hat{\psi}) &= \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{(p)}\left(\tau_{*\hat{A}\hat{B}}^{(p)}(\hat{\psi})\right), \quad y^{(p)}(\varphi_*, \hat{\psi}) = \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{(p)}\left(\tau_{*\hat{A}\hat{B}}^{(p)}(\hat{\psi})\right), \end{aligned}$$



$$x^{(p)}(\hat{\varphi}, \hat{Q}^{(p)}) = \tilde{x}_{\hat{BC}}^{(p)}\left(\bar{\tau}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\varphi})\right), \quad y^{(p)}(\hat{\varphi}, \hat{Q}^{(p)}) = \tilde{y}_{\hat{BC}}^{(p)}\left(\bar{\tau}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\varphi})\right), \quad (13)$$

$$x^{(p)}(\varphi^*, \hat{\psi}) = \tilde{x}_{\hat{CD}}^{(p)}\left(\tau_{\hat{CD}}^{*(p)}(\hat{\psi})\right), \quad y^{(p)}(\varphi^*, \hat{\psi}) = \tilde{y}_{\hat{CD}}^{(p)}\left(\tau_{\hat{CD}}^{*(p)}(\hat{\psi})\right)$$

$$(\hat{\varphi} \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad \hat{\psi} \in [0, \hat{Q}])$$

розв'язуватимуться при різних  $A_p, B_p, C_p, D_p$ . При цьому, числові значення виразів (13) отримуються із апіорної інформації щодо розподілу значень  $\bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \Psi_{j_*^{(p)}}^{*(p)}$  ( $\bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} < \bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)+1}^{(p)}, \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} < \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)+1}^{(p)}, \Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)} < \Psi_{*j_*^{(p)+1}^{(p)}, \Psi_{j_*^{(p)}}^{*(p)} < \Psi_{j_*^{(p)+1}^{*(p)}$ ) у точках  $(\bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}), (\underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \underline{y}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}), (x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, y_{*j_*^{(p)}}^{(p)}), (x_{j_*^{(p)}}^{*(p)}, y_{j_*^{(p)}}^{*(p)})$  ( $j_*^{(p)} = 0, n_*^{(p)} + 1, \bar{i}^{(p)} = 0, \bar{m}^{(p)} + 1, j_*^{(p)} = 0, n_*^{(p)} + 1, \underline{i}^{(p)} = 0, \underline{m}^{(p)} + 1$ ) на межі досліджуваної області  $G_z$  [2-4]. Виходячи з того, що ці дані задаються дискретно (з певними кроками) на  $\partial G_z$ , то доцільним є вибирання «околів»  $\Delta_A^{(p)L}, \Delta_A^{(p)R}, \Delta_B^{(p)L}, \Delta_B^{(p)R}, \Delta_C^{(p)L}, \Delta_C^{(p)R}, \Delta_D^{(p)L}, \Delta_D^{(p)R}$  настільки малими, щоб під суттєво збурені внаслідок ФО ділянки області не потрапляли точки  $(\bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}), (\underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \underline{y}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}), (x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, y_{*j_*^{(p)}}^{(p)}), (x_{j_*^{(p)}}^{*(p)}, y_{j_*^{(p)}}^{*(p)})$  ( $j_*^{(p)} = 1, n_*^{(p)}, \bar{i}^{(p)} = 1, \bar{m}^{(p)}, j_*^{(p)} = 1, n_*^{(p)}, \underline{i}^{(p)} = 1, \underline{m}^{(p)}$ ). Координати останніх на бісплайнових кривих апроксимуємо за допомогою параметрів  $\tau = \hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \tau = \hat{\tau}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \tau = \hat{\tau}_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \tau = \hat{\tau}_{j_*^{(p)}}^{*(p)}$ , більшість з яких ( $j_*^{(p)} = 1, n_*^{(p)}, \bar{i}^{(p)} = 1, \bar{m}^{(p)}, j_*^{(p)} = 1, n_*^{(p)}, \underline{i}^{(p)} = 1, \underline{m}^{(p)}$ ) обчислюємо за умови мінімізації виразів:

$$\left(\tilde{x}_{\hat{DA}}^{(p)}(\hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) - \underline{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}\right)^2 + \left(\tilde{y}_{\hat{DA}}^{(p)}(\hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) - \underline{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}\right)^2 \rightarrow \min,$$

$$\left(\tilde{x}_{\hat{AB}}^{(p)}(\hat{\tau}_{*j_*^{(p)}}^{(p)}) - x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}\right)^2 + \left(\tilde{y}_{\hat{AB}}^{(p)}(\hat{\tau}_{*j_*^{(p)}}^{(p)}) - y_{*j_*^{(p)}}^{(p)}\right)^2 \rightarrow \min,$$

$$\left(\tilde{x}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) - \bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}\right)^2 + \left(\tilde{y}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) - \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}\right)^2 \rightarrow \min,$$

$$\left(\tilde{x}_{\hat{CD}}^{(p)}(\hat{\tau}_{j_*^{(p)}}^{*(p)}) - x_{j_*^{(p)}}^{*(p)}\right)^2 + \left(\tilde{y}_{\hat{CD}}^{(p)}(\hat{\tau}_{j_*^{(p)}}^{*(p)}) - y_{j_*^{(p)}}^{*(p)}\right)^2 \rightarrow \min.$$

Решта ж відповідає кутовим точкам:  $\hat{\tau}_0^{(p)} = \hat{\tau}_0^{(p)} = \hat{\tau}_0^{*(p)} = \hat{\tau}_0^{*(p)} = 0$ ,  $\hat{\tau}_{\bar{m}^{(p)+1}^{(p)}}^{(p)} = \hat{\tau}_{\underline{m}^{(p)+1}^{(p)}}^{(p)} = \hat{\tau}_{n_*^{(p)+1}^{(p)}}^{(p)} = \hat{\tau}_{n_*^{(p)+1}^{(p)}}^{*(p)} = 1$ . Функції  $\tau = \tau_{\hat{DA}}^{(p)}(\hat{\varphi}), \tau = \tau_{\hat{AB}}^{(p)}(\hat{\psi}), \tau = \bar{\tau}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\varphi}), \tau = \tau_{\hat{CD}}^{*(p)}(\hat{\psi})$ , що входять у формулу (13), будуються вна-

слідок інтерполювання (наприклад, за допомогою монотонних кубічних сплайнів [11]) значень  $\tau = \hat{\tau}_{\bar{I}}^{(p)}$ ,  $\tau = \hat{\tau}_{\underline{I}}^{(p)}$ ,  $\tau = \hat{\tau}_{*j_n}^{(p)}$ ,  $\tau = \hat{\tau}_{j^{*(p)}}^{(p)}$  при параметрах  $\bar{\varphi}_{\bar{I}}^{(p)}$ ,  $\underline{\varphi}_{\underline{I}}^{(p)}$ ,  $\Psi_{*j_n}^{(p)}$ ,  $\Psi_{j^{*(p)}}^{*(p)}$ .

Загалом, використання апріорних даних у збуреному вигляді (13) при достатньо малих значеннях  $\Delta_A^{(p)L}$ ,  $\Delta_A^{(p)R}$ ,  $\Delta_B^{(p)L}$ ,  $\Delta_B^{(p)R}$ ,  $\Delta_C^{(p)L}$ ,  $\Delta_C^{(p)R}$ ,  $\Delta_D^{(p)L}$ ,  $\Delta_D^{(p)R}$  забезпечує більшу коректність вихідної задачі за Адамаром. Таким чином, зменшується необхідність у регуляризації [4], яка негативно впливає і на швидкість розрахунків, і на їх точність.

**Висновки.** Реалізовано механізм підвищення точності квазіконформних відображень при розв'язанні крайових задач в ізотропному середовищі з чотирикутною гладкою границею, яка складається з двох ліній течії та двох екіпотенціальних ліній. Для цього розроблено спеціальну процедуру «фіктивної ортогоналізації», яка передбачає заміну вихідної області деякою апроксимованою. Це хоч і вносить певні збурення у форму досліджуваного об'єкта, проте забезпечує вищу точність квазіконформних відображень та більшу «прозорість» ходу розв'язання відповідної задачі. Проведено порівняння нев'язок квазіконформності, обчислених на прикладах гладкої границі деякої області та серії «фіктивно ортогоналізованих». Показано безумовну ефективність застосування деякої «п'ятиточкової» схеми (над «двоточковою») в обох випадках. Більше того, «фіктивна ортогоналізація» забезпечує «позбавлення» від особливих точок і похибок, що, при цьому, виникають. Локалізація ж нев'язок квазіконформності в околах особливих точок, що має місце при гладкості межі досліджуваної області, спостерігається лише при «густому» розбитті. Тоді як у, наприклад, задачах електричної томографії, у багатьох випадках, критичними є показники швидкості розрахунків та їх точності вздовж усієї ділянки границі.

У перспективі: реалізація процедури «фіктивної ортогоналізації» у задачах електричної томографії [2-4], зокрема, у випадках, коли на ділянках границі мають місце негладкості [1], що моделюється критичними точками, в околах яких мають місце «застійні зони». Окрім цього, планується розроблення підходів до врахування наявності у досліджуваному середовищі тонких прошарків [5] із власними фільтраційними (електричними) характеристиками.

### Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу: монографія. Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.
2. Bomba A., Voichura M., Sydoruk B. Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5 (4). P. 45-54.

3. Bomba A. Ya., Boichura M. V. One numerical complex analysis method for parameters identification of piecewise homogeneous conductivity media with using applied quasipotential tomographic data. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2016. Вип. 14. С. 5-17. DOI: 10.32626/2308-5916.2016-14.5-17.
4. Holder D. *Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications*. London: Institute of Physics, 2005. 456 p.
5. Michuta O., Ivanchuk N., Martyniuk P., Ostapchuk O. A finite-element study of elastic filtration in soils with thin inclusions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5 (5). P. 41-48.
6. Петрусєв А. С. Разностные схемы и их анализ: учебно-методическое пособие. Москва: МФТИ, 2004. 89 с.
7. Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M. *Bézier and B-Spline Techniques*. Heidelberg: Springer, 2002. 304 p.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
10. Доманов В. Н., Костин А. Г., Никифорович Е. И. Процессы теплообмена в водоемов-охладителей с атмосферой. Киев: Наукова думка, 2011. 320 с.
11. ALGLIB — C++/C# numerical analysis library. URL: <http://www.alglib.net> (Last accessed: 26.07.2021).

## **ON AN APPROACH TO SMOOTHING THE NONSMOOTHNESS OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS USING NUMERICAL QUASICONFORMAL MAPPING METHODS**

The problem of modeling the motion of particles (charges, liquids, etc.) in a single-connected quadrangular curvilinear domain bounded by smooth two streamlines and two equipotential lines is formulated. Although if they are not «joined» at right angles and the corresponding medium is isotropic, then, according to the quasiconformal mapping method, there will be singularities in the vicinities of exactly four points of the boundary. To avoid these singularities, an approach to approximation the boundary of the studied domain (by cubic B-splines) with the use of a special procedure of “fictitious orthogonalization” is proposed. The corresponding direct and inverse problems on quasiconformal mappings are formulated. In this, two ways for the formation of orthogonality on smooth sections of the boundary (using some «two-» and «four-point» schemes for comparison; the corresponding difference problems and algorithms for their solving are given) are proposed. An approach to estimating the accuracy of quasiconformity properties fulfilling is proposed, separately calculating the averaged orthogonality residual and the generalized residual of ratio of the lengths of adjacent segments in the small. Numerical experiments were carried out and corresponding results were analyzed. In particular, the distributions of both types of residuals and the number of nodes with singularities when different mesh partitions take place are illustrated in the graphs. As expected, «fictitious orthogonalization» with sufficiently «dense» discretization

provides an opportunity to solve the problem of singularity at the points of «junction» of boundary streamlines and equipotential lines, contributes to increasing the accuracy of quasiconformal mappings and improving the «transparency» of solving process of the corresponding problem. Also, as expected, the «five-point» scheme for ensuring orthogonality on smooth boundary lines showed greater efficiency compared to the «two-point» one.

As a prospect for further application of the developed procedure of «fictitious orthogonalization», the mechanism of its adaptation is described on the example of electrical tomography problems.

**Key words:** *mathematical modeling, nonlinear problems, quasiconformal mappings, numerical methods.*

Отримано: 12.10.2021

UDC 519.6: 621.382.233

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.20-30

**Andriy Bomba**, D-r of Tech. Science, Professor,  
**Igor Moroz**, PhD, Associate Professor

National University of Water and Environmental Engineering, Rivne

## **SIMULATION OF THE CHARGE CARRIERS DISTRIBUTION IN THE ACTIVE REGION OF THE P-I-N-DIODES BY THE PERTURBATION THEORY METHODS**

A mathematical model of the electron-hole plasma stationary distribution in the active region (i-region) of p-i-n-diodes in the diffusion-drift approximation is proposed. The model is represented in the form of a nonlinear singularly perturbed boundary value problem for the system of equations of the electron-hole currents continuity, the Poisson equation and the corresponding boundary conditions. The decomposition of the nonlinear boundary value problem of modeling the stationary distribution of charge carriers in the plasma of p-i-n-diodes is carried out on the basis of the solutions asymptotic representation. The model problem is reduced to a sequence of the linear boundary value problems with a characteristic separation of the main (regular) components of the asymptotics and a boundary corrections. It was found that the formulation of the problem for finding the zero term of the asymptotics regular part coincides with the classical formulation of the p-i-n-diodes characteristics modeling problem, which is carried out in the approximation of the ambipolar diffusion (approximation of a self-consistent electrostatic field). The proposed mathematical model and the method of its linearization make it possible to determining the main components in the diffusion-drift process and to study their role. For example, it becomes possible to study (including by analytical

methods) the behavior of plasma in the p-i-, n-i-contacts zones. The results of the study are aimed at developing methods for designing p-i-n-diode structures, used, in particular, as active elements of the signals switches of a microwave data transmission systems and the corresponding protective devices.

**Key words:** *perturbation method, singular-perturbation problems, boundary layer method, diffusion-drift process, p-i-n-diode.*

**1. Introduction.** For switching of the microwave electromagnetic field p-i-n-diodes are used [1, 2]. The electromagnetic field is controlled by changing the concentration of the charge carriers (electrons and holes) in the active region (i-region) using a control current. The distribution of the charge carriers concentration is the basic characteristic of the microwave switches. To estimate the value of the accumulated charge in the active region, in particular, the hydrodynamic models of plasma dynamics are widely used [1-3]. The mathematical model of plasma dynamics is based on a nonlinear system of partial differential equations, for the analysis of which a number of approximations are used. In particular, the approximation of ambipolar diffusion (self-consistent field mode) [1-3] does not take into account the effects of plasma heating [1], etc. This approach allows one to obtain linearized mathematical models. However, this reduces the level of modeling adequacy.

There are a number of practical problems (for example, the problem of optimizing the characteristics of p-i-n-structures) that cannot be solved using linearized models. There is a need for the development of an appropriate mathematical modeling tools.

The aim of the work: development of the mathematical model and an method for decomposition of the problem of finding a stationary distribution of the charge carriers concentration in the semiconductor p-i-n-diodes active region within the framework of the application of the plasma dynamics diffusion-drift model and the perturbation theory methods.

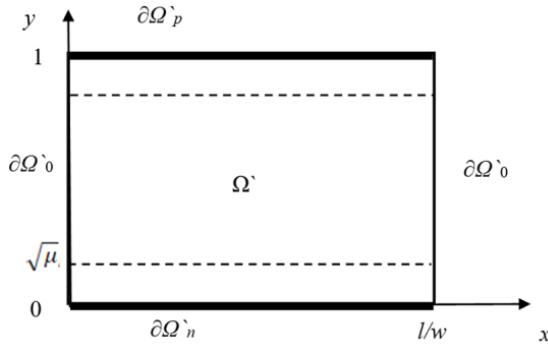
**2. The formulation of the problem.** The p-i-n-diode active region is a limited region ( $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < l, 0 < y < w, 0 < z < d\}$ ) of a semiconductor material with intrinsic conductivity, at the boundary of which ( $\partial\Omega$ ) are p-i- and n-i-junctions intended for injection of charge carriers into the active region (holes and electrons, respectively). The cross section of the p-i-n structure is shown schematically in Figure 1.  $\partial\Omega_{n,p}$  — the boundaries of injection contacts,  $\partial\Omega_0$  — the isolated boundary. The basic mathematical model describing the distribution of the concentration of holes ( $n$ ), electrons ( $p$ ) and potential ( $\varphi$ ) in the active region of p-i-n-diodes is based on the equation of the holes and electrons currents continuity and the Poisson's equation [1, 3]:

$$\Delta n = \frac{e}{kT} (\nabla n \cdot \nabla \varphi + n \Delta \varphi) + \frac{1}{D_n \tau_n^*} n, \quad (1)$$

$$\Delta p = \frac{e}{kT} (-\nabla p \cdot \nabla \varphi - p \Delta \varphi) + \frac{1}{D_p \tau_p^*} p, \quad (2)$$

$$\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e} \Delta \varphi = -(p - n + N_I), \quad (3)$$

where  $\tau_p^*$ ,  $\tau_n^*$  are the characteristic relaxation lifetimes of holes and electrons in the i-region (in the general case, they depend on the local concentration of electrons and holes and are determined by a certain mechanism of the charge carriers recombination);  $N_I = N_a - N_d \equiv N_I(x, y)$  — a given function of the doping profile (describes the difference between the concentrations of acceptors and donors in the active region);  $D_p$ ,  $D_n$  — diffusion coefficients of holes and electrons, respectively;  $k$  — Boltzmann's constant;  $T$  — temperature;  $e$  is the electron charge;  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$  are the relative dielectric constant of the semiconductor and the dielectric constant.



**Fig. 1.** Cross-section of the p-i-n diode's active region

In general, the boundary conditions are as follows:

a) on injection contacts

$$\left( (\vec{j}_n - \vec{j}_{nr}) \cdot \vec{\nu} \right) \Big|_{\partial\Omega_n} = J, \quad \left( (\vec{j}_p - \vec{j}_{pr}) \cdot \vec{\nu} \right) \Big|_{\partial\Omega_n} = 0, \quad \varphi \Big|_{\partial\Omega_n} = 0, \quad (4)$$

$$\left( (\vec{j}_p - \vec{j}_{pr}) \cdot \vec{\nu} \right) \Big|_{\partial\Omega_p} = J, \quad \left( (\vec{j}_n - \vec{j}_{nr}) \cdot \vec{\nu} \right) \Big|_{\partial\Omega_p} = 0, \quad \varphi \Big|_{\partial\Omega_p} = U, \quad (5)$$

where  $J$  is a constant that determines the injection current density (control current density);  $\vec{\nu}$  is the normal vector to the region border;  $\vec{j}_{n,p}$  are the currents density of electrons and holes;  $\vec{j}_{m,mp}$  are the density of the re-

combination currents. Note that boundary conditions (4)-(5) are written under the assumption that only electrons carry current through the  $\partial\Omega_n$  boundary, respectively, through  $\partial\Omega_p$  — holes (in the p-i-n-diodes with a wide active region the most of the injected charge carriers recombine in the i-region and not manages to get into the area of opposite contact).

Taking into account relations  $\vec{j}_p = e\mu_p p\vec{E} - eD_p \nabla p$ ,  $\vec{j}_n = e\mu_n n\vec{E} + eD_n \nabla n$ ,  $\vec{j}_{ip} = e\alpha_p p\vec{v}$ ,  $\vec{j}_{in} = e\alpha_n n\vec{v}$ , it can be shown that conditions (4.5) are equivalent to the following:

$$\left. \frac{\partial n}{\partial v} - \gamma_n n \right|_{\partial\Omega_n} = \frac{J}{eD_n}, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial v} \right|_{\partial\Omega_p} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} - \gamma_p p \right|_{\partial\Omega_p} = -\frac{J}{eD_p}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{\partial\Omega_n} = 0,$$

where  $\gamma_n = \left( \frac{\alpha_n}{\mu_n} - \frac{\alpha_p}{\mu_p} \right) \frac{\mu_n}{D_n}$ ;  $\gamma_p = \left( \frac{\alpha_n}{\mu_n} - \frac{\alpha_p}{\mu_p} \right) \frac{\mu_p}{D_p}$ ;  $\alpha_{n,p}$  — the recombination coefficients of electrons and holes, respectively;

b) on the isolated borders, we obtain the similar relations:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} - \gamma_p p \right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial v} - \gamma_n n \right|_{\partial\Omega_0} = 0. \quad (7)$$

Based on the arbitrary choice of potential, we put

$$\varphi|_{\partial\Omega_n} = 0, \quad \varphi|_{\partial\Omega_p} = U, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (8)$$

where  $U$  is a constant that determines the voltage on the p-i-n-diode contacts.

Note that in the boundary conditions, dependent characteristics are used — the density of the injected current  $J$  and the value of the potential at the p-i-contact  $U$  (in the general case, the connection between the characteristics is established by Ohm's law and depends on the conductivity of the i-region and the resistance of the external electrical circuit).

It is convenient to analyze system (1)-(3) in a normalized form. It is also proposed to consider a two-dimensional spatial model of a p-i-n-structure element (the solution is sought in the region  $\Omega' = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < w\}$ ), since its linear dimensions along the OZ axis significantly exceed other its linear dimensions. Let us introduce into consideration the dimensionless quantities  $\tilde{x} = \frac{x}{w}$  ( $0 < \tilde{x} < \frac{l}{w}$ ),

$$\tilde{y} = \frac{y}{w} \quad (0 < \tilde{y} < 1), \quad \tilde{\varphi} = \frac{e\varphi}{kT}, \quad \tilde{U} = \frac{eU}{kT}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{N_i} \quad (0 \leq \tilde{n} \leq \frac{n_{\max}}{N_i}), \quad \tilde{p} = \frac{p}{N_i}$$

( $0 \leq \tilde{p} \leq \frac{P_{\max}}{N_i}$ ),  $\tilde{N}_d = \frac{N_d}{N_i}$ , where  $N_i$  is a constant, determines the con-

centration of electrons in its own semiconductor, depends on the selected material of the semiconductor;  $T$  — constant, determines the temperature (300 °K);  $k$  — Boltzmann's constant. We obtain a nonlinear system of partial differential equations, consisting of the Poisson's equation and the equations of continuity of diffusion-drift currents, written for the stationary case, in the following form (the  $\sim$  sign is omitted):

$$\mu \Delta \varphi = -(p - n + N_l), \quad (9)$$

$$\Delta n = \nabla n \cdot \nabla \varphi + n \Delta \varphi + A_n n, \quad (10)$$

$$\Delta p = -\nabla p \cdot \nabla \varphi - p \Delta \varphi + A_p p. \quad (11)$$

In (9)-(11) the notation is used:  $\mu = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 k T}{e^2 w^2 N_i}$ ,  $A_n = \frac{w^2}{D_n \tau_n^*}$ ,

$A_p = \frac{w^2}{D_p \tau_p^*}$ . Estimation of the value  $\mu$  is  $\sim 10^{-8}$ .

In this case, conditions (6)-(8) take the form:

$$\left. \frac{\partial n}{\partial \nu} - \gamma_n n \right|_{\partial \Omega'_n} = \frac{J}{e D_n} \frac{w}{N_i}, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega'_p} = 0, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \nu} - \gamma_p p \right|_{\partial \Omega'_p} = -\frac{J}{e D_p} \frac{w}{N_i}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega'_n} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \nu} - \gamma_p p \right|_{\partial \Omega'_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial \nu} - \gamma_n n \right|_{\partial \Omega'_0} = 0,$$

$$\varphi|_{\partial \Omega'_n} = 0, \quad \varphi|_{\partial \Omega'_p} = U, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega'_0} = 0.$$

When describing the doping profile  $N_l(x, y)$ , let us consider the case of a sharp boundary between the doped regions and the region of the intrinsic semiconductor:

$$N_a(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega' \\ \frac{N_{a0}}{N_i}, & (x, y) \in \partial \Omega'_p \end{cases}; \quad N_d(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega' \\ \frac{N_{d0}}{N_i}, & (x, y) \in \partial \Omega'_n \end{cases}. \quad (13)$$

**3. The problem decomposition by the perturbation theory method.** To find an approximate solution to singularly perturbed problems for differential equations (similar to system (9)-(11)), a number of asymptotic and numerical methods have been developed [4-11]. These methods, in



particular, are used for mathematical modeling of processes in semiconductor devices [10-11].

Let us apply the method of boundary functions [4-9] to analyze the problem (9)-(13). A feature of this problem is the fact (in comparison with the formulations of problems [10-12]), that the proposed mathematical model (9)-(13) describes the flow of diffusion-drift currents of unbalanced charge carriers in semiconductor diodes with a wide base (there is no sharp boundary between the regions of semiconductors n — and p-types of conductivity). Thus, in the p-i-n-diode there are two contact zones (n-i and p-i) of semiconductors of different types.

Based on the statement of the problem and taking into account that the structure of the solution is mainly influenced by the conditions on the contact sections  $\partial\Omega_n$  and  $\partial\Omega_p$ , through which the i-region is filled with minority charge carriers, we propose to find a solution in the form of the following asymptotic series:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(x, y, \mu) = \Phi_{(m)}(x, y, \mu) + \underline{\Phi}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) + \overline{\Phi}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu) + R_{\varphi(m)}(x, y, \mu) = \\ &= \sum_{i=0}^m \mu^i \varphi_i(x, y) + \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{\Phi}_i(\underline{\xi}) + \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{\Phi}_i(\overline{\xi}) + R_{\varphi(m)}(x, y, \mu), \quad (14) \\ n &= n(x, y, \mu) = N_{(m)}(x, y, \mu) + \underline{N}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) + \overline{N}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu) + R_{n(m)}(x, y, \mu) = \\ &= \sum_{i=0}^m \mu^i n_i(x, y) + \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{N}_i(\underline{\xi}) + \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{N}_i(\overline{\xi}) + R_{n(m)}(x, y, \mu), \\ p &= p(x, y, \mu) = P_{(m)}(x, y, \mu) + \underline{P}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) + \overline{P}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu) + R_{p(m)}(x, y, \mu) = \\ &= \sum_{i=0}^m \mu^i p_i(x, y) + \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{P}_i(\underline{\xi}) + \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{P}_i(\overline{\xi}) + R_{p(m)}(x, y, \mu), \end{aligned}$$

where  $\Phi_{(m)}(x, y, \mu)$ ,  $N_{(m)}(x, y, \mu)$ ,  $P_{(m)}(x, y, \mu)$  — the regular part of the asymptotics;  $\underline{\Phi}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu)$ ,  $\underline{N}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu)$ ,  $\underline{P}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{\Phi}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{N}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu)$ ,  $\overline{P}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu)$  — the near-boundary asymptotic corrections, respectively, in the vicinity of the points  $y=0$  та  $y=l$  ( $\underline{\xi} = \frac{y}{\sqrt{\mu}}$ ,

$\overline{\xi} = \frac{1-y}{\sqrt{\mu}}$  — corresponding regularizing stretches);  $R_{\varphi(m)}(x, y, \mu)$ ,

$R_{n(m)}(x, y, \mu)$ ,  $R_{p(m)}(x, y, \mu)$  — remainders of the series.

Substituting (14) into the equation (9)-(11) and conditions (12) and using the standard procedure of «equating» form the following sequence of tasks for the area  $\Omega'$ .

The main terms of regular series (14) satisfy the system of equations:

$$\begin{aligned} n_0 &= p_0, & (15) \\ \Delta n_0 - \nabla \cdot (n_0 \nabla \varphi_0) - A_n n_0 &= 0, \\ \Delta p_0 + \nabla \cdot (p_0 \nabla \varphi_0) - A_p p_0 &= 0. \end{aligned}$$

The boundary functions of the initial stage of the solution construction process must satisfy the systems of ordinary differential equations (16)-(17) (the variable  $x$  is included in the equations as a parameter):

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_0 - \underline{N}_0), \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) - n_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) - p_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}^2} = -(\bar{P}_0 - \bar{N}_0), \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{N}_0}{\partial \bar{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left( \bar{N}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} \right) - n_0 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_0}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left( \bar{P}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} \right) + p_0 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}^2} = 0.$$

Systems of equations (15)-(17) are supplemented with boundary conditions (12), which take the following form:

$$\left. \frac{\partial n_0}{\partial y} - \gamma_n n_0 - \gamma_n \underline{N}_0 \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}} \right|_{y=0} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial p_0}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}} \right|_{y=0} = 0, \quad \varphi_0 + \underline{\Phi}_0 \Big|_{y=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial p_0}{\partial y} - \gamma_p p_0 - \gamma_p \bar{P}_0 \right|_{y=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \bar{\xi}} \right|_{y=1} = -\frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i},$$

$$\left. \frac{\partial n_0}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{N}_0}{\partial \bar{\xi}} \right|_{y=1} = 0, \quad \varphi_0 + \bar{\Phi}_0 \Big|_{y=1} = U,$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial x} - \gamma_n n_0 \Big|_{x=0, x=\frac{l}{w}} = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial x} - \gamma_n p_0 \Big|_{x=0, x=\frac{l}{w}} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Big|_{x=0, x=\frac{l}{w}} = 0.$$

Note, that the system of equations (15) is equivalent to the linear differential equation  $\Delta n_0 - \frac{1}{2}(A_n + A_p)n_0 = 0$ , which is also obtained within the ambipolar diffusion approximation [3].

The next stages of the search for the terms of the asymptotic expansion are based on the sequential solution of the equations systems similar to (15)-(17) with the corresponding boundary conditions:

For example, at the second stage, we are looking for solutions to the following systems of equations:

$$\Delta \varphi_0 = -(p_1 - n_1), \tag{19}$$

$$\Delta n_1 - \nabla \cdot (n_1 \nabla \varphi_0) - \nabla \cdot (n_0 \nabla \varphi_1) - A_n n_1 = 0,$$

$$\Delta p_1 + \nabla \cdot (p_1 \nabla \varphi_0) + \nabla \cdot (p_0 \nabla \varphi_1) - A_p p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}_1}{\partial \underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_1 - \underline{N}_1), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \underline{N}_1}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_1 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_1}{\partial \underline{\xi}} \right) - \\ & - \frac{\partial n_0}{\partial x} \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} - n_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_1}{\partial \underline{\xi}^2} - n_1 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \underline{P}_1}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_1 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left( \underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_1}{\partial \underline{\xi}} \right) + \\ & + \frac{\partial p_0}{\partial x} \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} + p_0 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_1}{\partial \underline{\xi}^2} + p_1 \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\Phi}_1}{\partial \overline{\xi}^2} = -(\overline{P}_1 - \overline{N}_1), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \overline{N}_1}{\partial \overline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \overline{\xi}} \left( \overline{N}_1 \frac{\partial \overline{\Phi}_0}{\partial \overline{\xi}} \right) - \frac{\partial}{\partial \overline{\xi}} \left( \overline{N}_0 \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial \overline{\xi}} \right) - \\ & - \frac{\partial n_0}{\partial x} \frac{\partial \overline{\Phi}_0}{\partial \overline{\xi}} - n_0 \frac{\partial^2 \overline{\Phi}_1}{\partial \overline{\xi}^2} - n_1 \frac{\partial^2 \overline{\Phi}_0}{\partial \overline{\xi}^2} - \frac{\partial \overline{N}_0}{\partial \overline{\xi}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{P}_0}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left( \bar{P}_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left( \bar{P}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{\xi}} \right) + \\ & + \frac{\partial p_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} + p_0 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{\xi}^2} + p_1 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Systems of equations (19)-(21) are supplemented by the following boundary conditions (similar to (18)):

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial n_1}{\partial y} - \gamma_n n_1 - \gamma_n \bar{N}_1 \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \bar{\xi}} \right|_{y=0} = 0, \\ & \left. \frac{\partial p_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{\xi}} \right|_{y=0} = 0, \quad \varphi_1 + \bar{\Phi}_1 \Big|_{y=0} = 0, \\ & \left. \frac{\partial p_1}{\partial y} - \gamma_p p_1 - \gamma_p \bar{P}_1 \right|_{y=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{\xi}} \right|_{y=1} = 0, \\ & \left. \frac{\partial n_1}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \bar{\xi}} \right|_{y=1} = 0, \quad \varphi_1 + \bar{\Phi}_1 \Big|_{y=1} = 0, \\ & \left. \frac{\partial n_1}{\partial x} - \gamma_n n_1 \right|_{x=0, x=\frac{l}{w}} = 0, \quad \left. \frac{\partial p_1}{\partial x} - \gamma_p p_1 \right|_{x=0, x=\frac{l}{w}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0, x=\frac{l}{w}} = 0. \end{aligned}$$

Note, that additional conditions are imposed on the near-boundary functions

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{N}_i(\bar{\xi}) = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{P}_i(\bar{\xi}) = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{N}_i(\bar{\xi}) = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{P}_i(\bar{\xi}) = 0, \\ \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_i(\bar{\xi}) = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_i(\bar{\xi}). \end{aligned}$$

Using considerations similar to [4-9], we find at estimates of the remainder terms of the asymptotic series:

$$R_{\varphi(m)}(x, y, \mu) = O(\mu^{m+1}), \quad R_{n(m)}(x, y, \mu) = O(\mu^{m+1}),$$

$$R_{p(m)}(x, y, \mu) = O(\mu^{m+1}).$$

**4. Conclusion.** The mathematical model of the charge carriers stationary distribution in the electron-hole plasma of semiconductor p-i-n diodes and the methodology for the decomposition of the corresponding nonlinear model problem is proposed. The mathematical model is based on the use of a hydrodynamic model of the dynamics of a two-component plasma and the asymptotic representation of solutions of the

corresponding singularly perturbed model problems for nonlinear systems of differential equations. A preliminary analysis of the results obtained indicates that the proposed approach is promising. In addition to the fact that the classical formulations of the problems of modeling the characteristics of p-i-n-structures are automatically included in the framework of the proposed scheme for finding solutions to the original problem, the presented method allows us to make significant amendments to the solution. This not only increases the level of modeling adequacy, but also provides an understanding of the features of a number of physical processes (diffusion-drift, recombinant) in the near-contact regions of the active region of p-i-n-diodes.

The proposed approach can become a basic tool for studying nonlinear thermal, diffusion-drift, generation-recombination stationary and non-stationary processes occurring in bulk and integral p-i-n-structures under the action of external microwave radiation, and predicting new physical effects in the systems under study.

#### References:

1. Sze S., K. Kwok Physics of Semiconductor Devices. New York: Wiley-Interscience, 2006. 815 p.
2. Koshevaya S., Moroz I., Grimalsky V., Tecpoyolt-Torres M., Escobedo-Alatorre J. Comparison of Volume and Integrated P-I-N Modulators in Millimeter Wave Range. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2005. Vol. 26. № 3. P. 387-408.
3. Bonch-Bruevich V. L., Kalashnikov S. G. Physics of Semiconductors. Moscow: Nauka, 1990. 685 p. (in Russ.)
4. Tikhonov A. N. Systems of differential equations containing small parameters. *Matematicheskii sbornik*. 1952. Vol. 31 (73). № 3. P. 575-586. (in Russ.)
5. Vishik M. I., Lyusternik L. A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. *UMN*. 1957. Vol. 12. № 5. S. 3-122. (in Russ.)
6. Vasilyeva A. B., Butuzov V. F. Asymptotic methods in the theory of singular perturbations. Moscow: Higher. shk., 1990. 208 p. (in Russ.)
7. Bomba A. Ya., Prisyazhnyuk I. M., Prisyazhnyuk O. V. Methods of the theory of steadiness of forecasting processes of heat and mass transfer in porosities and microporous centers. Rivne: O. Zen, 2017. 291 p. (in Ukr.)
8. Bomba A. Ya. About the asymptotic method for the approximate solution of one problem to mass transfer during filtration in a porous middle. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*. 1982. Vol. 34. № 4. P. 37-40. (in Ukr.)
9. Smith D. R. Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.
10. Belyanin M. P. On the asymptotic solution of one model of p-n-transition. *Computational mathematics and mathematical physics*. 1986. Vol. 26. № 2. P. 306-311. (in Russ.)

11. Vasilyeva A. B., Stelmakh V. G. Singularly perturbed systems of the theory of semiconductor devices. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1977. Vol. 17. № 2. P. 339-348. (in Russ.)
12. Pol'skii B. S. Numerical modeling of semiconductor devices. Riga: Zinatne, 1986. 167 p. (in Russ.)

## МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ НОСІІВ ЗАРЯДУ В АКТИВНІЙ ОБЛАСТІ P-I-N-ДІОДІВ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

Запропоновано математичну модель стаціонарного розподілу електронно-діркової плазми в активній області ( $i$ -області)  $p$ - $i$ - $n$ -діодів у дифузійно-дрейфовому наближенні. Модель подається у вигляді нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи рівнянь неперервності електронно-діркових струмів і Пуассона з відповідними граничними умовами. Проведено декомпозицію нелінійної крайової задачі моделювання стаціонарного розподілу носіїв заряду в плазмі  $p$ - $i$ - $n$ -діодів на основі асимптотичного представлення розв'язків. Модельна задача приведена до послідовності лінійних крайових задач із характерним виділенням основних (регулярних) складових асимптотик і примежових поправок. Встановлено, що постановка задачі для знаходження нульового члена регулярної частини асимптотик співпадає із класичною постановкою задачі моделювання характеристик  $p$ - $i$ - $n$ -діодів, яка здійснюється в наближенні амбіполярної дифузії (наближення самоузгодженого поля плазми). Запропонована математична модель і метод її лінеаризації дозволяють виділити у дифузійно-дрейфовому процесі головні складові і дослідити їх роль. Наприклад, з'являється можливість вивчення (у тому числі аналітичними методами) поведінки плазми в зонах  $p$ - $i$ -,  $n$ - $i$ -контактів. Результати дослідження спрямовані на розвиток методів проектування  $p$ - $i$ - $n$ -діодних структур, які використовуються, зокрема, в якості активних елементів комутаторів сигналів надвисокочастотних систем передачі інформації і відповідних захисних пристроїв.

**Ключові слова:** *метод збурень, сингулярно збурені задачі, метод примежового шару, дифузійно-дрейфовий процес, p-i-n-діоди.*

Отримано: 23.10.2021

UDC 004.41;004.424;519.64, 519.87:004.94:621.314](043)  
DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.31-38

**Andriy Verlan**, D. Sc. in Engineering,  
**Jo Sterten**, PhD

Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway

## **DIGITAL CORRECTION FILTER IN PROBLEMS OF RECOVERY OF INPUT SIGNALS AND OBSERVING SYSTEMS' DATA IN ENERGY OBJECTS**

The task of signal recovery is one of the most important for automated diagnostics and control systems of an energy object. When solving the inverse problems of recovering signals, images and other types of data, spectral distortions and losses occur (in some cases, very significant ones). They are primarily stipulated due to ill-posedness of these problems, which is the result of loss of information about the original signal due to strong (and even complete) suppression in the observed signal of a part of spectral components, which become indistinguishable against the background of errors and noise [1]. Besides, additional spectral distortions may occur in the process of solving recovery problems, which depend on specific methods used and their parameters. A method for building a digital correcting filter for processing the results of solving incorrect inverse problems is proposed, which effectively improves the quality of the solution. The method is based on the use of a singular decomposition of the matrix (SVD) of a system of algebraic equations that approximates the integral operator.

**Key words:** *inverse problems, signal recovery, digital filter, SVD decomposition, integral equations.*

**Formulation of the problem.** Methods and means of recovered signals' filtering correction and use of apriori information are intended to improve the quality of the inverse problems' solutions. It should be noted that there are many efficient algorithms for solving inverse problems, the idea of which is to use additional apriori information, for example, information about smoothness, monotonicity, or convexity of the solution [2-4]. However, the problem of ensuring the quality of obtained results remains relevant. Errors in the spectrum of the recovered signal naturally lead to its distortion and to a decrease in the accuracy of recovery. One of the most significant points is that, in the presence of fast change zones (jumps, peaks, etc.) in the original, truncation or sharp limitation of the spectrum leads to appearance of oscillations (Gibbs phenomenon) [5-7], which can have a very significant intensity and cover large areas. Often, these oscillations introduce significant distortions into the recovered signal, which mask important details of the recovered data and can lead to appearance of artifacts. The existing methods of handling the undesirable effects associated with the Gibbs phenomenon can themselves lead to appearance of additional distortions.

Inverse problems in most cases resolve themselves into solving the systems of linear equations. The most time-consuming and complex problems arise precisely at this stage of solution.

Consider the classical inverse problem — the solution of the Fredholm integral equation of the 1st kind:

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \tag{1}$$

where  $K(x, s)$ ,  $f(x)$  are the given functions,  $y(x)$  is the desired solution. We split the segment  $(a, b)$  by a uniform grid  $\{x_i\}_{i=1}^n$ , with a pitch  $h_x$  and pass on to the system:

$$\int_a^b K(x_i, s)y(s)ds = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

**Method description.** To calculate integrals on the left side of the system (2), we use the formula for trapezoids on a uniform grid  $\{s_j\}_{j=1}^m$ , with a pitch  $h_s$ . The performed operations make it possible to obtain the matrix of the operator  $A$ , that approximates the integral operator in equation (1). Thus, the problem of solving the integral equation (1) resolves itself into solving a system of algebraic equations:

$$AY = F. \tag{3}$$

where

$$A_{i,j} = \begin{cases} h_s K(x_i, s_j), & j = 2, 3, \dots, m-1, \\ \frac{h_s}{2} K(x_i, s_j), & j = 1, m, \end{cases} \quad i = \overline{1, n},$$

$$F_i = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad Y_j = y(s_j), \quad j = \overline{1, m}$$

are values of the unknown function at nodes of the splitting.

To solve system (3), we use the SVD (*singular*) decomposition of a matrix, which means that any matrix  $A$  of dimension  $n \times m$  can be represented as:

$$A = U \Sigma V^T, \tag{4}$$

where  $U$  is the orthogonal  $n \times n$  matrix,  $V$  is the orthogonal  $m \times m$  matrix,  $\Sigma$  is the diagonal  $n \times m$  matrix with diagonal elements  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ ,  $p = \min\{n, m\}$ . Schematically, such a decomposition can be represented as (Fig. 1).

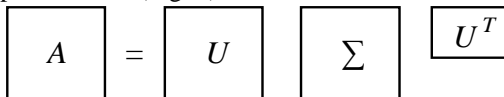


Fig. 1. Matrix decomposition structure



Columns  $U$  (or  $V$  respectively) are called left (right) singular vectors  $A$ , and  $\sigma_i$  — singular numbers. An important property of this decomposition is the fact that  $rank(A) = r$  if and only if when  $\sigma_r > 0, \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$ .

In case  $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_p$  are very small in comparison with  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ , then for computational purposes it is assumed that the rank of the matrix  $A$  is equal to  $r$ , and it is said that  $A$  has an *effective rank*  $r$ . Applying decomposition (4) for system (3), we can obtain the solution sought in the form:

$$Y = V(m, 1:r)\Sigma^+(1:r, 1:r)U^T(1:r, n)F, \quad (5)$$

where  $\Sigma^+$  is a diagonal matrix with diagonal elements  $1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_r$ , or by replacing  $C = \Sigma^+(1:r, 1:r)U^T(1:r, n)F$  we obtain:

$$Y = V_{m \times r} C_{r \times 1}. \quad (6)$$

It can be seen from relation (6) that we are looking for a solution to equation (1) in the so-called SVD basis, the basis functions of which are columns of a matrix  $V_{m \times r}$  with rates from column  $C$ .

**Building a corrective filter.** The next task is to build an optimal filter for suppressing Gibbs phenomena, which can be observed in places where the sought-for function changes rapidly (jumps).

The idea behind filtering is as follows: for the signal decomposed on the basis  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^r$

$$y(x) \approx \sum_{k=1}^r c_k \varphi_k(x), \quad (7)$$

we look for the so-called *sigma factors*  $\sigma(r, k)$  and multiply them by corresponding rates  $c_k$ , i. e.

$$\tilde{y}(x) \approx \sum_{k=1}^r \sigma(r, k) c_k \varphi_k(x), \quad (8)$$

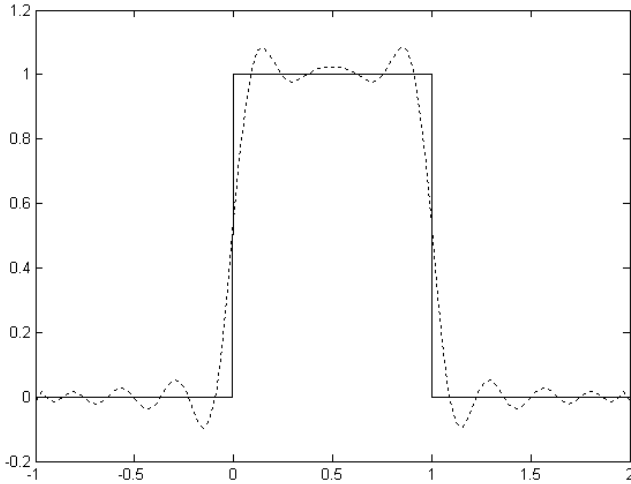
suppressing high-frequency components of the signal in a way that improves the signal shape, reducing oscillations caused by the Gibbs phenomenon.

The Lanczos filter and  $\left(\sigma(r, k) = \frac{\sin(\pi k / r)}{\pi k / r}\right)$  the Fejer filter  $\left(\sigma(r, k) = \frac{r-k}{r}\right)$ , which are widely known, are used for the Fourier's series [8]. To build a filter that is optimal for the SVD basis, let's consider a test case.

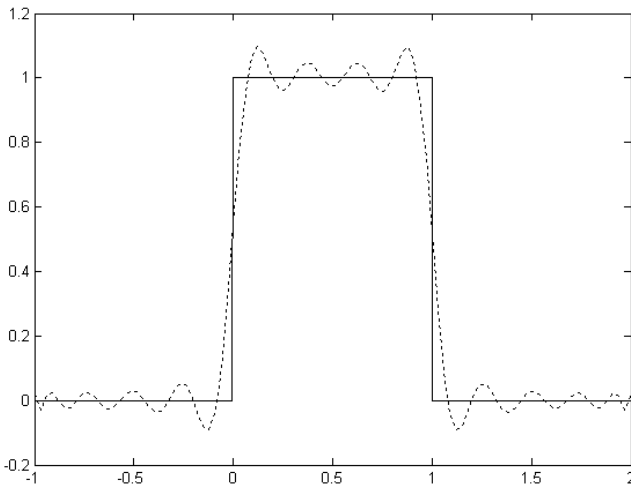
Let in equation (1) be as  $K(x, s) = e^{-5(x-s)^2}$ ,  $a = -1$ ,  $b = 2$ ,  $n = 100$ , and the desired solution have the form:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, 1), \\ 1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

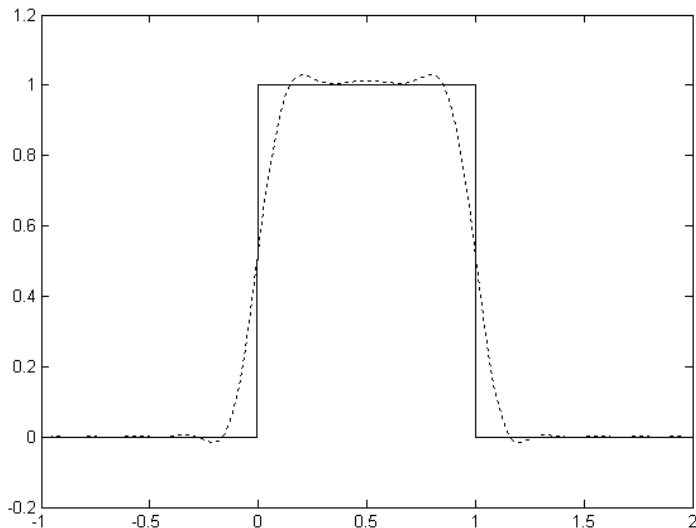
Having found the right side of equation (1), we will numerically recover the original signal (using the Matlab environment software modules). The results of programs can be seen in Fig. 2-4.



**Fig. 2.** Original signal (—), the signal recovered using the Tikhonov regularization method (---)



**Fig. 3.** Original signal (—), the signal recovered using the SVD decomposition without filtering (---)



**Fig. 4.** Original signal (—), the signal recovered using the SVD decomposition with Lanczos filter (---)

As can be seen from Fig. 4, the Lanczos filter enables suppressing the Gibbs phenomena, but the shock front is recovered worse in this case, and it also does not provide reliable information about the jump signal height. We will look for a new filter in the form of the third degree linear function:

$$\sigma(r, k) = a_0 + a_1 \left( \frac{k}{r} \right) + a_2 \left( \frac{k}{r} \right)^2 + a_3 \left( \frac{k}{r} \right)^3. \quad (9)$$

Let's build the functional:

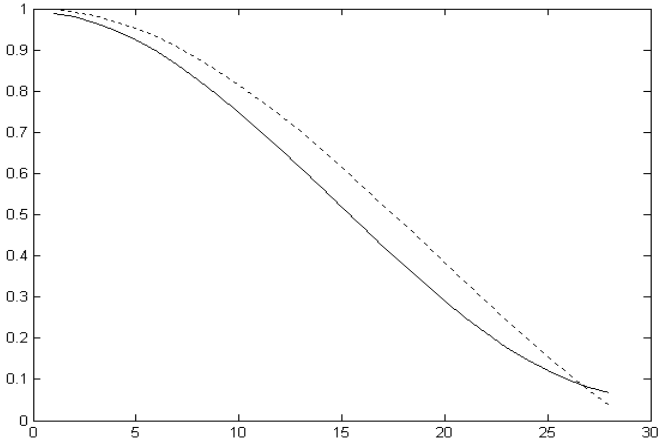
$$W(a) = \sum_{j=1}^{23} \left( y(x_j) - \tilde{y}_a(x_j) \right)^2 + \sum_{j=43}^{58} \left( y(x_j) - \tilde{y}_a(x_j) \right)^2 + \sum_{j=78}^{100} \left( y(x_j) - \tilde{y}_a(x_j) \right)^2. \quad (10)$$

where  $y(x)$  is the original signal,  $\tilde{y}_a(x)$  is the signal recovered using the SVD decomposition and the applied filter,  $a = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ .

To find ratios,  $a_i, i = \overline{0, 3}$  we minimize the functionality (10), this can be done using the *fmincon* function built into the Matlab environment. The results were as follows:

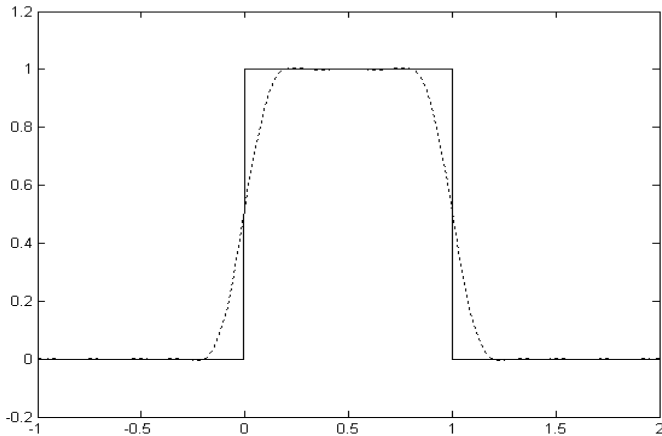
$$a_0 \approx 0.990118; \quad a_1 \approx 0.001268;$$

$$a_2 \approx -0.00329; \quad a_3 \approx 0.000073.$$



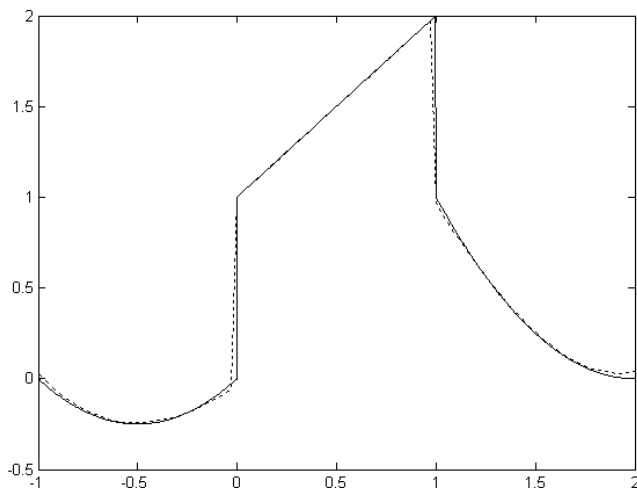
**Fig. 5.** Lanczos filter (---) and the filter built for the test problem (—)

As can be seen from Fig. 5, the filter formed, when compared with the Lanczos one, has better suppressed the Gibbs oscillations, but at the same time the jump front was restored less clearly. Applying the obtained filter for a large number of other problems' examples made it possible to find out that the solution, as in the test example, successfully recovers the original signal at a certain distance from the jump. This fact makes it possible, by finding the maximum derivative of the obtained solution (determining the place of the jump), to finish building the function in the intervals close to the jump, approximating the function on well-recovered intervals. The results of this operation can be seen in Fig. 6.



**Fig. 6.** Original signal (—), the signal recovered by means of the SVD decomposition using the built filter (---)

In this case, the mean-root square error turned out to be 0.01316, which is much less than the errors of the Tikhonov's method (0.972843) and the singular value decomposition method with Lanczos filtering (1.226638), which indicates the efficiency of the built algorithm for such classes of problems. Figure 7 shows the result of solving the problem of this type, which also confirms advantages of the considered method.



**Fig. 7.** Original signal (—), recovered signal (---)

**Conclusions.** A method has been developed to improve the accuracy and quality of recovering an energy object control system' input signals containing sharp jumps; which based on the use of optimized spectral filtering and a priori information. In comparison with widely known methods of filtering by Fejer and Lanczos, the proposed method makes it possible to more accurately recover signals outside the jump zones, as well as to extrapolate them within these zones.

### References:

1. Degl'Innocenti I., Boccardi A., Fanucci L., Wendt M. Analysis of sampling and noise error on the energy measurement of direct digitally acquired pulsed signals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2020. Vol. 984.
2. Hochstadt H. *Integral Equations*. John Wiley & Sons, 2011. 282 p.
3. Verlan A. F., Sizikov V. S. *Integral equations: methods, algorithms, programs*. Kiev: Naukova dumka, 1986. 544 p.
4. Kern M. *Numerical Methods for Inverse Problems*. John Wiley & Sons, 2016. 228 p.
5. Sizikov V. S. *Mathematical methods for processing measurement results*. Saint Petersburg: Polytechnic, 2001. 240 p.

6. Riley K. F., Hobson M. P., Bence S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. Cambridge University Press, 2006.
7. Vogel C. R., Omen M. E. A fast, robust algorithm for total variation based reconstruction of noisy, blurred images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1995.
8. Richard W. Hamming. *Digital Filters*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Courier Corporation, 2013. 296 p.

## **ЦИФРОВИЙ КОРЕКТУЮЧИЙ ФІЛЬТР У ЗАДАЧАХ ВІДНОВЛЕННЯ ВХІДНИХ СИГНАЛІВ І ДАНИХ СИСТЕМ СПОСТЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

Завдання відновлення сигналу є одним з найважливіших для автоматизованих систем діагностики та керування енергетичним об'єктом. При вирішенні зворотних завдань відновлення сигналів, зображень та інших видів даних мають місце спектральні спотворення та втрати (у деяких випадках дуже значні). Вони зумовлені насамперед некоректністю цих завдань, яка є результатом втрат інформації про вихідний сигнал внаслідок сильного (і навіть повного) придушення у спостережуваному сигналі частини спектральних компонентів, які стають нерозрізними на тлі помилок та шумів. Крім того, у процесі вирішення завдань відновлення можуть виникати додаткові спектральні спотворення, які залежать від конкретних методів, що застосовуються, та їх параметрів. Запропоновано метод побудови цифрового коригувального фільтра для обробки результатів розв'язання некоректних обернених задач, що дозволяє ефективно підвищувати якість рішення. Метод заснований на застосуванні сингулярного (SVD) розкладання матриці системи рівнянь алгебри, що апроксимує інтегральний оператор.

**Ключові слова:** *обернені завдання, відновлення сигналів, цифровий фільтр, SVD-розкладання, інтегральні рівняння.*

Отримано: 8.10.2021

УДК 663.033

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.39-49

**О. В. Воробйова**, аспірант,

**К. В. Корнієнко**,

**М. В. Шафаренко**

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут

імені Ігоря Сікорського», м. Київ

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО РІВНЯ ШВИДКОСТІ ПЕРЕМІШУВАННЯ В БІОРЕАКТОРІ**

Із розвитком індустріалізації та зростання населення протягом останніх десятиліть призвели до екологічних порушень у стічних водах (СВ). У статті було зроблено класифікацію та порівняльна характеристика методів очистки СВ. Безпечна та економічно ефективна біологічна очистка є важливим питанням, що необхідно враховувати, особливо для галузей, які повинні знайти фінансово прийнятні методи очищення, щоб відповідати допустимим рівням скидання. Імобілізовані мікроорганізми на носіях мають більшу стійкість до токсичності та низького виходу мулу. З натурального матеріалу інертні носії не потребують складної експериментальної підготовки на більш ранній стадії. Технологію іммобілізованої мікробної деградації використовують переважно через її високу щільність мікроорганізмів, низький вихід мулу, більш стійкі до токсичності та безперервної роботи. Дослідження перемішування в біореакторі із використанням перемішуючих пристроїв є складним завданням через проблему отримання точної інформації про швидкість потоку та тиску, викликаною мішалкою.

Метою дослідження є визначення ефективного рівня швидкості перемішування у вигляді пропелерної трьохлопатевої мішалки для промислових біогазових реакторів. При вирішенні поставлених завдань застосовувались теоретичні розрахунки швидкості перемішування завдяки гідродинамічного розрахунку. Завдяки використанню 3D моделювання пакету програми SolidWorks досліджено ефективність рівня швидкості обертання мішалки за допомогою розподілу векторів швидкості потоків субстрату. Рівень швидкості з числом обертів  $6,3 \text{ c}^{-1}$  для біореактора об'ємом  $10 \text{ м}^3$  показало моделювання, що воно є ефективне. Завдяки комп'ютерному моделюванню є можливість досліджувати ефективність пе-

ремішування субстрату та допомоги при модернізації існуючих промислових очисних споруд.

**Ключові слова:** біореактор, іммобілізація, інертні носії, 3D моделювання, SolidWorks.

**Вступ.** Перед вибором методу очистки стічних вод, потрібно до уваги взяти ступінь виду забруднення, що визначається у відповідності з «Правилами охорони поверхневих вод від забруднення стічними водами» Постановою КМ N 748 (748-2013-п) від 07.08.2013 [1] і розраховується:

- за кількістю завислих речовин;
- за кількістю розчиненого кисню;
- за допустимою величиною біологічної потреби в ньому;
- за температурою водоймища;
- за гранично допустимою концентрацією шкідливих речовин;
- за зміною активної реакції води.

Також за правилами «Правилам охорони поверхневих вод від забруднення стічними водами» (№ 748 (748-2013-п) від 07.08.2013) [1].

Виробничі стічні води при скиданні їх у водовідвідну мережу не повинні:

- перевищувати витрати стічних вод і вміст завислих, спливаючих речовин, установлених для конкретного промислового підприємства;
- порушувати роботу мереж і споруд;
- містити речовини, які здатні засмічувати труби водовідвідних мереж або відкладатися на стінках труб (окалина, вапно, пісок, гіпс, металева стружка, та інші);
- виявляти руйнівну дію на матеріал труб і елементи очисних споруд;
- містити горючі домішки і розчинені газоподібні речовини, здатні утворювати вибухонебезпечні суміші у водовідвідних мережах і очисних спорудах;
- містити шкідливі речовини в концентраціях, що перешкоджають біологічному очищенню СВ або скиданню їх у водойму (з урахуванням ефективності очищення);
- мати температуру вище 40°C;
- мати рН за межами 6,5-9;
- містити небезпечні бактеріальні забруднюючі речовини;
- мати ХПК, що перевищує БПК<sub>повн</sub> більш ніж у 1,5 рази.

Стічні води, які не задовольняють зазначеним вимогам, повинні підлягати очищенню за такими методами (рис. 1).



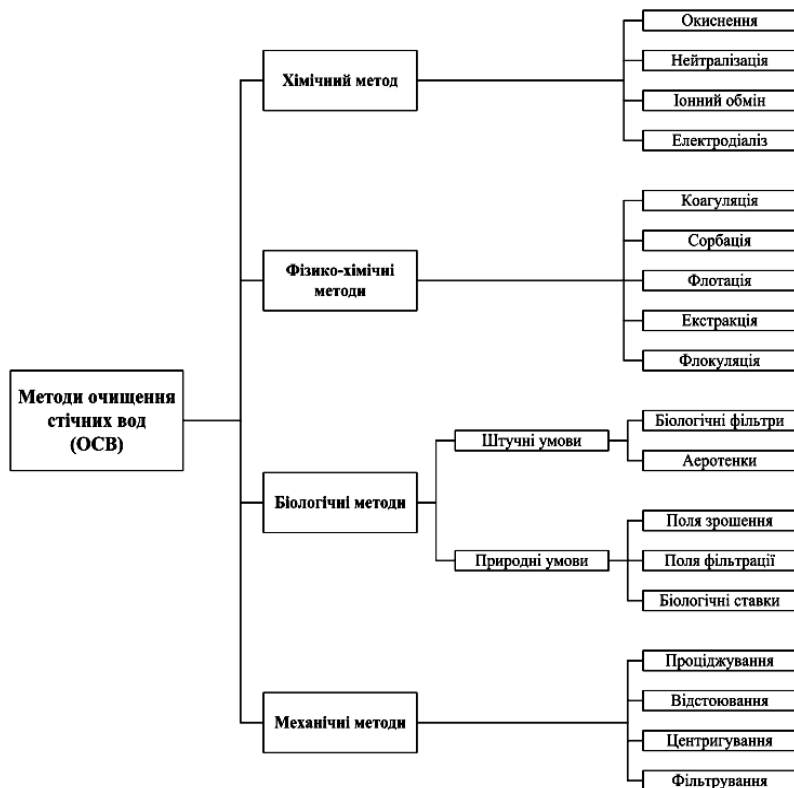


Рис. 1. Класифікація методів очищення СВ

У кожного із методів очистки СВ є свої переваги та недоліки які можна представити у порівняльній таблиці 1.

Таблиця 1

Порівняльна характеристика методів очистки СВ [2-6]

№	Методи	Характеристика переваг та недоліків
1	Механічний	Очищення можна видалити із СВ нерозчинні мінеральні та органічні сполуки, суттєво знизивши їх концентрацію (залежно від виду стоків вдається «затримати» 65-95% нерозчинних забруднень). Механічні методи очищення СВ: фільтрація, відстоювання, гідроциклонування тощо. Недоліки таких підходів — слабкий вплив на відхилення показників якості води, які викликані розчинними забруднювачами (корегування рН, зміна сольового складу) та наявність елементів, які забиваються і потребують відновлення властивостей (фільтри)

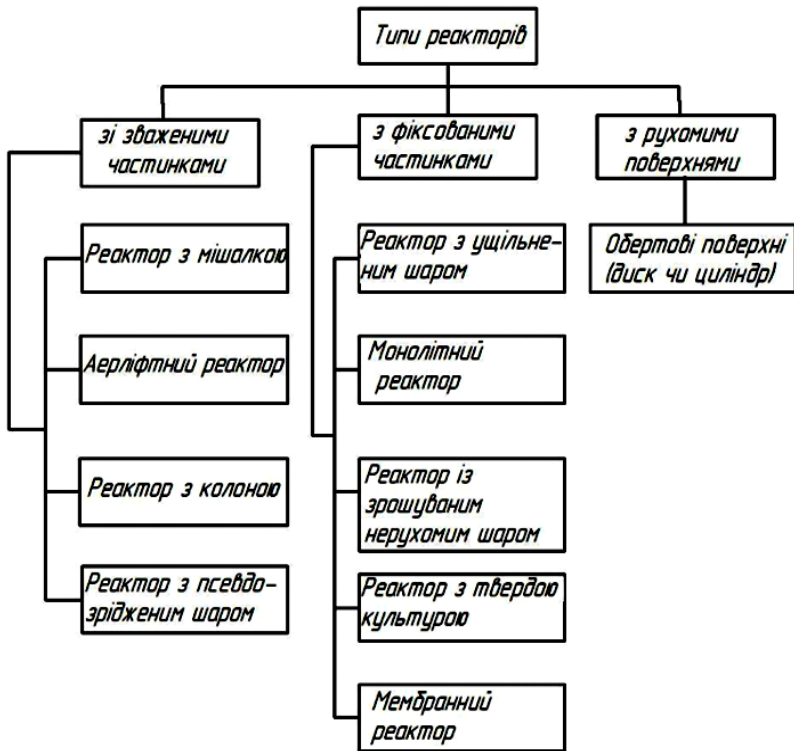
## Продовження таблиці 1

2	Фізико-хімічний	Інтенсивніші та ефективніші, ніж механічні, і використовуються для видалення тонкодисперсних, розчинених неорганічних і органічних речовин. Найбільш поширені сучасні методи очищення СВ, що відносяться до даної категорії: електрокоагуляція, електроліз, окислення, флокуляція, іонообмінний метод, коагуляція, сорбція. Висока ефективність — безперечну перевагу фізико-хімічних методів. Проте у таких підходів існують і недоліки: наприклад, великі енерговитрати (електроліз), висока вартість (флокуляція, сорбція) тощо.
3	Хімічний	Суть хімічних методів: у СВ додаються реагенти, які вступають у реакцію з різними видами забруднень утворюючи осад. До недоліків такого очищення можна віднести: висока вартість реагентів, погіршення якості очищеної води (вторинне забруднення) та накопичення небезпечних продуктів реакцій забруднювачів та реагентів
4	Біологічний	При використанні біологічного методу відбувається за рахунок бактерій, що здійснюють біологічне окислення. Хоча такі методи є ефективним для видалення органічних забруднювачів, однак, для підвищення їх інтенсивності потрібні значні енергозатрати при відносно низькому впливові на неорганічні забруднювачі. Проте його переваги перевищують недоліки, а саме: <ul style="list-style-type: none"> <li>• можливість видалення зі СВ широкого спектра органічних забруднень;</li> <li>• самопідлаштування системи до зміни спектру і концентрацій органічних забруднень;</li> <li>• простота апаратурного оформлення;</li> <li>• відносно невисокі експлуатаційні витрати</li> </ul>

Враховуючи порівняльну характеристику більш детально розглянемо біологічний метод очистки СВ. Перевагами біологічного методу очищення є:

- повне аеробне біологічне очищення побутових і промислових стоків, при виконанні всіх технологічних вимог, здатна забезпечити видалення близько 90 відсотків органічних забруднень, що містяться у воді.
- біофільтри не втрачають ефективність при підвищенні концентрації забруднюючих речовин у рідині, крім того, втрачає актуальність питання утилізації зайвої кількості активного мулу.
- у разі анаеробного очищення — зменшення витрат на устаткування і супутніх експлуатаційних витрат, так як не потрібна штучна аерація води [7, 8].

**Аналіз останніх досліджень.** Біореактори можуть працювати в періодичному режимі, періодичному режимі з доливом субстрату, напівперіодичному та безперервному проточному режимах.

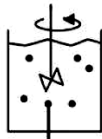


*Рис. 2. Типи реакторів [9]*

Технологія іммобілізованої мікробної деградації використовують переважно через її високу щільність мікроорганізмів, низький вихід мулу, більш стійкі до токсичності та безперервної роботи. Завдяки іммобілізації мікроорганізми фіксуються на носії для підтримки високої щільності та біологічно активної функції, а також абсорбуючись та розкладаючи органічні речовини сполуки у воді за відповідних умов [10]. Технологія іммобілізованої мікробної деградації також має переваги у збереженні домінуючих бактерій з високою ефективністю обробки, великою кількістю біомаси, стабільною роботою, легким розділенням твердих речовин і рідини, низькою ціною тощо, що має велике значення для дослідження при очищенні органічних СВ.

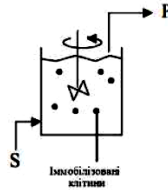
Основні види біореакторів з іммобілізованими клітинами (рис. 3).

**Бioreктори з рухомим шаром іммобілізованих клітин**



Іммобілізовані клітини

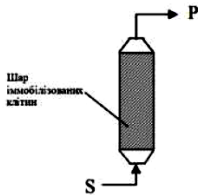
Періодичної дії



Іммобілізовані клітини

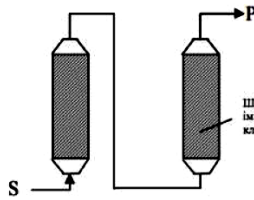
Проточний з перемішуванням

**Бioreктори з нерухомим шаром іммобілізованих клітин**



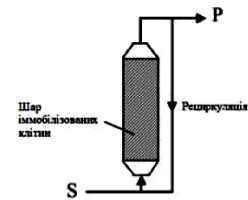
Шар іммобілізованих клітин

З нерухомим шаром (проточний)



Шар іммобілізованих клітин

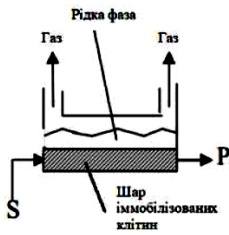
Серія реакторів із нерухомим шаром



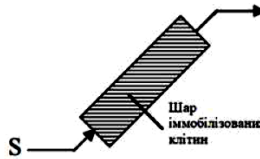
Шар іммобілізованих клітин

Резервуар

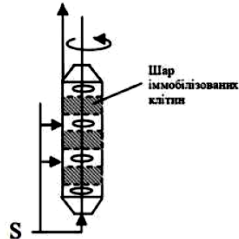
З рециклом



Горизонтальний із нерухомим шаром

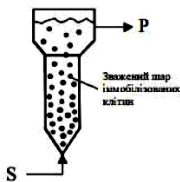


Похилий



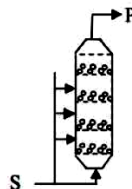
Секційний з нерухомим шаром

**Бioreктори з зваженим шаром іммобілізованих клітин**



Зважений шар іммобілізованих клітин

Проточний із зваженим шаром



Секційний проточний із зваженим шаром

*Рис. 3. Типи біореакторів з іммобілізованими клітинами*

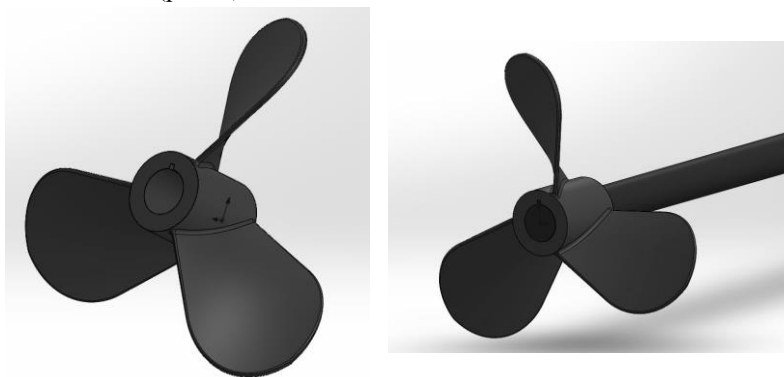
Хоча для кожного методу іммобілізації клітин є великий вибір різних типів реакторів, для оптимальної продуктивності необхідно ретельного

узгодити спосіб іммобілізації та конфігурації біореактора. Також потрібно узгодити конструкцію агрегату клітин та вибір умов в біореакторі.

Для ідеальної технології іммобілізованих мікроорганізмів вибір іммобілізованого носія є найважливішим особливо для створення високоефективного іммобілізованого реактора та високоефективних та інтенсивних і стійких мікроорганізмів. Важливо знайти іммобілізовані носії зі стабільною продуктивністю, хорошим масопередачею, високою інтенсивністю, тривалим терміном служби та низькою ціною [11]. До поширених носіїв для іммобілізації належать натуральні матеріали та синтезовані матеріали. Безсумнівно, що перший має переваги нижчої вартості, легко отримати та не потребує складної експериментальної підготовки на більш ранній стадії, що може бути широко використано у виробництві [12].

Дослідження перемішування в біореакторі із використанням перемішувачів пристроїв є складним завданням через проблему отримання точної інформації про швидкість потоку та тиску, викликану мішалкою. Метою роботи є дослідження ефективного рівня швидкості перемішування завдяки пропелерній трьохлопатевої мішалки для промислових біологічних реакторів об'ємом  $10 \text{ м}^3$ .

**Матеріал та результати дослідження.** Для більш ефективного перемішування в біореакторах з іммобілізованими на інертних носіях мікроорганізмів була досліджена в програмі SolidWorks пропелерна трьохлопатева мішалка розміром  $0,6 \text{ м}$  [14, с. 718-725], що забезпечує осові потоки (рис. 4).



*Рис. 4. Конструкція мішалки в програмі SolidWorks*

Перед проведенням 3D моделювання у програмі необхідно зробити гідродинамічний розрахунок. Процес утворення біогазу відбувається в суспензії стічної води і інертного носія з біомасою. Спочатку розраховуємо критерії Архімеда [13]:

$$Ar = \frac{gd_n^3}{\nu_c^2} \cdot \frac{\rho_n - \rho_c}{\rho_c},$$

де  $d_n$  — діаметр частинки інертного носія з біомасою;  
 $\nu_c = 0,705 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  — коефіцієнт кінематичної в'язкості СВ при температурі  $37^\circ \text{С}$ .  $\rho_n$  — густина частинки інертного носія з біомасою;  $\rho_c = 993,2 \text{ кг/м}^3$  — густина СВ при температурі  $37^\circ \text{С}$ .

Умова утворення суспензії [13]:

$$S = \frac{n_0 d_M^2 \rho}{\mu} = 6,6 Ar \left( \frac{d_n}{d_M} \right)^{0,5} \frac{D}{d_M},$$

де  $n_0$  — розрахункове число обертів перемішуючого пристрою;  
 $d_M$  — діаметр перемішуючого пристрою;  $D$  — внутрішній діаметр біореактора;  $\rho$  — густина суспензії;  $\mu$  — коефіцієнт динамічної в'язкості суспензії

Тоді знаходимо розрахункове число обертів перемішуючого пристрою:

$$n_0 = \frac{S \mu}{d_M^2 \rho}.$$

Приймаємо стандартне число обертів ( $6,3 \text{ с}^{-1}$ ) пропелерної мішалки та проводимо комп'ютерне 3D моделювання в SolidWorks. Задаємо параметри обертутрилопатевої мішалки, напрямку руху лопатей та область в якій буде проводитись розрахунок перемішування води (рис. 5).

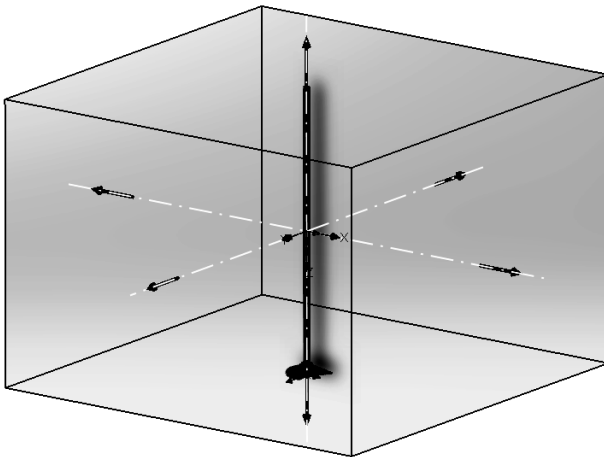
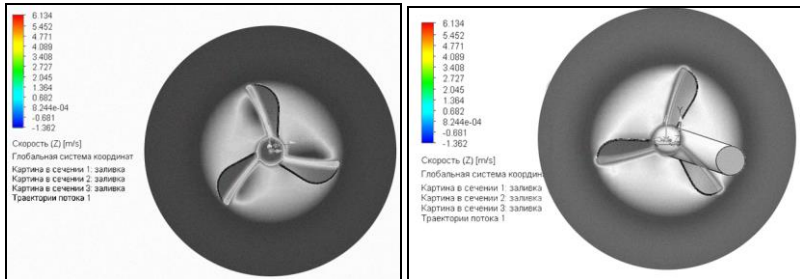
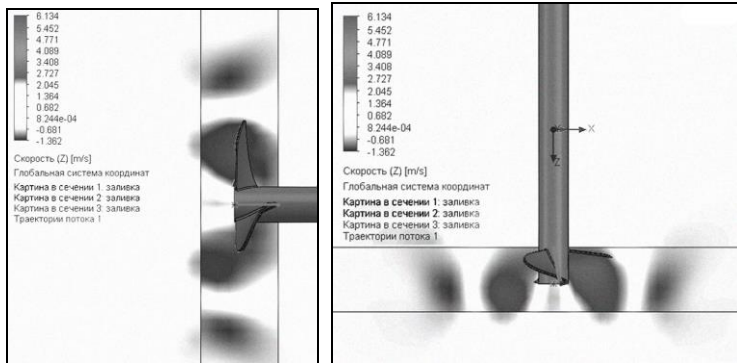


Рис. 5. Визначена область моделювання

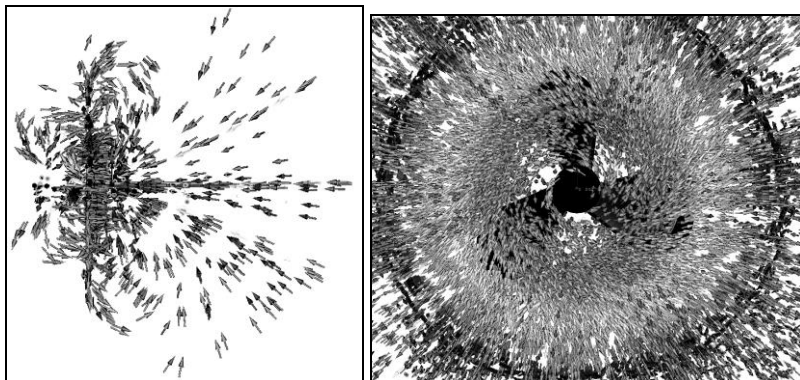
Задавши параметри та швидкість мішалки, проводимо моделювання швидкості тиску суспензії (рис. 6) та траєкторії потоку суспензії (рис. 7-8).



**Рис. 6.** Переріз швидкості тиску суспензії та напрямок частинок (вид спереду)



**Рис. 7.** Переріз швидкості тиску суспензії та напрямок частинок (вид зверху та праворуч)



**Рис. 8.** Траєкторія потоку

Завдяки комп'ютерному моделюванню в пакеті програми SolidWorks можна стверджувати, що змодельована швидкість перемішування є достатньою в промислових біореакторах завдяки пропелерної трюхлопатевої мішалки.

**Висновки.** Сформовано класифікацію та порівняльну характеристику методів очистки стічної води. Біологічна очистка води є безпечною та економічно ефективною. Мікроорганізми, що закріплені на інертних носіях мають більшу стійкість до токсичних речовин, тому використання їх є перспективним в очисних спорудах. Перемішування в біореакторі із використанням перемішувачів є складним завданням через проблему отримання точної інформації про траєкторію руху потоку, тиску суспензії, через швидкість перемішування та напрямок інертних частинок, щоб вони не осідали на дні реактора. Запропоновано методику дослідження ефективності рівня швидкості перемішування в біореакторі завдяки пропелерної трюхлопатевої мішалки, яка може бути застосована для модернізації конструкції та перевірки перемішування субстрату в повному об'ємі реактора. Перед моделюванням було проведено теоретичні розрахунки швидкості обертання перемішувача, враховуючи умову утворення суспензії. В результаті 3D моделювання в SolidWorks було отримано траєкторії потоку, швидкості, тиску суспензії та напрямки частинок.

### Список використаних джерел:

1. Правила охорони поверхневих вод від забруднення зворотними водами. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/465-99-%D0%BF#Text>.
2. Штепа В. М. Обґрунтування алгоритму експериментально-аналітичних досліджень режимів електротехнічної очистки стічних вод агропромислових об'єктів з метою побудови енергоефективних систем управління. *Енергетика і автоматика*. 2012. № 1 (11). URL: [http://nbuv.gov.ua/jpdf/eia\\_2014\\_2\\_10.pdf](http://nbuv.gov.ua/jpdf/eia_2014_2_10.pdf).
3. Запольський А. К. Фізико-хімічні технології очищення стічних вод. Київ: Вища школа, 2005. 671 с.
4. Мазоренко Д. І., Цапко В. Г., Гончаров Ф. І. Інженерна екологія сільськогосподарського виробництва. Київ: Знання, 2006. 376 с.
5. Экологическая биотехнология. Пер. с англ. / под ред. К. Ф. Форстера, Д. А. Дж. Вейза. Ленинград: Химия, 1990. Пер. изд.: Великобритания, 1987. 384 с.: ил. ISBN 5-7245-0418-9
6. Яковлев С. В., Скирдов И. В., Швецов В. Н. Биологическая очистка сточных вод: Процессы, аппараты и сооружения. 1985. 208 с.
7. Хижняк О. О. Проблема знезаражування природної води. *Наукові вісті*. 2007. № 5. С. 129-135.
8. Проблеми комплексного керування міським середовищем. Львів, 2005. 212 с.
9. Мельник В. М., Ружинська Л. І., Воробйова О. В. Аналіз існуючих біореакторів з іммобілізованими мікроорганізмами. *Комунальне господарство міст*. 2019. № 3 (149). С. 51-57. DOI 10.33042/2522-1809-2019-3-149-51-57. URL: <https://khg.kname.edu.ua/index.php/khg/issue/view/118>.



10. Rao J. R., Viraraghavan T. Biosorption of phenol from an aqueous solution by *Aspergillus niger* biomass. *Bioresource Technology*. 2002. Vol. 85 (2). P. 165-171. DOI: 10.1016/S0960-8524(02)00079-2.
11. Vázquez G., Alonso R., Freire S., González-Álvarez J., Antorrena G. Uptake of phenol from aqueous solutions by adsorption in a *Pinus pinaster* bark packed bed. *Journal of Hazardous Materials*. 2006. Vol. 133 (1-3). P. 61-67. DOI: 10.1016/j.jhazmat.2004.12.041.
12. Shen J., Duvnjak Z. Adsorption isotherms for cupric and cadmium ions on corn cob particles. *Separation Science and Technology*. 2005. Vol. 40 (7). P. 1461-1481. DOI: 10.1081/SS-200053319.
13. Касаткин А. Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. Москва: Химия, 1973. 754 с.
14. Лащинский А. А., Толчинский А. Р. Основы конструирования и расчета химической аппаратуры: Справочник. 2-е изд. Ленинград: Машиностроение, 1970. 752 с.

### STUDY OF THE EFFECTIVE LEVEL OF STIRRING SPEED IN A BIOREACTOR

With the development of industrialization and population growth in recent decades have led to environmental disruptions in wastewater. The classification and comparative characteristics of wastewater treatment methods were made in the article. Safe and cost-effective biological treatment is an important issue to consider, especially for industries that need to find cost-effective treatment methods to meet acceptable discharge levels. Immobilized microorganisms on carriers have greater resistance to toxicity and low sludge yield. Made of natural material, inert carriers do not require complex experimental preparation at an earlier stage. The technology of immobilized microbial degradation is used mainly due to its high density of microorganisms, low sludge yield, more resistant to toxicity and continuous operation. The study of mixing in a bioreactor using mixing devices is a difficult task due to the problem of obtaining accurate information about the flow rate and pressure caused by the stirrer.

The aim of the study is to determine the effective level of mixing speed in the form of a three-bladed propeller stirrer for industrial biogas reactors. Theoretical calculations of the mixing speed due to hydrodynamic calculation were used in solving the tasks. Using 3D modeling of the SolidWorks package, the efficiency of the stirrer speed level was investigated by distributing the velocity vectors of the substrate flows. The speed level with a speed of  $6.3 \text{ s}^{-1}$  for a bioreactor with a volume of  $10 \text{ m}^3$  showed that the simulation is effective. Computer simulations make it possible to investigate the mixing efficiency of the substrate and to help with the modernization of existing industrial treatment plants.

**Key words:** *bioreactor, immobilization, inert carriers, 3D modeling, SolidWorks.*

Отримано: 29.10.2021

УДК 519.87

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.50-58

А. В. Гончаров\*, канд. техн. наук,

С. О. Могілей\*\*, аспірант

\*Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси,

\*\*Східноєвропейський університет імені Рауфа Аблязова, м. Черкаси

## МЕТОДИ РЕАЛІЗАЦІЇ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ БІЗНЕС-МОДЕЛЕЙ МУЛЬТИМОДАЛЬНИХ ТРАНСПОРТНИХ ПІДПРИЄМСТВ

В умовах глобалізації світової економіки все більш гостро постає проблема якісного транспортного забезпечення підприємницької діяльності. В першу чергу це актуально для великих бізнес-структур, транснаціональних корпорацій та інших суб'єктів господарювання національного та міжнародного масштабу. При цьому процес реалізації логістичних перевезень обов'язково передбачатиме використання багатьох видів транспорту. Особливий науково-практичний інтерес в цьому контексті представляють мультимодальні транспортні перевезення, — тобто, такі перевезення, які передбачають одночасне (паралельне) використання кількох засобів доставки вантажів.

Крім того, в дослідженні велику увагу приділено критеріям оптимізації мультимодальних транспортних перевезень — це, в свою чергу, дає змогу сформулювати досліджувану задачу (модель) як багатокритеріальну задачу оптимізації. Розглянуто ряд відомих методів реалізації такої задачі та окреслено основні особливості їх застосування. Також розкрито питання використання спеціальних програмних засобів для реалізації наведеної бізнес-моделі.

При постановці задачі дослідження бізнес-модель сконструйована максимально універсально — таким чином, щоб результати досліджень можна було поширити на увесь клас аналогічних моделей без внесення суттєвих змін в алгоритм їх реалізації.

Тому об'єктом даного дослідження є бізнес-модель мультимодального транспортного підприємства, а предметом — методи реалізації такої моделі. Мета дослідження полягає у вивченні різноманітних підходів до розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації та аналізі особливостей їх застосування до реалізації прикладних моделей транспортної логістики. В роботі визначено найбільш оптимальний з запропонованих методів та наведено його алгоритм для розв'язання двокритеріальної мультимодальної транспортної задачі. Для демонстрації роботи алгоритму використано як реальні, так і модельні дані.

**Ключові слова:** *бізнес-модель, мультимодальна транспортна задача, багатокритеріальна оптимізація, транспортне підприємство.*

**Вступ.** Останнім часом як в теоретичній науці, так і у господарській практиці доволі популярним методом дослідження став процесний підхід, який полягає у створенні і аналізі бізнес-моделі та бізнес-процесів того чи іншого підприємства з метою підвищення ефективності його роботи [1]. Такий підхід особливо поширений в торговельній [2], а також транспортній галузях. Стосовно останньої можна говорити про наявність досліджень в сферах автотранспорту [3], судноплавства [4] та авіації [5].

Втім, відносно транспорту більш цікавими є насамперед комплексні дослідження підприємств цієї галузі. Зокрема, таких суб'єктів господарської діяльності, які в своїй роботі послуговуються кількома видами транспорту, — або мультимодальних транспортних підприємств.

Приклад бізнес-моделі мультимодального транспортного підприємства наведено в [6]. Дана модель передбачає наявність трьох засобів доставки вантажів — автомобільного, залізничного та річкового (внутрішнього водного). В основі такої бізнес-моделі лежить мультимодальна транспортна задача, яка полягає у визначенні оптимального плану мультимодальних перевезень вантажів з пунктів відправки до пунктів доставки. Головною особливістю задачі є наявність в її постановці кількох цільових функцій мінімізації (собівартості та ризику перевезень). Тобто, дана мультимодальна транспортна задача відноситься до багатокритеріальних задач оптимізації.

Алгоритми побудови опорних планів такої задачі за кожним з критеріїв оптимізації є відомими [6-8] і в межах даного дослідження окремо обговорюватися не будуть. Достатньо припустити, що такі оптимальні опорні плани отримано для кожної цільової функції, — і залишається розв'язати саме задачу багатокритеріальної оптимізації. Результатом реалізації такої задачі буде опорний план транспортних перевезень, оптимальний для всіх оптимізаційних критеріїв.

Щодо вибору конкретного методу багатокритеріальної оптимізації, то в дослідженні [6] було запропоновано використати для реалізації даної задачі метод зважених сум. Проте, варто зазначити, що подібні методи (ті, які використовують згортку цільових функцій) часто піддаються критиці [9], а тому провідним методом даного дослідження обрано метод послідовних поступок [10].

Програмними засобами реалізації досліджуваної бізнес-моделі можуть бути такі відомі прикладні математичні пакети як MS Excel, Mathcad та Matlab [8]. Крім того, деякі вчені пропонують використовувати механізм web-сервісів, в тому числі і власної розробки [11, 12].

**Постановка задачі.** Оскільки задача умовної оптимізації може бути зведена до задачі безумовної оптимізації, то в постановці даної задачі не буде враховуватися множина обмежень. Критеріями опти-

мізації задачі визначено цільові функції мінімізації собівартості та ризику мультимодальних транспортних перевезень:

$$\begin{cases} S = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}x_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m,n} b_{ij}y_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij}z_{ij} \rightarrow \min, \\ R = \sum_{i,j=1}^{m,n} f_{ij}x_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m,n} g_{ij}y_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m,n} h_{ij}z_{ij} \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1)$$

де  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$  —  $n$  пунктів відправки та  $m$  пунктів доставки;  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$  — кількість одиниць товару, що перевозиться з  $i$ -го пункту відправки до  $j$ -го пункту доставки відповідно автомобільним, залізничним та водним транспортом;  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  — вартість перевезення одиниці товару з  $i$ -го пункту відправки до  $j$ -го пункту доставки відповідно автомобільним, залізничним та водним транспортом;  $f_{ij}, g_{ij}, h_{ij}$  — ризик аварії при перевезенні вантажу з  $i$ -го пункту відправки до  $j$ -го пункту доставки відповідно автомобільним, залізничним та водним транспортом;  $S, R$  — функції собівартості та ризику відповідно.

Як було зазначено вище, оптимальні опорні плани за критеріями мінімізації (1) вважатимемо відомими:

$$\begin{cases} T_S = (t_{ij}^S), \\ T_R = (t_{ij}^R), \end{cases} \quad (2)$$

де  $T_S, T_R$  — матриці оптимальних опорних планів за критеріями собівартості та ризику відповідно, а  $t_{ij}^S, t_{ij}^R$  — відповідно елементи цих матриць.

Позначимо матрицю шуканого оптимального плану через  $T = (t_{ij})$  і визначимо метод її відшукування.

Очевидно, план  $T$  є «компромісним» відносно планів виду (2). В [6] до його відшукування застосовано метод зважених сум, згідно якого необхідно мінімізувати наступну функцію  $F$ :

$$F = w_S \cdot S + w_R \cdot R \rightarrow \min, \quad (3)$$

де  $w_S, w_R$  — вагові коефіцієнти (додатні) відповідних цільових функцій, причому  $w_S + w_R = 1$ .

Також вираз (3) можна подати в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} T &= K_S \otimes T_S + K_R \otimes T_R \rightarrow \min; \\ t_{ij} &= k_{ij}^S \cdot t_{ij}^S + k_{ij}^R \cdot t_{ij}^R, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $K_S, K_R$  — матриці вагових коефіцієнтів (додатних) відповідних опорних планів, причому  $K_S + K_R = k_{ij}^S + k_{ij}^R = 1$  (по відповідних елементах).

Проблема виникає в інтерпретації правих частин виразів (3) і (4). Її сутність полягає в тому, що собівартість вимірюється в грошових одиницях, а рівень ризику — в умовних. Тому важко в коректний спосіб встановити розмірність, наприклад, функції  $F$ . Для усунення даної суперечності необхідно додатково нормувати показники собівартості та ризику, чого в межах даного дослідження виконано не буде. Натомість, варто шукати інші методи багатокритеріальної оптимізації, алгоритми яких уникають побудови згортки цільових функцій. Одним з таких методів є метод послідовних поступок.

### **Реалізація задачі за допомогою методу послідовних поступок.**

Даний метод полягає у визначенні основного критерію оптимізації та поступовому «віддаленні» значення відповідної цільової функції від оптимального [10]. Визначивши в якості основного критерій мінімізації цільової функції собівартості  $S$ , наведемо алгоритм методу послідовних поступок для задачі (1):

1. Порівнюємо відповідні елементи матриць  $T_S, T_R$ . Фіксуємо ті елементи, що співпадають між собою, та в подальшому залишаємо їх без змін.

Щодо тих елементів, які між собою не співпадають, можливо два випадки:

- 1) якщо  $t_{ij}^S > t_{ij}^R$ , то  $t_{ij}^S > t_{ij} > t_{ij}^R$ ;
- 2) якщо  $t_{ij}^S < t_{ij}^R$ , то  $t_{ij}^S < t_{ij} < t_{ij}^R$ .

2. Позначимо через  $\Delta < \min |t_{ij}^S - t_{ij}^R|$  величину (крок) поступки, яку будемо послідовно застосовувати до основного опорного плану (оптимального за критерієм  $S$ ). Тоді перша послідовна поступка буде:

- 1) якщо  $t_{ij}^S > t_{ij}^R$ , то  $t_{ij}^S := t_{ij}^S - \Delta$ ;
- 2) якщо  $t_{ij}^S < t_{ij}^R$ , то  $t_{ij}^S := t_{ij}^S + \Delta$ .

3. Зазначимо, що змінюваний елемент  $t_{ij}^S$  можна обирати довільно. Проте, оскільки він знаходиться на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпчика, то суми елементів цих рядка та стовпчика з урахуванням поступок повинні залишатися незмінними. Отже, якщо змінюваний елемент  $t_{ij}^S$ , наприклад, збільшити на величину поступки  $\Delta$ , то принаймні один елемент як  $i$ -го рядка, так і  $j$ -го стовпчика треба зменшити на  $\Delta$ . Тобто, змі-

на одного елемента опорного плану приведе до утворення скінченної кількості нових опорних планів, серед яких необхідно обрати оптимальний за основним критерієм оптимізації. Тому, після отримання множини нових опорних планів, переходимо до наступного пункту.

4. Знаходимо новий оптимальний опорний план, обчисливши значення цільових функцій  $S$  та  $R$ . Якщо вони є задовільними з точки зору ОНР (особи, яка приймає рішення), то пункт 2 виконується ще раз, — допоки величина поступок не призведе до незадовільного значення принаймні одного з критеріїв оптимізації.

Остання задовільна поступка стосовно опорного плану  $T_S$  і є розв'язком задачі (1). Тобто, на цій ітерації  $T_S = T$ .

Більш детально продемонструємо роботу даного алгоритму на прикладі.

**Приклад реалізації поставленої задачі.** Для прикладу використаємо дані, отримані в дослідженні [6]. Так, матриці (2) будуть дорівнювати:

$$T_S = \begin{pmatrix} 0 & 400 & 80 \\ 320 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix}, T_R = \begin{pmatrix} 320 & 0 & 160 \\ 0 & 200 & 220 \\ 0 & 300 & 0 \end{pmatrix}.$$

Також наведемо значення так званих матриць Штейнера [6, 7]:

$$St_S = \begin{pmatrix} 372.02 & 230 & 38 \\ 331.36 & 223.6 & 76 \\ 404.32 & 296.4 & 88.16 \end{pmatrix}, St_R = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.06 & 0.02 \\ 0.05 & 0.03 & 0.05 \\ 0.05 & 0.04 & 0.08 \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що справедливі наступні рівності [6]:

$$\begin{aligned} S_{\min} &= St_S \times T_S; \\ R_{\min} &= St_R \times T_R. \end{aligned} \tag{5}$$

Результат відношення виду  $A \times B$ , де  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  є матрицями однакової розмірності, є скаляром та має вигляд:

$$A \times B = (a_{ij}) \times (b_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} b_{ij}. \tag{6}$$

Застосуємо наведений вище алгоритм методу послідовних поступок:

1. При порівнянні відповідних елементів матриць  $T_S, T_R$  робимо висновок, що всі вони різні, крім  $t_{31} = 0$ .
2. Припустимо, що  $\Delta = 1$ . Змінюваним елементом буде  $t_{11}$ .

Оскільки  $t_{11}^S < t_{11}^R$ , то  $t_{11}^S := t_{11}^S + \Delta$ . Тобто,  $t_{11}^S := 1$ .

3. Така поступка породжує множину нових опорних планів  $T_S$  :

$$T_S^1 = \begin{pmatrix} 1 & 400 & 79 \\ 319 & 100 & 1 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix};$$

$$T_S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 399 & 80 \\ 319 & 100 & 1 \\ 0 & 1 & 299 \end{pmatrix};$$

$$T_S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 399 & 80 \\ 319 & 101 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix}.$$

Насправді, цих планів набагато більше — тут наведені матриці лише тих з них, в яких кожен з елементів змінився на величину, не більшу за  $\Delta$ . Так, наприклад, можливим є опорний план, в якому другий рядок матиме вигляд (319 99 2), проте, в такому випадку елемент  $t_{23}$  зміниться на  $2 > \Delta$ . Для більш якісної демонстрації ці випадки розглядатися не будуть.

4. Згідно (5) обчислимо:

$$S_{\min}^1 = St_S \times T_S^1 = \begin{pmatrix} 372.02 & 230 & 38 \\ 331.36 & 223.6 & 76 \\ 404.32 & 296.4 & 88.16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 400 & 79 \\ 319 & 100 & 1 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix} = 249961.9;$$

$$S_{\min}^2 = St_S \times T_S^2 = \begin{pmatrix} 372.02 & 230 & 38 \\ 331.36 & 223.6 & 76 \\ 404.32 & 296.4 & 88.16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 399 & 80 \\ 319 & 100 & 1 \\ 0 & 1 & 299 \end{pmatrix} = 249978.1;$$

$$S_{\min}^3 = St_S \times T_S^3 = \begin{pmatrix} 372.02 & 230 & 38 \\ 331.36 & 223.6 & 76 \\ 404.32 & 296.4 & 88.16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 399 & 80 \\ 319 & 101 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix} = 249917.5.$$

Для контролю: згідно даних [6], значення  $S_{\min} = 249829.2$ .

Отже, новим оптимальним планом є  $T_S^3$ . Обчислимо для нього сумарний рівень ризику:

$$R_{\min}^3 = St_R \times T_S^3 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.06 & 0.02 \\ 0.05 & 0.03 & 0.05 \\ 0.05 & 0.04 & 0.08 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 399 & 80 \\ 319 & 101 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix} = 68.53.$$

При цьому оптимальний рівень ризику за відповідним критерієм оптимізації складає:

$$R_{\min} = St_R \times T_R = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.06 & 0.02 \\ 0.05 & 0.03 & 0.05 \\ 0.05 & 0.04 & 0.08 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 320 & 0 & 160 \\ 0 & 200 & 220 \\ 0 & 300 & 0 \end{pmatrix} = 35.4.$$

Таким чином, при збільшенні собівартості перевезень на  $249917.5 - 249829.2 = 88.3$  грошових одиниці, рівень їх ризиковості зріс майже вдвічі ( $68.53 / 35.4 = 1.94$ ). Вважатимемо, що ОПР вирішила на цьому зупинитися, а тому задача розв'язана. З іншого боку, реалізацію методу послідовних поступок можна продовжити за наведеним вище алгоритмом.

Крім того, варто зазначити, що отримання повноцінного розв'язку даної задачі неможливе без застосування спеціалізованого програмного забезпечення. При цьому функціонал відомих засобів комп'ютерної математики є надто обмеженим для реалізації досліджуваної бізнес-моделі. Тому варто звернути увагу на створення якісно нових програм — насамперед тих, які використовують відкритий програмний код. Це необхідно для можливості безпосереднього створення та зміни потрібної функціональності.

**Висновки.** В дослідженні проаналізовано відомі методи багатокритеріальної оптимізації та описано алгоритм методу послідовних поступок для бізнес-моделі мультимодального транспортного підприємства, яка передбачає наявність двох цільових функцій мінімізації собівартості та ризику транспортних перевезень. Показано, що даний метод є найбільш оптимальним для реалізації досліджуваної бізнес-моделі в порівнянні з тими методами багатокритеріальної оптимізації, які використовують зортку цільових функцій (метод зважених сум тощо).

Роботу методу послідовних поступок для реалізації багатокритеріальної бізнес-моделі мультимодального транспортного підприємства продемонстровано на реальних та модельних даних. Доведено, що повноцінна реалізація даного методу для подібних моделей можлива лише за допомогою розробки спеціалізованого програмного забезпечення, бажано з відкритим кодом.

Очевидно, що метод послідовних поступок не є єдиним методом реалізації досліджуваної бізнес-моделі. В подальшому варто зосередитися на вивченні та адаптації інших відомих методів багатокритеріальної оптимізації, які можна застосувати до розв'язування поставленої задачі.

### Список використаних джерел:

1. Скриль В. В. Бізнес-моделі підприємства: створення та класифікація. *Економіка та управління підприємствами*. 2016. № 7. С. 490-497.
2. Розман А. Бізнес-модель підприємства роздрібної торгівлі. *Вісник КНТЕУ*. 2014. № 3. С. 15-34.



3. Криворучко О. М., Сукач Ю. О. Формування бізнес-процесної моделі автотранспортного підприємства. *Економіка транспортного комплексу*. 2014. Вип. 23. С. 91-103. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/ektk\\_2014\\_23\\_10](http://nbuv.gov.ua/UJRN/ektk_2014_23_10).
4. Войченко Т. О. Моделювання бізнес-процесів як технологія планування витрат на паливно-мастильні матеріали в судноплавних компаніях. *Ефективна економіка*. 2018. № 2. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/efek\\_2018\\_2\\_27](http://nbuv.gov.ua/UJRN/efek_2018_2_27).
5. Побережна З. М. Бізнес-модель авіакомпанії як інструмент забезпечення її конкурентоспроможності на ринку авіапослуг. *Бізнесінформ*. 2019. № 7. С. 190-197.
6. Su Jun, Przystupa K., Zabolotnii S., Pohrebennyk V., Mogilei S., Gil L., Song Wenguang. Constructing reference plans of two-criteria multimodal transport problem. *Transport and Telecommunication*. 2021. Vol. 22. № 2. P. 129-140. DOI: <https://doi.org/10.2478/ttj-2021-0010>.
7. Гончаров А. В., Могілей С. О. Застосування методу Штейнера для побудови опорних планів мультимодальних транспортних задач. *Обробка сигналів і негаусівських процесів*: зб. тез доп. учасників восьмої Міжнародної наукової конференції. Черкаси, 2021. С. 93-94.
8. Гончаров А. В., Могілей С. О. Реалізація мультимодальних транспортних задач в різних програмних середовищах. *Вісник ЧДТУ*. 2020. № 3. С. 67-74.
9. Куперман В. В. Методи багатокритеріальної оптимізації виробничої програми підприємства. *Вісник ЖДТУ*. 2011. № 3 (57). С. 302-307.
10. Марко М. Я., Цегелик Г. Г. Використання методу послідовних поступок для розв'язування задачі підвищення рентабельності виробництва малого підприємства. *Наукові записки*. 2017. № 1 (54). С. 141-146.
11. Триус Ю. В. Сучасні тенденції у розвитку методів і засобів розв'язування оптимізаційних задач. *Нові комп'ютерні технології*. Кривий Ріг, 2018. Т. XVI. С. 157-164. URL: <https://ccjournals.eu/ojs/index.php/nocote/article/view/832/862>.
12. Tryus Y., Geiko A., Zaspas G. Web service for solving optimization problems using swarm intelligence algorithms. *II International Conference of Computational Methods in Engineering Science (CMES'17). ITM Web Conf*. 2017. Vol. 15. DOI: <https://doi.org/10.1051/itmconf/20171502009>.

## **METHODS OF IMPLEMENTATION OF MULTICRITERIA BUSINESS MODELS OF MULTIMODAL TRANSPORT ENTERPRISES**

Under globalizing processes in the international economy, the problem of perfect logistics in commercial projects is quite urgent. It's foremostly important in big business structures, transnational corporations and other economic structures in Ukraine and abroad. Logistics in this case would surely suggest numerous means of transportation. Multimodal logistics means are especially important as they mean simultaneous or parallel employment of several transportation means.

Besides, the investigation is concentrated on the optimization criteria of multimodal transportations, which enables to formulate the current model as a multicriteria optimization problem. The writing considers se-

veral methods for this problem solution, with their application. Applying special programming means for the business model is as well described.

The business model is designed universally, which enables it to extend the result within the whole class of analogous models without alternating the algorithm of solution. So the object of the investigation is a business model of a multimodal logistics company and the focus is on methods of its solution. Its objective is to determine various methods to solve multicriteria optimization problems in transportation logistics. The paper demonstrates the most effective of all methods suggested and signifies the algorithm to solve the two-criteria multimodal logistics problem. To illustrate the algorithm, both real and model data are provided.

**Key words:** *business model, multimodal transport problem, multicriteria optimization, transport enterprise.*

Отримано: 19.10.2021

UDC 004.056

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.58-66

**Sherzod Gulyamov\***, D-r of Tech. Science, Professor,  
**Fotima Sagatova\*\***

\*Tashkent University of Information Technologies named after AI – Khorezmi, Tashkent, Republic of Uzbekistan,

\*\*Tashkent State Technical University  
named after Islam Karimov, Tashkent, Republic of Uzbekistan

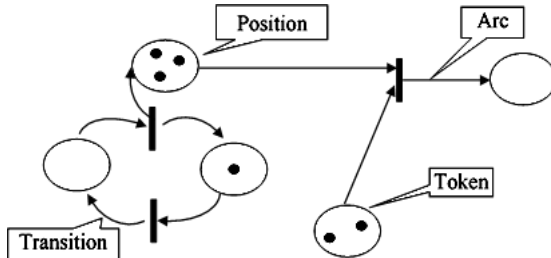
## METHOD OF RISK DETECTION MODEL IN PACKET FILTERING

This article describes Petri net diagrams for fuzzy knowledge and reasoning. A mathematical model of fuzzy Petri nets to detect risks in rules by packet filtering is formed. A model of a two-level fuzzy packet filtering system that provides packet filtering performance is presented. This model uses fuzzy Petri net as a graphical method to describe the fuzzy logical control of the movement of packets through the firewall and allows it to determine the level of threat embedded in packets from the Internet and to change the order of ACLs by determining the rating of acceptance and rejection of packets. In the proposed model, the packet is represented by a token in place of fuzzy Petri nets, and the operation of the packet is illustrated by the transition of fuzzy Petri net, which is responsible for moving the packet from one place to another.

**Key words:** *tokens, Petri net, Access Control List (ACL), packet filtering, SYN-Flood, risks, Fuzzy logic, membership degree function.*

**Introduction.** With the advent of the Internet, there have been many changes in people's lives. These changes also affected firms. Most employees in modern companies do not use the Internet connection for its intended purpose. User's «choke» the channel using torrents, watching videos on the Internet, downloading files or playing online games. Social networks, entertainment portals and other sites, where thousands of new pages are infected every day and new modifications of well-known threats appear, have been and remain potential areas of risk for the spread of malware and causes of phishing attacks, causes of information leakage, theft of passwords and other spyware. To ensure the security and integrity of information, overlap channels of possible information leakage and improve network performance, it is necessary to control the traffic flow entering the local network. To filter Internet access, it is important to analyze network traffic that is generated by users. The solution to such uncontrolled traffic in any organization is filtering Internet requests.

The classical Petri net is a kind of directed graph consisting of points, transitions, directed arcs, markers. Directional arcs connect places with transitions or transitions with places. The transition is activated when each location in the transition precondition is fulfilled. The tokens that are located in the locations of the Petri net are used to determine the execution of the Petri net. The presence or absence of a token in a location may indicate whether the condition associated with that location is true or false and the number and position of tokens may change during the execution of the Petri net. In general, Petri net can be represented by a transition along with an entry point and an exit point. Petri net designations are shown in Figure 1.



*Fig. 1. Petri net designations*

Risk Detection Model in Packet Filtering Rules Based on Fuzzy Petri Net. Fuzzy Petri Nets (FPNs) are a combination of fuzzy logic and Petri net. It is described as a Petri net that uses fuzzy logic rather than logic. FPNs are used to fuzzy knowledge and reasoning. The concept of fuzziness can be incorporated into Petri nets by applying a fuzzy reasoning mechanism to the structure of Petri net. Usually, FPN can model fuzzy production rules (like, if  $d_j$ , then  $d_k$  with confidence factor  $(CF)\mu_i$ ).

Each location can contain a token associated with the truth value of a sentence, which is quantified by numbers in a unit interval [1-3]. Each transition is associated with a confidence factor that takes values from a unit interval. Formally, the FPN model is defined as a set of

$$N_f(P, T, D, I, \alpha, \beta),$$

where

$P \subset P_i$  for  $(i = 1, i \leq n, i++)$  — a finite set of positions;

$T \subset T_i$  for  $(i = 1, i \leq m, i++)$  — a finite set of transitions;

$D \subset D_i$  for  $(i = 1, i \leq j, i++)$  — a finite set of sentences;

where

$P = \{T : (T, P) \in f\} \cup P = \{T : (P, T) \in f\}$  — this is the input mapping;

$T = \{P : (P, T) \in f\} \cup T = \{P : (P, T) \in f\}$  — this is the output mapping;

$f = \rightarrow [0, 1]$  – displaying associations;

$$\alpha : P \rightarrow [0, 1]; \beta : P \rightarrow D; P \cap T \cap D = \varnothing, |P| = |D|.$$

The value of the token at the position  $p_i \in P$  is denoted by  $\alpha(p_i) \in [0, 1]$ .

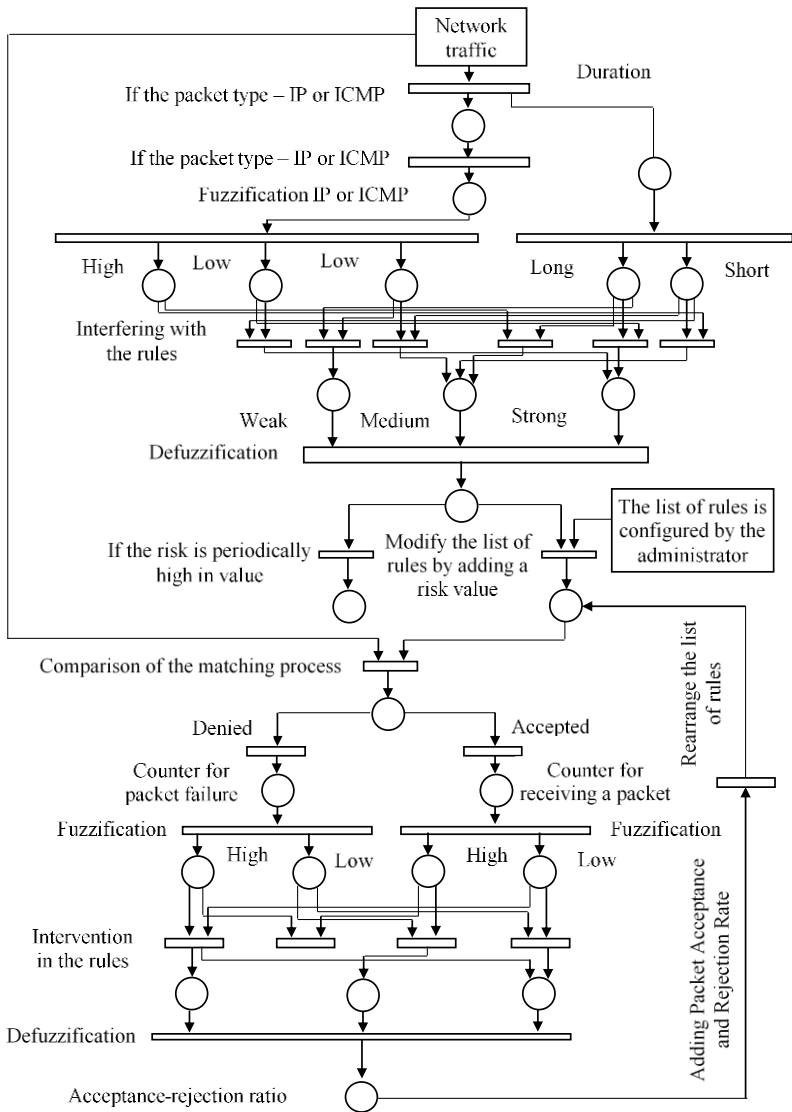
If  $\alpha(p_i) = y_i$ ;  $y_i \in [0, 1]$  and  $\beta(p_i) = d_i$ ; then this means that the degree of truth of the sentence  $d_i$  is equal to  $y_i$ . The transition  $t_i$  is allowed if for all  $p_i \in I(t_i)$ ,  $\alpha(p_i) \geq \lambda$ , where  $\lambda$  is the threshold value in the unit interval. If this transition is triggered, then the token is removed from its entry locations and the token is placed in each of its exit locations. The truth value of the output tokens is usually calculated using some aggregation function  $\tau$ .

$$y_k = \tau \prod_{j=1}^n y \prod_{i=1}^m \mu \text{ or } y_k = \tau(I(t_j), \mu_i), y_k \in O(t_j).$$

In theory, Petri net and FPN have the same computational power, but FPN have much more modeling power because they have better structuring capabilities. Boolean expressions and functions can be constructed using fuzzy logic for all objects of the Petri net [4-7]. The FPN can efficiently analyze parallel systems, validating security rules and standards for transport operations and uses a graphical representation that is easy to understand and easy to modify due to its modularity.

Figure 2 shows a two-level fuzzy packet filtering model that provides filtering performance. The model uses FPN as a graphical method for describing fuzzy logic control over the movement of packets through a firewall. Two levels of fuzziness are applied to packets filtering:

- the first level, which allows it to determine the level of threat embedded in packets;
- the second level is used to change the order of the ACL by determining the acceptance and rejection ratings of packets.



*Fig. 2. Two-level fuzzy packet filtering model*

*First level: fuzzy filtering.* This layer is based on capturing and classifying all incoming packets based on information associated with each packet, such as IP address, packet time and protocol type, to simulate and track packet movement [8; 9]. In the proposed model, the packet is represented by a token at the FPN location, and the packet operation is illustrated by the FPN transition, which is responsible for moving the packet from one location to another. Once the packet is captured by the gateway, it is moved to the position where it is checked and matched against the ACL, in addition, the snapshot of that packet is moved to the traffic analysis part to extract packet parameters such as the number of IP or ICMP packets arriving over a period of time. These two parameters are inputs to the fuzzy logic engine that is used to determine the level of risk. This level of risk represents the threats that result from moving packages from untrusted sources.

As it knows, the IP and ICMP protocols are used at many levels of an attacker's advance when hacking a system. In addition, the IP and ICMP protocols are used in some cases as a covert communication channel for attackers. This layer can also deal with attack methods using other protocols such as TCP SYN and UDP Flood. UDP flooding occurs when an attacker sends IP packets containing UDP datagrams to slow down the victim to the point where they can no longer process valid connections. A distinctive feature of SYN-Flood attacks is that attackers send a large number of TCP SYN request packets with spoofed source IP addresses. This leads to the fact that the server side consumes a large number of resources to maintain a very large list of half-open connections, which ultimately leads to the fact that the server runs out of resources and becomes unable to provide normal services.

The rationale for choosing the number of ICMP echo request  $p_{\text{echo-request}}$  packets and the  $p_{\text{time}}$  packet arrival time interval is that they are simple and suitable for most cases of protection against attacks, especially when it has a large number of whole packets. To satisfy the requirements of the membership degree function (MDF) used in the proposed fuzzy system, the measures for the feature vectors must be transformed into the range [0, 1] using the Gaussian normalization method. Fuzzy logic (FL) is probably the most efficient and flexible packet filtering method, allowing it to control a combination of measurements in terms of their degree of uncertainty. CL is a theory that allows natural linguistic descriptions of problems to be solved rather than using numerical values. The FL system consists of the following functions:

- fuzzifier that accepts input values and determines the degree of their belonging to each of the fuzzy sets through the MDF;

- a fuzzy inference system that defines a nonlinear mapping of an input data vector to scalar inference using fuzzy rules;
- defuzzifier that maps output fuzzy sets to a crisp number.

And so, here a fuzzy system with two inputs and one output is used, which is given by

$$f : U \subset \bigcup_{i=1}^n (R_i \cap V),$$

where  $U = U_1 \times U_2$  — entrance space;  $R$  — filtering rules;  $V$  — outlet space.

Three fuzzy variables, including «Low», «Medium», and «High», are used to describe the  $p_{\text{echo-request}}$  characteristic and two fuzzy variables, including Long and Short, are used to describe the  $p_{\text{time}}$  function. All membership function parameters are numerically specified based on experience to assess the level of risk arising through packet traffic. Once the system receives fuzzy descriptions of packet characteristics, a rule base can be built to infer that they are similar.

Fuzzy reasoning, which is formulated by a group of fuzzy If-Then rules, represents the degree of presence or absence of a connection or interaction between elements of two or more sets. Figure 3 shows packet filtering rules flowcharts (First level).

In general, the rules presented in Figure 3 imply weight assignment in the same way as humans. Fuzzy inference handles all cases in parallel, which makes the solution more reasonable [10]. The result of the fuzzy system is the risk level  $r_l$ , which characterizes the risk inherent in packet traffic.

*Second level: fuzzy filtering.* Typically, each firewall has two sets of packets associated with it: a set of packets that are accepted by the firewall and a set of packets that are discarded by the firewall. This model exploits this fact to improve packet filtering performance by applying Layer 2 fuzzy filtering to track the rate at which packets are accepted or rejected to minimize rule matching time. Here, an attempt is made to model the uncertainty in the rate of acceptance or rejection of packets using a fuzzy model. In this case, a fuzzy system with two inputs and one output is used. Two fuzzy variables including «Low» and «High» are used to describe both the receive rate counter  $A_r$  and the rejection rate  $R_r$ . The result of the fuzzy system is the computed rate  $C_r$ , which characterizes the rate of rejection and acceptance in packet traffic and is described by three fuzzy variables, including High Rejec-

tion, Equal, and High Accept [11]. Figure 4 shows packet filtering rules flowcharts (Second level).

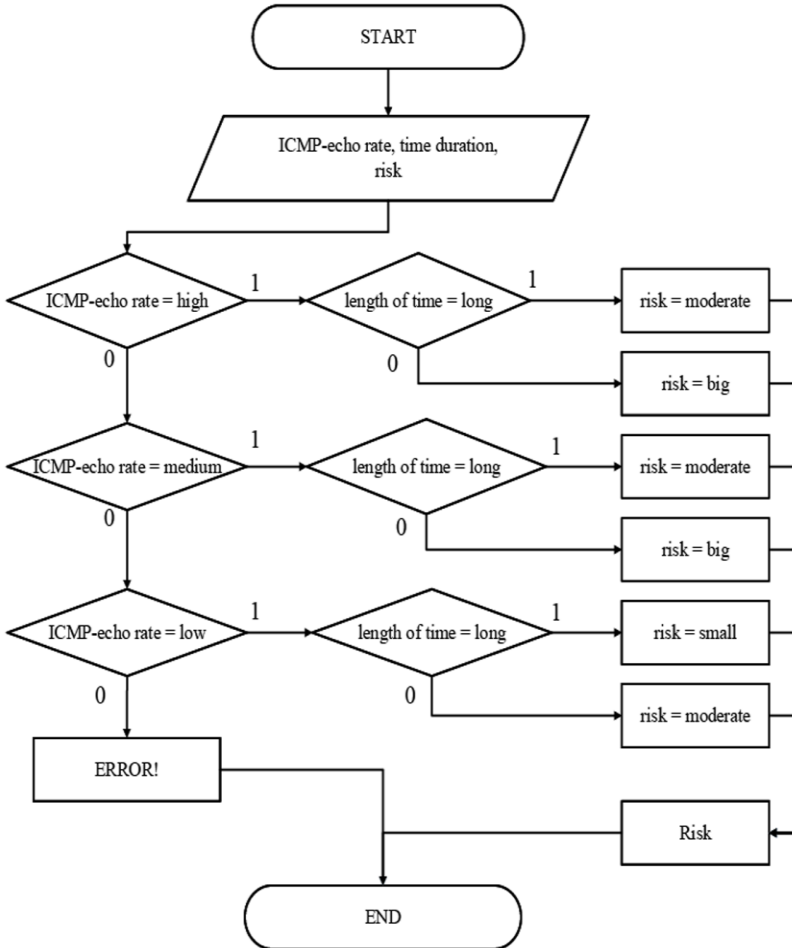
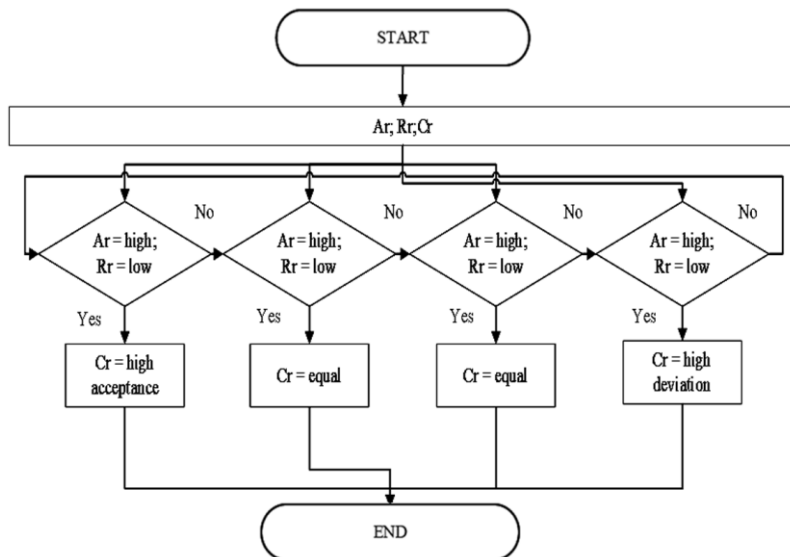


Fig. 3. Packet Filtering Rules Flowcharts (First Level)

The output fuzzy values are then defuzzified to generate a clear value for the variable. Here, if  $C_r$  = high acceptance, then all rules for which there is a permission action are reordered and moved to the top of the ACL with the highest priority to execute. Otherwise, if  $C_r$  = high rejection, then all rules that have a reject action are moved to the beginning of the ACL, taking the highest priority for execution and, as a consequence, rules that have an accept action stabilize at the end of the ACL.





**Fig. 4.** Packet Filtering Rules Flowcharts (Second Level)

**Conclusion.** Thus, the proposed model has the ability to change the actions of the rules in two levels: at the first level, the action of the rule can be changed in accordance with the behavior of traffic based on the layer of risk; in the second level, the sequence of rules can be dynamically changed to reflect the highest priority of the rules based on the acceptance and rejection of packets.

### References:

1. Thong W. J., Ameen M. A. A Survey of Petri Net Tools Advanced Computer and Communication Engineering Technology. *Lecture Notes in Electrical Engineering* / ed H. Sulaiman, M. Othman, M. Othman, Y. Rahim, N. Pee. 2015. Vol. 315. P. 537-551.
2. Zaitsev D. A. Toward the Minimal Universal Petri Net. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: System*. 2013. P. 47-58.
3. Gulomov Sh., Ganiev A., Vaade V. Formalization of the business process security. *International conference on information science and communications technologies applications, trends and opportunities (ICISCT)*. 4-6 November, 2019, Tashkent Uzbekistan.
4. Mirzaeva M. B., Suleymanov A. A. Communication network reliability evaluation using the simulation approach. *Technical Science and Innovation. Tashkent State Technical University named after Islam Karimov*. 2020. № 4 (06).
5. Karimov M. M., Gulomov Sh. R. IP-Traffic classification model based on machine learning ways. *Chemical Technology, Control and Management*. 2020. Vol. 2020. Is. 5 Special issue 5-6. P. 123-128.

6. Yusupov S. Y., Gulomov Sh. R. Improvement the schemes and models of detecting network traffic anomalies on computer systems. *2020 IEEE 14th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT)*. Tashkent, Uzbekistan, 2020. P. 1-5.
7. Gulomov Sh. R., Yusupov S. Y. Improvement the schemes and models of detecting network traffic anomalies on computer systems. *2020 IEEE 14th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT)*. Tashkent, Uzbekistan, 2020. P. 1-5.
8. Kodirov Z. Z., Karimov M. M., Tashev K. A., Gulomov Sh. R., Isloмова M. X. Q. Artificial Intelligence, Ensuring Information Security in Virtual Robots And Extensive Use Of Smart Systems. *The American Journal of Engineering and Technology*. 2020 Vol. 02. Is. 08-04. P. 28-38.
9. Voronkov L. H., Iwaya L. A., Martucci S. Lindskog. Systematic Literature Review on Usability of Firewall Configuration. *ACM Computing Survey*. 2018. Vol. 50. № 6.
10. Gulomov Sh. R., Yusupov B. K., Kamilov Sh. Sh. ugli. Models and algorithms for solving problems associated with large amounts of data in the military sphere. *International Conference on Information Science and Communications Technologies, ICISCT 2020*. Tashkent; Uzbekistan.
11. Chao S., Yang S. J.-H. Towards a Usable Anomaly Diagnosis System among Internet Firewalls' Rules. *Journal of Internet Technology*. 2019. Vol. 20. № 3. P. 789-799.

## МЕТОД МОДЕЛІ ВИЯВЛЕННЯ РИЗИКУ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ПАКЕТІВ

У цій статті описані діаграми мережі Петрі для нечітких знань і міркувань. Сформована математична модель нечітких мереж Петрі для виявлення ризиків в правилах за допомогою фільтрації пакетів. Представлена модель дворівневої системи нечіткої фільтрації пакетів, що забезпечує ефективність фільтрації пакетів. Ця модель використовує нечітку мережу Петрі в якості графічного методу для опису нечіткого логічного управління рухом пакетів через міжмережвий екран і дозволяє їй визначати рівень загрози, вбудованої в пакети з Інтернету, і змінювати порядок списків ACL шляхом визначення рейтингу. прийому і відхилення пакетів. У запропонованій моделі пакет представлений токеном замість нечітких мереж Петрі, а робота пакету ілюструється переходом нечіткої мережі Петрі, яка відповідає за переміщення пакета з одного місця в інше.

**Ключові слова:** токени, мережа Петрі, список контролю доступу (ACL), фільтрація пакетів, SYN-Flood, ризики, нечітка логіка, функція ступеня приналежності.

Отримано: 13.10.2021

UDC 004.056

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.67-76

**Madjit Karimov\***, D-r of Tech. Science, Professor,  
**Mirkhusan Sagatov\*\***

\* State Test Center under the Cabinet of Ministers of  
the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan,

\*\*Tashkent State Technical University

named after Islam Karimov, Tashkent, Republic of Uzbekistan

## **APPLICATION THE AHO-CORASICK ALGORITHM FOR IMPROVING A INTRUSION DETECTION SYSTEM**

One of the main goals of studying pattern matching techniques is their significant role in real-world applications, such as the intrusion detection systems branch. The purpose of the network attack detection systems NIDS is to protect the infocommunication network from unauthorized access. This article provides an analysis of the exact match and fuzzy matching methods, and discusses a new implementation of the classic Aho-Korasik pattern matching algorithm at the hardware level. The proposed approach to the implementation of the Aho-Korasik algorithm can make it possible to ensure the efficient use of resources, such as memory and energy.

**Key words:** *NIDS (Network Intrusion Detection System), precise matching, imprecise matching, FPGA (field-programmable gate array), algorithm Aho-Corasick.*

**Introduction.** In recent years, there has been rapid growth in both Internet penetration and bandwidth, driven by huge improvements in telecommunications infrastructure, the proliferation of competitively priced computers and mobile Internet-capable devices, and the declining cost of Internet access as a result of increased competition. The number of individuals using the Internet has increased by several billion over the past 10 years, mainly due to the increased use of high quality video communications.

In 2019, Positive Technologies specialists recorded more than 1,500 attacks; this is 19% more than in 2018. In 81% of cyber attacks, the victims were legal entities. At the end of the year, the five most frequently attacked industries included government agencies, industry, medicine, science and education, and the financial industry.

In September 2020, the AVTest Institute detected about 1.1 billion unique malicious programs, of which 12 million are new malware. In other words, a new malware was created every 2 seconds.

In 2019, the number of malware infections increased by 38% compared to 2018. In 41% of cases, malware infections were combined with social engineering techniques.

The growth in the success of malicious campaigns throughout the year was facilitated by the continuous modernization of both the malicious software itself and the delivery methods. First, in 2019, attackers were good at masking malware. For example, they hid them in files with extensions that are included in the whitelists and therefore are not detected by antiviruses, used legitimate processes and built-in mechanisms to avoid detection, signed malware with legitimate certificates, and actively developed fileless infection techniques. Trend Micro researchers published a report in September 2019, according to which the number of fileless attacks in the first half of the year increased by 265% compared to the first half of 2018. At the end of the year, Bitdefender specialists talked about a new technique for infiltration by miners, ransomware and spyware through the features of the RDP service. Second, cybercriminals added new exploits to malware vulnerabilities, including in widely used software. For example, the notorious WinRAR vulnerability in 2019, which affected half a billion users, was used both for infections by the JNEC.a ransomware and in complex targeted attacks. Finally, attackers tried to make the malware feature rich, which increased its chances of gaining benefit if it became infected. For example, the new Scranos rootkit steals credentials and billing information, installs adware, and subscribes to YouTube channels.

Network packet inspection is the examination of a packet's payload for patterns known as signatures, listed in a rule database called a rule set. Signatures are usually in the form of fixed strings or regular expressions, or a combination of both. In recent years, regular expressions have become more commonly used to describe increasingly complex attacks.

The topic of fixed string matching is well understood because of its importance in many applications such as Internet search engines, parsers, word processors, and digital libraries. This is important in signature-based NIDPS because most rules contain at least one fixed string pattern to match. Although fixed string matching is beyond the scope of this paper, a brief overview is provided below to give a complete understanding of the functionality of NIDPS.

**Related works.** Precise Matching. The string matching problem can be simply formulated — for two strings  $T$  and  $P$  of length  $m$  and  $n$ , respectively, determine if  $P$  occurs in  $T$ . Naive or brute force search involves trying to match a pattern using a window size of length  $n$  and iterating over each position in  $T$  from left to right, resulting in the worst-case complexity  $O(mn)$ . Boyer-Moore and KMP are two classic single-string matching algorithms. Both of these algorithms also use a window of size  $n$ , but they use a skip or shift table to determine where to look next after each mismatch. The shifts used by the Boyer-Moore algorithm are based on two rules known as the bad character shift rule and the good suffix shift

rule. The first rule eliminates the need to repeat unsuccessful comparisons with the target character, and the second ensures that the match only matches target characters already successfully matched. The KMP algorithm similarly uses information derived from partial matches to skip alignments that are guaranteed not to result in a match. The Boyer-Moore algorithm was later simplified by Horspool, resulting in an algorithm that is easier to implement. The Boyer-Moore algorithm has a worst-case search time of  $O(m+n)$  if the pattern does not appear in the text, and  $O(mn)$  if it does. The average seek time is sublinear and improves with increasing pattern length. KMP is  $O(m+n)$  in both the average and worst case. Baeza-Yates and Gonnet found that the average performance of the Boyer-Moore-Horspool algorithm improves with increasing pattern length, and better than KMP for  $n > 3$ . These algorithms are not suitable for matching multiple patterns because the search time increases linearly with increasing template length, number of patterns.

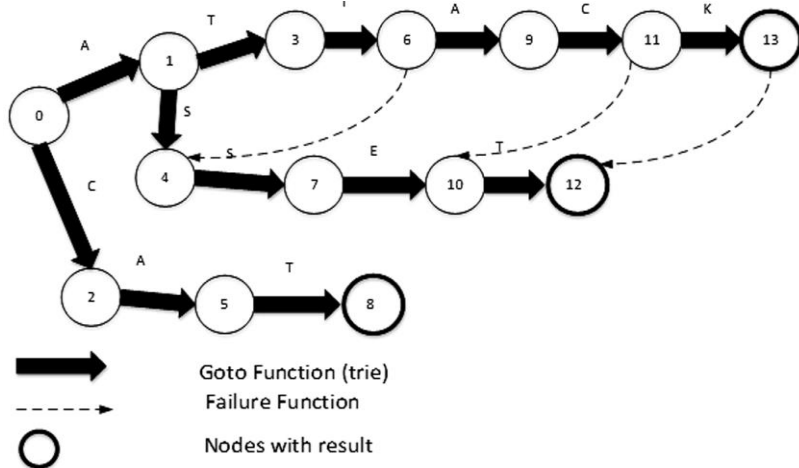
**Imprecise Matching.** Dharmapurikar et al. describe a hardware technique using Bloom filters to detect fixed strings in streaming data. A Bloom filter is a randomized data structure that is «programmed» with strings using multiple hash functions and «queried» for a string based on a few bits. The request may result in a false positive, but never a false negative. (A false positive is when a match result incorrectly indicates that a match exists, while a false negative is when a match result incorrectly indicates that a match does not exist). The main advantage of this method is that it will probably only require a relatively small amount of memory, even for a very large set of templates. The disadvantages are that multiple Bloom filters are required, one for each pattern length found in the rule set, and that all possible matches must be fully checked for false positives. Song and Lockwood propose a more efficient data structure, called an extended Bloom filter, in an architecture that makes the most of FPGA block RAM. Zhou and Wang propose an FPGA implementation of multi-pattern string matching using parallel mechanisms based on the Bloom counting filter.

Markatos et al. propose an algorithm based on the use of exclusion matching. It basically splits patterns into multiple fixed size bit strings and searches for them without checking if they are in the correct sequence. If any of the subpatterns do not match, then the entire pattern does not match. When a matching subpattern is found, the system reverts to a standard algorithm, such as Boyer-Moore, to validate the complete pattern.

**Algorithmic background-The Aho-Corassic and Commenz-Walter algorithms.** Two well-known multi-pattern matching algorithms are Aho-Corasick and Commenz-Walter. The Aho-Corasick algorithm is an extension of the KMP algorithm for a set of templates.

This paragraph is devoted to providing a brief explanation of the pattern matching problem. In short, in the problem of the exact set matching algorithm, the main goal is to find occurrences of all patterns from a given set  $P = \{p_1 \dots p_k\}$  in the text  $T [1 \dots m]$ . Let  $n$  be the length of all patterns in the set  $P$ . Obviously, the brute-force algorithm is probably the first algorithm one could think of when solving an exact match of a set in  $O(n + km)$  time, applying any linear time exact match  $k$  times e.g. Knuth-Morris-Pratt algorithm, Boyer-Moore algorithm, etc.). The Aho-Corasick algorithm (AC for short) is a natural extension of the famous Knuth-Morris-Pratt algorithm, which is a classic approach to solving a single pattern matching problem. AC works in  $O(n + m + z)$  time, where  $z$  is the number of occurrences of patterns in the text  $T$ . AC is based on the refinement of the keyword tree.

Consider the following set of lines:  $P = \{ATTACK, ASSET, CAT\}$ . The keyword tree for  $P$  is shown in the figure.



**Fig. 1.** Aho-Corasick — automaton for set of patterns  $P = \{ATTACK, ASSET, CAT\}$

Time complexity of tree construction is  $O(n)$ . The next step is to convert the keyword tree to an automaton to support linear time matching. The action of the automaton is determined by three functions defined for states [8]:

$g(s, a)$  — a goto function: gives the states entered from current state  $s$  by matching text char  $a$ , if edge  $(u, v)$  is labeled by  $a$ , then  $g(u, v) = v$ ; and  $g(0, a) = 0$  for each  $a$  that does not label an edge out of the root (denoted 0),

$f(s)$  — a failure function: gives the state entered at a mismatch, when  $w$  is the longest proper suffix of  $L(v)$  such that  $w$  is a prefix of some pattern,  $f(s)$  is the node labeled by  $w$ ,

$out(s)$  — an output function: gives the set of patterns recognized when entering state.

If  $n$  is the number of states in the automaton, and  $nocc$  is the number of occurrences of the pattern in the string, then the time complexity of finding the algorithm is  $O(n + nocc)$  when the transitions of the automaton are stored in the transition table and,  $O(n \log |\Sigma| + nocc)$ , when transitions are stored in a balanced tree [2, 5].

**Theorem.** Searching for a set of patterns  $P$  in text string  $T[1 \dots m]$  with an AC automaton takes time  $O(m + z)$ , where  $z$  is the number of pattern occurrences.

A transition table of a FSM automaton contains transitions from each state for every symbol of a input alphabet, so the size of this transition table is equal  $\#S \cdot \#A$  (where  $S$  is the set of automaton states,  $A$  is the input alphabet and  $\#X$  is a cardinality of set  $X$ ). The transition table for an AC automaton contains only two transitions for each state ( $2 \cdot \#S$ ). Number of transitions is not dependant on size of the input alphabet.

*Algorithm 1.* Searching patterns  $P$  in text  $T$

```
Input:  string T[1, ..., m]
        set of k-patterns P;
output: starting indices of substrings of T
        matching patterns from set P;

q=0;
for i=1 to m do
    while g(q, T[i])=0 do q=f(q);
    q=g(q, T[i]);
    if out(q) ≠ 0 then print (i);
```

The Commentz-Walter algorithm combines the ideas of the Boyer-Moore and Aho-Corasick algorithms. For a string of length  $m$  and maximum template length  $lmax$ , its worst-case time complexity is  $O(mlmax)$ . In practice, it is faster than Aho-Corasick only for a small number of search patterns.

Both Aho-Corasick and Commentz-Walter algorithms suffer from the fact that memory requirements can grow exponentially with the number of patterns. This degrades the performance of the software as the entire machine cannot be stored in the cache. A number of solutions have been proposed for this memory explosion problem, most of which involve the use of hash tables. The Wu-Manber algorithm is a variant of the Boyer-Moore algorithm with multiple patterns that considers text in  $B$  blocks instead of individual characters, that is, it is a multi-step algorithm. It uses three tables: SHIFT, PREFIX and HASH. The SHIFT table stores the shift or gap values for each of the characters in the block, indexed by hashing

their value. If a potential match is found, the HASH and PREFIX tables are accessed to verify the actual match. Navarro and Raffino provide a detailed description accompanied by examples. The algorithm only requires  $O(k)$  memory space, where  $k$  is the number of templates, and is very fast on average. It was previously used by Snort, but has been removed because its inferior performance makes it vulnerable to DoS attacks. Snort now uses the standard Aho-Corasick algorithm by default, but it can be configured to use other versions of the algorithm [3] that trade off memory versus speed. It also includes a binary tree based algorithm known as SFK lookup for very low memory systems.

A lot of research has been done to find improved variants of the Aho-Corasick algorithm, in particular for hardware implementation. The algorithms proposed by Tuck et al. reduce memory consumption through the use of bitmap nodes and path compression. Bitmaps reduce the number of state transition pointers, and path compression combines a number of sequential states. Tan and Sherwood use bit splitting to split the Aho-Corasick automaton into eight separate automata, each operating on one bit of each input character, thereby reducing the maximum number of transitions from each state from 256 to just 2.

Kennedy et al. proposed an FPGA architecture based on the Aho-Corasick algorithm, which uses multiple string matching mechanisms operating in parallel.

A well-known FPGA approach to string matching is to treat a string as a simple regular expression that can be represented by an NFA, which translates into FPGA logic. The main disadvantage of this method is the need to reprogram the FPGA when the rowset changes. Moreover, it does not scale well as recent rulesets generate too much logic.

TCAMs can perform concurrent searches at high speed, but they present two problems for matching multiple patterns: (i) TCAM entries are fixed length, as opposed to string patterns found in NIDS rulesets, and (ii) TCAMs return the first matching entry, and not all matches. Yu et al. propose a solution that overcomes these two difficulties. The number of TCAM lookups is in the order of  $O(n)$ , where  $n$  is the number of characters entered. Sung et al. [1, 4, 6, 7] present a jump window scheme that reduces the number of TCAM lookups to  $O(n/m)$ , where  $m$  is the window size. Although it gives very good matching performance, TCAM suffers from the problems of relatively high cost and energy inefficiency.

**Hardware schemes for state machines.** Finite machine. A block diagram of a state machine that finds character patterns is shown in Figure 3. The module consists of a character shift register, a state register, and a look-up table. The state register contains the code of the current state of the state machine.



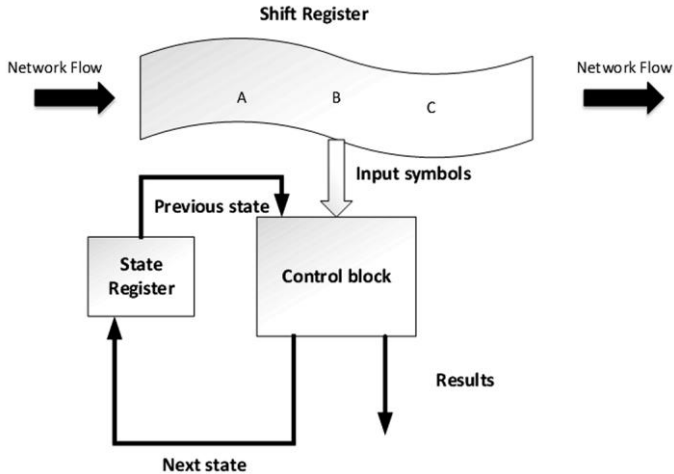


Fig. 2. Block scheme of finite state machine

The shift register shifts a new character into the look-up table at each clock cycle. The look-up table determines the next state from the current state and the input character. It also detects output patterns found, which tells whether the state machine has found a pattern. Much of the circuit's latency comes from a look-up table, which can be implemented in FPGA memory or logic cells.

**Aho Corasick Machine.** The module that implements the Aho-Korasick algorithm (shown in Figure 4) is similar to the basic module of the state machine. The most important extension is the brake light. It is set when the state machine returns through a failure transition and tells the shift register not to shift a new character. The conversion table has been converted to a more complex block. The table is split into two tables: a transition function and a failure function. The goto function determines the next state based on the input character and the current state in a situation where the Aho-Corasick machine matches any pattern. It is implemented in Addressable Memory (CAM). The number of CAM lines is equal to the number of goto branches in the keyword tree. The stop memory output signals whether the next state was executed in the CAM or not.

The failure function finds the next state from the current state when the input character does not match any pattern. Each state has one transition of the failure function, so it is easy to implement in memory, the size of which is proportional to the number of states.

The stop signal activates the next state multiplexer function. If the CAM finds a matching row, the next state is taken from the CAM pin, otherwise it is taken from the failure function. The templates function reports from the next status output which templates were found.

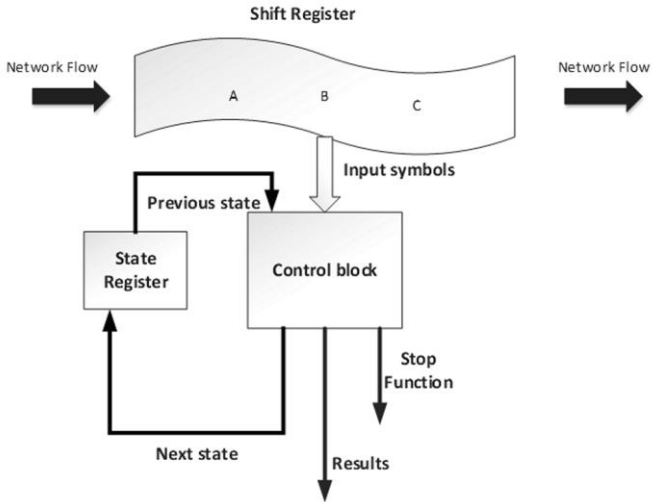


Fig. 3. Block diagram of AC machine

**Parallel Aho-Corasick Machine.** Taking into account the fact that the size of the Aho-Corasick jump table is independent of the size of the input alphabet, it is possible to parallelize and pipe it by taking multiple characters at each step and multiplying the number of Aho-Corasick Machine. This increases the size of the input alphabet and changes the number of states of the machine.

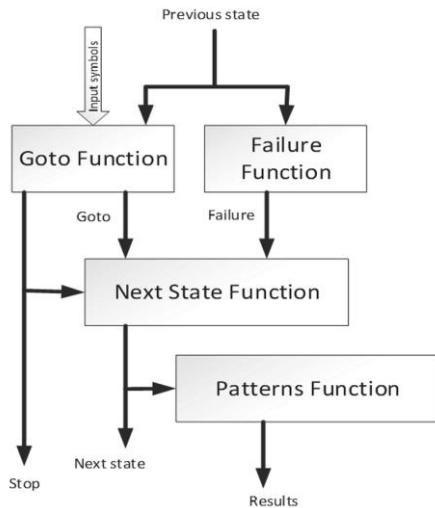


Fig. 4. Block diagram of control unit of AC Machine

Each  $n$  Aho-Corasick machine takes  $n$  input symbols from the shift register every  $n$  clock cycles. Each machine receives symbols in its own clock cycle, so every  $n$  adjacent symbols in the shift register are processed by one of the machines. The Aho-Corasick automaton is modified to process  $n$  symbols at each step. It can handle  $n$  steps of the goto function, but only one step of the failure function of the underlying Aho-Corasick machine.

The advantage of the parallel version is that machines can share the resources of an expensive CAM for the transition function and memory for the failure function. Thus, the memory is pipelined, resulting in a shorter clock cycle than the basic version of the Aho-Corasick machine. The disadvantage is that the length of the templates must be divisible by  $n$ .

**Conclusion.** This article proposes a new implementation of the classic Aho-Corasick pattern matching algorithm at the hardware level. The presented results show that the Aho-Corasick algorithm provides efficient use of resources (memory and logical cells) at the expense of lower throughput. Using this algorithm, the same patterns can be accommodated as in a smaller FPGA. Further improvements are expected in the area of efficient hardware implementation of pattern matching algorithms.

#### References:

1. Bakhodir Y., Nurbek, N., Odiljon Z. Methods for applying of scheme of packet filtering rules. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*. 2019. Vol. 8. Is. 11. P. 1014-1019.
2. Karimovich G. S., Turakulovich K. Z., Ubaydullayevna H. I. Computer's source based (Pseudo) random number generation. *International Conference on Information Science and Communications Technologies, ICISCT 2017*. Tashkent, 2017. CFP17H74-ART; 133832;
3. Sherzod G., Dilmurod A., Nodira M., Husniya A. Construction of schemes, models and algorithm for detection network attacks in computer networks. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*. 2019. Vol. 8. Is. 12. P. 2234-2241.
4. Karimov M., Tashev K., Yoriqulov M. Problems of increasing efficiency of NIDS by using implementing methods packet classifications on FPGA. *International Conference on Information Science and Communications Technologies, ICISCT 2019*. Tashkent, 2019. CFP19H74-ART; 158120.
5. Akhmatovich T. K., Turakulovich K. Z., Tileubayevna A. J. Improvement of a security enhanced one-time mutual authentication and key agreement scheme. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*. 2019. Vol. 8. Is. 12. P. 5031-5036.
6. Karimov M., Gulomov Sh., Yusupov B. Method of constructing packet filtering rules. *International conference on information science and communications technologies applications, trends and opportunities (ICISCT)*. Tashkent, 2019.
7. Abdulatteeef S. W. An Implementation of Firewall System Using MikroTik Router OS. *Journal of University of Anbar for Pure Science*. 2012. Vol. 6 (2). P. 65-69.

8. Zhang L., Wang Y., Jin R., Gao K. Approaches for a Stand-alone Network Attack and Defense Platform Using Yersinia Toolkits. *International Journal of All Research Education and Scientific Methods (IJARESM)*. 2017. Vol. 5. Is. 3. P. 2455-6211.

## **ЗАСТОСУВАННЯ АЛГОРИТМА АХО-КОРАСІКА ДЛЯ ВДОСКОНАЛЕННЯ СИСТЕМА ВІЯВЛЕННЯ ВТОРГНЕНЬ**

Одна з основних цілей вивчення методів зіставлення зі зразком — їх значна роль в реальних додатках, таких як гілка систем виявлення вторгнень. Метою систем виявлення мережевих атак NIDS є захист інфокомунікаційної мережі від несанкціонованого доступу. У цій статті представлений аналіз методів точного і нечіткого зіставлення, а також обговорюється нова реалізація класичного алгоритму зіставлення зі зразком Ахо-Корасіка на апаратному рівні. Пропонований підхід до реалізації алгоритму Ахо-Корасіка може дозволити забезпечити ефективне використання ресурсів, таких як пам'ять і енергія.

**Ключові слова:** *NIDS, точний збіг, неточне збіг, FPGA, алгоритм Ахо-Корасік.*

Отримано: 12.10.2021

УДК 681.513

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.76-87

**В. М. Мельник**, д-р техн. наук, професор,

**В. П. Косова**,

**К. А. Бурсаков**

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

## **ОКРЕСЛЕННЯ ГРАНИЧНИХ ТА ФІЗИЧНИХ УМОВ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МАСООБМІННУ В АПАРАТІ ПІД ЧАС РОЗДІЛЕННЯ ВОДНО-ОРГАНІЧНИХ СУМІШЕЙ**

Авторами розроблена та удосконалена математична модель, яка описує масообмінну обстановку в апараті під час розділення водно-органічних сумішей та показує процеси пер-вапорації, що відбуваються з процесу десорбції компонентів з мембранного елемента з урахуванням взаємних впливів характеристик процесу на характеристики середовища. Враховано вплив зовнішніх факторів для температурного розрахунку та знайдено розв'язок відповідної модельної задачі з використанням рівняння руху для рідини в середині мембрани в умовах ламінарного руху. Наведені результати розрахунків розподілу концентрації органічної домішки у суміші та матеріалі мембрани. Досліджено залежність кількості проходів через мембрану

від початкової концентрації в мембрані. Показано можливість визначення розподілу концентрацій у потоці рідини, яка проходить в мембрані, а також по товщині мембрани в залежності від розмірів мембрани, режимів руху вихідної та парогазової суміші, концентрації органічної домішки та парогазової суміші. В побудованій математичній моделі враховано геометричні та фізичні умови, які характеризують відповідно форму і розміри області в якій відбувається конкретний процес переносу та фізичні властивості середовища і їх зміна в залежності від параметрів процесів. Для розв'язання рівняння конвективної дифузії в рідкій фазі вибрано метод скінченних різниць. Математичне моделювання наочно демонструє ефект впливу факторів, але, в свою чергу, не дозволяє знизити вплив. Урахування початкових умов і граничних умов дозволить визначити розподіл концентрацій у потоці рідини, яка проходить в мембрані, а також по товщині мембрани в залежності від розмірів мембрани, режимів руху вихідної та парогазової суміші, концентрації органічної домішки в вихідній та парогазовій суміші. Проведене математичне моделювання тепло- та масообміну всередині апарату для визначення концентраційного поля органічного компоненту та виявлення факторів, що впливають на швидкість виділення органічної домішки.

**Ключові слова:** *математична модель, первапорація, мембрана, органічні домішки, мембранний апарат, модельна рідина, конвективна дифузія.*

**Вступ.** Серед мембранних процесів виділяють ще й первапораційні, які використовуються для розділення рідин і відрізняються від інших методів мембранного очищення наявністю фазового переходу. Однією з можливих областей застосування первапорації є очищення води від органічних домішок і подальший поділ сумішей отриманих органічних сполук. Механізмом поділу і масопереносу, у випадку розділення багатоконцентних органічних сумішей, коли два або більше компонентів суміші, різних за вагою і формою молекул, мають спорідненість з матеріалом мембрани, є різниця швидкостей переміщення молекул і витіснення легкими молекулами важчих в зоні фази розчинення [1, 2].

Виникнення концентраційної поляризації і товщина примежового концентраційного шару залежать від гідродинамічних умов у потоці над мембраною. Що більша турбулентність потоку, то менша товщина концентраційного шару біля мембрани та негативні наслідки концентраційної поляризації [3].

**Аналіз літературних джерел та постановка задачі дослідження.** В літературі наведені математичні моделі застосовані для процесу первапорації в каналі прямокутної форми. Представлені математичні моделі

для описання процесу мембранної сорбції, яка враховує розбухання елемента і умови однозначності даного процесу [2, 4]. Описані моделі не можуть бути використані для опису процесів у каналах не прямокутної форми, а також для процесу десорбції компонентів з мембранного елемента. Аналіз літературних джерел показує, що для розділення водно-органічних сумішей найбільш ефективним є мембранне розділення — первапорація [5, 6]. Разом з тим, широке впровадження мембранних технологій гальмується недостатнім теоретичним та експериментальним вивченням масообмінних та теплових процесів в них, зокрема: механізмів переносу органічних речовин, впливу температури процесу на перенос органічних речовин в стінці мембрани та в міжмембранному просторі. І тому, для вибору ефективної технологічної схеми, режимів та вдосконалення конструкції мембранного апарату необхідним є:

- 1) теоретичне дослідження явищ переносу органічних речовин в водно-органічній суміші та мембрані шляхом фізичного та математичного моделювання тепло- і масообміну при первапорації рідкого органічного компоненту суміші через непористу стінку циліндричної мембрани з урахуванням граничних умов;
- 2) теоретичне визначення розподілу концентрації органічного компоненту в поперечному напрямку по всій довжині мембрани в залежності від температури.

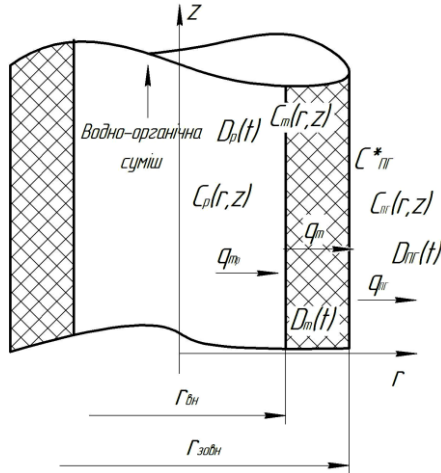
**Виклад основних результатів.** Для прикладу, розглянемо процес первапорації органічного розчинника, що міститься у стічній воді, яка подається всередину мембрани. Мембрана виготовлена у вигляді трубки з внутрішнім радіусом  $r_{\text{вн}}$  і зовнішнім —  $r_{\text{зовн}}$  (рис. 1). Мембрана всередині повністю заповнена рідкою фазою (стічною водою). При контакті забрудненої води з внутрішньою поверхнею мембрани, розчинник дифундує в матеріал мембрани. Рушійною силою процесу переносу розчинника є різниця концентрації, яка призводить до руху розчинника на зовнішню поверхню. Із зовнішньої поверхні розчинник випаровується в навколишнє середовище, який представляє парогазову суміш, яка складається з пари розчинника і носія (наприклад — повітря). В процесі первапорації концентрація розчинника зростає до повного вичиснення носія з об'єму навколишнього середовища.

Процес вилучення розчинника з стічної води залежить від :

- 1) температури;
- 2) режиму руху рідини в середині трубки;
- 3) інтенсивності відведення пари розчинника з простору, тобто розчинник поступає в теплообмінник де відбувається процес конденсації.

Інтенсифікація процесу первапорації розчинника залежить від підведення його з рідкої фази до внутрішньої поверхні мембрани,

перенесення розчинника через мембрану і відведення розчинника з зовнішньої поверхні мембрани.



**Рис. 1.** До розгляду особливостей процесу первапорації

На кожній з цих ділянок створюються потоки маси розчинника і найкращим вважається такі умови роботи апарату, коли ці потоки маси рівні.

*Формулювання математичної моделі.* Математична модель дозволяє визначити концентраційні поля органічного компонента в рідині, що проходить через мембрану та в самій мембрані, а також виявити фактори, що впливають на швидкість виділення органічної домішки.

Розглянемо рівняння руху для рідини в середині мембрани в умовах ламінарного руху ( $W$  — швидкість руху модельної рідини). Значення  $W_r$  можна вважати близьким до нуля, а оскільки задача осесиметрична то  $W_\varphi$  також дорівнює нулю. Отже рівняння руху записується тільки в проекції на вісь  $z$ :

$$\rho \left( \frac{\partial W_z}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_\varphi}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 W_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 W_z}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

Враховуючи також що  $\frac{\partial W_z}{\partial z} = 0$ , то з урахуванням останніх припущень рівняння приймає вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 W_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = 0. \quad (2)$$

Рівняння конвективного масопереносу всередині мембрани

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial C_p}{\partial t} + W_r \frac{\partial C_p}{\partial r} + \frac{W_\varphi}{r} \frac{\partial C_p}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial C_p}{\partial z} \right) = \\ & = D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C_p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 C_p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_p}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В умовах ламінарного руху рідини приймаємо  $W_r = 0$ ,  $W_\varphi = 0$ . Опір переносу маси за рахунок дифузії в напрямку осі  $\varphi$  і  $z$  набагато більший ніж в напрямку осі  $r$ , приймаємо  $\frac{\partial C_p}{\partial \varphi} = 0$ ;  $\frac{\partial C_p}{\partial z} = 0$  — і, тоді, рівняння перетворюється до вигляду:

$$W_z \frac{\partial C_p}{\partial \tau} = D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C_p}{\partial r} \right) \right), \quad (4)$$

або

$$\frac{\partial C_p}{\partial \tau} = \frac{D}{W_z} \left( \frac{\partial^2 C_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_p}{\partial r} \right). \quad (5)$$

Для визначення розподілення швидкості  $W_z$  поблизу внутрішньої поверхні мембрани скористаємося методикою [7]. Для цього запишемо рівняння рівня руху у вигляді:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 W_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (6)$$

Для даного рівняння граничними умовами будуть:

$$W_z = 0 \text{ при всіх } r = r_{\text{вн}}. \quad (7)$$

Розв'язавши рівняння (6), ми отримаємо розподілення швидкостей в поперечному перерізі мембрани:

$$W_z(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (r_{\text{вн}}^2 - r^2). \quad (8)$$

Використавши вираз для визначення об'єму рідини, яка проходить через поперечний переріз мембрани і здійснивши відповідні перетворення отримаємо вираз для визначення градієнту тиску:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8G\mu}{\pi r_{\text{вн}}^4}. \quad (9)$$



Підставивши вираз для визначення градієнту тиску в рівняння  $W_z(r)$ , отримаємо наступне рівняння для розподілення швидкостей в поперечному перерізі мембрани:

$$W_z(r) = \frac{2G}{\pi \rho r_{\text{вн}}^4} (r_{\text{вн}}^2 - r^2). \quad (10)$$

Запишемо рівняння конвективного масопереносу у вигляді

$$\frac{\partial C_p}{\partial \tau} = \frac{D}{W_z} \left( \frac{\partial^2 C_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_p}{\partial r} \right). \quad (11)$$

Це рівняння належить до диференціальних рівнянь параболічного типу.

Запишемо  $f(r, z) = \frac{D}{W_z}$ , тоді попереднє рівняння представимо у вигляді:

$$\frac{\partial C_p}{\partial \tau} = f(r, z) \cdot \left( \frac{\partial^2 C_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_p}{\partial r} \right). \quad (12)$$

Враховуючи, що функція  $f(r, z)$  нелінійно залежить від координат  $r$  і  $z$ , то для розв'язання останнього рівняння необхідно використовувати наближені або числові методи.

Розподілення концентрацій органічного розчинника в мембранному елементі описується рівнянням конвективної дифузії:

$$\left( \frac{\partial C_m}{\partial t} + W_x \frac{\partial C_m}{\partial x} + W_y \frac{\partial C_m}{\partial y} + W_z \frac{\partial C_m}{\partial z} \right) = D \left( \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} \right). \quad (13)$$

Дане рівняння виражає розподіл концентрацій органічного компоненту в середовищі, яке рухається при несталому процесі масообміну. На несталість процесу вказує складова —  $\frac{\partial C_m}{\partial t}$ , яка показує зміну концентрації з часом. Для циліндричної системи координат другий закон Фіка виглядатиме:

$$\frac{dC_m}{dt} = D \left( \frac{\partial^2 C_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_m}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} \right). \quad (14)$$

Розміщуємо систему координат на площині симетрії як показано на рисунку 1, вісь  $z$  направляємо вздовж осі елемента. Задачу розв'язуємо в циліндричній системі координат.

Масообмін направлено в радіальному напрямі (вздовж осі  $r$ ), вісь  $z$  суміщена з віссю труби і масообміном вздовж осі  $z$  нехтуємо, тому:

$$\frac{\partial C_M}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

та

$$\frac{\partial^2 C_M}{\partial z^2} = 0. \quad (16)$$

Матеріал мембранного елемента — ізотропний, тобто його властивості у всіх точках однакові. Якщо умови масообміну на внутрішній і зовнішній границі мембранного елемента постійні (осесиметричні), то тоді концентрація не повинна змінюватись також вздовж  $\varphi$ , тобто градієнт:

$$\frac{\partial C_M}{\partial \varphi} = 0 \quad (17)$$

та

$$\frac{\partial^2 C_M}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (18)$$

З урахуванням цього, рівняння масопереносу в мембрані приймає вид:

$$\frac{\partial C_M}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C_M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_M}{\partial r} \right). \quad (19)$$

Геометричні та фізичні умови однозначності. Запишемо геометричні та фізичні умови, які характеризують відповідно форму і розміри області, в якій відбувається конкретний процес переносу та фізичні властивості середовища і їх зміну в залежності від параметрів процесів.

Мембранний елемент має форму порожнистого циліндра, симетричного відносно осі  $z$ , із зовнішнім радіусом  $d_{зовн}$ , внутрішнім  $d_{вн}$ , довжиною  $L$  ( $L \gg d_{зовн}$ ). Так як мембранний елемент має циліндричну форму, то для його опису використовуємо циліндричну систему координат: вісь  $z$  — вісь симетрії, вісь  $r$  співпадає по напрямку з радіусом, а вісь  $\varphi$  — вісь обертання навколо власної осі циліндра (кутова координата).

При формулюванні математичної моделі приймаємо наступні припущення:

- 1) внутрішній об'єм мембранного елемента повністю заповнений вихідним розчином;
- 2) рух рідини, що знаходиться всередині мембранного елемента, є ламінарним; профіль швидкостей повністю розвиненим;
- 3) процес відбувається в ізотермічних умовах;
- 4) тепловий потік і потік маси направлені вздовж осі  $r$ ;
- 5) градієнти температур і концентрацій в напрямку  $\varphi$  відсутні;
- 6) мембрана має регулярну структуру.

*Початкові умови.* Формулювання початкових умов полягає у визначенні закону розподілу концентрації всередині потоку рідини в мембрані в залежності від висоти мембрани.

Тобто початкові умови записуються наступним чином:

$$z = 0, C = C_{pn}; \quad (20)$$

$$r = 0, \frac{\partial C}{\partial r} = 0; \quad (21)$$

$$r = r_{вн}, C = C^*, \quad (22)$$

де  $C_{pn}$  — початкова концентрація органічного компоненту,  $C^*$  — рівноважна концентрація.

*Граничні умови.* Граничні умови для масообмінної задачі розглядаються на внутрішній та зовнішній поверхнях мембрани мембранного елемента. Для даних умов задаються концентрації органічної домішки на границі середовищ і закон масообміну між поверхнею тіла і зовнішнім середовищем.

Враховуючи, що

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_{вн} \quad C = C^* \\ \text{при } r = r_{зовн} \quad C = C_{zp}^* \end{array} \right\}, \quad (23)$$

можна виразити процеси масообміну на границі розподілу:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_{вн} \quad \beta_p (C_{pn} - C^*) = -D_m \frac{\partial C_m}{\partial r} \\ \text{при } r = r_{зовн} \quad \beta_{пг} (C_{zp}^* - C_{пг}) = -D_m \frac{\partial C_m}{\partial r} \end{array} \right\}, \quad (24)$$

де  $\beta_p$  — коефіцієнт масовіддачі вихідної суміші, м/с;  $\beta_{пг}$  — коефіцієнт масовіддачі парогазової суміші, м/с;  $C_{pn}$  — концентрація органічної домішки у вихідній суміші, кг/м<sup>3</sup>;  $C_p^*$  — концентрація органічної домішки на внутрішній стінці мембранного елемента, кг/м<sup>3</sup>;  $C_{zp}^*$  — концентрація органічної домішки на зовнішній стінці мембранного елемента, кг/м<sup>3</sup>;  $C_{пг}$  — концентрація органічної домішки у парогазової суміші, кг/м<sup>3</sup>;  $D_m$  — коефіцієнт дифузії органічної домішки в матеріалі мембрани, м<sup>2</sup>/с;  $C_p, C_m$  — концентрація органічної домішки в даній точці у суміші або мембрані відповідно, кг/м<sup>3</sup>.

Остаточна модель первапорації можна записати наступним чином:

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} = \frac{D_p}{W_z} \left( \frac{\partial^2 C_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_p}{\partial r} \right); \quad (25)$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial t} = D_M \left( \frac{\partial^2 C_M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_M}{\partial r} \right); \quad (26)$$

$$z = 0, C_p = C_{pH}; \quad (27)$$

$$r = 0, \frac{\partial C_p}{\partial r} = 0; \quad r = r_{вн}, C_p = C_p^*; \quad (28)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_{вн} \quad \beta_p (C_{pH} - C^*) = -D_M \frac{\partial C_M}{\partial r} \\ \text{при } r = r_{зовн} \quad \beta_{ПГ} (C_{2p}^* - C_{nz}) = -D_M \frac{\partial C_M}{\partial r} \end{array} \right\} \quad (29)$$

Розв'язання рівнянь (25)-(26) при початкових умовах (27)-(28) і граничних умовах (29) дозволить визначити розподіл концентрацій у потоці рідини, яка проходить в мембрані, а також по товщині мембрани в залежності від розмірів мембрани, режимів руху вихідної та парогазової суміші, концентрації органічної домішки в вихідній та парогазовій суміші.

*Вибір методу розв'язання.* Для розв'язання рівняння конвективної дифузії в рідкій фазі виберемо метод скінченних різниць (рис. 2).

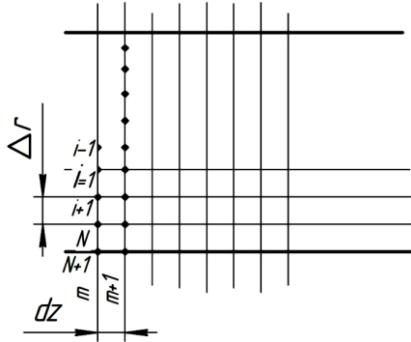


Рис. 2. Схема до методу скінченних різниць

Розпишемо отримане рівняння відповідно до цього методу:

$$S_i = C_{i,m}, U_i = C_{i,m+1}, \quad (30)$$

$$i = 2 \text{ до } N \quad (31)$$

$$\frac{U_i - C_i}{\Delta \tau} = f(r_i, z_m) \left( \frac{S_{i+1} - 2S_i + S_{i-1}}{\Delta r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta r_i} \right) \quad (32)$$

$$i = 1 \text{ до } N \quad (33)$$

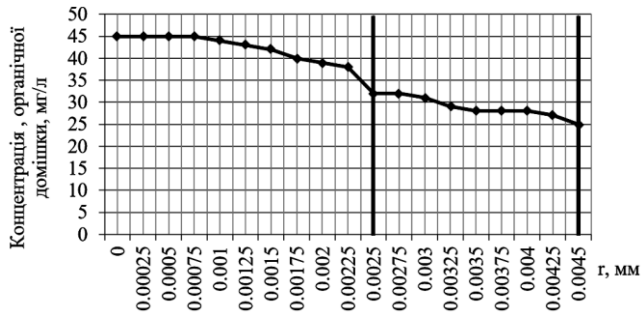
$$U_i = \frac{\Delta \tau}{\Delta r_i^2} f(r_i, z_m) \left( S_{i+1} - 2S_i + S_{i-1} + \frac{\Delta r}{r_i} (S_{i+1} - S_i) \right) \quad (34)$$

$$i = 1 \quad (35)$$

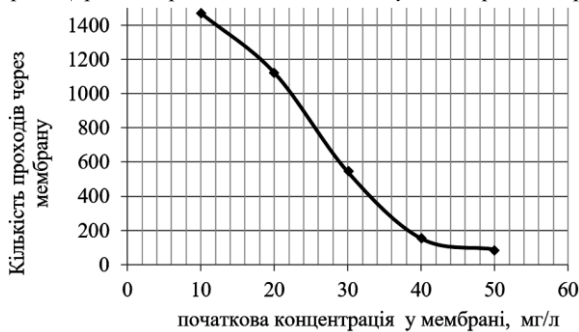
$$U_1 = U_i, C_{N+1} = \frac{D_{\text{мем}}}{D_{\text{рід}}} \frac{\Delta r_{\text{вн}}}{\Delta r_{\text{мем}}} (C_1^* - C_2). \quad (36)$$

Для реалізації математичної моделі використовуємо середовище Qbasic. Для цього спочатку задаємо ряд початкових даних — коефіцієнти масовіддачі рідини та парогазової суміші; коефіцієнт дифузії в полімері; густину матеріалу мембрани; концентрацію вихідної речовини в суміші; витрати суміші, діаметр та товщина мембранного елемента. В тілі програми записано формули визначення концентрації органічної домішки в рідині та в мембрані. Саме ці формули є визначними, і дають можливість показати розподіл концентрацій.

Провівши розрахунки за допомогою програми, реалізованої в середовищі Qbasic, бачимо що, при різному насиченні (початковій концентрації) органічною речовиною мембрани очищення до гранично допустимого рівня відбувається за різні проміжки часу. Залежність часу виділення (кількість проходів через мембрану) від насичення мембрани (початкової концентрації) показані на графіку (рисунок 3 а, б).



**Рис. 3, а.** Розподіл концентрації органічної домішки у суміші та матеріалі мембрани (при 100 проходженні вихідної суміші через мембрану)



**Рис. 3, б.** Залежність кількості проходів через мембрану від початкової концентрації в мембрані

### Висновки.

1. Було проведено теоретичне дослідження масообміну при використанні первапорації (через непористу циліндричну стінку мембрани) для виділення органічних домішок із водно-органічної суміші.
2. Побудована математична модель описує масообмінну обстановку в апараті під час розділення водно-органічних сумішей. Модель враховує всі особливості процесу.

### Список використаних джерел:

1. Marion K. Buckley-Smith. The Use of Solubility Parameters to Select Membrane Materials for pervaporation of Organic Mixtures: A thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Hamilton: The University of Waikato, 2006.
2. Буртная И. А., Литвиненко Д. В. Полимерные мембраны для первапорационных процессов очистки сточных вод. *Publishing house Education and Science s.r.o.* 2011. Т. 10. С. 96-98.
3. Дытнерский Ю. И., Быков И. Р., Акобян А. А., Смекалов В. Т., Цоколаев Б. Р. Разделение жидких смесей испарением через мембрану и мембранной дистилляцией. Москва: НИИТЭхим, 1989. 47 с.
4. Поляков А. М. Некоторые аспекты первапорационного разделения жидких смесей. Часть 1. *ВИНИТИ РАН, Информационно-аналитический журнал «Мембраны»*. 2004. № 4 (24). С. 29-44.
5. Буртная И. А., Гачечиладзе О. О. Процессы переноса в полимерных мембранах. Часть 3. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2013. Т. 6, № 6 (66). С. 4-7.
6. Буртная И. А., Гачечиладзе О. О. Процессы переноса в полимерных мембранах. Часть 4. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. Т. 2, № 6 (68). С. 4-11. URL: <http://journals.urau.ua/eejet/article/view/23383/20988>.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Москва: Наука, 1974. 708 с.

### DEFINITION OF BOUNDARY AND PHYSICAL CONDITIONS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF MASS EXCHANGE IN THE APPARATUS DURING SEPARATION OF AQUATIC-ORGANIC MIXTURES

The authors developed and improved a mathematical model that describes the mass transfer situation in the apparatus during the separation of water-organic mixtures and shows the pervaporation processes occurring from the process of desorption of components from the membrane element taking into account the mutual influences of process characteristics on environmental characteristics. The influence of external factors for temperature calculation is taken into account. A solution of the corresponding model problem was found using the equation of motion for a fluid in the middle of a membrane under conditions of laminar motion. The results of calculations of the distribution of the concentration of or-

ganic impurities in the mixture and the membrane material are presented. The dependence of the number of passes through the membrane on the initial concentration in the membrane was investigated. The possibility of determining the distribution of concentrations in the flow of liquid passing through the membrane, as well as the thickness of the membrane depending on the size of the membrane, modes of movement of the source and vapor-gas mixture, the concentration of organic impurities in the source and vapor-gas mixture. The constructed mathematical model takes into account the geometric and physical conditions that characterize, respectively, the shape and size of the area in which a particular transfer process and the physical properties of the environment and their change depending on the process parameters. The finite difference method is chosen to solve the convective diffusion equation in the liquid phase. Mathematical modeling clearly demonstrates the effect of factors, but, in turn, does not reduce the impact. Taking into account the initial conditions and boundary conditions will determine the distribution of concentrations in the fluid flow passing through the membrane, as well as the thickness of the membrane depending on the membrane size, modes of movement of the source and vapor-gas mixture, the concentration of organic impurities in the source and vapor-gas mixture. Mathematical modeling of heat and mass transfer inside the apparatus to determine the concentration field of the organic component and identify factors that affect the rate of separation of organic impurities.

**Key words:** *mathematical model, pervaporation, membrane, organic impurities, membrane apparatus, model fluid, convective diffusion.*

Отримано: 20.10.2021

УДК 532.529: 532.591

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.88-96

С. А. Положаєнко, д-р техн. наук, професор,

Д. А. Лись, аспірантка

Державний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

## МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ГАЗОРІДИННИХ СИСТЕМАХ

В термінах гідродинамічної теорії гетерогенних систем розглянуто можливості математичного опису (формалізації) процесів динаміки газорідинних двофазних систем. При цьому, на підставі врахування ефекту існування нерозчинених бульбашок газу у не збудженій рідині, так і у рідині, що зазнає зовнішнього впливу з утворенням хвильового руху, запропоновано математичні моделі динамічних станів газорідинних двофазних систем. Актуальність таких моделей полягає в тому, що двофазні потоки являють собою основне «робоче тіло», зокрема, в енергетичних установках та апаратах хімічної технології, а робочі процеси в металургійній, нафтодобувній та нафтопереробній (в т. ч. нафтохімічній) промисловості, в криогенних апаратах супроводжуються утворенням парорідинних систем. В зв'язку з цим, наявність адекватних математичних моделей динаміки для середовищ, які розглядаються, заснованих на врахуванні законів збереження (маси, імпульсу та енергії) та придатних для застосування у інженерних розрахунках, слід розглядати як перевагу над емпіричними моделями, що забезпечують задовільну точність розрахунків лише в обмеженому діапазоні технологічних параметрів і абсолютно непридатних для позаштатних та аварійних режимів. Проведений аналіз розповсюдження хвильових процесів у газорідинному середовищі на основі гетерогенного представлення фізичних явищ в ньому показує аналогічність традиційному газодинамічному підходу, але, тим не менш, газорідинна суміш має певні особливості. Перед усім це стосується наявності так званої «бульбашкової» суспензії, яка визначає суттєву нелінійність динамічного режиму у газорідинних середовищах, що спричинено можливістю стискання двофазної системи під впливом зовнішнього впливу (тиску із зовні). Наслідком останнього є низькі значення швидкості звука, спричинена залежністю від тиску, особливо на ділянках його зростання. Запропоновані моделі є достатньо інформативними, що дозволяє робити висновки стосовно можливих механізмів перебігу динамічних процесів у газорідинних середовищах, та прогнозувати подальший їх розвиток за умови апріорної інформації про газодинамічні характеристики реальної двофазної системи.



**Ключові слова:** газорідинні суміші, двофазні системи, бульбашкові суспензії, хвильові процеси, математична модель, нелінійні та ударні хвилі.

**Вступ.** Хвильові процеси в механіці двофазних систем займають особливе місце, оскільки найбільш яскраво ефекти неоднорідності проявляються при розповсюдженні хвиль, а з другого боку, акустичні хвилі в таких системах — найбільш досяжний та ефективний спосіб вивчення структури самої двофазної системи.

Середовище, в якому швидкість розповсюдження збурень залежить від частоти осциляцій, можна вважати *диспергуючим* [1, 2]. Таку властивість мають газорідинні суміші. Найпростішою змістовною моделлю у даному випадку є ідеальна, в цілому така, що перебуває у спокою та необмежена у об'ємі рідина, з рівнорозподіленими у ній газовими бульбашками, які зберігають масу та сферичну форму. Бульбашки при цьому перебувають на достатньому віддаленні одна від одної, так що невизначені стикання відсутні.

На даний час в літературі відсутні адекватні математичні моделі (ММ) хвильових процесів двофазних (у випадку, що розглядається — газорідинних) систем, а у інженерних розрахунках застосовують, здебільшого, емпіричні моделі, які мають досить вузький діапазон застосування, що обмежується регламентними режимами роботи технологічних апаратів, і є зовсім непридатними для опису нештатних та аварійних режимів.

**Мета роботи.** Розробка ММ хвильових процесів у двофазних (газорідинних) системах, що базуються на строгій формалізації масообмінних явищ, які спостерігаються у цих системах, та орієнтованих на застосування у якості модельної підтримки інструментальних програмних засобів (ППЗ) при автоматизації технологічних операцій у переробних та хімічній галузях виробництва

**Основна частина.** Запропонуємо ММ найбільш поширених випадків існування двофазних газорідинних систем, притаманних технологічним процесам у нафтодобувній, нафтохімічній, металургійній та інших галузях виробництва, для яких (процесів) характерно утворення та стійке існування нерозчинних суспензій.

**1. Динамічна модель бульбашкової суспензії.** Ефективні радіуси приєднаних мас рідини менше відстані між бульбашками, і взаємодія відбувається лише через поле тисків. Тому рівняння гідродинаміки можна замкнути рівнянням Релея для осциляцій *одиначної бульбашки* у необмеженому об'ємі ідеальної рідини, прийнявши припущення щодо можливості заміни тиску та нескінченості тиску суміші. Таким чином, система рівнянь, що описують розповсюдження збурень складається з рівнянь руху суміші та рівняння осциляції бульбашок

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\rho_1 \left[ R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = P_2 - P_1, \quad (3)$$

де  $P$  — тиск, під яким перебуває газорідинна суміш,  $u$  — швидкість руху газорідинної суміші,  $R$  — радіус бульбашок,  $\rho_i$  — густина ( $i=1,2$ , де індексу 1 відповідає рідина, а індексу 2 — газ);  $\rho = (1-\varphi)\rho_1 + \varphi\rho_2$  — густина суміші,  $\rho_1 = \text{const}$  ( $\varphi$  — об'ємний газовміст).

Властивість стискання суміші у ММ (1)-(3) визначається властивістю стискання газу, який перебуває у бульбашках, а осциляції радіуса бульбашок  $R$  визначається інерцією приєднаної маси рідини та різницею тисків  $\Delta P = P_2 - P_1$ .

При достатньо великому числі бульбашок можна прийняти також, що їх число в одиниці маси суміші  $N$  залишається постійним. Тоді об'єм газу в одиниці маси суміші  $V$ , радіус бульбашок  $R$ , густина суміші  $\rho$ , об'ємний газовміст  $\varphi$  та масовий газовміст  $X$  зв'язано співвідношенням [3]

$$\rho^{-1} = V + (1-X)/\rho_1; V = \frac{4}{3}\pi R^3 N; \varphi = V\rho; -d\rho/dt = \rho^2 dV/dt. \quad (4)$$

Якщо амплітуда осциляцій радіусу бульбашок мала, що має місце при акустичних збуреннях, можна записати

$$\begin{aligned} \delta R \ll R_0; \delta P \ll P_0; dV = 4\pi R_0^2 N dR, \\ \frac{dR}{dt} = -\left( \frac{R_0}{3\varphi_0\rho_0} \right) \frac{d\rho}{dt}; R \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{R_0^2}{3\varphi_0\rho_0} \cdot \frac{d^2 \rho}{dt^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Індексом 0 відмічено значення параметрів у не збудженому (відносно  $t=0$ ) стані. У цьому наближенні узагальнене рівняння динаміки бульбашок у ідеальній рідині набуде вигляду

$$\frac{R_0^2}{3\varphi_0} \cdot \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{R_0^2}{6\varphi_0^2 \rho_0} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \delta P_2 = \delta P_1, \quad (6)$$

$\delta P_2 = P_2 - P_0$ ;  $\delta P = P - P_0$ ;  $P_0 = P_{1_0} - P_{2_0}$  — тиск у не збудженій суміші. Тиск газу у бульбашці змінюється по політропі

$$P_2 V_2^n = P_{2_0} V_{2_0}^n. \quad (7)$$

Показник ступеню, який приймає значення (у залежності від інтенсивності теплообміну між бульбашками та рідиною) от  $n = \gamma = C_{P_2}/C_{V_2}$  до  $n=1$  (де  $C_{P_2}$  та  $C_{V_2}$  — відповідні осциляції). Оскільки термічний опір рідини значно нижче термічного опору газу, то ступінь адіабатичності процесу залежить практично тільки від теплопровідності газу та радіусу бульбашок. Зазвичай істотне відхилення від адіабатичності спостерігається тільки у бульбашок інертних газів. Надалі приймемо  $n = \gamma$ .

Для малих відхилень від початкового стану з точністю до  $(\delta V_2/V_{2_0})^2$  з (7) отримаємо

$$\delta P_2 = -\gamma P_0 (\delta V_2/V_{2_0}) + 0,5\gamma(\gamma+1)P_0 (\delta V_2/V_{2_0})^2. \quad (8)$$

Переходячи від  $\delta V_2$  до  $\delta \rho$  з урахуванням (4)  $\delta V_2/V_{2_0} = -\delta \rho / (\rho_0 \varphi_0)$ , запишемо (8) у вигляді

$$\delta P_2 = c_0^2 \delta \rho + \frac{(\gamma+1)c_0^2}{2\rho_0 \varphi_0} (\delta \rho)^2, \quad (9)$$

де  $c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0 \varphi_0}$  — низькочастотна швидкість звуку у бульбашковому середовищі.

Таким чином, третій член рівняння (6) містить нелінійність, яка суттєво перевищує за значенням гідродинамічну не лінійність в (1). З урахуванням домінуючого значення «бульбашкової» нелінійності [4-6] перепишемо рівняння руху (1) у лінеаризованому вигляді

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

а в (3) перейдемо до густини суміші

$$2\beta_0 \frac{d^2 \rho}{dt^2} + c_0^2 \delta \rho + B c_0^2 (\delta \rho)^2 = \delta P, \quad (11)$$

де  $\beta_0 = R_0^2 / 6\varphi_0 (1 - \varphi_0)$ ;  $B = (\gamma + 1) / (2\rho_0 \varphi_0)$ .

Видаливши швидкість плинину суміші з рівнянь (10)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

двічі виконавши диференціювання (11) за часом, використовуючи (12), отримаємо

$$2\beta_0 \frac{\partial^4 \rho}{\partial t^2 \partial x^2} + c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial \rho}{\partial t^2} + B c_0^2 \frac{\partial^2 (\delta \rho^2)}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

Перший член рівняння (13) відображає вплив інерції рідини та спричиняє залежність швидкості звуку від частоти накладеного збудження, останній член визначає нелінійні властивості бульбашкового середовища. Якщо дисперсійний та нелінійний ефекти малі, то в якості першого наближення отримуємо відоме акустичне рівняння [7]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0,$$

що цілком задовольняє точності інженерних розрахунків.

**2. Динамічна модель для середовища без дисперсії енергії.** У бігучій хвилі тиск та густине у першому акустичному наближенні зв'язано співвідношенням

$$\delta P \approx c_0^2 \delta \rho. \quad (14)$$

Якщо уявити, що в системі координат, яка рухається разом із хвилею, сигнал, за рахунок проявлення ефектів дисперсії та не лінійності деформується мало, то слід замінити, у останньому нелінійному члені рівняння (13)  $\delta \rho$  на  $\delta P$  у відповідності до (14), в результаті чого отримаємо наступне рівняння

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{B}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 (\delta \rho)^2}{\partial t^2} - 2\beta_0 \frac{\partial^4 P}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad (15)$$

яке можна ототожнити з нелінійним рівнянням Буссінеска [8]. Останнє, та його аналоги, на поточний час є найбільш ефективними моделями щодо опису процесів розповсюдження хвиль в середовищах з дисперсійними та нелінійними властивостями.

У канонічній формі рівняння Буссінеска набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 (\delta P)^2}{\partial x^2} - 2\beta_0 \frac{\partial^4 P}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \quad (16)$$

При заміні в малому дисперсійному члені другої похідної по  $t$  у відповідності з акустичним рівнянням можна отримати іншу форму рівняння Буссінеска

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 (\delta P)^2}{\partial x^2} - 2\beta_0 c_0^2 \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = 0. \quad (17)$$

Хвильові члени цього рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x} \right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x} \right). \quad (18)$$

Якщо хвиля розповсюджується в один бік і слабо деформується в системі відліку, що рухається зі швидкістю  $c_0$ , то  $\partial/\partial t = -c_0 \partial/\partial x$ . Відповідно рівняння Буссінеска можна перетворити у наступне:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\gamma + 1}{2\varphi_0 \rho_0 c_0} \delta P \frac{\partial P}{\partial x} - \beta_0 \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (19)$$

або, знову скориставшись співвідношенням  $\partial/\partial t = -c_0 \partial/\partial x$ , привести до рівняння наступного виду

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} c_0 \frac{\delta P}{P_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \beta_0 c_0 \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (20)$$

В системі координат  $t, \xi = x - c_0 t$  рівняння (20) перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \cdot \frac{\partial P}{P_0} c_0 \frac{\partial P}{\partial \xi} + \beta_0 c_0 \frac{\partial^3 P}{\partial \xi^3} = 0 \quad (21)$$

або у безрозмірній формі

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} + \bar{P} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \frac{\beta_0 c_0}{l_0^2 U_0} \cdot \frac{\partial^3 \bar{P}}{\partial \xi^3} = 0. \quad (22)$$

В якості масштабів тут прийнято:  $l_0, \delta P_0$  — ширина та інтенсивність (амплітуда) початкового збурення;  $U_0 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \cdot \frac{\delta P_0}{P_0} c_0$  — масштабна швидкість.

Запишемо (20) у лінійній формі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0; \quad \beta = \beta_0 c_0, \quad (23)$$

де  $c_0 = \sqrt{(\gamma P_0)/[\rho_2 \varphi_0 (1 - \varphi_0)]}$  — адіабатична швидкість звуку. Обчислимо дисперсійне співвідношення, представивши розв'язок у вигляді монохроматичної хвилі

$$u = A \exp[i(kx - \omega t)], \quad (24)$$

де  $k = 2\pi/\lambda$  — хвильове число,  $\lambda$  — довжина хвилі,  $\omega$  — частота розповсюдження хвилі. Отримаємо

$$-i\omega + ic_0 k - i\beta k^3 = 0; \quad \omega = c_0 k - \beta k^3. \quad (25)$$

Фазова та групова швидкості хвилі визначаються формулами

$$c_\phi = \omega/k = c_0 - \beta k^2; \quad c_g = d\omega/dk = c_0 - 3\beta k^2. \quad (26)$$

Залежність фазової швидкості від частоти можна записати у вигляді  $\omega = c_\phi \sqrt{(c_0 - c_\phi)/\beta}$ . Вона характеризує дисперсійні властивості бульбашкового середовища, які спричиняють появу цікавих ефектів при розповсюдженні збурень. Зокрема, в системі, яка характери-

зується дисперсією, кожна з компонент Фур'є довільного початкового імпульсу розповсюджується з власною швидкістю і форма сигналів змінюється у процесі руху.

Розглянемо хвилю  $f = A \cos(kx - \omega t)$ , яка прогресує. Уявімо, що в середовищі розповсюджуються збурення  $f_1$  з хвильовим числом  $k_1 = k + \Delta k$  та  $f_2$  з хвильовим числом  $k_2 = k - \Delta k$ , а дисперсійне співвідношення має вигляд  $\omega = W(k)$ . Тоді

$$\omega + \Delta\omega = \omega + \Delta k \cdot (dW/dk), \quad \Delta\omega = c\Delta k, \quad (27)$$

а вирази для  $f_1$  та  $f_2$  запишуться наступним чином

$$f_1 = A \left[ \cos(kx - \omega t) \cos(\Delta k(x - ct)) - \sin(kx - \omega t) \sin(\Delta k(x - ct)) \right], \quad (28)$$

$$f_2 = A \left[ \cos(kx - \omega t) \cos(\Delta k(x - ct)) + \sin(kx - \omega t) \sin(\Delta k(x - ct)) \right]. \quad (29)$$

Суперпозиція цих двох розв'язків має вигляд

$$f_1 + f_2 = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(\Delta k)(x - ct). \quad (30)$$

Початкове збурення кінцевої тривалості в середовищі з дисперсією, в тому числі і в бульбашковій, при достатньо великих розповсюдженнях у часі приймає, зазвичай, форму хвильового пакету з сильно осцилюючою амплітудою в середині пакету.

Рівняння  $\partial u / \partial t + \beta (\partial^3 u / \partial \xi^3) = 0$  при великих значеннях часу для початкового, згасаючого при  $\xi = \pm\infty$  збуреннях, має асимптотичний розв'язок виду

$$u = \pi^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m P_m}{m!} (3\beta t)^{-(m+1)/3} Ai^m(\eta), \quad (31)$$

де 
$$\eta = \xi / (3\beta t)^{1/3}; \quad P_m = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^m u(\xi, 0) d\xi; \quad (32)$$

$u(\xi, 0)$  — початковий розподіл;  $Ai^m(\eta)$  — похідні  $m$ -го порядку від

функції Ейрі [9]  $Ai^m(\eta) = (\pi^{-1/2}) \int_0^{\infty} \cos(W^3/3 + W\eta) dW$ . При  $\eta \leq 1$  і

більших у розв'язку можна обмежитись першим членом ряду ( $m = 0$ )

$$u = \pi^{-1/2} P_0 Ai^m(\eta) / (3\beta t)^{-1/3}. \quad (33)$$

Числові дослідження показали, що нелінійне рівняння (23) має деякі цікаві розв'язки у вигляді стаціонарних хвиль, які розповсюджуються з постійною швидкістю без зміни форми. Такий розв'язок

можна віднайти, уводячи нову незалежну змінну  $\xi_1 = \xi - v_1 t$  та приймаючи, що  $u(\xi, t) = u(\xi - v_1 t)$ . Значення  $v_1$  повинно визначатися у процесі розв'язування. Після заміни можна отримати рівняння

$$\beta \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = (u - v_1) \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \quad (34)$$

інтегрування якого дає

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} = (u^2/2) - v_1 u + C_1/2. \quad (35)$$

Множачи останнє рівняння на  $u$  і, знову інтегруючи, отримаємо

$$(du/d\xi)^2 = \left[ (u^3/3) - v_1 u^2 + C_1 u + C_2 \right] / \beta, \quad (36)$$

тут  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) — постійні інтегрування. Дійсні розв'язки існують, якщо поліном додатний або дорівнює нулю.

**Висновки.** Отримано моделі хвильових процесів у газорідних системах для випадків бульбашкової суспензії та середовища без дисперсії енергії. Як таких. Що найбільш часто зустрічаються на практиці. Отримані моделі адекватно відображають фізичні явища динамічного руху двофазної газорідної системи і можуть бути легко застосовані у інженерних розрахунках.

### Список використаних джерел:

1. Кутателадзе С. С. Анализ подобия и модели термодинамике газожидкостных систем. *Журн. прикл. мех и техн. физики*. 2000. № 5. С. 24-33.
2. Акуличев В. А., Алексеев В. Н. О динамике паровых пузырьков в жидководородных пузырьковых камерах. *Акуст. журн*. 2007. Т. 17, № 3. С. 356-364.
3. Праузниц Дж. М., Эккерт К. А., О'рай Р. В., О'Коннепп Дж. П. Машинный расчет парожидкостного равновесия многокомпонентных смесей. Пер. с англ. Москва: Химия, 2007. 217 с.
4. Гарипов Р. М. Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. *Журн. прикл. мех. и техн. физики*. 2003. № 6. С. 3-24.
5. Zwick S. A. Behaviour of small permanent gas bubbles in a liquid. *J. Math. and Phys.* 2008. Vol. 37, № 3. P. 36-52.
6. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа. *Журнал прикл. мех. и техн. физики*. 2008. № 4. С. 29-34.
7. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена. *Журн. прикл. мех. и техн. физики*. 2005. № 3. С. 67-74.
8. Campbell I. J., Pitcher A. S. Shock waves in a liquid containing gas bubbles. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. 2008. Vol. 243. № 1235. P. 534-545.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Москва: Наука, 1977. 831 с.

## SIMULATION OF WAVE PROCESSES IN GAS-LIQUID SYSTEMS

In terms of the hydrodynamic theory of heterogeneous systems, the possibilities of mathematical description (formalization) of the processes of dynamics of gas-liquid two-phase systems are considered. In this case, based on the effect of the existence of undissolved gas bubbles in the unexcited liquid and in the liquid exposed to the formation of wave motion, a mathematical model of the dynamic states of gas-liquid two-phase systems is proposed. The relevance of such models is that two-phase flows are the main «working fluid», in particular, in power plants and chemical technology, and work processes in the metallurgical, oil and refining (including petrochemical) industry, in cryogenic devices accompanied by the formation of vapor-liquid systems. In this regard, the availability of adequate mathematical models of dynamics for the media under consideration, based on conservation laws (mass, momentum and energy) and suitable for use in engineering calculations, should be considered as an advantage over empirical models that provide satisfactory accuracy. calculations only in a limited range of technological parameters and completely unsuitable for emergency and emergency modes. The analysis of the propagation of wave processes in a gas-liquid medium on the basis of a heterogeneous representation of physical phenomena in it shows similarity to the traditional gas-dynamic approach, but, nevertheless, the gas-liquid mixture has certain features. First of all, this concerns the presence of the so-called «bubble» suspension, which determines the significant nonlinearity of the dynamic regime in gas-liquid media, which is caused by the possibility of compression of the two-phase system under external influence (external pressure). The consequence of the latter is low values of the speed of sound caused by the dependence on pressure, especially in areas of its growth. The proposed models are quite informative, which allows us to draw conclusions about the possible mechanisms of dynamic processes in gas-liquid media, and predict their further development under the condition of a priori information about the gas-dynamic characteristics of a real two-phase system.

**Key words:** *gas-liquid mixtures, two-phase systems, bubble suspensions, wave processes, mathematical model, nonlinear and shock waves.*

Отримано: 11.10.2021



УДК 519.6

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.97-106

**С. Ю. Протасов\***, канд. техн. наук,

**В. А. Федорчук\*\***, д-р техн. наук

\*Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси,

\*\*Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **СПОСІБ РАЦІОНАЛЬНОЇ МОДИФІКАЦІЇ ІТЕРАЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Ітераційні методи розв'язування інтегральних рівнянь є потужним інструментом для теоретичних досліджень і практичних розрахунків. Особливість ітераційних методів полягає в простоті обчислювальних алгоритмів, що має істотне значення у процесі комп'ютерної реалізації. Недоліки цього класу методів полягають у проблемі збіжності, а саме ітераційний процес повинен бути збіжним, а швидкість збіжності — високою, що притаманно при чисельному розв'язуванню нелінійних інтегральних рівнянь.

У статті розглянуто спосіб використання комбінації методу Ньютона-Канторовича і квадратурних формул, що дає змогу отримати високоточний чисельний алгоритм для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. Наведено результати розв'язування тестового прикладу, які свідчать про ефективність та високу точність методу. Розглянуто можливість використання алгоритму розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь на основі методу послідовних наближень при інтерполяції ядра кубічним сплайном. Недоліком наведених методів при комп'ютерній реалізації є проблема вибору «кращого» початкового наближення, що, у свою чергу, прискорює збіжність методу і тим самим зменшує накопичення похибки.

Розглянутий у статті спосіб модернізації ітераційних алгоритмів чисельного розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь дозволяє визначити «краще» початкове наближення, що дає змогу збільшити швидкість збіжності ітераційного процесу вихідного методу. Результати обчислювальних експериментів при розв'язуванні інтегрального рівняння Фредгольма II роду підтверджують ефективність застосування модернізованого алгоритму на основі методу простих ітерацій із попередньою оптимізацією початкового наближення.

**Ключові слова:** *нелінійне інтегральне рівняння, ітераційний метод, сплайни, квадратурні формули.*

**Вступ.** При розв'язуванні нелінійних інтегральних рівнянь для теоретичних досліджень і практичних розрахунків широко використовуються ітераційні методи, такі як метод простих ітерацій та метод Ньютона-Канторовича [1, 6]. Особливістю ітераційних методів є простота обчислювальних алгоритмів, що має істотне значення у процесі їх комп'ютерної реалізації. Використання методу простих ітерацій для розв'язування лінійних інтегральних рівнянь дозволяє отримувати завжди збіжний ітераційний процес при слабких обмеженнях на ядро і праву частину. У випадку з нелінійними рівняннями, область збіжності даного методу звужується, а якщо процес і збігається, то в багатьох випадках швидкість збіжності може виявитися низькою [1]. Метод Ньютона-Канторовича є одним із ефективних методів, що дає змогу подолати зазначені труднощі. Дослідження свідчать про те, що він є ефективним і при розв'язуванні багатьох задач для рівнянь Вольтерри, дозволяючи значно прискорити збіжність порівняно з методом простої ітерації або навіть порівняно з більш складними, зокрема спеціалізованими ітераційними методами [1, 6].

**Виклад основного матеріалу.** Використовуючи метод Ньютона-Канторовича для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду [1] отримуємо ітераційний процес:

$$y_k = y_{k-1} + \psi_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

$$\psi_{k-1}(x) = \beta_{k-1}(x) + \int_a^b K'_y(x, s, y_{k-1}(s)) \psi_{k-1}(s) ds, \quad (2)$$

$$\beta_{k-1}(x) = \int_a^b K(x, s, y_{k-1}(s)) ds - y_{k-1}(x). \quad (3)$$

На кожному кроці алгоритму розв'язується лінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду відносно  $\psi_{k-1}(x)$ . Для розв'язання (1) використовується один з обчислювальних методів розв'язування рівнянь Фредгольма II роду методом квадратур [2].

Ітераційний процес має швидку збіжність (за певних умов), але є досить складним у зв'язку з тим, що на кожному кроці ітераційного процесу необхідно знаходити нове ядро  $K'_y(x, s, y_{k-1}(s))$  рівняння.

Алгоритм спрощується шляхом використання рівняння

$$\psi_{k-1}(x) = \beta_{k-1}(x) + \int_a^b K'_y(x, s, y_0(s)) \psi_{k-1}(s) ds. \quad (4)$$

При цьому ядро у процесі розв'язування залишається незмінним, в результаті чого отримуємо менш складний обчислювальний процес.

Модифікований метод збігається повільніше у порівнянні з базовим методом, але вимагає виконання менш складних обчислень і тому часто виявляється кращим.

Модифікований метод Ньютона-Канторовича необхідно використовувати при успішно вибраному початковому наближенні. В протилежному випадку можна зупинитися на деякому  $l$ -му наближенні та починаючи з нього використовувати процес (1), (2), (3).

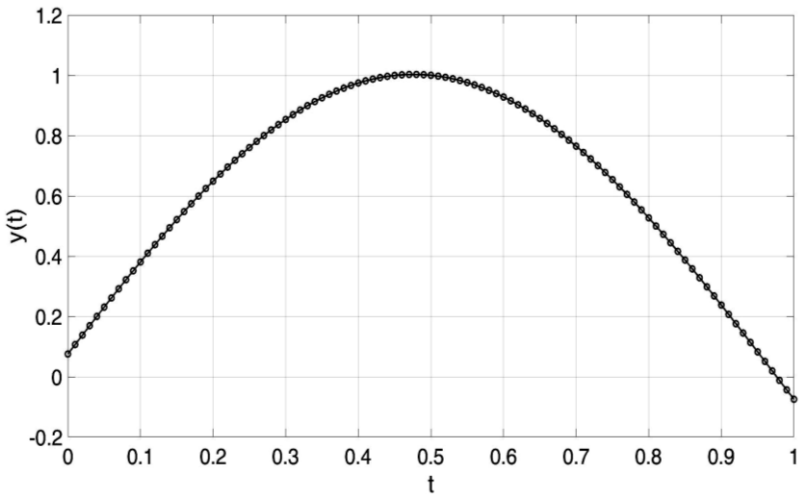
**Приклад 1.** Нехай задано нелінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду вигляду

$$0,01y(t) = \frac{1}{100}\sin(\pi t) + \frac{1}{500}\int_0^1 \cos(\pi t)\sin(\pi t)(y(t))^3 dt, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5)$$

яке має точний розв'язок

$$y(t) = \sin(\pi t) + \frac{1}{3}(20 - \sqrt{391})\cos(\pi t).$$

Розв'яжемо (5) за допомогою методу Ньютона-Канторовича на відрізку  $[0,1]$  з постійним кроком  $h = 0,01$ . Результати точного і наближеного розв'язування представлено на рис. 1, абсолютна похибка розв'язку на рис. 2.



**Рис. 1.** Графіки розв'язків нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма II роду (5) методом Ньютона-Канторовича (— — точний розв'язок, ● — наближений розв'язок)

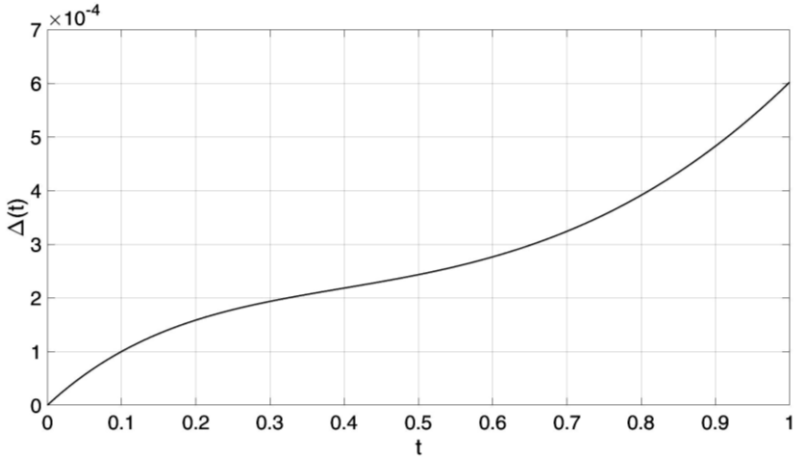


Рис. 2. Графік абсолютної похибки розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма II роду (5) методом Ньютона-Канторовича

Розв'язок тестового прикладу засвідчує, що метод Ньютона-Канторовича є ефективним, високоточним методом розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма II роду.

**Алгоритм розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь на основі методу послідовних наближень при інтерполяції ядра кубічним сплайном.** Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння в загальному вигляді

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s, y(s)) ds, \quad a \leq s \leq b.$$

Розіб'ємо  $[a, b]$  на  $(N-1)$  відрізків з кроком  $h$ , тобто

$$\Delta = \{x_i : x_i = a + (i-1)h, \quad h = (b-a)/(N-1), \quad i = \overline{1, N}\}.$$

Нехай  $S_{\Delta}(\beta; x)$  — інтерполяційний кубічний сплайн для функції  $\beta(x)$ , побудований на сітці із застосуванням умов на кінцях відрізка [3]:

$$p_1 = \frac{1}{6h}(-11\beta_1 + 18\beta_2 - 9\beta_3 + 2\beta_4),$$

$$p_N = \frac{1}{6h}(-2\beta_{N-3} + 9\beta_{N-2} - 18\beta_{N-1} + 11\beta_N), \quad \beta_i = \beta(x_i).$$

Застосуємо формулу

$$\int_a^b S_{\Delta}(\beta; x) dx = \frac{h}{2}(\beta_1 + \beta_N) + h \sum_{i=2}^{N-1} \beta_i + \frac{h^2}{12}(p_1 - p_N).$$

При інтерполяції ядра кубічним сплайном алгоритм отримання наближеного розв'язку на основі методу послідовних наближень має вигляд

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^b S_{\Delta}(K(x, \cdot, y_{n-1}); s) ds,$$

$$y_0(x) = x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де  $S_{\Delta}(K(x, \cdot, y_{n-1}); s)$  є інтерполяційним кубічним сплайном зі змінною  $s$ , який побудований для функції  $K(x, s, y_{n-1}(s))$ .

**Модифікований метод простих ітерацій з попередньою оптимізацією початкового наближення.** Комп'ютерна реалізація методу простих ітерацій передбачає використання квадратурних формул, що вносить похибку в отриманий результат. Тому важливим питанням є вибір «кращого» початкового наближення, що прискорює збіжність методу і тим самим зменшує накопичення похибки. Основна увага приділяється побудові початкового наближення.

Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$y(t) = f(t) + \int_{T_1}^{T_2} K(t, x, y(x)) dx, \quad (6)$$

де  $K(t, x, y(x))$  — функція, що визначається при  $-\infty < y(x) < \infty$ ,  $t, x \in [T_1, T_2]$ . Крім цього передбачається, що функція  $K(t, x, y(x))$  підсумовується по  $x$  при всіх  $t \in [T_1, T_2]$ .

Аналіз умов існування хоча б одного розв'язку та умов однозначного розв'язування рівняння (6) заснований в більшості випадків на принципі стислих відображень Банаха [4] і принципу рухомих точок Шаудера [5].

Виходячи із принципу стислих відображень, рівняння (6) має єдиний неперервний розв'язок за умови обмеженості похідною

$$\frac{\partial K(t, x, y)}{\partial y} \leq C, \quad C(T_2 - T_1) < 1,$$

і припущеннях, що  $|y| \leq \rho$  та  $\max_{x \in [T_1, T_2]} \int_{T_1}^{T_2} \max_{|y| \leq \rho} |K(t, x, y)| dx \leq \rho$ .

Якщо ці умови виконані, то розв'язок рівняння (6) може бути отримано методом простих ітерацій

$$y_{n+1}(t) = f(t) + \int_{T_1}^{T_2} K(t, x, y_n(x)) dx, \quad (7)$$

який при  $|y_0(x)| \leq \rho$ , де  $y_0(x)$  — довільна неперервна функція, буде збігатися до розв'язку на  $[T_1, T_2]$ .

Щоб визначити оптимальне початкове наближення, будемо функціонал

$$\Phi = \int_{T_1}^{T_2} \left[ y - f(t) - \int_{T_1}^{T_2} K(t, x, y(x)) dx \right]^2 dt, \quad (8)$$

і знаходимо його мінімум для деякого, попередньо визначеного числа  $NQ$  параметрів, якими є значення шуканої функції у вузлах  $t_i, i = \overline{1, NQ}$ . При цьому функціонал матиме вигляд

$$\Phi = \sum_{i=1}^{NQ} h B_i \left[ y_i - f(t_i) - \sum_{k=1}^{NQ} A_k h K(t_i, x_k, y_k) \right]^2, \quad (9)$$

де  $y_i = y(t_i)$ ;  $A_i, i = \overline{1, NQ}$  і  $B_k, k = \overline{1, NQ}$  характеризують вибрану квадратурну формулу для зовнішнього і внутрішнього інтегралів у (8),  $h$  — крок дискретизації.

Для визначення мінімуму функціоналу  $\Phi$  застосовуємо метод координатного спуску в комбінації з методом золотого перетину [6].

Число параметрів мінімізації  $NQ$  в одному випадку не повинно бути занадто великим (зі збільшенням числа  $NQ$  миттєво зростає час роботи програми мінімізації), в іншому випадку число  $NQ$  визначає точність представлення внутрішнього інтегралу у виразі (8) квадратурної формули і не повинно бути занадто малим [6].

Після знаходження значень параметрів, при яких досягається мінімум функціоналу, будується початкове наближення розв'язку вихідного інтегрального рівняння  $y^{(0)}(x)$  шляхом використання інтерполяційної формули Лагранжа [6]. Значення функцій  $y_i$  відповідають координатам  $x_i, i = \overline{1, n}$ . Далі, використовуючи вираз (7), знаходиться наступне наближення  $y^{(1)}(x)$  розв'язку нелінійного інтегрального рівняння, при цьому число точок розбиття інтервалу  $[T_1, T_2]$  збільшується. Ітераційний процес закінчується при виконанні визначеної кількості ітерацій  $I$ , або при досягненні нев'язки (9) попередньо отриманого значення. Якщо число ітерацій досягло числа  $I$ , а нев'язка недостатньо мала, необхідно спочатку задати більшу кількість параметрів оптимізації або інші початкові значення параметрів.

Алгоритм методу складається з наступних етапів:

1. Отримання вхідних даних алгоритму: ядро, права частина, межі інтегрування, параметри  $NQ, I, \delta$ .

2. Побудова функціоналу, що мінімізується, для визначення початкового наближення методу простих ітерацій за формулою:

$$\Phi = \int_{T_1}^{T_2} \left[ y - f(t) - \int_{T_1}^{T_2} K(t, x, y(x)) dx \right]^2 dt.$$

3. Дискретизація функціоналу, що мінімізується за формулою:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{NQ} hB_i \left[ y_i - f(t_i) - \sum_{k=1}^{NQ} A_k hK(t_i, x_k, y_k) \right]^2.$$

4. Знаходження функціоналу, що мінімізується, відносно параметрів методом координатного спуску в комбінації з методом золотого перетину для функції однієї змінної.
5. Побудова початкового наближення нелінійного інтегрального рівняння, як результат застосування формули Лагранжа для знайдених значень параметрів  $y_i$ .
6. Виконання методу простих ітерацій за формулою

$$y_{n+1}(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{NQ} A_k \cdot H \cdot K(t_i, x_k, y_{nk}),$$

доки не буде досягнута нев'язка

$$\Phi = \sum_{i=1}^{NQ} hB_i \left[ y_i - f(t_i) - \sum_{k=1}^{NQ} A_k hK(t_i, x_k, y_k) \right]^2 < \delta,$$

або не виконана буде задана кількість ітерацій.

Ефективність застосування алгоритму на основі методу простих ітерацій із попередньою оптимізацією початкового наближення продемонстровано на наступному тестовому прикладі.

**Приклад 2.** Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$y(t) = t^2 - \left( \arctg \frac{b + 2tT_2}{\sqrt{4ct - b^2}} - \arctg \frac{b + 2tT_1}{\sqrt{4ct - b^2}} \right) \times \\ \times \frac{2}{\sqrt{4ct - b^2}} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{c + bx + ty(x)} dx, \quad (10)$$

де

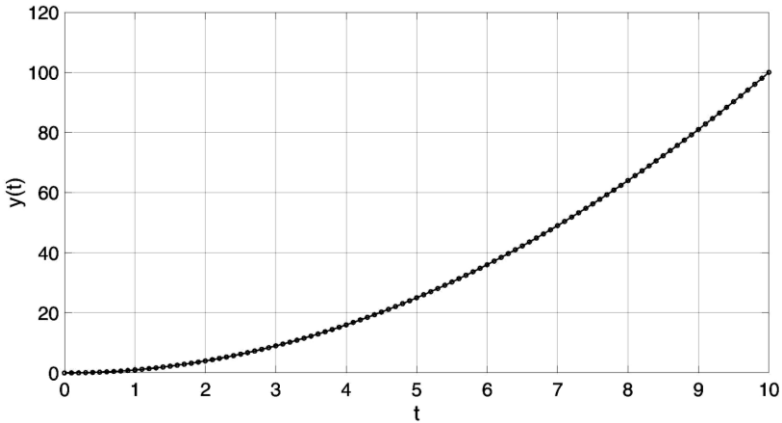
$$b = 2, \quad c = 2, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 10;$$

з точним розв'язком

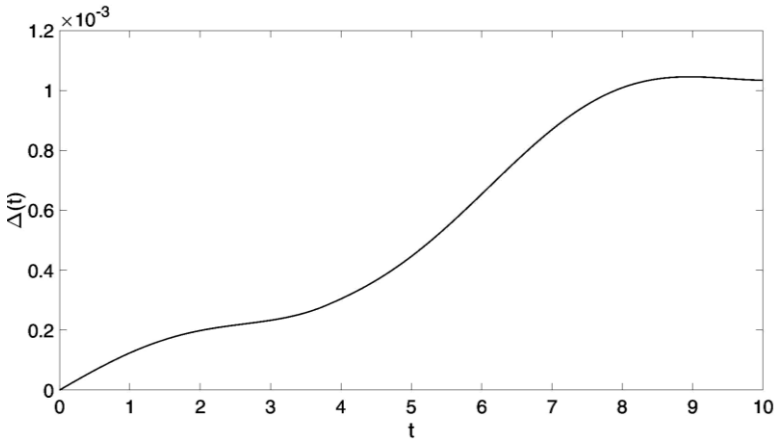
$$y(t) = t^2.$$

Графіки точного і наближеного розв'язків рівняння (10) представлені на рис. 3. Графік абсолютної похибки розв'язку інтегрально-

го рівняння (10), отриманого модифікованим методом простих ітерацій, представлений на рис. 4.



*Рис. 3. Графік чисельного розв'язку інтегрального рівняння (10) модифікованим методом простих ітерацій (— — точний розв'язок, • — наближений розв'язок)*



*Рис. 4. Графік абсолютної похибки розв'язку інтегрального рівняння*

Результати розв'язування тестового прикладу на основі модифікованого методу простих ітерацій з попередньою оптимізацією початкового наближення показали, що окрім високої точності, також досягається висока швидкодія алгоритму.

**Висновок.** Наведені в роботі способи раціональної модифікації ітераційних алгоритмів чисельного розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь дозволяють підвищити ефективність відповідних об-



числювальних процесів. Зокрема, використання комбінації методу Ньютона-Канторовича і квадратурного методу, дає змогу отримати високоточний обчислювальний алгоритм для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. Також застосування модифікованого методу простих ітерацій, дозволяє визначити «краще» початкове наближення, що дає змогу збільшити швидкість збіжності ітераційного процесу вихідного методу.

### Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справоч. пособ. / Отв. ред. Г. Е. Пухов. Київ: Наук. думка, 1986. 544 с.
2. Арушарян И. О. Численное решение интегральных уравнений методом квадратур. Москва: МГУ, 2000. 67 с.
3. Довгий Б. П., Ловейкін А. В., Вакал Є. С., Вакал Ю. Є. Сплайн-функції та їх застосування. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. 117 с.
4. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: навчальний посібник. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. 430 с.
5. Баскаков А. Г. Сжимающие отображения и решения нелинейных уравнений СОЖ. 1997. № 5. С. 118-121.
6. Peter D. Lax. Functional Analysis. *Wiley-Interscience*. 2002. 608 с.

### METHOD OF RATIONAL MODIFICATION OF ITERATIVE ALGORITHMS OF NUMERICAL SOLUTION IN NONLINEARY INTEGRAL EQUATIONS

Iterative methods for solving integral equations are a powerful tool for theoretical research and practical calculations. The peculiarity of iterative methods lies in the simplicity of computational algorithms that is essential in the process of computer realization. The disadvantages of this class of methods underlie in the problem of convergence, namely, the iterative process should be convergent, and the convergence rate should be high, which is inherent in the numerical solution of nonlinear integral equations.

The article discusses the use of a combination of the Newton-Kantorovich method and quadratic formulas, that allows to obtain a high-precision numerical algorithm for solving nonlinear integral equations as Fredholm equation of the second kind. The results of test example solution are provided, which testify to the effectiveness and high accuracy of the method. The possibility of using the algorithm of solving nonlinear integral equations based on the method of sequential approximation during interpolation of the nucleus by cubic spline is analyzed. The disadvantage of these methods in computer implementation is the task of choosing the "best" initial approximation, which in turn accelerates the convergence of the method and thereby reduces the accumulation of error.

The considered method of modernization of iterative algorithms of numerical solution in nonlinear integral equations allows to determine the "better" initial approximation, which makes it possible to increase the convergence of the iterative process in the initial method. The results of computational experiments in the solution of the Fredholm integral equations of the second kind confirm the use effectiveness of the modernized algorithm based on the method of simple iterations with preliminary optimization of the initial approximation.

**Keywords:** *nonlinear integral equation, iterative method, splines, quadrature formulas.*

Отримано: 18.10.2021

УДК 621.37:621.391

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.106-118

**Д. О. Смірнов,**

**Д. А. Ведерніков,**

**О. А. Палагіна,** канд. техн. наук,

**В. В. Палагін,** д-р техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

## **МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛУ НА ФОНІ НЕГАУСОВИХ КОРЕЛЬОВАНИХ ЗАВАД**

Класичний підхід для побудови систем оцінювання параметрів сигналів, які приймаються на фоні негаусових завад, характеризується складністю алгоритмічної та обчислювальної реалізації, що не дозволяє синтезувати якісні програмні та апаратні засоби статистичної обробки. Окрім того, наявність кореляційних зв'язків досліджуваних вибірових значень суттєво ускладнює алгоритмічну реалізацію. Аналіз досліджень, які проводяться останнім часом засвідчив, що для знаходження оцінок невідомих параметрів сигналів, які приймаються на фоні негаусових завад, можливо використовувати інший перспективний підхід. Такий підхід базується на використанні чисельних характеристик опису випадкових процесів, а саме моментних і кумулянтних функцій вищих порядків, що дозволяє з заданим наближенням описувати статистичні властивості негаусових процесів.

У роботі запропоновані нові математичні моделі адитивної взаємодії корисного постійного сигналу та корельованої негаусової завади при застосуванні одномоментних та двохоментних кумулянтних функцій вищих порядків. Таке представлення надає додаткові можливості не тільки описати параметри та характеристики досліджуваного негаусового процесу, але і врахувати статистичні зв'язки вибірових значень для побудови якісних алгоритмів оцінювання невідомих параметрів сигналу.

На основі обраного підходу отримані моментно-кумулянтні моделі досліджуваних корельованих негаусових процесів, запропоновані нові поліноміальні методи оцінювання невідомого параметра корисного сигналу, що дозволило синтезувати нові обчислювальні алгоритми для обробки статистично залежних негаусових процесів. На основі запропонованих моделей та методів проведено синтез та аналіз обчислювальних алгоритмів оцінювання невідомого параметра постійного сигналу з кращими точнісними характеристиками у порівнянні з традиційними результатами. В якості параметра ефективності обиралися дисперсія отриманих оцінок, яка для запропонованих методів є меншою у порівнянні з відомими результатами для традиційних гаусових моделей досліджуваних процесів.

**Ключові слова:** *моментні та кумулянтні функції вищих порядків, метод максимізації полінома, корельовані негаусові процеси.*

**Вступ.** Результати оцінювання параметрів сигналів широко використовуються в багатьох додатках, що мають відношення до технічних завдань діагностики, управління, моніторингу та контролю, де використовуються статистичні підходи до обробки даних. Для їх вирішення використовуються відомі статистичні методи (метод максимальної правдоподібності, метод моментів, метод найменших квадратів та ін. [1-3]), при використанні яких в загальному випадку не накладається обмежень на вид розподілів випадкових процесів. При цьому, при вирішенні практичних завдань широкого поширення набули гаусові моделі, які не завжди адекватно відображають реальні досліджувані процеси [4-6]. Таке припущення (спрощення моделі) призводить до зниження точності оцінювання параметрів досліджуваних випадкових процесів.

При використанні відомих підходів до вирішення завдання оцінювання параметрів сигналів, що приймаються на фоні негаусових завад, виникають труднощі, які пов'язані з апіорною невизначеністю параметрів досліджуваних негаусових розподілів, алгоритмічною і практичною складністю реалізації статистичних методів. Зазначені проблеми суттєво ускладнюють створення якісних і точних систем для оцінювання параметрів сигналів. Окрім цього, завдання статистичного оцінювання параметрів істотно ускладнюється при розгляді кореляційних зв'язків негаусових процесів, що призводить до серйозних труднощів алгоритмічної реалізації.

Проведені дослідження за останні роки показують, що альтернативним і перспективним рішенням зазначених проблем є використання моментних і кумулянтних функцій вищих порядків [6-9], що дозволяє забезпечити опис статистичних властивостей негаусових корельованих випадкових процесів [8-12].

Розв'язання задачі оцінювання параметрів сигналів при взаємодії з негаусовими корельованими завадами потребує теоретичних і практичних досліджень, пов'язаних з вивченням багатовимірних моментно-кумулянтних функцій вищих порядків та їх використання для побудови і аналізу ефективних методів статистичного оцінювання параметрів сигналів.

**Метою роботи** є побудова моделей та методів статистичного оцінювання параметра постійних сигналів, що приймаються на фоні негаусових корельованих завад, при використанні моментних і кумулянтних функцій вищих порядків для синтезу алгоритмів і комп'ютерних засобів побудови систем обробки сигналів.

**Використання моментно-кумулянтних функцій для побудови моделей негаусових ексцесних корельованих випадкових процесів.** Для вирішення поставленого завдання запропоновані нові моделі негаусових корельованих випадкових процесів на основі використання одновимірних і багатовимірних моментно-кумулянтних функцій вищих порядків, що дозволило не тільки описати негаусовий розподіл досліджуваних процесів, але і їх кореляційні властивості. Такий підхід дозволить використовувати такі параметри моментно-кумулянтного опису, як коефіцієнти асиметрії ( $\gamma_3$ ), ексцесу ( $\gamma_4$ ) і ін., які відмінні від нуля в припущенні негаусових моделей досліджуваних випадкових процесів. Для розгляду кореляційних зв'язків негаусових процесів використаємо двовимірні моменти  $m_{ij}$  і кумулянти  $\chi_{ij}$ , які представлені у вигляді [6]:

$$m_{11} = \chi_{11}, m_{12} = \chi_{12}, m_{13} = \chi_{13} + 3\chi_2\chi_{11},$$

$$m_{22} = \chi_{22} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2, m_{23} = \chi_{23} + \chi_2\chi_3 + 6\chi_{11}\chi_{12} + 3\chi_2\chi_{12}, \dots,$$

які при відсутності кореляційної залежності перетворюються в однірне представлення випадкового процесу.

Аналіз статистичних двовимірних зв'язків представлений у вигляді таблиці 1, в якій представлений опис характеристик випадкової величини.

Таблиця 1

*Двовимірні спільні кумулянти та їх порядок*

Порядок спільних кумулянтів	Позначення двовимірних спільних кумулянтів					
1	$\chi_{10}$	$\chi_{01}$				
2	$\chi_{20}$	$\chi_{11}$	$\chi_{02}$			
3	$\chi_{30}$	$\chi_{12}$	$\chi_{21}$	$\chi_{03}$		
4	$\chi_{40}$	$\chi_{31}$	$\chi_{22}$	$\chi_{13}$	$\chi_{04}$	
...	...	...	...	...	...	...

Достатньою умовою кореляційної незалежності випадкових процесів є рівність нулю всіх спільних кумулянтів  $\chi_{ij}$ .

На основі представлених спільних кумулянтів виділимо певні класи випадкових величин. Спільні кумулянти для двовимірного гаусового розподілу представлені в таблиці 2. Відмінними від нуля є кумулянти першого і другого порядків. В цьому випадку випадкова величина характеризується тільки статистичним зв'язком першого порядку або кореляцією. При використанні спільних кумулянтів вищих порядків з'являється можливість опису статистично залежних негаусових випадкових величин.

Таблиця 2

*Представлення двовимірних спільних кумулянтів для гаусового розподілу*

Порядок спільних кумулянтів	Позначення двовимірних спільних кумулянтів					
1	$\chi_{10}$	$\chi_{01}$				
2	$\chi_{20}$	$\chi_{11}$	$\chi_{02}$			
3						
4						
...	...	...	...	...	...	...

**Визначення 1.** Гаусовими статистично залежними випадковими величинами будемо називати такі, для яких відмінними від нуля будуть одновимірний  $\chi_2$  і спільний  $\chi_{11}$  кумулянти другого порядку, а всі інші кумулянти третього і вище порядків, а також спільні кумулянти вище другого порядку дорівнюють нулю. В цьому випадку початкові моменти до шостого порядку мають вигляд:

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \alpha_2 = \chi_2, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 3\chi_2^2, \quad \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 15\chi_2^3, \dots,$$

а спільні моменти мають наступний взаємозв'язок зі спільними кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot r^{(v,k)}, \quad m_{12} = \chi_{12} = 0,$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2 = \chi_2^2 \left( 1 + 2r^{(v,k)^2} \right), \dots,$$

де  $r^{(v,k)}$  — кореляційна функція заданого виду між  $v$ -м і  $k$ -м вибірко-вим значенням. Зокрема, кореляційні функції можуть мати вид:

$$r_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}, \quad r_{\zeta}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} \cos \beta \tau,$$

$$r_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left( \cos \beta \tau + \frac{A}{\beta} \sin \beta |\tau| \right),$$

де  $\tau = |t_v - t_k|$  — кореляційний інтервал, який при врахуванні статистичних зв'язків менше інтервалу кореляції  $\tau = |t_v - t_k| \leq \tau_{кор}$ ,  $v, k = \overline{1, n}$ ;  $\tau_{кор}$  — час кореляції;  $\sigma^2 = r_\xi(0)$  — дисперсія випадкового процесу;  $1/A > 0$  — коефіцієнт, який характеризує статистичний зв'язок між вибірковими значеннями.

В роботі проводиться дослідження нелінійних методів оцінювання параметра постійного сигналу, що приймається на фоні негаусових корельованих завад, які описуються коефіцієнтом ексцесу. Даний клас досліджуваного випадкового процесу представлений в таблиці 3.

Таблиця 3

*Представлення двовимірних спільних кумулянтів для ексцесної негаусової корельованої величини*

Порядок спільних кумулянтів	Позначення двовимірних спільних кумулянтів					
1	$\chi_{10}$	$\chi_{01}$				
2	$\chi_{20}$	$\chi_{11}$	$\chi_{02}$			
3		$\chi_{12}$	$\chi_{21}$			
4	$\chi_{40}$	$\chi_{31}$	$\chi_{22}$	$\chi_{13}$	$\chi_{04}$	
...	...	...	...	...	...	...

**Визначення 2.** Ексцесними статистично залежними випадковими величинами 1-го типу 1-го виду будемо називати такі, для яких відмінними від нуля будуть  $\chi_2$  і  $\chi_4$ , а також спільні кумулянти  $\chi_{11}$ ,  $\chi_{13}$  і  $\chi_{22}$ , а всі інші кумулянти третього і вище четвертого порядків, а також спільні кумулянти вище четвертого порядку дорівнюють нулю. У цьому випадку початкові моменти до шостого порядку мають вигляд:

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \alpha_2 = \chi_2, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2, \quad \alpha_5 = 0, \\ \alpha_6 = 15\chi_2\chi_4 + 15\chi_2^3, \dots,$$

а спільні моменти мають наступний взаємозв'язок зі спільними кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot r^{(v,k)}, \quad m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = 0, \quad m_{13}^{(v,k)} = \chi_4\chi_{11}^2 + 3\chi_2\chi_{11} \\ m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 \left( \chi_4 r^{(v,k)^2} + 1 + 2r^{(v,k)^2} \right), \dots$$

На основі представлених моментно-кумулянтних моделей корельованих негаусових процесів синтезовані нові методи статистичного оцінювання параметра постійного сигналу при використанні адаптованого методу максимізації полінома (АММП).

**Поліноміальні методи оцінювання параметра сигналу на фоні корельованих негаусових завад.** Розглянемо найбільш розповсюджену адитивну модель  $\xi(t)$  взаємодії досліджуваного постійного сигналу  $S(\mathcal{G})$ , що залежить від параметра  $\mathcal{G}$ , і стаціонарної негаусової корельованої завади  $\eta(t)$ :

$$\xi(t) = S(\mathcal{G}) + \eta(t).$$

Для побудови поліноміальних методів оцінювання представимо моментно-кумулянтну модель досліджуваного процесу у вигляді одномоментних і двомоментних кумулянтних функцій:

$$\chi_2, \chi_4, \chi_2(0, \tau), \chi_4(0, 0, 0, \tau).$$

Нехай з прийнятого сигналу  $\xi(t)$  досліджується статистично залежна і однаково розподілена вибірка  $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  обсягом  $n$ :  $x_v = S_g + \eta_v$ , де для стислості використаємо позначення  $S_g = S(\mathcal{G})$ . За результатами статистичної обробки даних необхідно отримати результат оцінювання параметра постійного сигналу  $\mathcal{G}$  за умови, що інші параметри відомі (дисперсія завади, інші кумулянти, кореляційна функція та її параметри).

Для вирішення даного завдання використовуємо адаптований метод максимізації полінома на випадок статистично залежних вибірових значень [12], згідно з яким досліджувані процеси можна представити у вигляді стохастичних поліномів степеня  $s$  [8, 9] при використанні спільних моментів і кумулянтів. В цьому випадку оцінка параметра  $\mathcal{G}$  буде знаходитися з рішення рівняння:

$$\sum_{i=1}^s h_{i(v,k)}[\mathcal{G}] \sum_{v=1}^n \left( \xi_{(v)}^i - \alpha_i[\mathcal{G}] \right) \Bigg|_{\mathcal{G}=\hat{\mathcal{G}}} = 0, \quad v, k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де  $\xi_{(v)}$  — статистично залежні і однаково розподілені випадкові величини, взяті в моменти часу  $v$ ,  $\alpha_i[\mathcal{G}]$  — початкові моменти  $i$ -го порядку, які залежать від параметра  $\mathcal{G}$ ;  $h_{i(v,k)}[\mathcal{G}]$  — коефіцієнти, які залежать від параметра  $\mathcal{G}$  і спільних кумулянтів, які, в свою чергу, залежать від функції кореляції  $r_{\xi}(\tau)$ ,  $\tau = |v - k|$ . Невідомі коефіцієнти (1) знаходяться з рішення системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^s h_{i(v,k)}[\mathcal{G}] K_{i,j}(\tau, \mathcal{G}) = \frac{d}{d\mathcal{G}} \alpha_i(\mathcal{G}), \quad i = \overline{1, s}, \quad v, k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де  $K_{i,j}(\tau, \mathcal{G}) = E \left\{ \left[ \xi_v^i - \alpha_i \right] \left[ \xi_k^j - \alpha_j \right] \right\} = E \left[ \xi_v^i \xi_k^j \right] - \alpha_i \alpha_j$ .

Відзначимо, що корелянти  $K_{i,j}(\tau, \mathcal{G})$  залежать як від одновимірних початкових моментів  $\alpha_i$  порядку  $i$ , так і від спільних двовимірних моментів  $E\left[\xi_v^i \xi_k^j\right]$ . В цьому випадку є можливість представити статистичні зв'язки корельованих негаусових процесів.

Ефективність синтезованих алгоритмів зіставляється з кількістю добутої інформації про оцінювання параметра  $\mathcal{G}$ , яке в загальному випадку має вид [8, 9]:

$$I_{sn}(\mathcal{G}) = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s h_{i(v,k)}[\mathcal{G}] \frac{d}{d\mathcal{G}} \alpha_i(\mathcal{G}) = \frac{1}{\sigma_{(\mathcal{G})s}^2}, \quad k = \overline{1, n} \quad (3)$$

і обернено пропорційно дисперсії оцінки.

На основі використання представлених моделей негаусових корельованих випадкових процесів, використання нового адаптованого методу максимізації полінома, синтезовані нелінійні алгоритми оцінювання параметра  $\mathcal{G}$  постійного сигналу, що приймається на фоні корельованих негаусових завад.

**Результати дослідження та обговорення.** Розглянемо синтез і аналіз поліноміальних алгоритмів оцінювання параметра  $\mathcal{G}$  постійного сигналу  $S(\mathcal{G})$  при різних степенях полінома  $s$ . Для статистичного опису досліджуваного негаусового процесу наведемо початкові одновимірні моменти до 6-го порядку:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \chi_2, \quad \alpha_3 = \chi_2^{3/2} \gamma_3, \\ \alpha_4 = \chi_2^2 (\gamma_4 + 3), \quad \alpha_6 = 15(\chi_2 \gamma_4 + \chi_2^3),$$

а також спільні двовимірні моменти, які характеризують статистичні кореляційні зв'язки випадкового процесу:

$$\alpha_2(0, \tau) = \chi_2(0, \tau), \quad \alpha_3(0, \tau, \tau) = 0, \\ \alpha_4(0, \tau, \tau, \tau) = \chi_4(0, \tau, \tau, \tau) + 3\chi_2 \cdot \chi_2(0, \tau), \\ \alpha_4(0, 0, \tau, \tau) = \chi_4(0, 0, \tau, \tau) + \chi_2^2 + 2\chi_2^2 \cdot (0, \tau).$$

Для розглянутої адитивної суміші постійного сигналу  $S_{\mathcal{G}}$  та негаусової завади моменти одномоментного розподілу до 6-го порядку будуть мати вигляд:

$$m_1 = S_{\mathcal{G}}, \quad m_2 = \chi_2 + S_{\mathcal{G}}^2, \quad m_3 = 3\chi_2 S_{\mathcal{G}} + S_{\mathcal{G}}^3 + \gamma_3 \chi_2^{3/2}, \\ m_4 = 3\chi_2^2 + 6\chi_2 S_{\mathcal{G}}^2 + S_{\mathcal{G}}^4 + \gamma_4 \chi_2^2 + 4S_{\mathcal{G}} \gamma_3 \chi_2^{3/2}, \\ m_5 = S_{\mathcal{G}}^5 + 10S_{\mathcal{G}}^3 \chi_2 + 5S_{\mathcal{G}}(3 + \gamma_4) \chi_2^2, \\ m_6 = S_{\mathcal{G}}^6 + 15S_{\mathcal{G}}^4 \chi_2 + 15S_{\mathcal{G}}^2(3 + \gamma_4) \chi_2^2 + 15(1 + \gamma_4^2) \chi_2^3,$$



а моменти двовимірного розподілу запишуться як:

$$m_{11} = S_g^2 + \chi_2 r^{(v,k)}, \quad m_{12} = S_g^3 + S_g \chi_2 + 2S_g \chi_2 r^{(v,k)} + \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)3/2},$$

$$m_{22} = S_g^4 + 2S_g^2 \chi_2 + 4S_g^2 \chi_2 r^{(v,k)} + \chi_2^2 \left( \gamma_4 r^{(v,k)2} + 1 + 2r^{(v,k)2} \right) + 4\gamma_3 \chi_2^{3/2}.$$

Корелянти  $K_{i,j}(\tau, \mathcal{G})$  двовимірного випадкового процесу  $\xi(t)$  приймуть вид:

$$K_{1,1}(0, \tau, \mathcal{G}) = m_{11} - m_1 m_2 = \chi_2 r_\xi(\tau),$$

$$K_{1,2}(0, \tau, \tau, \mathcal{G}) = m_{12} - m_1 m_2 = 2S_g \chi_2 r^{(v,k)} + \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)3/2},$$

$$K_{2,2}(0, 0, \tau, \tau, \mathcal{G}) = m_{22} - m_2 m_2 = 4S_g^2 \chi_2 r^{(v,k)} +$$

$$+ 4S_g \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)3/2} + \gamma_4 \chi_2^2 r^{(v,k)2} + 2\chi_2^2 r^{(v,k)2} + \chi_2^2,$$

де коефіцієнт асиметрії  $\gamma_3$  дорівнює нулю.

При розгляді випадку, коли кореляційні зв'язки відсутні між вибірковими значеннями, корелянти будуть виглядати:

$$K_{1,1} = \chi_2, \quad K_{1,2} = 2\chi_2 S_g, \quad K_{2,2} = 4S_g^2 \chi_2 + \chi_2^2 (\gamma_4 + 2).$$

Для оцінювання невідомого параметра  $\mathcal{G}$  використаємо адаптований метод максимізації полінома (1), де невідомі коефіцієнти  $h_{i(v,k)}[\mathcal{G}]$  будуть визначатися з рішення системи рівнянь (2). Для вирішення такої системи рівнянь скористаємося методом Крамера і формулами Шура:

$$h_{i(v,k)}[\mathcal{G}] = \frac{\Delta_{is}(\mathcal{G})}{\Delta_s(\mathcal{G})}, \quad i = \overline{1, s},$$

де  $\Delta_s(\mathcal{G}) = \det \|K_{i,j}(\tau, \mathcal{G})\|$  — визначник матриці розмірності  $s$ , елементами якої є центральні корелянти корельованого випадкового процесу;  $\Delta_{is}(\mathcal{G})$  — визначник, отриманий з  $\Delta_s(\mathcal{G})$  при заміні  $i$ -го стовпця стовпцем, що складається з вільних членів системи рівнянь.

Показано, що при степені полінома  $s = 1$  оцінка параметра  $\mathcal{G}$  постійного сигналу знаходиться з рівняння (1) і має вигляд:

$$\sum_{v=1}^n h_{1(v,k)}[\mathcal{G}] \left( \xi_{(v)} - S_g \right) \Big|_{S_g = \hat{S}_g} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Тоді коефіцієнт  $h_{1(v,k)}[\mathcal{G}]$  в рівнянні (4) прийме вид:

$$h_{1(v,k)}[\mathcal{G}] = \frac{A_v(\mathcal{G})}{\det \|K_{1,1}(\tau, \mathcal{G})\|}, \quad v, k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де  $A_v(\vartheta)$  — визначник, який отриманий з визначника  $\det |K_{1,1}(\tau, \vartheta)|$  при заміні  $v$ -го стовпця іншим стовпцем, який складається з вільних членів (правої частини) системи рівнянь (2).

Відзначимо, що корелянти  $K_{1,1}(\tau, \vartheta)$  досліджуваного процесу характеризують статистичні зв'язки між вибірковими значеннями в задані моменти часу  $(v, k)$  і можуть бути представлені у вигляді кореляційної матриці. Для експоненційної кореляційної залежності корелянти  $K_{1,1}(\tau, \vartheta)$  запишуться у вигляді:

$$K_{1,1}(\tau, \vartheta) = \sigma^2 \begin{vmatrix} 1 & e^{-A} & \dots & e^{-A(n-1)} \\ e^{-A} & 1 & \dots & e^{-A(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{-A(n-1)} & e^{-A(n-2)} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

де  $\sigma^2$  — дисперсія досліджуваного випадкового процесу.

Тоді лінійне рівняння максимізації полінома (4) при степені  $s = 1$  при використанні коефіцієнта  $h_{1(v,k)}[\vartheta]$  (5) запишеться як:

$$\hat{S}_\vartheta = \frac{\sum_{v=1}^n A_v(\vartheta)x_v}{\sum_{v=1}^n A_v(\vartheta)}. \quad (6)$$

При відсутності статистичних зв'язків між вибірковими значеннями оцінка параметра  $\hat{S}_\vartheta$  (6) прийме добре відомий вид [8, 9]:

$$\hat{S}_\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v.$$

Для оцінювання ефективності отриманої оцінки  $\hat{S}_\vartheta$  використаємо такий параметр, як кількість добутої інформації (3), який є зворотною величиною дисперсії оцінки:

$$I_{ln}(\vartheta) = \sum_{v=1}^n h_{1(v,k)}[\vartheta] = \frac{A_v(\vartheta)}{\det |K_{1,1}(\tau, \vartheta)|}. \quad (7)$$

Видно, що отриманий результат оцінювання (6) не враховує параметри негаусового розподілу досліджуваного процесу. Це пов'язано з тим, що для опису самого випадкового процесу використовуються тільки перші два початкових моменту, які характеризуються математичним сподіванням і дисперсією. Для опису інших параметрів негаусових корельованих процесів збільшимо степінь полінома до  $s = 2$ . Для знахо-

дження оцінки параметра  $\hat{S}_g$  використаємо рівняння максимізації полінома (1), в якому невідомі коефіцієнти, згідно (2), приймуть вигляд:

$$h_{1(v,k)}[g] = \frac{\Delta_{12}(g)}{\Delta(g)}, \quad h_{2(v,k)}[g] = \frac{\Delta_{22}(g)}{\Delta(g)},$$

$$\text{де } \Delta(g) = \det \begin{vmatrix} K_{1,1}(0, \tau, g) & K_{1,2}(0, \tau, \tau, g) \\ K_{2,1}(0, \tau, \tau, g) & K_{2,2}(0, 0, \tau, \tau, g) \end{vmatrix},$$

а  $\Delta_{12}(g)$ ,  $\Delta_{22}(g)$  — отримані з  $\Delta(g)$  при заміні відповідного стовпця правою частиною (2), тобто  $\frac{d}{dg} m_1(g)$ ,  $\frac{d}{dg} m_2(g)$  відповідно.

При підстановці отриманого коефіцієнта в рівняння (1) отримаємо нелінійне рівняння максимізації полінома для визначення оцінки параметра  $\hat{S}_g$ . Для кількісного аналізу ефективності оцінювання невідомого параметра постійного сигналу при різних степенях полінома використаємо значення  $I_{sn}(g)$  (3), яке є зворотною величиною дисперсії оцінки  $\sigma_{(g)s}^2$ . При використанні стохастичних поліномів степеня  $s = 1$  і  $s = 2$  відношення дисперсій оцінок набуде вигляду:

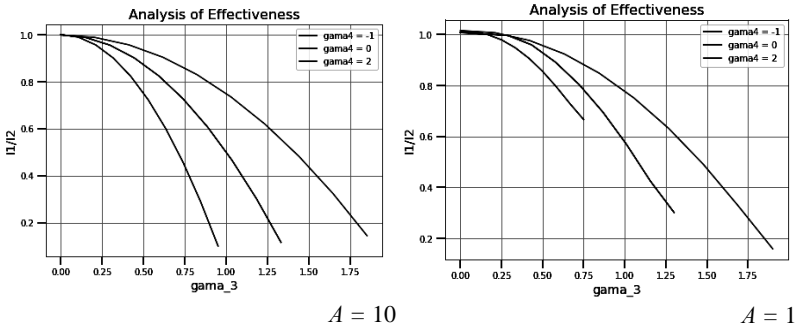
$$g(g) = \frac{\sigma_{(g)2n}^2}{\sigma_{(g)1n}^2} = \frac{I_{1n}(g)}{I_{2n}(g)},$$

і чим менше це відношення, тим точніше результат оцінювання у порівнянні з добре відомим результатом при степені  $s = 1$ .

На рис. 1 наведені результати, які показують ефективність нелінійного оцінювання параметра постійного сигналу (при степені полінома  $s = 2$ ) у порівнянні з лінійним оцінюванням (при степені полінома  $s = 1$ ) при взаємодії з асиметрично-ексцесними корельованими негаусовими завадами.

Відзначимо, що оцінка  $\hat{S}_g$  (6) при степені полінома  $s = 1$  не враховує негаусовий характер досліджуваного випадкового процесу і її ефективність визначається виразом (7). При використанні степеня полінома  $s = 2$  є можливість врахувати параметри негаусового розподілу досліджуваного процесу у вигляді кумулянтних функцій вищих порядків, а саме коефіцієнтів асиметрії  $\gamma_3$  та ексцесу  $\gamma_4$ , а також двовимірних спільних моментів, які описують статистичні залежності. На рис. 1 наведені порівняльні результати відношення  $I_1/I_2$  від параметрів негаусової завади і коефіцієнта кореляції  $A = 10,1$ . З графіків видно, що з ростом значення коефіцієнта  $\gamma_3$  кількість добу-

тої інформації  $I_2$  у порівнянні з  $I_1$  зростає, що еквівалентно підвищенню точності оцінювання у вигляді зменшення дисперсії оцінки. При наявності слабких статистичних зв'язків (велике значення коефіцієнта  $A = 10$ ) результат ефективності оцінювання буде збігатися з добре вивченими властивостями, представленими в [8, 9]. При наявності сильних статистичних зв'язків між вибірковими значеннями (мале значення коефіцієнта  $A = 1$  для функції  $r_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ ) спостерігається збільшення дисперсії оцінки, і отже, зменшення ефективності оцінювання. У будь-якому випадку, результат нелінійного оцінювання невідомого параметра  $\hat{S}_g$  є більш ефективним у порівнянні з лінійним, який збігається з добре відомим результатом при розгляді широко поширених гаусових моделей випадкових процесів.



**Рис. 1.** Відношення кількості добутої інформації про оцінюваний параметр постійного сигналу (при різних степенях полінома) від коефіцієнтів асиметрії ( $\text{gamma}_3$ ), ексцесу ( $\text{gamma}_4$ ) та коефіцієнта кореляції ( $A=10, 1$ ) для експоненційної кореляційної функції  $r_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$

**Висновки.** Застосування альтернативного підходу до опису досліджуваних випадкових процесів у вигляді моментно-кумулянтних функцій вищих порядків дозволило представити нові методи оцінювання невідомого параметра постійного сигналу, що приймається на фоні корельованих негаусових завад при використанні адаптованого методу максимізації полінома. Запропонований підхід враховує негаусовий розподіл досліджуваного випадкового процесу і кореляційні зв'язки вибіркових значень, що дозволяє підвищити точність результатів оцінювання у порівнянні з добре відомими у вигляді зменшення дисперсії оцінки. Ефективність отриманих результатів буде залежати як від використання апріорної інформації про досліджуваний процес (кумулянти функції вищих порядків), так і від параметрів, які характеризують кореляційні зв'язки вибіркових значень.

### Список використаних джерел:

1. Trees H. L., Van, Bell K. L., Tiany Z. Detection Estimation and Modulation Theory, 2nd edition, Part I, Detection, Estimation, and Filtering Theory. New York: John Wiley & Sons, 2013.
2. Tuzlukov V. P. Signal Processing Noise. Boca Raton: CRC Press LLC, 2002.
3. Barkat Mourad. Signal Detection and Estimation. Boston: Artech House, 2005.
4. Middleton D. Non-Gaussian Statistical Communication Theory. New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.
5. Huihong Zhao, Chenghui Zhang. Non-Gaussian noise quadratic estimation for linear discrete-time time-varying systems. *Neurocomputing*. 2016. Vol. 174(B). P. 921-927.
6. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований. Москва: Сов. радио, 1979. 376 с.
7. Nandi A. K. Blind Estimation Using Higher-Order Statistics. New York, Springer-Verlag, 1999.
8. Kunchenko Y. P. Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables. Aachen: Shaker Verlag, 2002. 396 p.
9. Кунченко Ю. П. Стохастические полиномы. Киев: Наук. думка, 2006. 275 с.
10. Palahin V., Palahina O., Filipov V., Leleko S., Ivchenko A. Modeling of Joint Signal Detection and Parameter Estimation on Background of Non-Gaussian Noise. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 2015. Vol. 14 (3). P. 87-94.
11. Palahin V., Juhár J. Joint Signal parameters estimation in non-Gaussian noise by the method of polynomial maximization. *Journal of Electrical Engineering*. 2016. Vol. 67 (2016). № 3. P. 217-221.
12. Vokorokos L., Marchevský S., Ivchenko A., Palahina E., Palahin V.. Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes by the Method of Polynomial Maximization. *Submitted to IET Signal Processing*. 2016. P. 313-319.

### **METHODS FOR STATISTICAL SIGNAL PARAMETERS ESTIMATION IN NON-GAUSSIAN CORRELATED NOISE**

The traditional approach to the development of systems for signal parameters estimation in non-Gaussian noise is characterized by significant difficulties associated with the complexity of algorithmic implementation, which makes it impossible to synthesize high-quality software-algorithmic and hardware statistical signal processing. At the same time, the presence of a statistical relationship between the studied sample non-Gaussian random variables leads to a significant complication of the implementation of computational algorithms. Analysis of scientific research in recent years has shown that to solve problems of estimating unknown parameters of signals in non-Gaussian noise there is another promising approach, which is based on the use of numerical characteristics to describe random processes, namely moment and cumulant functions of higher orders. This allows us to describe the statistical properties of the studied non-Gaussian processes with the necessary approximation.

The paper proposes new mathematical models of additive interaction of useful signal and correlated non-Gaussian noise based on the use of one-moment and two-moment cumulative functions of higher orders, which made it possible to describe the parameters and characteristics of non-Gaussian distribution of the studied random process and take into account correlations for the synthesis of algorithms for estimating unknown parameters.

Based on the obtained moments and cumulant models of random correlated non-Gaussian processes, polynomial stochastic methods for estimation an unknown parameter of a constant signal for dependent sample values are proposed. This allowed the synthesis of computational algorithms for processing non-Gaussian correlated processes. Based on the proposed methods, the synthesis and analysis of polynomial computational algorithms for the parameter estimation of the useful signal with better accuracy characteristics in the form of reducing the variance of the estimate compared to the known results due to additional information about the studied processes in the form of moment and cumulant functions.

**Key words:** *the moment and cumulant functions of higher orders; the method of polynomial maximization; correlated non-Gaussian processes.*

Отримано: 6.10.2021

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Бойчура Михайло Володимирович** — кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник Науково-дослідної частини Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, m.v.boichura@nuwm.edu.ua

**Бомба Андрій Ярославович** — доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, abomba@ukr.net

**Бурсаков Кирило Андрійович** — студент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

**Verlan Andriy** — Doctor Sciences in Engineering, Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway, verlandr@gmail.com

**Ведерніков Дмитро Андрійович** — доктор філософії, Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

**Воробйова Ольга Володимирівна** — аспірант Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, maryika050604@ukr.net

**Гончаров Артем Володимирович** — кандидат технічних наук, доцент, перший проректор Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, a.honcharov@chdtu.edu.ua

**Gulyamov Sherzod Rajabboyevich** — Doctor of Technical Science, Professor, Head of the Department of Information Security of Tashkent University of Information Technologies named after Al-Khorezmi, Tashkent, Republic of Uzbekistan

**Karimov Madjit Malikovich** — Doctor of Technical Science, Professor, Director of the State Test Center under the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

**Корнієнко Катерина Володимирівна** — магістр Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, k.ketrin.3@gmail.com

**Косова Віра Петрівна** — асистент кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, vera\_62@ukr.net

**Лись Дар'я Анатоліївна** — аспірантка Національного університету «Одеська політехніка», м. Одеса, loreal338@gmail.com

**Мельник Вікторія Миколаївна** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, vmm71@i.ua

**Мічута Ольга Романівна** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, o.g.michuta@nuwm.edu.ua

**Могілей Сергій Олександрович** — викладач кафедри економіки, обліку та оподаткування Східноєвропейського університету імені Рауфа Аблязова, м. Черкаси, sergiymogiley@gmail.com

**Мороз Ігор Петрович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, докторант кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, igor\_moroz@yahoo.com

**Палагін Володимир Васильович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри робототехнічних і телекомунікаційних систем та кібербезпеки Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, palahin@ukr.net

**Палагіна Олена Анатоліївна** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, palahina@ukr.net

**Положаснко Сергій Анатолійович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих систем управління Національного університету «Одеська політехніка», м. Одеса, sanp277@gmail.com

**Протасов Сергій Юрійович** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електротехнічних систем Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, protasov.serhey@gmail.com

**Sagatov Mirkhusan Mirazizovich** — Student of the faculty «Electronics and automatics» of the Tashkent State Technical University named after Islam Karimov, Tashkent, Republic of Uzbekistan

**Sagatova Fotima Mirazizovna** — Student of the faculty «Electronics and automatics» of the Tashkent State Technical University named after Islam Karimov, Tashkent, Republic of Uzbekistan

**Смірнов Даниїл Олексійович** — аспірант кафедри робототехнічних і телекомунікаційних систем та кібербезпеки Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, danilyuy08@gmail.com

**Sterten Jo** — PhD, Assistant Professor, Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway

**Федорчук Володимир Анатолійович** — доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, fedvlad@ukr.net

**Шафаренко Микола Васильович** — асистент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, shafarenko.nikolai@iit.kpi.ua



**АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ**

<b>Б</b>		<b>М</b>	
Бойчура М. В.	5	Мельник В. М.	76
Бомба А. Я.	5, 20	Мічута О. Р.	5
Бурсаков К. А.	76	Могілей С. О.	50
<b>В</b>		Мороз І. П.	20
Verlan Andriy	31	<b>П</b>	
Ведерніков Д. А.	106	Палагін В. В.	106
Воробйова О. В.	39	Палагіна О. А.	106
<b>Г</b>		Положаєнко С. А.	88
Гончаров А. В.	50	Протасов С. Ю.	97
Gulyamov Sherzod	58	<b>С</b>	
<b>К</b>		Sagatov Mirkhusan	67
Karimov Madjit	67	Sagatova Fotima	58
Корнієнко К. В.	39	Смірнов Д. О.	106
Косова В. П.	76	Sterten Jo	31
<b>Л</b>		<b>Ф</b>	
Лись Д. А.	88	Федорчук В. А.	97
		<b>Ш</b>	
		Шафаренко М. В.	39

## ЗМІСТ

<b>Бойчура М. В., Бомба А. Я., Мічута О. Р.</b> Про один підхід до згладження негладкостей розв'язків крайових задач числовими методами квазіконформних відображень .....	5
<b>Bomba Andriy, Moroz Igor.</b> Simulation of the Charge Carriers Distribution in the Active Region of the p-i-n-diodes by the Perturbation Theory Methods.....	20
<b>Verlan Andriy, Sterten Jo</b> Digital Correction Filter in Problems of Recovery of Input Signals and Observing Systems' Data In Energy Objects .....	31
<b>Воробйова О. В., Корнієнко К. В., Шафаренко М. В.</b> Дослідження ефективного рівня швидкості перемішування в біореакторі .....	39
<b>Гончаров А. В., Могілей С. О.</b> Методи реалізації багатокритеріальних бізнес-моделей мультимодальних транспортних підприємств .....	50
<b>Gulyamov Sherzod, Sagatova Fotima</b> Method of Risk Detection Model in Packet Filtering .....	58
<b>Karimov Madjit, Sagatov Mirkhusan</b> Application the Aho-Corasick Algorithm for Improving a Intrusion Detection System.....	67
<b>Мельник В. М., Косова В. П., Бурсаков К. А.</b> Окреслення граничних та фізичних умов математичної моделі масообмінну в апараті під час розділення водно-органічних сумішей.....	76
<b>Положаєнко С. А., Лись Д. А.</b> Моделювання хвильових процесів у газорідних системах .....	88

**Протасов С. Ю., Федорчук В. А.**

Спосіб раціональної модифікації  
ітераційних алгоритмів чисельного  
розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь.....97

**Смірнов Д. О., Ведерніков Д. А.,**

**Палагіна О. А., Палагін В. В.**

Методи статистичного оцінювання параметрів  
сигналу на фоні негаусових корельованих завад ..... 106

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ ..... 119

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ ..... 121

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

## **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Технічні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 22**

---

---

Підписано до друку 26.11.2021 р. Гарнітура «Таймс».  
Папір офсетний. Друк різнографічний.  
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 7,2. Обл.-вид. арк. 7,5.  
Тираж 50. Зам. № 954.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному  
університеті імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.