

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

# **МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Серія: Фізико-математичні науки**

Збірник наукових праць

**Випуск 18**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка  
2018

УДК 519.6:519.7

ББК 22

М34

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:  
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до Переліку наукових фахових  
видань ДАК Міністерства освіти і науки України з фізико-математичних наук  
(наказ №1021 від 07 жовтня 2015 р.)

Друкуються згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського  
національного університету імені Івана Огієнка,  
протокол №11 від 27 грудня 2018 року.

#### Рецензенти:

**М. Р. Петрик**, доктор фізико-математичних наук, професор,  
завідувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного  
технічного університету імені Івана Пулюя;

**І. М. Червко**, доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри математичного моделювання, декан факультету математики та  
інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

#### Редакційна колегія:

**О. М. Хіміч**, член-кореспондент НАНУ,  
доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);

**А. Ф. Верлань**, член-кореспондент НАПНУ,  
доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);

**І. Б. Ковальська**, кандидат фізико-математичних наук, доцент  
(*відповідальний секретар*);

**В. К. Задірака**, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;

**В. П. Клименко**, доктор фізико-математичних наук, професор;

**І. М. Конет**, доктор фізико-математичних наук, професор;

**М. О. Перестюк**, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;

**Ю. В. Теплінський**, доктор фізико-математичних наук, професор;

**А. О. Чикрій**, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор.

**Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-матема-  
М34 тичні науки** : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глуш-  
кова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національ-  
ний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: О. М. Хіміч (відп.  
ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національ-  
ний університет імені Івана Огієнка, 2018. — Вип. 18. — 180 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних  
науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних  
галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7

ББК 22

ISSN 2308-5878

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2018

© Кам'янець-Подільський національний  
університет імені Івана Огієнка, 2018

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of National Academy of Sciences of Ukraine  
Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University

# **MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING**

**Series: Physical and mathematical sciences**

Scientific journal

**ISSUE 18**

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University  
2018

### Critics:

**M. Petryk**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Head of Department Program Engineering Ternopil Ivan Pil'uj  
National Technical University;

**I. Cherevko**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Professor at Department Mathematical Modeling, Dean of Faculty  
Mathematics and Informatics Yurii Fedkovych Chernivtsi National University.

### Editorial board:

**O. Himich**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

**A. Verlan**, Corresponding Member NAPS of Ukraine,  
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

**I. Kovalska**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Docent (*Responsible Secretary*);

**V. Zadiraka**, Academician NAS of Ukraine,  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

**V. Klimenko**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

**I. Konet**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

**M. Perestjuk**, Academician NAS of Ukraine,  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

**Yu. Teplinsky**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

**A. Chikriy**, Academician NAS of Ukraine,  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

**Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences** : scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University ; [Editorial Board: O. Himich (Executive Editor) and others]. — Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University, 2018. — ISSUE 18. — 180 p.

There are printed results of investigation of national and foreign scientists that concern to problems of practice mathematical models in different spheres of human activity.

For scientific and technical staff, postgraduate students.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of NAS of Ukraine, 2018

© Kamianets-Podilskyi National  
Ivan Ohiienko University, 2018

ISSN 2308-5878

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18

УДК 517.97

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.5-14

**С. М. Бак**, канд. фіз.-мат. наук,

**Г. М. Ковтонюк**, канд. пед. наук,

**І. В. Печериця**, магістрант

Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

## **СТОЯЧІ ХВИЛІ З ПЕРІОДИЧНОЮ АМПЛІТУДОЮ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА ІЗ НАСИЧУВАНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ**

Стаття присвячена вивченню дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Вивчаються такого типу рівняння із насичуваною нелінійністю. Спочатку розглянуто рівняння типу Шредінгера з більш загальною нелінійністю, яка має такі ж властивості, як і насичувана нелінійність. Для таких рівнянь одержано результат про існування розв'язків у вигляді стоячих хвиль з періодичною амплітудою (зауважимо, що такі розв'язки часто називають бризерами). Для цього дане рівняння подано в операторному вигляді в просторі двохсторонніх послідовностей. Припущено, що коефіцієнти відповідного лінійного оператора утворюють  $k$ -періодичні послідовності. Цей оператор є обмеженим і самоспряженим у просторі всіх  $k$ -періодичних послідовностей. Потім побудовано спеціальний функціонал, критичні точки якого в цьому просторі є розв'язками вихідного рівняння. Знайдено похідну Гато цього функціоналу. Далі розглянуто многовид Нехарі для заданої варіаційної задачі, який представляє собою множину нетривіальних критичних точок побудованого функціоналу в просторі  $k$ -періодичних послідовностей. Показано, що цей многовид Нехарі непорожній і замкнений підмноговид даного простору. Крім того, розглянуто відповідну задачу мінімізації і показано, що на розглянутому многовиді Нехарі ця задача за певних умов має розв'язок. А отже, за цих умов вихідне рівняння має нетривіальні періодичні розв'язки. І остаточно, в силу того, що насичувана нелінійність задовольняє вказані умови, в статті встановлено існування двох нетривіальних стоячих хвиль з  $k$ -періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. Одержані в статті результати є поширенням вже відомих результатів для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на одновимірних та двовимірних ґратках.

**Ключові слова:** *дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі, критичні точки, многовид Нехарі, насичувана нелінійність.*

**Вступ.** Останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною. Серед рівнянь, які описують такі моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння  $\sin$ -Гордона, система Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [1; 2; 7; 8; 14; 15; 18; 19] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [3; 16], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [6; 9; 17] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння  $\sin$ -Гордона на двовимірній ґратці.

Ще одним важливим класом розв'язків є стоячі хвилі. В статтях [4; 5; 13; 20; 21] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера.

**Метою цієї статті** є одержання умов існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці.

**Постановка задачі.** У цій статті вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці із насичуваною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) - a_{n,m}\psi_{n+1,m}(t) - a_{n-1,m}\psi_{n-1,m}(t) - b_{n,m}\psi_{n,m+1}(t) - b_{n,m-1}\psi_{n,m-1}(t) - c_{n,m}\psi_{n,m}(t) + \frac{\mu|\psi_{n,m}(t)|^2}{1+|\psi_{n,m}(t)|^2}\psi_{n,m}(t) = 0, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1)$$

де  $\psi_{n,m}(t)$  — хвильова функція  $(n, m)$ -ї частинки,  $(a_{n,m}), (b_{n,m}) \subset \mathbb{R}, \mu \neq 0$ . Зауважимо, що в статті [10] вивчались двовимірні солітони в подібних рівняннях.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m} \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

де  $(u_{n,m}) \subset \mathbb{R}$  називається амплітудою стоячої хвилі, а  $\omega \in \mathbb{R}$  — частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами.

Будемо вивчати стоячі хвилі з  $k$ -періодичною амплітудою, тобто відповідно

$$u_{n+k,m} = u_{n,m+k} = u_{n,m}. \quad (3)$$

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1) і враховуючи, що  $|\exp(-i\omega t)| = 1$ , одержимо рівняння

$$\begin{aligned} \omega u_{n,m} - a_{n,m} u_{n+1,m} - a_{n-1,m} u_{n-1,m} - b_{n,m} u_{n,m+1} - \\ - b_{n,m-1} u_{n,m-1} - c_{n,m} u_{n,m} + \frac{\mu u_{n,m}^3}{1 + u_{n,m}^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Позначимо через

$$\begin{aligned} (Lu)_{n,m} = a_{n,m} u_{n+1,m} + a_{n-1,m} u_{n-1,m} + b_{n,m} u_{n,m+1} + b_{n,m-1} u_{n,m-1} + c_{n,m} u_{n,m}, \\ f(u_{n,m}) = \frac{\mu u_{n,m}^3}{1 + u_{n,m}^2}. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (4) набуде вигляду

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = f(u_{n,m}). \quad (5)$$

Надалі будемо розглядати більш загальне рівняння (5) з деякою нелінійністю  $f(u_{n,m})$ . Нехай  $F(t)$  первісна функція для функції

$$f(t), \text{ тобто } F(t) = \int_0^t f(s) ds. \text{ Тоді всюди далі припустимо, що вико-}$$

нуються наступні умови:

- (i<sub>1</sub>) послідовності  $(a_{n,m})$  і  $(b_{n,m})$  періодичні, тобто  $a_{n+k,m} = a_{n,m+k} = a_{n,m}$ ,  $b_{n+k,m} = b_{n,m+k} = b_{n,m}$ ,  $c_{n+k,m} = c_{n,m+k} = c_{n,m}$  і нижньою межею спектра оператора  $L$  є число 0;
- (i<sub>2</sub>)  $f(t) = o(t)$ ,  $t \rightarrow 0$  і  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(t)}{t} = l < \infty$ ;
- (i<sub>3</sub>)  $f \in C^1(\mathbb{R})$  і  $f(t)t < f'(t)t^2$ ,  $t \neq 0$ ;
- (i<sub>4</sub>)  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{2} f(t)t - F(t) \right) = \infty$ .

**Зауваження 1.** За виконання умови (i<sub>1</sub>) оператор  $L$  є обмеженим і самоспряженим у просторі  $l^2$ , а за виконання умов (i<sub>2</sub>), (i<sub>3</sub>) функція  $\frac{f(t)}{|t|}$  строго зростаюча, тоді як функція  $\frac{1}{2} f(t)t - F(t)$  строго зростає при  $t \geq 0$  і строго спадає при  $t \leq 0$ .

**Варіаційне формулювання задачі.** Нехай  $k \geq 2$  — ціле число. Тоді через  $E_k$  позначимо простір всіх  $k$ -періодичних послідовностей  $(u_{n,m})$ , які задовольняють умову (3). Це скінченновимірний простір

зі скалярним добутком  $(u, v)_k = \sum_{(n,m) \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$  та нормою

$$\|u\|_k = \left( \sum_{(n,m) \in Q_k} |u_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ де}$$

$$Q_k = \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : -\left[\frac{k}{2}\right] \leq n, m \leq k - \left[\frac{k}{2}\right] - 1 \right\},$$

$[x]$  — ціла частина  $x$ . Іноді ми будемо розглядати  $l^p$ -норму на  $E_k$

$$\|u\|_{l_k^p} = \left( \sum_{(n,m) \in Q_k} |u_{n,m}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Нагадаємо, що при  $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|u\|_{l_k^q} \leq \|u\|_{l_k^p}. \quad (6)$$

Зауважимо, що оператор  $L - \omega$  є обмеженим і самоспряженим у просторі  $E_k$ . На цьому просторі розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2} (L_k u - \omega u, u)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} F(u_{n,m}), \quad (7)$$

де  $L_k$  — оператор  $L$ , який діє в просторі  $E_k$ . Безпосереднім обчисленням одержуємо:

**Лема 1.** Похідна Гато функціоналу  $J_k$  визначається за формулою

$$\langle J'_k(u), h \rangle = (L_k u - \omega u, h)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(u_{n,m}) h_{n,m}, \quad u, h \in E_k, \quad (8)$$

а його критичні точки є розв'язками рівняння (5) з простору  $E_k$ .

**Допоміжні леми.** Для функціоналу  $J_k$  означимо многовид Нехарі

$$N_k := \{u \in E_k \mid \langle J'_k(u), u \rangle = 0, u \neq 0\} \subset E_k. \quad (9)$$

Введемо позначення  $I_k(u) := \langle J'_k(u), u \rangle$ . Це  $C^1$ -функціонал, похідна Гато якого визначається формулою

$$\langle I'_k(u), h \rangle = (L_k u - \omega u, h)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} (f(u_{n,m}) + f'(u_{n,m}) u_{n,m}) h_{n,m}. \quad (10)$$

**Лема 2.** Нехай виконуються умови  $(i_1) - (i_4)$ ,  $\omega + l > 0$ ,  $\omega < 0$ . Тоді множина  $N_k$  є непорожнім замкненим  $C^1$ -підмноговидом у просторі  $E_k$ , на якому  $I'_k(u) \neq 0$ . Крім того, існує  $\beta_0 > 0$  таке, що  $\|u\|_k \geq \beta_0$  та  $u \in N_k$ .



**Доведення.** Нехай  $\delta \in (-\omega, l)$  і  $E_\delta$  — спектральний підпростір оператора  $L_k - \omega$  в просторі  $E_k$ , що відповідає відрізку  $[0, \delta]$ . Оскільки  $-\omega \in \sigma(L_k - \omega)$ , то  $E_\delta \neq \{0\}$ . Нехай  $v \in E_\delta \setminus \{0\}$ . За умовою  $(i_2)$

$$\begin{aligned} \langle J'_k(tv), tv \rangle &= t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(tv_{n,m}) tv_{n,m} = \\ &= t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - o(t^2) > 0 \end{aligned}$$

для достатньо малих  $t > 0$ . З іншого боку,

$$\begin{aligned} \langle J'_k(tv), tv \rangle &= t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(tv_{n,m}) tv_{n,m} \leq \\ &\leq t^2 \left( \delta \|v\|_k^2 - \sum_{(n,m) \in Q_k} \frac{f(tv_{n,m}) v_{n,m}^2}{tv_{n,m}} \right). \end{aligned}$$

За умовою  $(i_2)$  сума в дужках збігається до  $l \|v\|_k^2$ , а тому  $\langle J'_k(tv), tv \rangle < 0$  для достатньо великих  $t > 0$ . Тоді існує  $t^* > 0$  таке, що  $\langle J'_k(t^*v), t^*v \rangle = 0$  і  $t^*v \in N_k$ . Отже,  $N_k \neq \emptyset$ .

Нехай  $u \in N_k$ , тоді з рівностей (7) і (9) маємо

$$\langle I'_k(u), u \rangle = \langle I'_k(u), u \rangle - 2I_k(u) = \sum_{(n,m) \in Q_k} (f(u_{n,m}) u_{n,m} - f'(u_{n,m}) u_{n,m}^2).$$

За умовою  $(i_3)$  ця сума є від'ємною. Тому  $I'_k(u) \neq 0$  і за теоремою про неявну функцію  $N_k \in C^1$ -підмноговином в просторі  $E_k$ . Замкненість  $E_k$  очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай  $\varphi(r) = \sup_{|t| \leq r} \frac{f(t)}{t}$ .

Це зростаюча функція при  $r \geq 0$  і згідно  $(i_2)$   $\varphi(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Нехай  $u \in N_k$ . Значимо, що оператор  $L_k - \omega$  додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівності (6) маємо

$$\begin{aligned} |\omega| \|u\|_k^2 &\leq (L_k u - \omega u, u)_k = \sum_{(n,m) \in Q_k} f(u_{n,m}) u_{n,m} \leq \\ &\leq \varphi(\|u\|_{l^{\infty}_k}) \cdot \|u\|_k^2 \leq \varphi(\|u\|_k) \cdot \|u\|_k^2. \end{aligned}$$

А це означає, що  $\varphi(\|u\|_k) \geq |\omega|$ . Оскільки функція  $\varphi$  зростаюча, то знайдеться  $\beta_0 > 0$  таке, що  $\|u\|_k \geq \beta_0$ ,  $u \in N_k$ .

**Зауваження 2.** Доведення леми показує, що якщо  $J_k(v) \leq 0$ , то існує єдине  $t^* \in (0, 1]$  таке, що  $t^*v \in N_k$ , а також існує таке  $v \in E_k \setminus \{0\}$ , що  $J_k(v) < 0$ .

З рівності (7) випливає, що на  $N_k$

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2}I_k(u) = \sum_{(n,m) \in Q_k} \left( \frac{1}{2}f(u_{n,m})u_{n,m} - F(u_{n,m}) \right). \quad (11)$$

**Лема 3.** Існує таке число  $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$ , що  $J_k(u) \geq \alpha_0$  для всіх  $u \in N_k$ .

**Доведення.** Нехай  $u \in N_k$ , тоді

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2}I_k(u) = \sum_{(n,m) \in Q_k} \left( \frac{1}{2}f(u_{n,m})u_{n,m} - F(u_{n,m}) \right).$$

За лемою 2,  $\|u\|_k \geq \beta_0 > 0$ . Отже, існують  $(n_0, m_0) \in Q_k$  (не залежать від  $u$ ) і  $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$  (також не залежить від  $u$ ) такі, що  $|u_{n_0}| \geq \delta_0$ . Тоді, поклавши  $\alpha_0 = \frac{1}{2}f(\delta_0)\delta_0 - F(\delta_0)$ , за зауваженням 1 маємо, що  $J_k(u) \geq \alpha_0$  для  $u \in N_k$ .

**Лема 4.** Якщо  $u \in N_k$ , то функція  $\varphi(t) = J_k(tu)$ ,  $t > 0$  має єдину критичну точку при  $t = 1$ .

**Доведення.** Знайдемо похідну

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \left( \frac{1}{2}(L_k(tu) - \omega tu)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} F(tu_{n,m}) \right)' = \\ &= \left( \frac{1}{2}t^2(L_k(u) - \omega u)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} F(tu_{n,m}) \right)' = \\ &= t(L_k(u) - \omega u)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(tu_{n,m})u_{n,m} = \\ &= t \left( (L_k(u) - \omega u)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} \frac{f(tu_{n,m})}{tu_{n,m}} u_{n,m}^2 \right). \end{aligned}$$

Оскільки на  $N_k$

$$\varphi'(1) = (L_k u_{n,m} - \omega u_{n,m}, u_{n,m})_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(u_{n,m})u_{n,m} = \langle J'_k(u), u \rangle = 0,$$

то  $t=1$  є критичною точкою функції  $\varphi(t)$ . Її єдиність випливає зі строгої монотонності функції  $\frac{f(t)}{t}$ .

**Основний результат.** За лемою 4 точки мінімуму функціоналу  $J_k$  на  $N_k$  є розв'язками рівняння (5). Тому природно розглянути наступну задачу мінімізації

$$m_k = \inf \{ J_k(u) : u \in N_k \}. \quad (12)$$

**Лема 5.** Нехай виконуються умови  $(i_1)-(i_4)$ ,  $\omega+l>0$ ,  $\omega<0$ . Тоді задача (12) має розв'язок.

**Доведення.** Нехай  $(u^j)$ ,  $u^j \in N_k$  — мінімізуючі послідовність для  $J_k$ , тобто  $J_k(u^j) \rightarrow m_k$ . З рівності (11) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{(n,m) \in Q_k} \left( \frac{1}{2} f(u_{n,m}^j) u_{n,m}^j - F(u_{n,m}^j) \right).$$

Тоді умова  $(i_4)$  означає, що  $\|u^j\|_{l^\infty}$  обмежена. Оскільки простір  $E_k$  скінченновимірний, а  $l^\infty$ -норма еквівалентна евклідовій нормі на  $E_k$ , то послідовність  $(u^j)$  є обмеженою. Переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що  $(u^j)$  збігається до  $u \in N_k$  і  $J_k(u) = m_k$ .  $\square$

Основними результатами цієї статті є наступні дві теореми.

З леми 5 випливає теорема:

**Теорема 1.** Нехай виконуються умови  $(i_1)-(i_4)$ ,  $\omega+l>0$ ,  $\omega<0$ . Тоді для будь-якого  $k \geq 2$  рівняння (5) має нетривіальний  $k$ -періодичний розв'язок  $u^{(k)} \in E_k$ . Крім того, якщо функція  $f$  непарна, то рівняння (5) має два нетривіальні розв'язки  $\pm u^{(k)} \in E_k$ .

Оскільки насичувана нелінійність  $f(u_{n,m}) = \frac{\mu u_{n,m}^3}{1+u_{n,m}^2}$ ,  $\mu \neq 0$  задовольняє умови  $(i_2)-(i_4)$ , то з теореми 1 випливає теорема:

**Теорема 2.** Нехай виконується умова  $(i_1)$ ,  $\omega+\mu>0$ ,  $\omega<0$ . Тоді для будь-якого  $k \geq 2$  рівняння (4) має два нетривіальні розв'язки  $\pm u^{(k)} \in E_k$ .

**Висновки.** Таким чином, у цій статті одержано результат про існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці.

### Список використаних джерел:

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154–175.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, № 4. — С. 435–444.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, № 1. — С. 76–88.
4. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. — Вип. 16. — С. 21–29.
5. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуванню нелінійністю / С. М. Бак // Математичні студії. — 2010. — Т. 33, № 1. — С. 78–84.
6. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні  $\sin$ -Гордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5–10.
7. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 17–23.
8. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 5–12.
9. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, № 3. — С. 45–52.
10. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 3-9.
11. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія:

- Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 18–24.
12. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці / С. М. Бак, К. Є. Рум'янцева // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 6. — С. 29–36.
  13. Мезенцев В. К. Двумерные солитоны в дискретных системах / В. К. Мезенцев, С. Л. Мушер, И. В. Рыженкова, С. К. Турицын // Письма в ЖЭТФ. — 1994. — Т. 60, вып. 11. — С. 815–821.
  14. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S. M. Bak // Journal of Mathematical Sciences, 2016. — Vol. 217, № 2 (August). — P. 187–197.
  15. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice / S. M. Bak // Ukrainian mathematical Journal. — 2017. — Vol. 4 (69). — P. 509–520.
  16. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice / S. M. Bak, G. M. Kovtonyuk // Matematychni Studii. — 2018. — Vol. 50, № 1. — P. 75–87.
  17. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice / S. Bak // Journal of mathematical physics, analysis, geometry. — 2018. — Vol. 14, № 1. — P. 16–26.
  18. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — № 20. — P. 319–341.
  19. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, № 1 (February). — P. 105–114.
  20. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations / A. Pankov // Nonlinearity. — 2006. — № 19. — P. 27–40.
  21. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. — 2008. — № 464. — P. 3219–3236.

## **STANDING WAVES WITH PERIODIC AMPLITUDE IN THE DISCRETE NONLINEAR SCHRÖDINGER TYPE EQUATION WITH SATURABLE NONLINEARITY ON 2D-LATTICE**

This paper is devoted to the study of a discrete nonlinear Schrödinger equation on a two-dimensional lattice. This type of equations with saturable nonlinearity is studied. We first consider the Schrödinger type equation with a more general nonlinearity, which has the same properties as saturable nonlinearity. For such equations, we obtain the result of the existence of solutions in the form of standing waves with periodic amplitude (note that such solutions are often called breathers). To do this, the given equation is presented by operator form in the space of two-sided sequences. It is assumed that the coefficients of the corresponding linear operator form  $k$ -periodic sequences. This operator is

bounded and self-adjoint in the space of all  $k$ -periodic sequences. Then a special functional was constructed, the critical points of which in this space are solutions of the original equation. A Gateaux derivative of this functional is found. Next we consider the Nehari manifold for a given variational problem, which is a set of nontrivial critical points of a constructed functional in the space of  $k$ -periodic sequences. It is shown that this manifold is a non-empty and closed subset of a given space. In addition, the corresponding minimization problem is considered and it is shown that this problem has a solution in the Nehari manifold. Consequently, under these conditions the original equation has nontrivial periodic solutions. Finally, due to the fact that saturable nonlinearity satisfies these conditions, the existence of two nontrivial standing waves with  $k$ -periodic amplitude for a discrete nonlinear Schrödinger equation with saturable nonlinearity on a two-dimensional lattice is established. The results of this paper are the distribution of already known results for discrete nonlinear Schrödinger equations on 1D and 2D-lattices.

**Key words:** *discrete nonlinear Schrödinger equation, 2D-lattice, standing waves, critical points, Nehari manifold, saturable nonlinearity.*

Отримано: 14.11.2018

UDC 519.6

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.14-24

**A. Ya. Bomba**, Doct. of Techn. Sciences,  
**M. V. Boichura**

Rivne State Humanitarian University, Rivne

## **NUMERICAL COMPLEX ANALYSIS METHOD FOR PARAMETERS IDENTIFICATION OF ANISOTROPIC MEDIA USING APPLIED QUASIPOTENTIAL TOMOGRAPHIC DATA. PART 1: PROBLEM STATEMENT AND ITS APPROXIMATION**

The approach to the solving of gradient problems of parameters identification of quasiideal fields with using applied quasipotential tomographic data based on numerical complex analysis methods is transferred to cases of anisotropic media. We, similar to the existing works of world scientists, some additional information about the nature of the distribution of conductivity inside the domain (research object) is considered a priori known. However, in opposite to the traditional approaches to the statement and solving the problems of electrical impedance tomography, we set the local velocities distribution of a substance (liquid, current) in addition to the averaged potential at the contact sections of plate and body and at other sections (stream lines), we set the potential distribution (according to experimental data, which we approximate using splines, Bezier curves, etc.). Generation of initial data at the boundary of the investigated object is carried out in accordance with the polar model of current injection and a given sum of eigenvalues of the conductivity tensor of

the medium. The presence of this kind of data greatly accelerates the process of further solving the problem, which is convenient, in particular, when verifying the method that developed by authors. The corresponding problem is reduced to the iterative solving of a series of problems for the Laplace type equations, where instead of «boundary numerical analogues of the Cauchy-Riemann type equations» appear the ratio of quasiorthogonality with using special types of optimization conditions. In particular: the minimizing functional is constructed by taking into account the Cauchy-Riemann type conditions, the relation between eigenvalues of corresponding anisotropy tensor and also regularizing term; the condition-restriction is built based on ellipticity conditions.

**Key words:** *applied quasipotential tomography, quasiconformal mappings, anisotropy, identification, nonlinear problems.*

**Introduction.** As it is known [1–5], the image reconstruction of an isotropic conductivity coefficient that based on the applied quasipotential tomography (AQT) requires the imposition of a large number of conditions at the domain bound, and also the structure of the corresponding medium. It turns out that in the general case (in contrast to some specific [6]) of anisotropy, it is necessary to set much more information about the conductivity distribution for its parameter identification [1, 7–12]. This, obviously, weakens the correctness of the problem in comparison with the isotropy. And, consequently, it requires (in comparison with, for example, [5]) the necessity of using a regularizing functional, in particular the Tikhonov type [1, 3, 4, 9, 11]. The ways to apply additional data about the conductivity tensor (CT), depending on the information type about it are proposed in a number of papers [6–9, 12]. In particular, several options for specifying information about eigenvectors offer in [8]. The regularization procedure was adapted in such a way that the additional data were taken into account as much as possible [9]. A new visual CT representation, in which it is easy to understand its distribution, is given in [6].

On the other hand, today a promising methodology for identifying the conductivity coefficient using AQT data, according to which the solving of the sequence of so-called analysis and synthesis problems is reduced to the alternate application of numerical quasiconformal mappings methods and the parameters identification of the conductivity of the medium, respectively [4, 5] is developed. In this paper we discuss the transfer of this methodology to the case of the parameter identification of anisotropic media. At the same time, the additional information is the dependency between eigenvalues of CT.

In this case, the practical application of the results of this research can take place in a number of branches of science and technology (see, for example [1, 9–13]). In particular, in medicine, the object of this kind of research may be the medium with fibrous or layered areas (which includes muscles, bones, etc.), in which there is a stream of non-spherical particles (for example, red blood cells), and in geology, with areas of soil layer compression.

**Parameters identification problem of anisotropic mediums using AQT data.** Consider quasiideal processes of particles movement (in particular, fluids, electrical currents) in a single-connected curvilinear domain (horizontal anisotropic formation, anisotropic plate — the tomographical cross-section)  $G_z$  (Fig. 1, a), bounded by a smooth closed curve  $\partial G_z = \{(x, y) : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), \tilde{x}(0) = \tilde{x}(2\pi) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(0) = \tilde{y}(2\pi) = \tilde{y}_0, 0 \leq \tau \leq 2\pi, \text{ where } \tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau) \text{ are defined continuously differentiated functions, } O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \text{ is given an initial starting point}\}$ , generated by the existence of potential differences  $\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}$  ( $\varphi^{*(p)} > \varphi_*^{(p)}$ ), which are given on selected equipotential lines  $A_p B_p$  and  $C_p D_p$ , where  $A_p, B_p, C_p, D_p$  are marked points on the  $\partial G_z$ ;  $p = 1, 2, \dots$  is injection number (see for example [3–5, 8, 11]);  $B_p C_p$  and  $A_p D_p$  are impermeable boundary flow lines. We model a current injection through tomographic cross-section, similarly to [4, 5], by using sets of values  $\{\tau_A^{(p)}, \tau_B^{(p)}, \tau_C^{(p)}, \tau_D^{(p)}\}$ , corresponding to which

$$A_p = (\tilde{x}(\tau_A^{(p)}), \tilde{y}(\tau_A^{(p)})), \quad B_p = (\tilde{x}(\tau_B^{(p)}), \tilde{y}(\tau_B^{(p)})),$$

$$C_p = (\tilde{x}(\tau_C^{(p)}), \tilde{y}(\tau_C^{(p)})), \quad D_p = (\tilde{x}(\tau_D^{(p)}), \tilde{y}(\tau_D^{(p)})).$$

We denote the corresponding for current injection bound of domain  $G_z$  with given four marked points by  $\partial G_z^{(p)}$  ( $z^{(p)} = x^{(p)} + iy^{(p)}$ ).

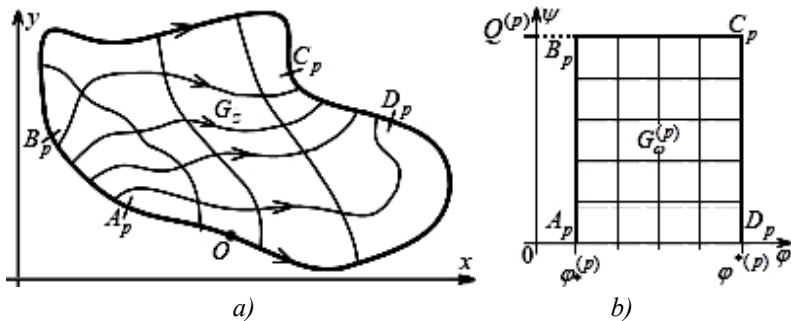


Fig. 1. Tomographical cross-section  $G_z$  (a)

and corresponding complex quasipotential domains  $G_\omega^{(p)}$  (b)

As a mathematical model of AQT [1] we use, similarly to [4, 5, 14], systems of differential equations in partial derivatives which connect mutually quasicomplex conjugate quasipotentials  $\varphi = \varphi^{(p)}(x, y)$  of density  $\sigma grad \varphi^{(p)}(x, y)$  and stream functions  $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$  when have place



CT  $\sigma = (\sigma_{\alpha\beta}(x, y, \dots))_{\alpha, \beta=1,2}$  identification under corresponding boundary conditions:

$$(\sigma_{11}\varphi_x^{(p)} + \sigma_{12}\varphi_y^{(p)})'_x + (\sigma_{21}\varphi_x^{(p)} + \sigma_{22}\varphi_y^{(p)})'_y = 0; \quad (1)$$

$$\varphi^{(p)} \Big|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}, \quad \varphi^{(p)} \Big|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)}, \quad \bar{j}^{(p)} \Big|_{B_p C_p \cup A_p D_p} = 0; \quad (2)$$

$$\varphi^{(p)}(M) \Big|_{B_p C_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M), \quad \varphi^{(p)}(M) \Big|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M),$$

$$\bar{j}^{(p)}(M) \Big|_{A_p B_p} = \Psi_*^{(p)}(M), \quad \bar{j}^{(p)}(M) \Big|_{C_p D_p} = \Psi^{*(p)}(M); \quad (3)$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda. \quad (4)$$

Here (1) is a consequence of the linear law of motion such as Ohm, Darcy etc.  $\bar{j}^{(p)} = \sigma \text{grad} \varphi^{(p)}$  and the equation of continuity  $\text{div} \bar{j}^{(p)} = 0$  [1–8, 10, 13];  $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x, y, \dots)$  are limited continuously differentiated in domain  $G_z^{(p)}$  functions, which characterize conductivity and anisotropy of medium;  $\lambda = \lambda(x, y)$  is given distribution of the sum of eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  of corresponding to (1) matrix, that equivalent to the sum of diagonal elements of given tensor [14];  $\bar{n}$  is unit vector of outer normal;  $M$  is a running point of the corresponding curve. The functions

$$\bar{\varphi}^{(p)}(M) = \bar{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots) \quad (\tau_C^{(p)} \leq \tau \leq \tau_B^{(p)}), \quad \underline{\varphi}^{(p)}(M) = \underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$$

$$(\tau_A^{(p)} \leq \tau \leq \tau_D^{(p)}), \quad \Psi_*^{(p)}(M) = \Psi_*^{(p)}(\tau, \dots) \quad (\tau_B^{(p)} \leq \tau \leq \tau_A^{(p)}),$$

$$\Psi^{*(p)}(M) = \Psi^{*(p)}(\tau, \dots) \quad (\tau_D^{(p)} \leq \tau \leq \tau_C^{(p)})$$

can be built by the interpolation of the experimentally received their values

$$\bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \quad \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \quad \Psi_{*j^{(p)}}^{(p)}, \quad \Psi_{*j^{(p)}}^{*(p)}$$

having some  $\tau = \bar{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \quad \tau = \underline{\tau}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \quad \tau = \tau_{*j^{(p)}}^{(p)},$   
 $\tau = \tau_{*j^{(p)}}^{*(p)}$  on sections  $B_p C_p, A_p D_p, A_p B_p, C_p D_p,$  respectively

$$(\varphi_*^{(p)} \leq \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{*(p)}, \quad \varphi_*^{*(p)} \leq \bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{*(p)}, \quad \Psi_{*j^{(p)}}^{(p)} > 0,$$

$$\Psi_{*j^{(p)}}^{*(p)} > 0, \quad 0 \leq \bar{i}^{(p)} \leq \bar{m}^{*(p)} + 1, \quad 0 \leq \underline{i}^{(p)} \leq \underline{m}^{(p)} + 1,$$

$$0 \leq j^{(p)} \leq n_*^{(p)} + 1, \quad 0 \leq j^{*(p)} \leq n^{*(p)} + 1)$$

as in [5]. We search the CT components as:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x^{(p)}, y^{(p)}, a_{s_a, 0}, \dots, a_{0, s_a}) = \sum_{k_a, r_a=0}^{s_a, k_a} a_{k_a - r_a, r_a} x^{(p)k_a - r_a} y^{(p)r_a},$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}(x^{(p)}, y^{(p)}, b_{s_b, 0}, \dots, b_{0, s_b}) = \sum_{k_b, r_b=0}^{s_b, k_b} b_{k_b - r_b, r_b} x^{(p)k_b - r_b} y^{(p)r_b},$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}(x^{(p)}, y^{(p)}, c_{s_c, 0}, \dots, c_{0, s_c}) = \sum_{\substack{s_c, k_c \\ k_c, r_c = 0}} c_{k_c - r_c, r_c} x^{(p)k_c - r_c} y^{(p)r_c},$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad (5)$$

where  $a_{k_a - r_a, r_a}$ ,  $b_{k_b - r_b, r_b}$ ,  $c_{k_c - r_c, r_c}$  ( $k_a = 0, \dots, s_a$ ,  $r_a = 0, \dots, k_a$ ,  $k_b = 0, \dots, s_b$ ,  $r_b = 0, \dots, k_b$ ,  $k_c = 0, \dots, s_c$ ,  $r_c = 0, \dots, k_c$ ) are the parameters that are being found during the problem solving.

The problem lies in image reconstructing of CT. In this, the accompanying is calculating of corresponding electrodynamic meshes and velocity fields.

We can reduce (1)–(5) to the series of more general boundary value problems on quasiconformal mapping  $\omega = \omega^{(p)}(z) = \varphi^{(p)}(x, y) + i\psi^{(p)}(x, y)$  of the physical domains  $G_z^{(p)}$  (Fig. 1, a) onto the corresponding domains of the complex quasipotential  $G_\omega^{(p)}$  (Fig. 1, b) by the way, similarly to [4, 5, 14], of introducing the stream functions  $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$  ( $p = 1, \bar{p}$ ), which are complex conjugated to  $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$  ( $p = \bar{1}, \bar{p}$ ), under (4) and (5) conditions:

$$\left\{ \sigma_{11}\varphi_x^{(p)} + \sigma_{12}\varphi_y^{(p)} = \psi_y'^{(p)}, \quad \sigma_{21}\varphi_x^{(p)} + \sigma_{22}\varphi_x^{(p)} = -\psi_x'^{(p)}; \quad (6) \right.$$

$$\varphi^{(p)} \Big|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}, \quad \varphi^{(p)} \Big|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)},$$

$$\psi^{(p)} \Big|_{A_p D_p} = 0, \quad \psi^{(p)} \Big|_{B_p C_p} = Q^{(p)}; \quad (7)$$

$$\int_{MN} |\bar{j}^{(p)}| dl = Q^{(p)}, \quad M \in B_p C_p, N \in A_p D_p;$$

$$\varphi^{(p)}(M) \Big|_{B_p C_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M), \quad \varphi^{(p)}(M) \Big|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M),$$

$$\psi^{(p)}(M) \Big|_{A_p B_p} = \psi_*^{(p)}(M), \quad \psi^{(p)}(M) \Big|_{C_p D_p} = \psi^{*(p)}(M), \quad (8)$$

where

$$\psi_*^{(p)}(M) = \int_{A_p M} \Psi_*^{(p)}(M) dl, \quad \psi^{*(p)}(M) = \int_{D_p M} \Psi^{*(p)}(M) dl;$$

$$G_\omega^{(p)} = \left\{ (\varphi, \psi): \varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)}, 0 \leq \psi \leq Q^{(p)} \right\};$$

$Q^{(p)}$  is discharge of the vector fields (current) through the contact sections ( $A_p B_p$  and  $C_p D_p$ );  $dl$  is arc element of corresponding curve.

**The synthesis of the numerical quasiconformal mapping method and an idea of the rotational block parameterization.** The most common approach for solving of the AQT forward problem is based on the using the finite element method. But the continuity conditions and, thus, the conserva-

tion law for both a mesh cell and a whole domain doesn't satisfy [15]. So, we apply the finite difference method for discretization of functions and parameters of AQT mathematical model where the analogies of electrodynamic principle are considered. Also we apply quit modified algorithm for numerical solving of the boundary value problems on quasiconformal mapping of the domains with the different geometric configuration, which are limited by the stream and equiquasipotential lines [14] (including the advantages of the appropriate method) for the searching the unknown function of the current's potential  $\varphi^{(p)}(x, y)$ . We search the functions  $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$  and  $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$  when value  $(\sigma_{\alpha\beta}(x, y, \dots))_{\alpha, \beta=1,2}$  is known, by the way of solving of the boundary value problems, inversed to (4)–(8), on quasiconformal mapping  $G_{\omega}^{(p)} \rightarrow G_z^{(p)}$  (relative to  $x^{(p)} = x^{(p)}(\varphi, \psi)$  and  $y^{(p)} = y^{(p)}(\varphi, \psi)$ ) with statements which have the form [4, 5, 14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{12}}{\sigma_{11}} x_{\psi}^{\prime(p)} - \frac{\sigma_{21}x_{\varphi}^{\prime(p)}}{\sigma_{11}} \right)_{\psi} + \left( \frac{x_{\varphi}^{\prime(p)}}{\sigma_{11}} + \frac{\sigma_{12}x_{\psi}^{\prime(p)}}{\sigma_{11}} \right)_{\varphi} = 0, \\ \left( \frac{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{12}}{\sigma_{22}} y_{\psi}^{\prime(p)} + \frac{\sigma_{12}y_{\varphi}^{\prime(p)}}{\sigma_{22}} \right)_{\psi} + \left( \frac{y_{\varphi}^{\prime(p)}}{\sigma_{22}} - \frac{\sigma_{21}y_{\psi}^{\prime(p)}}{\sigma_{22}} \right)_{\varphi} = 0; \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{x}(\underline{\tau}_*^{(p)}(\psi)), & y^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{y}(\underline{\tau}_*^{(p)}(\psi)), \\ x^{(p)}(\varphi, \underline{Q}^{(p)}) &= \tilde{x}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), & y^{(p)}(\varphi, \underline{Q}^{(p)}) &= \tilde{y}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), \\ x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{x}(\underline{\tau}^{*(p)}(\psi)), & y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{y}(\underline{\tau}^{*(p)}(\psi)), \\ x^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{x}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), & y^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{y}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{y_{\varphi}^{\prime(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)})}{x_{\varphi}^{\prime(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)})} \left( \sigma_{11}y_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)}) - \sigma_{12}x_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)}) \right) = \\ & = \sigma_{21}y_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)}) - \sigma_{22}x_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi_*^{(p)}), \tau \in [\tau_B^{(p)}; \tau_A^{(p)}], \\ & \frac{y_{\varphi}^{\prime(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)})}{x_{\varphi}^{\prime(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)})} \left( \sigma_{11}y_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)}) - \sigma_{12}x_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)}) \right) = \\ & = \sigma_{21}y_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)}) - \sigma_{22}x_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi^{*(p)}), \tau \in [\tau_D^{(p)}; \tau_C^{(p)}], \\ & y_{\varphi}^{\prime(p)}(\varphi^{(p)}, 0) \left( \sigma_{11}y_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi^{(p)}, 0) - \sigma_{12}x_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi^{(p)}, 0) \right) = \\ & = x_{\varphi}^{\prime(p)}(\varphi^{(p)}, 0) \left( \sigma_{21}y_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi^{(p)}, 0) - \sigma_{22}x_{\psi}^{\prime(p)}(\varphi^{(p)}, 0) \right), \tau \in [\tau_A^{(p)}; \tau_D^{(p)}], \end{aligned}$$

$$\frac{y_{\varphi}^{r(p)}(\bar{\varphi}^{(p)}, Q^{(p)})}{x_{\varphi}^{r(p)}(\bar{\varphi}^{(p)}, Q^{(p)})} \left( \sigma_{11} y_{\psi}^{r(p)}(\bar{\varphi}^{(p)}, Q^{(p)}) - \sigma_{12} x_{\psi}^{r(p)}(\bar{\varphi}^{(p)}, Q^{(p)}) \right) = \quad (11)$$

$$= \sigma_{21} y_{\psi}^{r(p)}(\bar{\varphi}^{(p)}, Q^{(p)}) - \sigma_{22} x_{\psi}^{r(p)}(\bar{\varphi}^{(p)}, Q^{(p)}), \quad \tau \in [\tau_C^{(p)}; \tau_B^{(p)}]$$

under (4) and (5) conditions, where  $\tau = \tau_*^{(p)}(\psi)$ ,  $\tau = \bar{\tau}^{(p)}(\varphi)$ ,  $\tau = \tau^{*(p)}(\psi)$ ,  $\tau = \underline{\tau}^{(p)}(\varphi)$  ( $\varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)}$ ,  $0 \leq \psi \leq Q^{(p)}$ ) — functions, which can be built by the way of interpolation of the experimentally received their values  $\tau_{*j_a}^{(p)}$ ,  $\bar{\tau}_i^{(p)}$ ,  $\tau_j^{*(p)}$ ,  $\underline{\tau}_i^{(p)}$  having some arguments  $\psi_{*j_a}^{(p)}$ ,  $\bar{\varphi}_i^{(p)}$ ,  $\psi_j^{*(p)}$ ,  $\underline{\varphi}_i^{(p)}$  on sections  $A_p B_p$ ,  $B_p C_p$ ,  $C_p D_p$  and  $A_p D_p$ , respectively.

We reconstruct CT, similarly to [3–5], using the minimizing functional of the sum of the squares of the residual of expressions, receiver from Cauchy-Riemann type conditions, (4) condition, within using regularization ideas

$$\Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(\bar{p})}, y^{(1)}, \dots, y^{(\bar{p})}, a_{s_a, 0}, b_{s_b, 0}, c_{s_c, 0}, \dots, a_{0, s_a}, b_{0, s_b}, c_{0, s_c}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{\bar{p}} \left( \left( \sigma_{11} y_{\psi}^{r(p)} - \sigma_{12} x_{\psi}^{r(p)} - x_{\varphi}^{r(p)} + \sigma_{21} y_{\psi}^{r(p)} - \sigma_{22} x_{\psi}^{r(p)} - y_{\varphi}^{r(p)} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left( \sigma_{11} y_{\psi}^{r(p)} - \sigma_{12} x_{\psi}^{r(p)} - x_{\varphi}^{r(p)} - \sigma_{21} y_{\psi}^{r(p)} + \sigma_{22} x_{\psi}^{r(p)} + y_{\varphi}^{r(p)} \right)^2 \right) + \quad (12)$$

$$+ 2\eta \left( \sum_{k_a=0}^{s_a} \sum_{r_a=0}^{k_a} \frac{a_{k_a-r_a, r_a}^2}{100^{k_a}} + \sum_{k_b=0}^{s_b} \sum_{r_b=0}^{k_b} \frac{b_{k_b-r_b, r_b}^2}{100^{k_b}} + \sum_{k_c=0}^{s_c} \sum_{r_c=0}^{k_c} \frac{c_{k_c-r_c, r_c}^2}{100^{k_c}} \right) +$$

$$+ 2\mu(\lambda - \sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \rightarrow \min$$

and elliptic conditions [14]

$$\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0, \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} > 0, \quad (13)$$

where  $\mu$  is multiplier, which affects the degree of implementation of the (4) condition,  $\eta$  is regularizing parameter.

Let's write the difference analogues of problem (4), (5), (9)–(11) in mesh domains  $G_z^{y(p)}$ , similarly to [4, 5, 14], in such form:

$$\left\{ \begin{aligned} & x_{i+1, j}^{(p)} + x_{i-1, j}^{(p)} - 2(1 + \gamma^{(p)2} B_{i, j}^{(p)}) x_{i, j}^{(p)} + \gamma^{(p)2} B_{i, j}^{(p)} (x_{i, j-1}^{(p)} + x_{i, j+1}^{(p)}) + \gamma^{(p)} \times \\ & \times A_{i, j}^{(p)} (x_{i+1, j+1}^{(p)} + x_{i-1, j-1}^{(p)} - x_{i+1, j-1}^{(p)} - x_{i-1, j+1}^{(p)}) / 4 + (x_{i, j+1}^{(p)} - x_{i, j-1}^{(p)}) \gamma^{(p)} D_{i, j}^{(p)} + \\ & + C_{i, j}^{(p)} (x_{i+1, j}^{(p)} - x_{i-1, j}^{(p)}) = 0, \quad 0 = y_{i+1, j}^{(p)} + y_{i-1, j}^{(p)} - 2(1 + \gamma^{(p)2} B_{i, j}^{(p)}) y_{i, j}^{(p)} + \\ & + \gamma^{(p)2} B_{i, j}^{(p)} (y_{i, j-1}^{(p)} + y_{i, j+1}^{(p)}) + (y_{i+1, j+1}^{(p)} + y_{i-1, j-1}^{(p)} - y_{i+1, j-1}^{(p)} - y_{i-1, j+1}^{(p)}) \gamma^{(p)} A_{i, j}^{(p)} / \\ & / 4 + (y_{i, j+1}^{(p)} - y_{i, j-1}^{(p)}) \gamma^{(p)} F_{i, j}^{(p)} + E_{i, j}^{(p)} (y_{i+1, j}^{(p)} - y_{i-1, j}^{(p)}), \quad (i = 1, m^{(p)}, j = 1, n^{(p)}); \end{aligned} \right. \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 x_{0,j}^{(p)} &= \tilde{x}\left(\tau_*^{(p)}(\psi_j)\right), \quad y_{0,j}^{(p)} = \tilde{y}\left(\tau_*^{(p)}(\psi_j)\right), \quad x_{i,n^{(p)}+1}^{(p)} = \tilde{x}\left(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_i)\right), \\
 y_{i,n^{(p)}+1}^{(p)} &= \tilde{y}\left(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi_i)\right), \quad x_{m^{(p)}+1,j}^{(p)} = \tilde{x}\left(\tau^{*(p)}(\psi_j)\right), \\
 y_{m^{(p)}+1,j}^{(p)} &= \tilde{y}\left(\tau^{*(p)}(\psi_j)\right), \quad x_{i,0}^{(p)} = \tilde{x}\left(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi_i)\right), \\
 y_{i,0}^{(p)} &= \tilde{y}\left(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi_i)\right) \quad (0 \leq i \leq m^{(p)} + 1, \quad 0 \leq j \leq n^{(p)} + 1); \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(3y_{0,j}^{(p)} - 4y_{1,j}^{(p)} + y_{2,j}^{(p)})\left(\sigma_{11}(y_{0,j+1}^{(p)} - y_{0,j-1}^{(p)}) - \sigma_{12}(x_{0,j+1}^{(p)} - x_{0,j-1}^{(p)})\right) = \\
 &= (3x_{0,j}^{(p)} - 4x_{1,j}^{(p)} + x_{2,j}^{(p)})\left(\sigma_{21}(y_{0,j+1}^{(p)} - y_{0,j-1}^{(p)}) - \sigma_{22}(x_{0,j+1}^{(p)} - x_{0,j-1}^{(p)})\right), \\
 &(3y_{m^{(p)}+1,j}^{(p)} - 4y_{m^{(p)},j}^{(p)} + y_{m^{(p)}-1,j}^{(p)})\left(\sigma_{11}(y_{m^{(p)}+1,j+1}^{(p)} - y_{m^{(p)}+1,j-1}^{(p)}) - \right. \\
 &\left. - \sigma_{12}(x_{m^{(p)}+1,j+1}^{(p)} - x_{m^{(p)}+1,j-1}^{(p)})\right) = \left(\sigma_{21}(y_{m^{(p)}+1,j+1}^{(p)} - y_{m^{(p)}+1,j-1}^{(p)}) - \right. \\
 &\left. - \sigma_{22}(x_{m^{(p)}+1,j+1}^{(p)} - x_{m^{(p)}+1,j-1}^{(p)})\right)(3x_{m^{(p)}+1,j}^{(p)} - 4x_{m^{(p)},j}^{(p)} + x_{m^{(p)}-1,j}^{(p)}), \\
 &(y_{i+1,0}^{(p)} - y_{i-1,0}^{(p)}) \frac{\sigma_{11}(3y_{i,0}^{(p)} - 4y_{i,1}^{(p)} + y_{i,2}^{(p)}) - \sigma_{12}(3x_{i,0}^{(p)} - 4x_{i,1}^{(p)} + x_{i,2}^{(p)})}{x_{i+1,0}^{(p)} - x_{i-1,0}^{(p)}} - \\
 &- \left(\sigma_{21}(3y_{i,0}^{(p)} - 4y_{i,1}^{(p)} + y_{i,2}^{(p)}) - \sigma_{22}(3x_{i,0}^{(p)} - 4x_{i,1}^{(p)} + x_{i,2}^{(p)})\right) = 0, \\
 &\left(\sigma_{11}(3y_{i,n^{(p)}+1}^{(p)} - 4y_{i,n^{(p)}}^{(p)} + y_{i,n^{(p)}-1}^{(p)}) - \sigma_{12}(3x_{i,n^{(p)}+1}^{(p)} - 4x_{i,n^{(p)}}^{(p)} + \right. \\
 &\left. + x_{i,n^{(p)}-1}^{(p)})\right)(y_{i+1,n^{(p)}+1}^{(p)} - y_{i-1,n^{(p)}+1}^{(p)}) - \left(\sigma_{21}(3y_{i,n^{(p)}+1}^{(p)} - 4y_{i,n^{(p)}}^{(p)} + \right. \\
 &\left. + y_{i,n^{(p)}-1}^{(p)}) - \sigma_{22}(3x_{i,n^{(p)}+1}^{(p)} - 4x_{i,n^{(p)}}^{(p)} + x_{i,n^{(p)}-1}^{(p)})\right)(x_{i+1,n^{(p)}+1}^{(p)} - \\
 &- x_{i-1,n^{(p)}+1}^{(p)}) = 0, \quad i=0, m^{(p)}+1, \quad j=0, n^{(p)}+1; \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_{i,j}^{\gamma(p)} = \sigma_{11,i,j}^{\gamma(p)} + \sigma_{22,i,j}^{\gamma(p)}, \quad (17)$$

where  $\gamma^{(p)}$  is quasiconformal invariant [14] for the corresponding domains

$$\begin{aligned}
 G_\omega^{\gamma(p)} &= \left\{(\varphi_i^{(p)}, \psi_j^{(p)}) : \varphi_i^{(p)} = \overline{\varphi_*^{(p)} + i\Delta\varphi^{(p)}}, \quad i=0, m^{(p)}+1; \right. \\
 \psi_j^{(p)} &= j\Delta\psi^{(p)}, \quad j=0, n^{(p)}+1; \quad \Delta\varphi^{(p)} = (\varphi_*^{*(p)} - \varphi_*^{(p)}) / (m^{(p)} + 1), \\
 \Delta\psi^{(p)} &= \underline{Q}^{(p)} / (n^{(p)} + 1), \quad \gamma^{(p)} = \Delta\varphi^{(p)} / \Delta\psi^{(p)}, \quad m^{(p)}, \quad n^{(p)} \in \mathbb{N}\}; \\
 x_{i,j}^{(p)} &= x^{(p)}(\varphi_i^{(p)}, \psi_j^{(p)}), \quad y_{i,j}^{(p)} = y^{(p)}(\varphi_i^{(p)}, \psi_j^{(p)}), \quad \sigma_{\alpha\beta,i,j}^{\gamma(p)} = \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma(p)}(x_{i,j}^{(p)}, y_{i,j}^{(p)}), \\
 \lambda_{i,j}^{\gamma(p)} &= \lambda^{\gamma(p)}(x_{i,j}^{(p)}, y_{i,j}^{(p)}); \quad A_{i,j}^{(p)}, \quad B_{i,j}^{(p)}, \quad C_{i,j}^{(p)}, \quad D_{i,j}^{(p)}, \quad E_{i,j}^{(p)}, \quad F_{i,j}^{(p)}
 \end{aligned}$$

are defined in the same way as [14].

We can rewrite the functional (12) and elliptic conditions (13) for all internal nodal points  $(x_{i,j}^{(p)}, y_{i,j}^{(p)})$  ( $p = \overline{1, \tilde{p}}, i = \overline{1, m^{(p)}}, j = \overline{1, n^{(p)}}$ ) as follows

$$\begin{aligned}
 & \Phi(z_{1,1}^{(1)}, \dots, z_{m^{(p)}, n^{(p)}}^{(\tilde{p})}, a_{s_a, 0}, b_{s_b, 0}, c_{s_c, 0}, \dots, a_{0, s_a}, b_{0, s_b}, c_{0, s_c}) = \\
 & = \sum_{p, i, j=1}^{\tilde{p}, m^{(p)}, n^{(p)}} \left( \left( \frac{\sigma_{11, j}^{\gamma(p)}(y_{i, j+1}^{(p)} - y_{i, j-1}^{(p)}) - \sigma_{12, j}^{\gamma(p)}(x_{i, j+1}^{(p)} - x_{i, j-1}^{(p)})}{\Delta \psi^{(p)}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{x_{i+1, j}^{(p)} - x_{i-1, j}^{(p)}}{\Delta \varphi^{(p)}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{21, j}^{\gamma(p)}(y_{i, j+1}^{(p)} - y_{i, j-1}^{(p)}) - \sigma_{22, j}^{\gamma(p)}(x_{i, j+1}^{(p)} - x_{i, j-1}^{(p)})}{\Delta \psi^{(p)}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{y_{i+1, j}^{(p)} - y_{i-1, j}^{(p)}}{\Delta \varphi^{(p)}} \right)^2 + \eta \left( \sum_{k_a=0}^{s_a} \sum_{r_a=0}^{k_a} \frac{a_{k_a - r_a, r_a}^2}{100^{k_a}} + \sum_{k_b=0}^{s_b} \sum_{r_b=0}^{k_b} \frac{b_{k_b - r_b, r_b}^2}{100^{k_b}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{k_c=0}^{s_c} \sum_{r_c=0}^{k_c} \frac{c_{k_c - r_c, r_c}^2}{100^{k_c}} \right) + \mu (\lambda_{i, j}^{\gamma(p)} - \sigma_{11, j}^{\gamma(p)} - \sigma_{22, j}^{\gamma(p)})^2 \right) \rightarrow \min; \\
 & \sigma_{11, j}^{\gamma(p)} \sigma_{22, j}^{\gamma(p)} - \sigma_{12, j}^{\gamma(p)2} \geq \alpha_1, \quad \sigma_{11, j}^{\gamma(p)} + \sigma_{22, j}^{\gamma(p)} \geq \alpha_2, \\
 & \sigma_{11, j}^{\gamma(p)} < \alpha_3, \quad \sigma_{22, j}^{\gamma(p)} < \alpha_4, \tag{19}
 \end{aligned}$$

where  $a_{k'_a - r'_a, r'_a}, b_{k'_b - r'_b, r'_b}, c_{k'_c - r'_c, r'_c}$  ( $k'_a = \overline{0, s_a}, r'_a = \overline{0, k'_a}, k'_b = \overline{0, s_b}, r'_b = \overline{0, k'_b}, k'_c = \overline{0, s_c}, r'_c = \overline{0, k'_c}$ ) are the desired parameters. The solving of the nonlinear programming problem (18)–(19) is expedient to implement by one of the appropriate methods of local optimization (for example, by the penalty functions method [16]).

**Conclusions.** The methodology [4, 5] of image reconstruction based on the idea of the quasiconformal similarity in the small of building the curvilinear quadrangles — dynamical mesh components in the physical domain and the corresponding rectangles in the complex quasipotential domain using AQT data and the rotational parameterization of internal nodes of dynamic meshes (which are built for each injections) and searched CT is generalized to the case of anisotropic media. We set the liquid (current) distribution and the averaged potential at the contact sections of plate and body unlike the traditional approaches to the statement and solving the problems of electrical impedance tomography [1–3, 6–13].

We plan to extend the proposed algorithm to the following cases: spatial resolution, applying the quasipotential of the initial stream to several sections, parameters identification of CT for piecewise-homogeneous and piecewise-

inhomogeneous media (which, in particular, have place in medical diagnostics). Moreover, in medical practice there are media where the dependence of conductivity from the direction is not necessarily determined by the corresponding ellipse. In this case, it is expedient to represent the CT as a complex function. This is one of the areas for our future researches too.

### References:

1. Holder D. Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications / D. Holder. — Bristol : IOP Publishing, 2005. — 456 p.
2. Horb M. S. Choice of the study object for mathematical model in electrical impedance tomography / M. S. Horb, O. V. Husieva // Bulletin of NTUU «KPI». Radiotechnique, Radioaparatus Building Series. — Kyiv : NTUU «KPI», 2013. — Vol. 52. — P. 120–128. (Ukr).
3. Sherina E. S. Finite volume schemes for the electrical impedance tomography problem / E. S. Sherina, A. V. Starchenko // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. — 2014. — Vol. 29 (3). — P. 25–38. (Rus).
4. Bomba A. Ya. Numerical Methods of Quasiconformal Mappings for Solving Problems of Identifying of Electrical Conductivity Coefficient in an Applied Potential Tomography / A. Ya. Bomba, L. L. Kroka // Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series. — Rivne : Editorial and Publishing Department of RSHU, 2014. — Vol. 11 (20). — P. 24–33. (Ukr).
5. Bomba A. Ya. Applied Quasipotential Method for Solving Coefficient Problems of Parametric Identification / A. Ya. Bomba, M. V. Boichura // Bulletin of NUWEE. Technical Sciences Series. — Rivne : Editorial and Publishing Department of NUWEE, 2017. — Vol. 4 (76). — P. 163–177. (Ukr).
6. Martins T. C. Investigating Anisotropic EIT with Simulated Annealing / T. C. Martins, M. S. G. Tsuzuki // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — Vol. 50 (1). — P. 9961–9966.
7. Lionheart W. R. B. Conformal uniqueness results in anisotropic electrical impedance imaging Inverse Problems / W. R. B. Lionheart // Inverse Problems. — 1997. — Vol. 13 (1). — P. 125–134.
8. Electrical impedance tomography in anisotropic media with known eigenvectors / J.-F. P. J. Abascal, W. R. B. Lionheart, S. R. Arridge and other // Inverse Problems. — 2011. — Vol. 27 (6). — P. 1–17.
9. Anisotropic resistivity tomography / J. V. Herwanger, C. C. Pain, A. Binley and other // Geophysical Journal International. — 2004. — Vol. 158 (2). — P. 409–425.
10. Crabb M. EIT Reconstruction Algorithms for Respiratory Intensive Care. PhD Thesis / M. Crabb // Manchester :University of Manchester. — 2014.
11. Tallman T. N. Conductivity-Based Nanocomposite Structural Health Monitoring via Electrical Impedance Tomography. PhD Thesis / T. N. Tallman // Ann Arbor : University of Michigan. — 2015.
12. Use of anisotropic modelling in electrical impedance tomography; Description of method and preliminary assessment of utility in imaging brain function in the adult human head / J.-F. P. J. Abascal, S. R. Arridge, D. Atkinson and other // NeuroImage. — 2008. — Vol. 43 (2). — P. 258–268.

13. Vassilevski Yu. V. Finite element analysis in bioimpedance diagnostics / Yu. V. Vassilevski, A. A. Danilov, D. V. Nikolaev, A. V. Smirnov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52 (4). — P. 733–745 (Rus).
14. Bomba A. Ya. Complex analysis methods / A. Ya. Bomba, S. S. Kashtan, D. O. Pryhornytskiy, S. V. Yaroshchak. — Rivne : Editorial and Publishing Department of NUWEE, 2013. — 415 p. (Ukr).
15. The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem / G. Dong, J. Zou, R. Bayford and other // IEEE Transactions on Magnetics. — 2005. — Vol. 41 (5). — P. 1468–1471.
16. ALGLIB — C++/C# numerical analysis library. URL: <http://www.alglib.net> (last accessed 2018/11/06).

**ЧИСЛОВИЙ МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ  
ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ АНІЗОТРОПНИХ  
СЕРЕДОВИЩ ЗА ДАНИМИ ТОМОГРАФІЇ  
ПРИКЛАДЕНИХ КВАЗІПОТЕНЦІАЛІВ.  
ЧАСТИНА 1: ПОСТАНОВКА ТА НАБЛИЖЕННЯ ЗАДАЧІ**

Підхід до розв'язання градієнтних задач ідентифікації параметрів квазіідеальних полів за даними томографії прикладених квазіпотенціалів на основі числових методів комплексного аналізу перенесено на випадки анізотропних середовищ. При цьому, аналогічно до існуючих робіт світових вчених, апріорно відомими вважаються деякі додаткові відомості про характер розподілу провідності всередині області (об'єкта дослідження). Проте, на відміну від традиційних підходів до постановки та розв'язання задач електроімпедансної томографії, на ділянках контакту пластинки і тіла окрім усередненого потенціалу тут задається ще й розподіл локальних швидкостей речовини (рідина, струму), а на інших ділянках (лініях течії) — розподіл потенціалу (за експериментальними даними, які апроксимуємо із застосуванням сплайнів, кривих Безьє тощо). Генерація вихідних даних на межі досліджуваного об'єкта здійснюється відповідно до полярної моделі (схеми) інжекції струму при заданій сумі власних значень тензора провідності середовища. Наявність такого виду даних значно пришвидшує процес подальшого розв'язання поставленої задачі, що зручно, зокрема, при верифікації зробленого авторами методу. Відповідна задача зводиться до ітераційного розв'язання серії задач для рівнянь типу Лапласа, де замість «приграничних числових аналогів рівнянь типу Коші-Рімана» фігурують співвідношення квазіортогональності за спеціальних типів умов оптимізації. А саме: мінімізуючий функціонал побудований з урахуванням умов типу Коші-Рімана, співвідношення між відповідними тензору анізотропії власними значеннями, а також регуляризуючого доданку; умови-обмеження сформовані на основі умов еліптичності.

**Ключові слова:** *томографія прикладених квазіпотенціалів, квазіконформні відображення, анізотропія, ідентифікація, нелінійні задачі.*

Отримано: 28.11.2018



УДК 517.9+518

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.25-31

**А. Ф. Верлань\***, д-р. техн. наук, профессор,

**С. А. Положаєнко\*\***, д-р. техн. наук, профессор,

**С. Ю. Протасов\*\*\***, канд. техн. наук

\* Институт проблем моделирования в энергетике  
имени Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,

\*\*Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса,

\*\*\*Черкасский государственный технологический университет,  
г. Черкассы

## **ИДЕНТИФИКАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПЕРАТИВНОГО КОНТРОЛЯ ПРОЦЕССА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

При компьютерном исследовании динамических задач обычно применяются численные методы решения дифференциальных уравнений. Существенная важность при численных расчетах имеет гарантированная точность вычисленного решения, которая зависит от точности используемого компьютера и влияния на решение неизбежных ошибок входных данных и ошибок округления. Хотя вычислительные правила строятся исходя из условий обеспечения их возможного роста относительно погрешности, однако при большом числе шагов отклонение решения, полученного численным методом, от точного может быть весьма значительным.

Получение удовлетворительных оценок оперативного численного решения дифференциальных уравнений является достаточно сложной задачей, которую во многих практических случаях решить не удастся. Таким образом, актуальной задачей с вычислительной точки зрения, является разработка подходов и методов, позволяющих осуществить контроль вычислительного процесса.

В настоящей работе рассматривается возможность контроля погрешности численного решения путем использования методов параметрической идентификации, которые широко применяются при решении практических задач идентификации линейных и нелинейных систем. При этом достоверность контроля не должна зависеть от причин, вызывающих погрешность решения. Сам процесс контроля состоит из следующих этапов: восстанавливаются с некоторой точностью параметры уравнений, для которых получаемое численное решение является точным. Оцениваемые параметры (коэффициенты сравниваются с коэффициентами исходных уравнений; разность коэффициентов является информацией, которая используется для оценки поведения решения на участке восстановления (участок восста-

новления — отрезок численного решения, который используется для параметрической идентификации).

**Ключевые слова:** *методы идентификации, дифференциальные уравнения, контроль численного решения.*

**Введение.** Существующие априорные оценки погрешности решения дифференциальных уравнений [1] служат в основном для качественного анализа роста погрешности. Их использование для оценки точности конкретного результата численного решения затруднено тем, что значения входящих в них величин для большинства задач получить трудно, а когда это удаётся, то оценка погрешности может дать очень завышенное значение.

Получение апостериорных оценок наиболее часто связано с проведением параллельных расчетов [2] и их использование может дать удовлетворительные результаты для оценки погрешности на шаге. При определении погрешности конечного результата, получаемые оценки являются в общем случае неудовлетворительными. Контроль погрешности решения с помощью названных оценок затруднен также необходимостью учета ошибок округления [2].

**Изложение основного материала.** Рассмотрим задачу Коши

$$x = f(x, q, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

на отрезке  $[t_0, t_N]$ , где  $t$  — независимая переменная;  $q$  —  $m$ -мерный вектор параметров;  $f$  — вектор-функция;  $x$  —  $n$ -мерный вектор входных переменных.

Для решения системы (1) можно использовать любой численный метод [1, 2], и значения искомой функции определяются в фиксированных точках  $t_i, i = 1, \overline{N}$ . Требуется оценить погрешность на определенном участке решения, при этом для задачи контроля достаточно установить факт нахождения погрешности в допустимых пределах.

Из-за методической погрешности численных методов и ошибок округления траектории точки в фазовом пространстве для точного решения и полученного численным методом будут различными.

Предположим, что непрерывная функция  $z(t)$ , соответствующая решетчатой функции  $z_i = z(t_i), i = 0, \overline{N}$  численного решения (1), является решением системы уравнений

$$z = f(z, q^*, t), \quad z(t_0) = z_0 = x_0. \quad (2)$$

Здесь  $q^* \neq q$  и в общем случае может быть функцией независимой переменной. Определение значений вектора параметров  $q^*$  может быть осуществлено достаточно просто в случае линейности оператора (2) относительно  $q^*$ , т.е. когда систему (2) можно представить в виде

$$z = \varphi(z, t)q^*, \quad z(t_0) = z_0 = x_0, \quad (3)$$

где  $\varphi(z, t)$  — матрица размером  $n \times m$ .

Способы получения системы линейных алгебраических уравнений для определения оценки неизвестного вектора параметров по существу определяются видом операторов, применяемых к входным и выходным переменным [3], при этом может использоваться численное дифференцирование или численное интегрирование. Так как в данном случае значения входных и выходных переменных в узлах являются точными, то необходимо иметь число независимых уравнений, равное числу восстанавливаемых элементов вектора  $q^*$ . Используя, например, численное дифференцирование для определения производных в узловых точках, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Z = \Phi q^*, \quad (4)$$

где  $Z$  —  $m$ -мерный вектор, составленный из оценок вектора производных в узловых точках, полученных численным дифференцированием;  $\Phi$  —  $m \times m$  матрица, получаемая путем компоновки соответствующих строк матрицы  $\varphi$ . Из выражения (3) получаем оценку искомого вектора

$$\hat{q}^* = \Phi^{-1}Z,$$

при условии, что матрица  $\Phi$  неособенная.

Для определения производных в узловых точках удобно применять метод скользящего дифференцирования, когда производная вычисляется для средней точки интерполируемого участка, а вычисления производных для следующих точек производится сдвигом участка интерполяции. При этом коэффициенты при производных в остаточных членах будут иметь наименьшее значение. Следует отметить, что для определения производных в узлах желательно применять методы численного дифференцирования высокого порядка точности [4].

В случае, когда (2) представляет собой нелинейный относительно вектора параметров оператор, поиск корней (определение  $q^*$ ) соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений является более сложной задачей.

Учитывая изложенное о сложности восстановления параметров в нелинейном случае, а также конечную цель восстановления (контроль погрешности численного решения задачи Коши), следует признать целесообразным выделение в исходной задаче (1) и последующее восстановление фиктивных параметров  $p$ , относительно которых задача восстановления является линейной. Заметим, что выделение таких параметров для задачи (1) возможно в общем случае. Действительно, представляя (1) в виде

$$x = F(x, q, t)p, \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $F(x, q, t)$  — диагональная матрица, элементы которой равны соответствующим компонентам вектор-функции  $f(x, q, t)$ , а  $p$  — вектор,

все элементы которого равны единице, убеждаемся в справедливости указанного замечания. Определение оценки  $\hat{p}^*$  вектора  $p$  для системы уравнений

$$z = F(z, q, t)p^*, \quad z(t_0) = z_0 = x_0,$$

теперь может быть осуществлено так, как указывалось ранее.

В частных случаях в задаче (1) вектор параметров  $q$  можно представить в виде прямой суммы векторов  $q_1$  и  $q_2$ , причем система (1) может быть записана в виде

$$x = \Psi_1(x, q_1, t) + \Psi_2(x, q_1, t)q_2, \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $\Psi_2$  —  $m \times l$  матрица,  $l$  — размерность вектора  $q_2$ . И в этих случаях процедура восстановления части параметров с целью контроля численного решения может быть легко осуществлена относительно  $q_2$  аналогично ранее изложенному способу с очевидными изменениями процедуры образования вектора правых частей системы (3). Возможно также решение задачи совместного восстановления фиктивных параметров  $p$  и части параметров  $q$ .

Следует отметить, что в общем случае вектор восстанавливаемых параметров из-за отклонения численного решения от точного при накоплении погрешностей является функцией независимой переменной, а так как процесс восстановления осуществляется на конечном интервале, то определяя вектор параметров из соответствующей системы алгебраических уравнений, аппроксимируется функция  $q^*(t)$  ( $p^*(t)$ ) ступенчатой функцией, постоянной на участках восстановления. Разность между полученной оценкой параметров  $\hat{q}^*$  ( $\hat{p}^*$ ) и параметрами исходной системы уравнений  $q(p)$  является той информацией, которая может быть использована для оценки поведения решения на участке восстановления. Сложность и точность получения оценок во многом определяется видом исходных уравнений.

Для линейных дифференциальных уравнений можно, например, использовать оценки, полученные в работе [5]. При исходной системе уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f, \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

где  $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_1^n$ ;  $f = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ ;  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ;  $T$  — знак транспонирования, решение которой определяется численным методом, система уравнений, восстановленная на отрезке  $[t_1, t_2]$ , численного решения имеет вид

$$\dot{z} = \hat{A}^*(t)z + f, \quad z(0) = z_0 = x_0. \quad (6)$$

Уравнение для равенности решений (5) и (6) имеет вид

$$\Delta x' = \hat{A}^*(t)\Delta x + \Delta A(t), \quad \Delta x(0) = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\Delta A(t) = A(t) - \hat{A}^*(t)$ ,  $\Delta x = x - z$ . Если элементы матриц и векторов выражения (7) являются непрерывными функциями независимой переменной, то имеет место оценка

$$\|\Delta x\| \int_{t_1}^{t_2} \exp \int_{\tau}^{t_2} \gamma(\hat{A}^*(\tau_1)) d\tau_1 \|\Delta A(\tau)\| \|x(\tau)\| d\tau,$$

где

$$\gamma(A^*(t)) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\|E - \hat{A}^*(t)\| - 1}{h}.$$

В тех случаях, когда это возможно, для оценки погрешности решения могут быть привлечены методы теории чувствительности [6].

**Пример.** На ЭВМ решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом 0,01 система уравнений  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$ , где  $x = (1, 0)^T$ ,

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -900 & 0 \end{bmatrix}$ . Через 100 шагов численного интегрирования после решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (4) для получения оценки  $\hat{A}^*$  матрицы  $A^*$  восстанавливаемой системы уравнений  $\dot{z} = A^*z$ ,  $z(0) = z_0 = x_0$  получаем разность

$$\Delta A = A - \hat{A}^* = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot 10^{-3} & 0,653 \cdot 10^{-4} \\ -0,588 \cdot 10^{-1} & 0,5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Для сравнения приведем матрицу  $\Delta A$ , полученную аналитическим путем без учета погрешностей высшего порядка малости:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0,675 \cdot 10^{-4} \\ 0,6075 \cdot 10^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Для получения оценок производной в узлах использовался метод численного дифференцирования высокого порядка точности. Как видно из выражения (8), полученное по предлагаемой методике возмущение  $\Delta A$  элементов матрицы  $A$ , отражающее погрешность численного решения, достаточно близко к расчетному (9). Отличие в элементах главной диагонали объясняется неучетом при аналитическом определении  $\Delta A$  погрешностей высшего порядка малости.

**Заключение.** Таким образом, в работе предложен простой с вычислительной точки зрения подход оперативного контроля численного решения дифференциальных уравнений с использованием методов идентификации, который позволяет судить о ходе вычислительного процесса. Исходя из точности описания реального процесса системой уравнений (1) можно определить область параметров  $D$ . Погрешность

решения не превышает неустранимой погрешности из-за неадекватности математической модели (1) реальному процессу, если вектор  $\Delta q(\Delta p)$  принадлежит этой области. Следует иметь в виду, что при восстановлении вектора  $q^*$  полученную оценку  $\hat{q}^*$  можно связать с физической сущностью задачи и сделать определенные выводы о влиянии  $\Delta q$  на решение. Вектор  $p^*$  лишен математической интерпретации и для определения влияния на решение вектора  $\Delta p = p - \hat{p}^*$  требуются дополнительные исследования.

### Список использованной литературы:

1. Киясов С. Н. Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач : учебное пособие / С. Н. Киясов, В. В. Шурыгин. — Казань : Казанский федеральный университет, 2011. — 112 с.
2. Горбань А. В. Устойчивость и оценка погрешности параллельных одношаговых численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] / А. В. Горбань — 2005. — Режим доступа: <http://masters.donntu.org/2005/fvti/gorban/diss/index.htm>.
3. Сергиенко И. В. Методы получения достоверных решений систем линейных алгебраических уравнений / И. В. Сергиенко, А. Н. Химич, М. Ф. Яковлев // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 1. — С. 68–80.
4. Демидович Б. П. Численные методы анализа. Приближенные функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б. П. Демидович, Н. А. Марон, Э. З. Шувалова. — М. : Наука, 1967. — 368 с.
5. Абрегов М. Х. Устойчивый численный метод решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка / М. Х. Абрегов, В. З. Канчуков, И. К. Машуков // Фундаментальные исследования. — 2016. — № 2 (1) — С. 9–12.
6. Городецкий В. И. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / В. И. Городецкий, Ф. М. Захарин, Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. — М. : Энергия, 1971. — С. 344.

### IDENTIFICATION METHOD OF OPERATIONAL CONTROL THE PROCESS A NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION

In computer studies of dynamic problems, numerical methods for solving differential equations are usually used. Essential importance in numerical calculations is guaranteed accuracy of the calculated solution, which depends on the accuracy of the computer used and the influence on the decision of inevitable errors of input data and rounding errors. Although the computational rules are built on the basis of the conditions for ensuring their possible growth with respect to the error, however, with a large number of steps, the deviation of the solution obtained by a numerical method from the exact one can be quite significant.

Obtaining satisfactory estimates of the operational numerical solution of differential equations is a rather complicated task, which in many practi-

cal cases cannot be solved. Thus, an urgent task from a computational point of view is the development of approaches and methods that allow control of the computational process.

In this paper, we consider the possibility of controlling the error of numerical solution by using the methods of parametric identification, which are widely used in solving practical problems of identifying linear and nonlinear systems. At the same time, the accuracy of the control should not depend on the reasons causing the error of the decision. The control process itself consists of the following steps: the parameters of the equations for which the resulting numerical solution is accurate are restored with some accuracy. The estimated parameters (the coefficients are compared with the coefficients of the original equations; the difference of the coefficients is the information that is used to evaluate the behavior of the solution on the restoration site (the recovery section is the segment of the numerical solution that is used for parametric identification).

**Key words:** *identification methods, differential equations, control of numerical solution.*

Отримано: 21.11.2018

УДК 519.64

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.31-38

**А. Ф. Верлань**, д-р техн. наук, професор,

**Ю. О. Фургат**, канд. техн. наук

Институт проблем моделирования в энергетике  
имени Г.Е. Пухова НАН Украины, Украина, г. Киев

## **МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

Интегральные уравнения Вольтерра второго рода являются универсальной математической моделью в задачах идентификации и компьютерного моделирования. При этом сингулярность этих уравнений значительно затрудняет решение данных задач. Для решения этой проблемы используются алгоритмы регуляризации некорректных задач. Параметр регуляризации при этом может быть определен различными способами, в частности, способом модельных примеров. В статье также показан способ решения полученного приближенного выражения из алгоритма регуляризации с применением квадратурных формул.

Также рассматривается задача определения погрешности решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода на основе метода квадратурных формул. Оценивание погрешности проводится путём доказательства соответствующей теоремы и следствий из неё. Одно из следствий из теоремы об огра-

ниченности погрешности утверждает, что при бесконечно малом значении параметра регуляризации погрешность решения также стремится к нулю. Это утверждение также доказывается в статье с приведением выкладок и расчетов.

Приводится окончательное выражение для оценивания погрешности решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с использованием методов регуляризации и квадратурных формул, и делается вывод о том, что предложенные методы позволяют преодолеть проблему сингулярности в интегральных уравнениях Вольтерра второго рода.

**Ключевые слова:** *интегральное уравнение, сингулярность, регуляризирующий параметр, погрешность.*

**Постановка задачи.** Универсальной математической моделью в задачах идентификации и компьютерного моделирования широкого класса объектов с распределенными параметрами служат интегральные уравнения вида

$$y(t) - \lambda \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha} ds = f(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

где  $y(t)$  — неизвестная, а  $f(t)$  — известная функции, которые являются интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Численное моделирование рассматриваемого класса объектов приводит к определенным затруднениям в связи с сингулярностью уравнения (1).

**1. Выбор способа решения.** Для решения задачи численного моделирования интегральных уравнений вида (1) весьма целесообразным является применение устойчивых и эффективных алгоритмов [1], основанных на приемах регуляризации некорректных задач. В частности, один из способов решения состоит в замене исходного уравнения (1) следующим приближенным соотношением

$$\tilde{y}(t) - \lambda \int_0^t \frac{\tilde{y}(s)}{\beta + (t-s)^\alpha} ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где  $\beta$  — малый регуляризирующий параметр (параметр «внутренней» регуляризации), определение которого может быть осуществлено способом модельных примеров [2].

Применение такого приема вызвано тем, что сингулярные интегральные уравнения не допускают, при численном решении непосредственного применения метода квадратурных формул, позволяют получить устойчивые и достаточно просто реализуемые на компьютере вычислительные алгоритмы.



Для применения квадратурных формул к уравнению (2) используется в общем случае выражение

$$\tilde{y}(t_i) - \lambda \int_0^{t_i} \frac{\tilde{y}(s)}{\beta + (t_i - s)^\alpha} ds = f(t_i). \quad (3)$$

Используя для замены интеграла, например, формулу трапеции имеем следующую систему уравнений

$$\tilde{y}(t_i) = f(t_i) + \lambda h \sum_{j=0}^i A_j \frac{\tilde{y}(t_j)}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha},$$

где  $h = \frac{T}{n}$  — шаг квадратуры,  $A_j$  — коэффициенты квадратурной формулы.

Окончательное расчетное выражение имеет следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}(0) &= f(0) \\ \tilde{y}(t_i) &= \frac{2\beta}{2\beta - \lambda h} \left[ f(t_i) + \lambda h \sum_{j=1}^{i-1} A_j \frac{\tilde{y}(t_j)}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где

$$A_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j=1, \\ 1 & \text{при } j>1, \end{cases}$$

$$i = 2, 3, \dots; t_i = (i-1)h; h \neq \frac{2\beta}{\lambda}.$$

**2. Определение погрешности.** На вопрос о возможных погрешностях получаемого решения интегрального уравнения (2) на основе метода квадратурных формул отвечает следующая теорема.

**Теорема.** Пусть для любого  $0 \leq \beta$  выполняется неравенство

$$|\lambda|T < \beta + (1-\alpha)T^\alpha.$$

Тогда для решения задачи (1) и (2) справедлива следующая оценка

$$y(t) - \tilde{y}(t)_{C[0,T]} \leq \beta \frac{|\lambda|K[\beta + (1-\alpha)T^\alpha]}{\beta + (1+\alpha)T^\alpha - |\lambda|T} |y|_{C[0,T]}, \quad (5)$$

где

$$K = \max_{0 \leq s \leq T} \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\alpha (\beta + (t-s)^\alpha)^\alpha}.$$

**Доказательство.** Вычислим разность между  $y(t)$  и  $\tilde{y}(t)$ :

$$\begin{aligned}
 |y(t) - \tilde{y}(t)| &= \left| \lambda \left| \int_0^t \left[ \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha} - \frac{\tilde{y}(s)}{\beta + (t-s)^\alpha} \right] ds \right| \right| = \\
 &= \left| \lambda \left| \int_0^t \left[ \frac{y(s) - \tilde{y}(s)}{\beta + (t-s)^\alpha} + \frac{\beta y(s)}{(t-s)^\alpha (\beta + (t-s)^\alpha)} \right] ds \right| \right| \leq \\
 &\leq \left| \lambda \int_0^t \frac{|y(s) - \tilde{y}(s)|}{\beta + (t-s)^\alpha} ds \right| + \left| \lambda \beta \int_0^t \frac{|y(s)|}{(t-s)^\alpha (\beta + (t-s)^\alpha)} ds \right|,
 \end{aligned}$$

откуда

$$|y - \tilde{y}|_{C[0,T]} \leq |\lambda| |y - \tilde{y}|_{C[0,T]} \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \frac{ds}{\beta + (t-s)^\alpha} + |\lambda| \beta |y|_{C[0,T]} K. \quad (6)$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части неравенства (6)

$$I(\beta) = \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \frac{ds}{\beta + (t-s)^\alpha}.$$

Применяя следствие теоремы о среднем [3] получим

$$I(\beta) = \max_{0 \leq t \leq T} \frac{t}{\beta + (t - \varepsilon t)^\alpha} = \max_{0 \leq t \leq T} \frac{t}{\beta + (1 - \varepsilon)^\alpha t^\alpha},$$

откуда, учитывая соотношение  $0 < \varepsilon < 1$ , следует, что

$$I(\beta) = \frac{T}{\beta + \delta T^\alpha} \quad I(0) = \frac{T}{\delta T^\alpha} = \frac{T^{1-\alpha}}{\delta}, \quad (7)$$

где  $\delta = (1 - \varepsilon)^\alpha$

Подставляя (7) в (6) получим

$$\left( 1 - \frac{|\lambda| T}{\beta + (1 - \alpha) T^\alpha} \right) |y - \tilde{y}|_{C[0,T]} \leq |\lambda| \beta |y|_{C[0,T]} K$$

или

$$\left( \frac{\beta + (1 - \alpha) T^\alpha - |\lambda| T}{\beta + (1 - \alpha) T^\alpha} \right) |y - \tilde{y}|_{C[0,T]} \leq \beta |\lambda| K |y|_{C[0,T]} \quad (8)$$

Согласно условию теоремы, коэффициент при  $|y - \tilde{y}|$  представляет собой положительное число.

Делением обеих частей неравенства (8) на

$$\frac{\beta + (1 - \alpha) T^\alpha - |\lambda| T}{\beta + (1 - \alpha) T^\alpha}$$

получим неравенство (5). **Теорема доказана.**

**Замечание 1.** Поскольку решение уравнения (1) ограничено в пространстве  $C[0, T]$ , то первая часть неравенства (5) стремится к нулю при  $\beta \rightarrow 0$ .

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы и пусть также  $f(t) \in C[0, T]$ . Тогда для решения задачи (1) и (3) справедлива следующая оценка:

$$|y(t_i) - \tilde{y}(t_i)| \leq B_\beta, \quad (9)$$

где

$$B = \frac{|\lambda| K [\beta + (1 - \alpha) T^\alpha]}{\beta + (1 - \alpha) T^\alpha - |\lambda| T},$$

$$|y(t_i) - \tilde{y}| = \text{SUP} \max_{0 < t < T, t_i \in [0, T]} |y(t_i) - \tilde{y}(t_i)|.$$

**Доказательство.** Справедливость неравенства (9) следует из неравенства (5) при  $t = t_i$ , если учесть соотношение между нормами

$$|y(t_i) - \tilde{y}(t_i)| = |y - \tilde{y}| \leq |y(t) - \tilde{y}(t)|_{C[0, T]}$$

**Замечание 2.** При  $\beta \rightarrow 0$  первая часть неравенства (9) стремится к нулю и, следовательно

$$|y(t_i) - \tilde{y}(t_i)| \rightarrow 0$$

Переходим теперь к оценке величины  $|\tilde{y}(t_i) - \tilde{\tilde{y}}(t_i)|$  при  $\beta \rightarrow 0$ .

Представив уравнение (3) в следующем виде

$$\tilde{y}(0) = f(0); \quad i = \overline{1, n}$$

$$\tilde{y}(t_i) = f(t_i) + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{y(s)}{\beta + (t_i - s)^\alpha} ds$$

и применяя следствие из теоремы о среднем получим:

$$\begin{cases} \tilde{y}(0) = f(0), \\ \tilde{y}(t_i) = f(t_i) + \lambda h \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\tilde{y}(t_j^*)}{\beta + (t_i - t_j^*)^\alpha}, \end{cases}$$

$$t_j^* \in [t_j, t_{j+1}].$$

Далее находим

$$\begin{aligned}
 |y(t_i) - \tilde{y}(t_i)| &\leq \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \left| \frac{\tilde{y}(t_j^*)}{\beta + (t_i + t_j^*)^\alpha} - A_j \frac{\tilde{y}(t_j)}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha} \right| + \\
 &+ \frac{\lambda h}{2\beta} |\tilde{y}^*(t_i)| \leq \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\tilde{y}(t_j^*) - A_j \tilde{y}(t_j)}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha} + \\
 &+ \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left[ (t_i - t_j)^\alpha - (t_i - t_j^*)^\alpha \right]}{\left[ \beta + (t_i - t_j^*)^\alpha \right]^2} |\tilde{y}(t_j^*)| + \frac{\lambda h}{2\beta} |\tilde{y}(t_i)|.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Оценим первый член суммы в неравенстве (10):

$$\begin{aligned}
 \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|\tilde{y}(t_i^*) - A_j \tilde{y}(t_j)|}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha} &\leq \lambda h \frac{|\tilde{y}(0)|}{2(\beta + t_i^\alpha)} + \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|\tilde{y}(t_i^*) - \tilde{y}(t_j)|}{\beta + (t_i + t_j)^\alpha} \leq \\
 &\leq \lambda h \frac{|f(0)|}{2(\beta + t_i^\alpha)} + \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|\tilde{y}(t_i^*) - \tilde{y}(t_j^*)|}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha} + \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|\tilde{y}(t_i^*) - \tilde{y}(t_j)|}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя (10) в (11) имеем

$$\begin{aligned}
 |\tilde{y}(t_i) - \tilde{y}(t_i)| &\leq \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|\tilde{y}(t_i^*) - \tilde{y}(t_j^*)|}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha} - \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|\tilde{y}(t_i^*) - y(t_j)|}{\beta + (t_i - t_j)^\alpha} + \\
 &+ \frac{\lambda h |f(0)|}{2(\beta + t_i^\alpha)} + \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left[ (t_i - t_j)^\alpha - (t_i - t_j^*)^\alpha \right]}{\left[ \beta + (t_i - t_j^*)^\alpha \right]^2} |\tilde{y}(t_j^*)| + \frac{\lambda h}{2\beta} |\tilde{y}(t_i)|.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Переходя в обеих частях неравенства (12) к нормам и подставляя

$$\|\tilde{y} - \tilde{y}\| = \sup_{0 < h < T} \max_{0 < t < T} |\tilde{y}(t_i) - \tilde{y}(t_i)|, \quad t_i - t_j = t_{i=j}$$

в (12) и учитывая, что  $\tilde{y}(t_i)$  является непрерывной функцией, получаем следующее соотношение

$$\begin{aligned}
 \left( 1 - \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\beta + t_{i-j}^\alpha} \right) \|\tilde{y} - \tilde{y}\| &\leq \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{P_j}{\beta + t_{i-j}^\alpha} + \\
 + \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{t_{i-j}^\alpha - (t_{i-j} - \eta h)^\alpha}{\left( \beta + (t_i - t_j)^\alpha \right) \left( \beta + (t_{j-i} - \eta h)^\alpha \right)} \|\tilde{y}\| &+ \frac{\lambda h |f(0)|}{2(\beta + t_i^\alpha)} + \frac{\lambda h}{2\beta} \|\tilde{y}\|,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где  $P_i = \left\| \frac{\tilde{y}(t_j^*) - \tilde{y}(t_j)}{\eta h} \right\|$ ,  $0 < \eta < 1$ .

Теперь покажем, что коэффициент при  $\|\tilde{y} - \tilde{y}\|$  представляет собой положительное число:

$$\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\beta + t_{i-j}^\alpha} - \lambda h \sum_{j=1}^i \frac{1}{\beta + t_j^\alpha} \leq |\lambda| h \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta + t_j^\alpha} = |\lambda| S(\beta),$$

где  $S(\beta) = h \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta + t_j^\alpha}$ .

Функция  $\varphi(t) = \frac{1}{\beta + t^\alpha}$  убывает на отрезке  $[0, T]$  следовательно,

$$\lambda h \sum_{j=1}^i \frac{1}{\beta + t_j^\alpha} \leq |\lambda| S(\beta) < \frac{|\lambda| T}{\beta + (1-\alpha) T^\alpha}.$$

Итак, коэффициент при  $\|\tilde{y} - \tilde{y}\|$  удовлетворяет следующему неравенству:

$$1 - \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\beta + t_{i-j}^\alpha} > 1 - \frac{|\lambda| T}{\beta + (1-\alpha) T^\alpha} = \frac{\beta + (1-\alpha) T^\alpha - |\lambda| T}{\beta + (1-\alpha) T^\alpha}. \quad (14)$$

Согласно условию теоремы справедливо неравенство

$$\beta + (1-\alpha) T^\alpha - |\lambda| T > 0.$$

Отсюда следует, что коэффициент при  $\|\tilde{y} - \tilde{y}\|$  есть положительное число.

Неравенство (13) усиливается от подстановки вместо коэффициента  $\|\tilde{y} - \tilde{y}\|$  правой части неравенства (14).

**4. Оценка погрешности.** После подстановки (14) и (13) получим следующую оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(t_i) - \tilde{y}(t_i)| &\leq \|\tilde{y} - \tilde{y}\| < \frac{|\lambda| h [\beta + (1-\alpha) T^\alpha]}{\beta + (1-\alpha) T^\alpha - |\lambda| T} \times \\ &\times \left\{ \eta h \sum_{j=0}^i \frac{P_j}{\beta + t_{i-j}^\alpha} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{t_{i-j}^\alpha - (t_{i-j} - \eta h)^\alpha}{[\beta + (t_{i-j} - \eta h)^\alpha]^2} \|\tilde{y}\| + \frac{f(0)}{2(\beta + t_i^\alpha)} + \frac{1}{2\beta} \|\tilde{y}\| \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя неравенство треугольника относительно нормы [3] используя (9) и (15), получим следующую оценку

$$\begin{aligned}
 |y(t_i) - \tilde{y}(t_i)|_{c[0,T]} &\leq |y(t_i) - \tilde{y}(t_i)|_{c[0,T]} + |\tilde{y}(t_i) - \tilde{\tilde{y}}(t_i)| \leq B\beta + \\
 &+ \frac{\lambda h [\beta + (1-\alpha)T^\alpha]}{\beta + (1-\alpha)T^\alpha - |\lambda|T} \left\{ \eta h \sum_{j=0}^i \frac{P_j}{\beta + t_{i-j}^\alpha} + \right. \\
 &\left. + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{t_{i-j}^\alpha - (t_{i-j} - \eta h)^\alpha}{(\beta + (t_i - t_j)^\alpha)(\beta + (t_{j-i} - h\eta)^\alpha)} \|\tilde{y}\| + \frac{|f(0)|}{2(\beta + t_i^\alpha)} + \frac{1}{2\beta} \|\tilde{y}\| \right\},
 \end{aligned} \tag{16}$$

где  $B$  определяется из формулы (10).

**Выводы.** Предложенный метод расчета позволяет преодолеть проблемы, вызванные сингулярностью интегрального уравнения Вольтерра и получать решение с заданной точностью в зависимости от выбранного параметра регуляризации.

### Список использованной литературы:

1. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. — 288 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 542 с.
3. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Физматгиз, 1959. — 684 с.

## METHOD OF SOLVING A SINGULAR DYNAMIC PROBLEM IN THE INTEGRAL EQUATION FORM

Volterra integral equations of the second kind are a universal mathematical model used in problems of identification and computer simulation. At the same time, the singularity of these equations makes it difficult to solve these problems. To solve this problem, regularization algorithms for ill-posed problems are used. In this case, the regularization parameter can be determined in various ways, in particular, by the method of model examples. The article also shows how to solve the obtained approximate expression from the regularization algorithm using quadrature formulas.

The problem of determining the error of solving the second-kind Volterra integral equations based on the quadrature formula method is also considered. The evaluation of the error is carried out by proving the corresponding theorem and its consequences. One of the consequences of the theorem on limitness of error states that, for an infinitely small value of the regularization parameter, the error of the solution also tends to zero. This statement is also proved in the article with the demonstration of computations and calculations.

A final expression is given for evaluating the errors in solving the Volterra integral equations of the second kind using regularization methods and quadrature formulas, and it is concluded that the proposed methods allow one to overcome the problem of singularity in Volterra integral equations of the second kind.

**Key words:** *integral equation, singularity, regularizing parameter, error.*

Отримано: 12.11.2018

УДК 004.61

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.39-55

**А. А. Верлань\***, д-р філософії,  
**О. А. Дячук \*\***, канд. техн. наук,  
**Е. А. Палагіна\*\*\***, канд. техн. наук,  
**В. В. Палагін\*\*\***, д-р техн. наук

\* Норвежский университет науки и технологий, NTNU,  
г. Йовик, Норвегия,

\*\* Институт экономики и прогнозирования НАН Украины, г. Киев,

\*\*\* Черкасский государственный  
технологический университет, г. Черкассы

## **ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Развитие современных технических и информационных систем характеризуется повышенными требованиями к надежности функционирования и достоверности прогноза их динамических характеристик. Одним из условий такого прогнозирования является построение математических моделей, параметры которых отображают реальные факторы, влияющие на динамику системы. Построение достаточно точных моделей вызывает трудности при их реализации и взаимодействии рассматриваемых систем с внешней средой. Для преодоления этих трудностей разрабатываются методы упрощения (редукция) математических моделей.

При всем разнообразии используемых подходов к упрощению математических моделей исследуемых систем редукция сложной модели всегда основана на некоторой близости (эквивалентности) исходной и упрощенной модели. В связи с тем, что оценка эквивалентности моделей существенным образом определяется целями исследования системы и спецификой исходной модели, классификация методов упрощения по отношению эквивалентности моделей представляется затруднительной. Анализ известных методов упрощения моделей показывает их основной недостаток, который заключается в сравнении полных и упрощенных моделей при номинальных значениях параметров систем. В большинстве методов при этом не ставится также и задача учета полной погрешности оценки показателей качества исследуемых систем.

В данной работе принято, что упрощенная модель эквивалентна исходной полной модели в отношении заданных показателей качества, если использование упрощенной модели вместо полной не требует ослабления заданных ограничений на точность оценок показателей качества исследуемой системы.

Предложен принцип упрощения моделей, заключающийся в пренебрежении параметрами, факторами или фрагментами

моделі, незначимими для заданих показателів якості. На цьому принципі розроблено метод упрощення математических моделей, відзначаючийся від відомих урахуванням додатково-го руху і узгодженням точності вихідних даних і впливів параметрів з виможою точністю оцінок показателів якості досліджуваних систем.

**Ключеві слова:** *методи редукції математических моделей, оцінювання точностних вимог, динаміческі системи.*

**Введення.** Розвиток науки і техніки призводить до необхідності управління все більш ускладнюючимися системами, в зв'язі з чим зростає роль надійного прогнозу їх руху. Необхідним умовою такого прогнозу є одержання математическої моделі, параметри якої відображають реальні фізическі, конструктивні, технологіческі і другі фактори, впливаючі на динаміку системи. Однак побудова її достатньо точною моделю часто неможливо з-за відсутності адекватних моделей елементів і взаємозв'язей системи з зовнішньою середою [1]. Для подолення цієї труднощі створюються моделюючі комплекси, що містять в собі реальні елементи системи, моделі яких складні або невідомі [2, 3]. Комплексами такого роду є випробувальні стенди для доводки і випробувань техніческих систем і різні тренажери для навчання персоналу, що керує складними об'єктами — тренажери для підготовки операторів електростанцій, екіпажі судів, пілотів літальних апаратів і т.п.

Наступним кроком в напрямленні наближення моделю до оригіналу є використання натурних імітаторів [4] — натурних моделюючих комплексів, що дозволяють моделювати рух досліджуваних об'єктів в натурних умовах їх експлуатації. Використання натурних імітаторів з оператором в контурі управління дає можливість виробляти обробку елементів і техніческих систем, з якими взаємодіє оператор, ефективно організувати професіональний відбір, навчання і тренування обслуговуючого персоналу в реальних умовах функціонування досліджуваної ергатическої системи.

Найбільш характерним прикладом таких систем є імітатори літальних апаратів, задачі аналізу, проектування і створення яких в повній мірі відповідають призначенню і суті методів редукції (упрощення) динаміческих моделей, розглянутих в цій роботі [3, 5]. Звичайно, існує велика кількість класів інших техніческих задач, що відносяться до комп'ютерно-інтегрованним системам, орієнтованим на використання методів редукції математических моделей.



Анализ методов упрощения математических моделей динамических систем показывает на применение двух основных подходов: построение упрощенной модели по критерию близости показателей качества исходной и упрощенной моделей в пространстве изображений и в пространстве состояния [6–10].

Необходимо отметить характерный недостаток известных методов упрощения моделей, заключающийся в сравнении полных и упрощенных моделей при номинальных значениях параметров систем. В большинстве методов при этом не ставится также и задача учета полной погрешности оценки показателей качества исследуемых систем.

**Целью работы** является разработка методов редукции математических моделей динамических систем с оценкой требований к параметрам элементов имитатора для обеспечения заданной точности динамического подобия.

**Метод упрощения математических моделей в натуральных имитаторах.** В качестве задачи исследования рассматривается натуральный имитатор для воспроизведения динамики исследуемого объекта. Принято, что на уровне организации всей вычислительной системы имитатора известны режимы его функционирования, ограничения на координаты и управления, компоненты  $\Phi_i (i = 1, n_\phi)$  вектора показателей качества имитатора и ограничения  $\Phi_{\Sigma}$  на них. Известными считаются структура и набор факторов в моделях движения моделируемого и базового объектов, оценки  $\Delta\Phi_{om}$  и  $\Delta\Phi_{ob}$  неадекватности этих моделей, характеристики управляющих и возмущающих воздействий. Будем предполагать выполненной параметризацию управляющих и возмущающих воздействий с оценкой возмущений получаемых детерминированных и случайных параметров соответствующих базисных функций. Предполагается также заданной информация  $\mu(\Delta P)$  о точности других параметров модели, в том числе коэффициентов эмпирических или регрессионных зависимостей, используемых в модели, конструктивно-технологических параметров системы и таких элементов имитатора, как преобразователи и датчики координат объекта и параметров внешней среды.

В принятых предположениях рассматриваемые модели динамики имеют вид системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dq_k}{dt} = f_k(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_m), \\ q_k(t_s) = q_{ks}, p_k = q_{ks}, (k = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (1)$$

в которой время  $t$ , переменные состояния  $q$ , номиналы параметров  $\bar{P}$  и их возмущения  $\Delta P$  изменяются в заданных областях:

$$t \in [t_s, t_f], \quad q \in R_q, \quad \bar{P}_j \in R_{pj}, \quad \Delta P_j \in R_{\Delta pj}, \quad (j = \overline{1, m}). \quad (2)$$

Отметим, что точки  $\bar{P}^{(t)} \in R_p$  однозначно определяют соответствующий номинальный, невозмущенный режим движения объекта.

Вектор  $P$  содержит детерминированные и случайные компоненты —  $P_{jd}$  и  $P_{js}$  ( $jd \in J_d, js \in J_s$ ). Примем, что кроме (2) задана минимальная информация о случайных параметрах  $P_s$  — математические ожидания  $M[P_j] = \bar{P}_j + M[\Delta P_j]$  и центральные моменты

$$\mu_i^{k_i} j^{k_j} = M \left[ (P_i - M[P_i])^{k_i} \cdot (P_j - M[P_j])^{k_j} \right], \quad (i, j \in J_s).$$

Ввиду того, что в вычислительное устройство имитатора значения координат объекта и параметров внешней среды вводятся с погрешностями, равными сумме погрешностей датчиков и преобразователей (а каждая из них, в свою очередь, является суммой первичных погрешностей — методической, инструментальной, динамической и т.д.), примем, что в этом случае аддитивно возмущенных параметров  $P$  модели известны моментные характеристики  $M[\Delta P_{ji}]$ ,

$$\mu_{ji}^{k_i} = M[\Delta^0 P_{ji}^{k_i}],$$

$$\mu_{j_1 \dots j_{n_c}}^{k_1 \dots k_{n_c}} = M \left[ \prod_{i=1}^{n_c} (\Delta P_{j_i} - M[\Delta P_{j_i}])^{k_i} \right]$$

первичных компонент,  $\Delta P_{j_i}$  — возмущения  $\Delta P_j = \Delta P_{j_1} + \dots + \Delta P_{j_{n_c}}$ .

В общем случае выходные координаты — это заданные функции переменных состояния:  $Y = Y(q)$ . При воспроизведении динамики исследуемых объектов выходными координатами натурального имитатора являются переменные состояния и скорости их изменения:

$$Y_k = q_k, \quad Y_{n+k} = \frac{dq_k}{dt}, \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3)$$

В задачах обеспечения точности моделирования для оценки отклонений

$$\Delta Y_k(t) = Y_k(t) - \bar{Y}_k(t), \quad (k = 1, n_y; n_y = 2n) \quad (4)$$

выходных координат  $Y_k$  от некоторых опорных значений  $U_k$  используют приведенную максимальную погрешность

$$\Phi_{1k} = \frac{\max_{t \in [t_s, t_f]} |\Delta Y_k(t)|}{\max_t |\bar{Y}_k(t)|} \quad (5)$$

либо приведенную среднеквадратическую погрешность

$$\Phi_{2k} = \frac{\int_{t_s}^{t_f} |\Delta Y_k(t)|^2 dt}{\int_{t_s}^{t_f} \bar{Y}_k^2(t) dt}. \quad (6)$$

При отсутствии детерминированных возмущений  $\Delta P_d$  параметров системы (1) оценка  $\max_t |\Delta Y_k|$  случайного возмущения  $\Delta Y_k$  может быть заменена оценкой  $n_\sigma \cdot \sigma_{Y_k}$  — окрестности опорной траектории  $\bar{Y}_k$ , которой с вероятностью  $1 - \frac{1}{n_\sigma^2}$  накрывается область разброса координат  $Y_k$ . Показатель качества в этом случае принимает вид:

$$\Phi_{3k} = \frac{\max_t (|M[\Delta Y_k]| + n_\sigma \cdot \sigma_{Y_k})}{\max_t |\bar{Y}_k(t)|}. \quad (7)$$

В предположенном общем случае детерминированных и случайных возмущений параметров усредненные по ансамблю  $\Delta P_s$  числовые характеристики  $M[Y(t)]$  и  $D[Y(t)]$  координат системы являются функциями компонент  $P_d$ . По аналогии с (5), (7) показатель качества в этом случае можно определить оценкой

$$\Phi_{4k} = \max_{\Delta P_d \in R_{sp}} \frac{\max_t (|M[Y_k(t, P_d)] - \bar{Y}_k(t, \bar{P})| + n_\sigma \cdot \sigma_{Y_k}(t, P_d))}{\max_t |\bar{Y}_k(t, \bar{P})|}, (k = 1, n_y). \quad (8)$$

В дальнейшем индекс  $k$  оцениваемого отклонения координаты  $Y_k$  будет опускаться всюду, где это не вызывает неоднозначного прочтения соответствующих выражений.

Ограничения  $\Phi_{I\Sigma}$  на показатели качества имитатора представляют собой ограничения на допустимую разность координат моделируемого и базового объектов:

$$\Phi(\hat{Y}_m - \hat{Y}_b) \leq \Phi_{I\Sigma}, \quad (9)$$

где  $\Phi$  — функционал типа (5)–(8).

Будем использовать обозначения:  $\Delta Y_0 = \hat{Y} - \bar{Y}_0(\bar{P})$  — для области неопределенности координат объекта вследствие неадекватности модели,  $\Delta Y_{ms} = \bar{Y}_{0m}(\bar{P}) - \bar{Y}_{0b}(\bar{P})$  — для расчетной разности между координа-

тами моделируемого и базового объектов,  $\Delta Y_{cp} = Y(P) - \bar{Y}_0(\bar{P})$  — для суммарной области неопределенности координат модели из-за вычислительной погрешности оценки координат по невозмущенной модели и вследствие возмущений параметров, учтенных в модели. Если

$$Y_c(\bar{P}) = \bar{Y}_0(\bar{P}) + \Delta Y_c \quad (10)$$

— координаты, вычисленные при невозмущенных параметрах, и

$$Y(P) = Y_c(\bar{P}) + \Delta Y_p \quad (11)$$

— координаты возмущенной модели, то

$$\Delta Y_{cp} = \Delta Y_p + \Delta Y_c = (Y(P) - Y_c(\bar{P})) + (Y_c(\bar{P}) - \bar{Y}_0(\bar{P})). \quad (12)$$

Далее функционалом  $\Phi$  будем обозначать оценку модуля максимальных отклонений  $\Delta Y$  координат, обусловленных соответствующим источником возмущения в текущей точке  $t_i$  интервала движения системы:  $\Phi_p = \max_{\Delta P} |\Delta Y_p|$ ,  $\Phi_c = \max |\Delta Y_c|$ , и т.д. (здесь индекс  $k$  опущен, с записью индекса  $k$  координаты  $Y_k$  эти покоординатные равенства примут вид:  $\Phi_{kp} = \max_{\Delta P} |\Delta Y_{kp}|$ ,  $\Phi_{kc} = \max |\Delta Y_{kc}|$ , и т.д.).

Так как  $\Phi$  являются функционалами типа норм, то в силу полуаддитивности  $\Phi$  требование (9) приводится к виду:

$$\Phi(\Delta Y_{cpm}) + \Phi(\Delta Y_{cpb}) \leq \Phi_{mb} = \Phi_{\Sigma} - \Phi(\Delta Y_{0m}) - \Phi(\Delta Y_{0b}) - \Phi(\Delta Y_{mb}). \quad (13)$$

С использованием обозначений  $\Phi_{ii} = \max_t \Phi_{cpi}$ , ( $i \in \{m, b\}$ ) и ко-

эффициента  $r_{bm} = \frac{L_b}{L_m}$ , равного отношению затрат на оценки

$\Phi(\Delta Y_{cpm})$  и  $\Phi(\Delta Y_{cpb})$  областей неопределенности  $\Delta Y_{cpm}$  и  $\Delta Y_{cpb}$ , точностные требования (13) к математическим моделям динамики в имитаторе можно записать в виде:

$$\Phi_{im} + \Phi_{ib} \leq \Phi_{mb}, \quad (14)$$

$$\Phi_{im} = \frac{\Phi_{imb}}{r_{bm} + 1}, \quad \Phi_{ib} = r_{bm} \cdot \Phi_{im}. \quad (15)$$

Итак, можно считать заданными допуски  $\Phi_{im}$  и  $\Phi_{ib}$  на оценку областей неопределенности выходных координат математических моделей моделируемого и базового объектов.

Принимаем, что упрощенная модель эквивалентна исходной полной модели в отношении заданных показателей качества, если использование упрощенной модели вместо полной не требует ослабления заданных ограничений на точность оценок показателей качества исследуемой

системы. В соответствии с этим возможно упрощение любой модели путем пренебрежения параметрами, факторами или фрагментами модели, незначимыми для заданных показателей качества. Это положение и составляет используемый в работе принцип упрощения моделей.

При оценке отклонений координат от опорной траектории  $\bar{Y}_0$  исходной модели (по предположению, более точной, чем упрощенная) сама возможность упрощения исходной модели при заданных возмущениях параметров определится условием  $C_p > 1$  в выражении

$$\bar{Y}_0 \pm C_p (\bar{\Phi}_p + \Delta\bar{\Phi}_p + \bar{\Phi}_c) = Y_0 \pm \Phi(t), \quad (16)$$

которое определяет допустимую область координат упрощенной модели, согласованную с исходными данными о возмущениях параметров. В (16) чертой помечены величины, определяемые по исходной модели. В частности,  $\Delta\bar{\Phi}_p$  — погрешность оценки  $\bar{\Phi}_p$  дополнительного движения исходной модели.

Согласно сформулированному критерию эквивалентности, упрощенная модель будет по точности эквивалентна исходной, если определяемые по упрощенной модели выходные координаты не выходят из допустимой области. Для конкретизации этого условия рассмотрим разность  $Y(P) - \bar{Y}(P)$  между координатами упрощенной модели

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y, P), \quad Y(t_s) = Y_s \quad (17)$$

и полной модели

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{Y}, P), \quad \bar{Y}(t_s) = \bar{Y}_s. \quad (18)$$

Эта разность определяется соотношением

$$\begin{aligned} \frac{d(Y - \bar{Y})}{dt} &= f(t, Y, P) - \bar{f}(t, \bar{Y}, P) = (f(t, Y, P) - f(t, \bar{Y}_r, \bar{P})) - \\ &- (\bar{f}(t, \bar{Y}, P) - \bar{f}(t, \bar{Y}_0, P)) + (f(t, \bar{Y}_r, \bar{P}) - \bar{f}(t, \bar{Y}_0, \bar{P})), \quad (19) \\ &\left( (Y - \bar{Y})_{t=t_s} = Y_s - \bar{Y}_s \right). \end{aligned}$$

Последняя группа слагаемых в правой части (19) определяет разницу  $\Delta Y_{f\bar{f}} = \bar{Y}_r(\bar{P}) - \bar{Y}_0(\bar{P})$  между опорными (невозмущенными) траекториями упрощенной и полной моделей, так как

$$\frac{d(\bar{Y}_r - \bar{Y}_0)}{dt} = f(t, \bar{Y}_r, P) - \bar{f}(t, \bar{Y}_0, \bar{P}).$$

Первые две группы слагаемых в (19) определяют дополнительные движения упрощенной и полной моделей:

$$\frac{d\Delta Y_p}{dt} = \frac{\partial f}{\partial Y} \Delta Y_p + \frac{\partial f}{\partial P} \Delta P, \quad \frac{d\Delta \bar{Y}_p}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{Y}} \Delta \bar{Y}_p + \frac{\partial \bar{f}}{\partial P} \Delta P.$$

С использованием функций чувствительности первого порядка

$$\frac{dY}{dP} = \frac{\partial \Delta Y_p}{\partial P} = S, \quad \frac{d\bar{Y}}{dP} = \frac{\partial \Delta \bar{Y}_p}{\partial P} = \bar{S}$$

дополнительные движения  $\Delta Y_p$  и  $\Delta \bar{Y}_p$  записываются в виде

$$\Delta Y_p = Y - \bar{Y}_r \approx S\Delta P, \quad \Delta \bar{Y}_p = Y - \bar{Y}_0 \approx \bar{S}\Delta P. \quad (20)$$

В этих обозначениях разность координат упрощенной и полной моделей с учетом вычислительных погрешностей  $\Delta Y_c$  и  $\Delta \bar{Y}_c$  оценок опорных траекторий  $\bar{Y}_r$  и  $\bar{Y}_0$  представима в виде:

$$\begin{aligned} Y - \bar{Y} &= \bar{Y}_r + \Delta Y_c + \Delta Y - (\bar{Y}_0 + \Delta \bar{Y}_c + \Delta \bar{Y}_p) \approx \\ &\approx \Delta Y_{f\bar{f}} + S\Delta P + \Delta Y_c - \bar{S}\Delta P - \Delta Y_c. \end{aligned} \quad (21)$$

Из последнего соотношения видно, что при упрощении моделей совершенно недостаточно оценивать «близость» упрощенной модели к исходной лишь той или иной мерой разности  $\Delta Y_{f\bar{f}}$  их опорных траекторий. С этой точки зрения любые методы упрощения математических моделей не могут рассматриваться как корректные без оценки значимости дополнительного движения, которая требуется методологией теории чувствительности.

В соответствии с изложенным при оценке допустимой области неопределенности координат  $\Phi_i$  — окрестностью опорной траектории исходной модели область неопределенности координат упрощенной модели (эквивалентной исходной по допуску  $\Phi_i$ ) определяется соотношением

$$\Phi \left( \left| \bar{Y}_r - \bar{Y}_0 \right| \right) + \Phi_p + \Delta \Phi_p + \Phi_c + \bar{\Phi}_c \leq \Phi_i. \quad (22)$$

Здесь, аналогично (16),  $\Phi_p$ ,  $\Delta \Phi_p$  — оценки дополнительного движения упрощенной модели и погрешность этой оценки.

Условие  $\Phi \left( \Delta Y_{f\bar{f}} \right) \leq \Phi_i$  обычно проводимого упрощения модели получается из (22) пренебрежением  $\Phi_p$ ,  $\Delta \Phi_p$ ,  $\Phi_c$ ,  $\bar{\Phi}_c$ .

Слагаемые  $\Phi \left( \Delta Y_{f\bar{f}} \right)$ ,  $\Phi_p$ ,  $\bar{\Phi}_p$  и  $\Phi_i$  в соотношениях (16), (22) зависят от опорных значений  $\bar{P}$  вектора параметров, поэтому более четкая запись условия упрощения модели имеет вид

$$\bar{Y}_0(\bar{P}) \pm C_p \left( \bar{\Phi}_p(\bar{P}) + \Delta \bar{\Phi}_p + \bar{\Phi}_c \right) = \bar{Y}_0(\bar{P}) \pm \Phi_i(\bar{P}), \quad C_p > 1, \quad (23)$$

$$\Phi\left(\Delta Y_{f\bar{f}}(\bar{P})\right) + \Phi_p(\bar{P}) + \Delta\Phi_p + \Phi_c + \bar{\Phi}_c \leq \Phi_t(\bar{P}). \quad (24)$$

При детерминированных и случайных возмущениях параметров в качестве опорных траекторий исходной и упрощенной моделей естественно принять математические ожидания  $\bar{Y}_0(P_d) = M[\bar{Y}(P)]$ ,  $\bar{Y}_r(P_d) = M[Y(P)]$ , оцениваемые с погрешностями  $\bar{\Phi}_c = \Phi(\Delta M[\bar{Y}])$ ,  $\Phi_c = \Phi(\Delta M[Y])$ , соответственно. Области неопределенности выходных координат, обусловленные случайными компонентами  $\Delta P_s$ , с вероятностью не меньше  $1 - \frac{1}{n_\sigma^2}$  накрывается интервалами

$$[\tilde{Y}_0 - n_\sigma(\sigma_{\bar{Y}} + \Delta\sigma_{\bar{Y}}), \bar{Y}_0 + n_\sigma(\sigma_{\bar{Y}} + \Delta\sigma_{\bar{Y}})] \quad (25)$$

при оценке  $\tilde{\Phi}_{ps} = \Phi(\tilde{Y}(P) - \tilde{Y}_0(P_d))$  (величины  $\Delta\sigma_{\bar{Y}}$  — погрешности оценки среднеквадратических отклонений  $\sigma_{\bar{Y}} = \sigma_{\bar{Y}}(P_d)$  координат полной ( $\tilde{Y} = \bar{Y}$ ,  $\tilde{Y}_0 = \bar{Y}_0$ ,  $\tilde{\Phi}_{ps} = \bar{\Phi}_{ps}$ ) и упрощенной ( $\tilde{Y} = Y$ ,  $\tilde{Y}_0 = \bar{Y}_r$ ,  $\tilde{\Phi}_{ps} = \Phi_{ps}$ ) моделей соответственно). Оценкой разности опорных траекторий в этом случае является величина  $|\Delta Y_{f\bar{f}}(P_d)| = |\bar{Y}_r - \bar{Y}_0|$  и условия (23), (24) упрощения модели могут быть записаны в форме

$$M[\bar{Y}(t, P)] \pm C_p(\bar{\Phi}_c + n_\sigma \cdot (\sigma_{\bar{Y}}(P_d) + \Delta\sigma_{\bar{Y}})) = \bar{Y}_0(P_d) \pm \Phi_t(P_d), \quad C_p > 1 \quad (26)$$

$$|\bar{Y}_r - \bar{Y}_0| + \Phi_c + \Phi_c + n_\sigma \cdot (\sigma_Y(P_d) + \Delta\sigma_Y) \leq \Phi_t(P_d). \quad (27)$$

Если в качестве опорных берутся траектории  $Y_0(\bar{P}) = M[Y(t, P)] - \Delta\bar{Y}_{pd}$  исходной модели и  $\bar{Y}_r(\bar{P}) = M[Y(t, P)] - \Delta Y_{pd}$  — упрощенной, то при  $\sigma_{\bar{Y}}(P_d) \approx \sigma_{\bar{Y}}(\bar{P})$ ,  $\sigma_Y(P_d) \approx \sigma_Y(\bar{P})$  условия упрощения (26), (27) записываются в виде:

$$\bar{Y}(t, \bar{P}) \pm C(\bar{\Phi}_{pd} + \Delta\bar{\Phi}_{pd} + \bar{\Phi}_c + n_\sigma \cdot (\sigma_{\bar{Y}}(\bar{P}) + \Delta\sigma_{\bar{Y}})) = \bar{Y}_0(\bar{P}) \pm \Phi_t, \quad (28)$$

$$|\bar{Y}_r(\bar{P}) - \bar{Y}_0(\bar{P})| + \Phi_{pd} + \Delta\Phi_{pd} + \Phi_c + \bar{\Phi}_c + n_\sigma \cdot (\sigma_Y(\bar{P}) + \Delta\sigma_Y) \leq \Phi_t(\bar{P}) \quad (29)$$

( $c > 1$ ,  $\forall \bar{P} \in R_p$ ).

В (28), (29)  $\bar{\Phi}_{pd}$  и  $\Phi_{pd}$  — оценки возмущений координат полной и упрощенной моделей, вызванных детерминированными компонентами возмущений параметров,  $\Delta\bar{\Phi}_{pd}$  и  $\Delta\Phi_{pd}$  — погрешности этих оценок.

Соотношения (26), (28) являются необходимыми условиями упрощения исходной модели и формой согласования требуемой точности

моделі і точності вихідних даних. Соотношения (27), (29) определяют упрощенную модель, эквивалентную исходной по показателю.

Соотношения (28), (29) удовлетворяют таким требованиям комплексного подхода, как учет полной погрешности оценок требуемых характеристик моделируемого движения системы и согласование допуска на эти характеристики с точностью исходных данных и оценкой области неопределенности координат, вызываемой возмущениями параметров элементов системы.

Определение множества параметров исходной системы, при пренебрежении которыми выполняются необходимое условие упрощения (28) и соотношение эквивалентности (29) на интервале  $[t_s, t_f]$  движения системы во всей области  $R_p$  изменения номиналов параметров составляет основу предлагаемой методики упрощения модели с обеспечением требуемых показателей точности.

**Реализация точностной редукции математических моделей динамики.** Полученные соотношения (28), (29) могут быть конструктивно использованы для реализации предложенного метода к упрощению математических моделей по критерию точности.

При заданном допуске  $\Phi_t$  на точность модели, согласованном с характеристиками возмущений параметров, определяющих основную компоненту  $\bar{\Phi}_p$  суммарной области неопределенности  $\Phi_\Sigma = \bar{\Phi}_p + \Delta\bar{\Phi}_p + \bar{\Phi}_c$  исходной модели, резерв точности  $\Phi_r = \Phi_t - \Phi_\Sigma > 0$  будем использовать для упрощения модели следующим образом. Ранжируем параметры по оценкам их вкладов в область неопределенности  $\Delta\bar{Y}$  выходных координат исходной модели с учетом экономии времени вычисления выходных координат вследствие пренебрежения этими параметрами. Тогда максимальное число параметров с низкими рангами, суммарный вклад которых в область неопределенности  $\Delta\bar{Y}$  не превышает резерва  $\Phi_r$ , определяет множество  $L_{np}$  параметров, пренебрежение которыми дает самую простую модель. Редуцируем исходную модель обнулением незначимых параметров, мультипликативно не связанных со значимыми. Так как параметрическая чувствительность координат редуцированной модели отличается от исходной, требуется проверка точности полученной редуцированной модели. При выполнении соотношения (29) на всем интервале движения и во всей области  $R_p$  задание номиналов параметров редуцированная модель удовлетворяет заданным точностным требованиям.

Рассмотрим возможность удовлетворения точностных требований к модели в случае невыполнения условий (29) или при отсут-



ствии резерва точности исходной модели ( $\Phi_r < 0$ ) за счет уменьшения дисперсий  $\sigma_Y^2$  случайных компонент возмущений координат  $Y$ . Пусть  $\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_u$ ,  $\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_u$  — неуправляемые части дисперсий выходных координат, обусловленные группой существенных возмущений параметров, уменьшение которых связано со столь большими затратами, что является нерациональным или даже невозможным при разработке имитатора. Примерами возмущений этой группы являются технологические разбросы размеров, нарушения геометрии элементов конструкции и т.п. К группе неуправляемых возмущений относятся также изменения координат и параметров внешней среды в промежутках между дискретными моментами времени, определяемыми максимальной частотой опроса датчиков.

Вторую группу существенных возмущений параметров составляют погрешности, с которыми в вычислительное устройство имитатора вводятся значения координат объекта и параметров внешней среды. Так как эти погрешности определяются точностью датчиков и преобразователей в каналах измерения соответствующих величин, то ими можно управлять. Здесь кстати можно отметить, что обоснование выбора точности датчиков и преобразователей, являющееся основой метрологического обеспечения вычислительно-управляющей системы имитатора, нельзя осуществить без оценок дисперсий  $\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})$ ,  $\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})$  выходных координат, обусловленных возмущениями всех параметров системы.

Третья группа существенных возмущений параметров обусловлена погрешностями оценок коэффициентов эмпирических или регрессионных зависимостей, используемых в модели. В рассматриваемой конкретной модели динамики полета самолета возмущениями этой группы являются погрешности коэффициентов аэродинамических сил, моментов и погрешности аппроксимации тяги двигателей. Причина выделения этих погрешностей в отдельную группу следующая. Как известно, оценки коэффициентов регрессионных зависимостей в случае учета лишь аргументов остаются состоятельными (с увеличением лишь дисперсии оценок), в то время как построение функций регрессии при недостающих аргументах приводит к потере состоятельности оценок [10]. В связи с этим при отсутствии информации о достаточном учете всех факторов в используемой регрессионной зависимости следует оценить ее чувствительность к нулевым значениям факторов (аргументов), которые предположительно могли быть опущены. При большой чувствительности к ним есть серьезные основания перестроить регрессионную зависимость с учетом недостающих значимых аргументов. Ввиду сказанного, в общем случае в

заданные эмпирические зависимости в модели (1) должны быть добавлены члены, соответствующие наборам аргументов, порядок которых превышает порядок учтенных аргументов (при полиномиальной регрессии). Значимость добавленных членов, обнаруженная в процессе упрощения усложненной таким образом модели, потребует уточнения коэффициентов эмпирических зависимостей. При этой дополнительной обработке экспериментальных данных есть возможность учесть параметрическую чувствительность координат для уменьшения влияния погрешностей коэффициентов получаемой эмпирической зависимости на дисперсии выходных координат.

Выбором характеристик  $\sigma_j^2$  точности датчиков, преобразователей и коэффициентов эмпирических зависимостей имеется возможность управлять возмущениями  $\Delta P_{js}$  ( $j \in J_{cp}$ ) двух последних групп.

Таким образом, при невыполнении условий (28), (29) с заданными возмущениями параметров должна решаться распределительная задача назначения допусков на погрешности перечисленных элементов. Сформулируем ограничения на выбор  $\sigma_j$ , вытекающие из условий (28), (29).

Допустимые дисперсии выходных координат  $\bar{Y}$  и  $Y$ , согласно соотношениям (28), (29), определяются величинами:

$$\bar{\sigma}_t = \frac{\frac{\Phi_t}{C_p} - (\bar{\Phi}_{pd} + \Delta \bar{\Phi}_{pd} + \bar{\Phi}_c)}{n_\sigma} - \Delta \sigma_{\bar{Y}}, \quad (30)$$

$$\sigma_t = \frac{\Phi_t - (\Phi_{pd} + \Delta \Phi_{pd} + \Phi_c + \bar{\Phi}_c)}{n_\sigma} - \Delta \sigma_Y. \quad (31)$$

Поэтому ограничения на управляемые части  $\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_c$ ,  $\sigma_Y^2(\bar{P})_c$  дисперсий координат исходной и упрощенной моделей, обусловленные управляемыми возмущениями  $\Delta P_{js}$  ( $\sigma_j^2 = D[\Delta P_j]$ ,  $j \in J_{cp}$ ), определяются соотношениями:

$$\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_c \leq \bar{\sigma}_t^2 - \sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_u, \quad (32)$$

$$\sigma_Y^2(\bar{P})_c \leq \sigma_t^2 - \sigma_Y^2(\bar{P})_u. \quad (33)$$

Итак, в общем случае намеченная схема упрощения модели для ее реализации требует решения следующих задач:

- 1) оценки дополнительных движений  $\Delta \bar{Y}_{pd} = \bar{Y}(t, P_d) - \bar{Y}(t, \bar{P})$  и  $\Delta Y_{pd} = Y(t, P_d) - Y(t, \bar{P})$ , обусловленных детерминированными возмущениями  $\Delta P_p = P_d - \bar{P}_d$  параметров в исходной и упрощенной моделях;

- 2) оценки числовых вероятностных характеристик (математических ожиданий и дисперсий) выходных координат нелинейных систем при заданных моментных характеристиках случайных параметров;
- 3) распределения допусков на погрешности параметров элементов системы;
- 4) построения конечной  $\Delta$ -сети точек  $p^{(l)} \in R_p$  с выполнением условий (28), (29) во всех окрестностях точек  $p^{(l)}$ .

От полноты учета всех рассмотренных групп возмущений существенно зависит корректность вывода об удовлетворительной точности оценок исследуемой системы по ее модели. Отсюда вытекает методологическое требование выбирать в качестве исходной самую полную модель, расчет по которой можно реализовать с имеющимися в распоряжении исследователя вычислительными средствами. В этой полной модели должны содержаться все параметры, чувствительности координат к возмущению которых предполагается вычислять для оценки функционалов  $\bar{\Phi}_{pd}$ ,  $\Phi_{pd}$ ,  $M[\bar{Y}(P)]$ ,  $\sigma_{\bar{Y}}(\bar{P})$ ,  $M[Y(P)]$ ,  $\sigma_Y(\bar{P})$  и для решения распределительной задачи выбора дисперсий  $\sigma_j^2$  при ограничениях (32), (33).

Для решения распределительной задачи выбора дисперсий  $\sigma_j^2$  управляемых возмущений необходима оценка чувствительности координат к возмущениям параметров, которую будем использовать и для оценки  $|\bar{S}_{kj}P_j| \left( S_{kj} = \frac{\partial \bar{Y}_k}{\partial P_j}, k = \bar{1}, n, j = \bar{1}, m \right)$  вкладов параметров в область неопределенности выходных координат  $\bar{Y}_k$ . Таким образом, теория чувствительности не только является идейной основой предлагаемого подхода к упрощению моделей, но ее алгоритмы могут быть непосредственно использованы для получения оценок компонент областей неопределенности координат при проверке точностных требований (29) к модели. В частности, оценки погрешностей  $|\Delta \bar{Y}_c|$ ,  $|\Delta Y_c|$  определения опорных траекторий  $\bar{Y}_0$ ,  $\bar{Y}_r$  могут быть получены не только методами двусторонних приближений или решением уравнений динамики в прямом и обратном времени, но и путем совместного решения системы уравнений состояния и чувствительности по начальным значениям.

Предположим, что выполнены этапы получения полной модели, оценки дополнительного движения, оценки чувствительности координат к возмущению параметров, решения распределительной задачи

выбора дисперсий  $\sigma_j^2$  при ограничениях (33) в произвольной точке  $\bar{P}$  области  $R_p$  значений параметров. Пусть также для любой точки определено подмножество  $\{P_n\}$  параметров, пренебрежение которыми предполагается возможным из-за наличия резерва  $\Phi_r > 0$  области неопределенности полной модели, и выполнен этап проверки незначимости  $\{P_n\}$ , согласно соотношению (29).

Чувствительность показателей качества и параметрам может быть использована и при решении четвертой задачи — перехода от континуума точек  $R_p$  к конечной  $\Delta$ -сети точек  $\bar{P}^{(l)} \in R_p$ , построение которой должно обеспечить выполнение соотношения (29) в окрестностях точек  $\bar{P}^{(l)}$ , и, тем самым, во всей области  $R_p$ . Это построение можно провести, используя в тех или иных комбинациях сочетания сплайн-аппроксимации чувствительностей  $S(\bar{P})$ , различных методов поиска подобластей в  $R_p$ , «жестких» по отношению к выбранным критериям, и многомерного зондирования области  $R_p$  для проверки соотношений (28), (29).

Заметим, что для различных подобластей  $R_{pi} \subset R_p$  множества  $\{P_n\}$  незначимых параметров в общем случае различны. Следовательно, решением задачи параметрической редукции исходной модели будет либо совокупность моделей  $M_i$ , либо более сложная по сравнению с ними модель  $M$ , полученная обнулением параметров

$$\{P_n\} = \prod_{k=1}^{n_i} \{P_n\}_k, \quad (34)$$

незначимых во всех  $n_i$  подобластях  $R_{pi}$ .

Рассмотрим с позиций описанного подхода упрощение модели путем пренебрежения фрагментами  $f_n$  модели, незначимыми для заданного показателя точности модели, и возможность замены сложных фрагментов  $f_r$  упрощенными фрагментами  $f_l$ . Эту задачу можно свести к задаче параметрической редукции, параметризируя исходные фрагменты  $f_n$  и  $f_r$  следующим образом:

$$f_n + f_r = P_n \cdot f_n + P_r (f_r - P_l \cdot f_l) + P_l \cdot f_l, \\ (P_n = 1 \cap P_r = 1 \cap P_l = 0) \cup (P_n = 0 \cap P_r = 0 \cap P_l = 1). \quad (35)$$

При незначимости параметров  $P_n$ ,  $P_r$  фрагменты  $f_n + f_r$  редуцируются до эквивалентного им относительно заданного показателя

точности фрагмента  $f_i$ . Таким образом, можно говорить об общей задаче точностной редукции модели, понимая под точностной редукцией обнуление параметров и фрагментов модели, незначимых для рассматриваемого показателя точности. Представляется очевидным, что до идентификации модели только проведение точностной редукции полной модели с учетом возмущений всех ее параметров может служить обоснованием использования упрощенной модели при моделировании динамики системы с заданной точностью.

Реализация перечисленных выше этапов точностной редукции, обоснованные точностные требования к модели и датчикам координат базового объекта и параметров внешней среды, дает комплексное решение важной части задач программного и метрологического обеспечения точности воспроизведения динамики исследуемых объектов на подвижных натуральных имитаторах.

**Выводы.** Сформулирован принятый принцип упрощения моделей, заключающийся в пренебрежении параметрами, факторами или фрагментами модели, незначимыми для заданных показателей качества. На этом принципе изложен метод упрощения математических моделей, отличающийся от известных учетом дополнительного движения и согласованием точности исходных данных и возмущений параметров с требуемой точностью оценок показателей качества исследуемых систем.

Проведен переход от общего требования к точности воспроизведения на подвижном имитаторе динамики исследуемого объекта к ограничениям на область неопределенности выходных координат упрощенной модели. Получено необходимое условие для обеспечения требуемой точности моделирования при использовании упрощенной модели с учетом полной вычислительной погрешности и возмущений координат вследствие детерминированных и случайных возмущений параметров системы.

Проведено обоснование необходимости полноты учета в упрощаемой модели параметров и факторов, влияющих на выходные координаты моделируемой системы. Намечены основные этапы реализации предложенного подхода к упрощению математических моделей. Предложено при разработке этих этапов в качестве отправного момента использовать оценку чувствительности выходных координат и показателей качества к возмущению параметров системы.

### Список использованной литературы:

1. Benner P. Model reduction and approximation : theory and algorithms / P. Benner, A. Cohen, M. Ohlberger, K. Willcox. — Philadelphia : SIAM, 2017.
2. Allerton D. Principles of Flight Simulation / D. Allerton John. — Wiley & Sons, 2009.
3. Авиационные тренажеры модульной архитектуры : монография / под ред. Э. В. Лапшина, А. М. Данилова. — Пенза : ИИЦ ПГУ, 2005. — 146 с.

4. Спиридонов А. А. Имитатор космического аппарата для обработки наземного комплекса управления и бортового оборудования нано- и пикоспутников / А. А. Спиридонов, В. А. Саечников, И. А. Шалатонин. — Минск : Белорусский государственный университет, 2015. — Режим доступа: <http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/52380/1/58-62.pdf>.
5. Верлань А. Ф. Відтворення критичних режимів динаміки рухомих об'єктів натурними імітаторами / А. Ф. Верлань, В. М. Владимиров, О. А. Дячук // 36. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — К., 2006. — Вип. 36. — С. 115–121.
6. Васильев В. В. Моделирование динамических систем: Аспекты мониторинга и обработки сигналов / В. В. Васильев, Г. И. Грездов, Л. А. Симак и др. — К. : НАН Украины, 2002. — 344 с.
7. Верлань А. Ф. Алгоритмизация методов точностной параметрической редукции математических моделей / А. Ф. Верлань, А. А. Верлань, С. А. Положаенко // Информатика та математичні методи в моделюванні. — 2017. — Т. 7, № 1–2. — С. 7–18.
8. Верлань А. Ф. Моделі динаміки електромеханічних систем / А. Ф. Верлань, В. А. Федорчук. — К. : Наук. думка, 2013. — 222 с.
9. Воронов Е. М. Алгоритм оценки границ области достижимости летательного аппарата с учетом тяги / Е. М. Воронов, А. А. Карпунин // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. — 2007. — № 4 (69). — С. 81–99.
10. Системный анализ: методология. Проблемы. Приложения / М. З. Згуровский, Н. Д. Панкратова. — 2-е изд., перераб. и доп. — К. : Наук. думка, 2007. — 726 с.

## PARAMETRIC REDUCTION OF MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMIC SYSTEMS

The development of modern technical and information systems is characterized by increased requirements for the reliability of operation and reliability of the forecast of their dynamic characteristics. One of the conditions for such prediction is the construction of mathematical models, the parameters of which reflect real factors affecting the dynamics of the system. The construction of sufficiently accurate models is characterized by difficulties in their implementation and interaction of these systems with the external environment. To overcome these difficulties, modeling complexes are created, the design of which is based on the use of simplified mathematical models.

With a variety of approaches used to simplify the mathematical models of the systems being studied, the simplification of a complex model is always based on some equivalence of the original and simplified model. Due to the fact that the estimation of equivalence of models is substantially determined by the objectives of the study system and the specificity of the original model, the classification of simplification methods according to equivalence models of models seems difficult. An analysis of known model simplification methods shows their main disadvantage, which is to compare full and simplified models with nominal values of system parameters. In the majority of methods, the task of accounting for the total error of estimating the quality indices of the systems under study is not included.

In this paper it is accepted that a simplified model is equivalent to the original complete model in relation to the given quality indicators. This

condition is fulfilled if the use of a simplified model instead of a complete does not require the relaxation of the specified limits on the accuracy of estimates of the quality indices of the system being studied.

The principle of simplification of models is proposed, which consists in neglecting parameters, factors or fragments of the model, insignificant for the given indicators of quality. On this principle, a method for simplifying (reduction) of mathematical models is developed, differing from the known additional motion and the harmonization of the accuracy of the initial data and perturbations of the parameters with the required accuracy of estimates of the quality indices of the systems under study.

**Key words:** *reduction methods of mathematical models, estimation accuracy requirements, dynamic systems.*

Отримано: 16.11.2018

УДК 517.968.7

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.55-64

**К. Г. Геселева**, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ**

Інтегро-функціональні рівняння мають широке застосування в різних областях науки та природознавства (зокрема, до таких рівнянь з відхиленням аргументу як нейтрального типу так і з запізненням).

У деяких випадках про розв'язки цих рівнянь буває відома додаткова інформація. Тому важливим є не тільки питання побудови розв'язку такого рівняння, а й встановлення умов сумісності відповідної задачі, тобто потрібно вияснити, чи узгоджується шуканий розв'язок задачі з додатковими умовами.

Встановленню умов сумісності задач такого типу стосовно різних видів операторних рівнянь та розробці методів побудови їх розв'язків присвячено низку наукових праць [1–4].

У статті розглядається один тип інтегро-функціонального рівняння з умовою та обмеженнями на шукану функцію, які носять інтегральний характер. Сформульовано умови сумісності вихідної задачі. Стосовно величин, що входять у задану задачу вимагається, що вони задовольняють ряд необхідних умов. Показано, що при виконанні цих умов вихідна задача буде рівносильною деякому інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду з цілком неперервним оператором та додатковими умовами на шуканий розв'язок.

Крім основної задачі розглянуто також допоміжну задачу — задачу з керуванням, коли у випадку сумісності вводиться додаткова, корегуюча величина. Сформульовано та обґрунтовано умови сумісності вихідної задачі.

У роботі також приведено та обґрунтовано ітераційний та колокаційно-ітеративний методи побудови наближених розв'язків вихідної задачі з обмеженнями. Вказано алгоритм цих методів та достатні умови їх збіжності. При цьому, використовуємо той факт, що вихідна задача при виконанні певних умов є рівносильною інтегральному рівнянню з обмеженнями. Приведені методи побудови наближених розв'язків інтегро-функціонального рівняння з додатковими умовами можна успішно реалізувати на ЕОМ, створивши відповідні програми.

**Ключові слова:** *наближений розв'язок, додаткові умови, обмеження, умови сумісності, допоміжна задача, інтегро-функціональні рівняння, інтегральне рівняння, ітеративний метод, колокаційно-ітеративний метод, обернений оператор.*

**Вступ.** Розглянемо в просторі  $L_2[a, b]$  інтегро-функціональне рівняння

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt + \int_a^b H(x, t)y(h(t))dt, x \in [a, b] \quad (1)$$

з умовою

$$y(x) = \psi(x), x \notin [a, b] \quad (2)$$

та обмеженнями

$$\int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx = \gamma_i, i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

де  $f(x), \psi(x)$  — задані відповідно на  $[a, b]$  та за його межами функції, а  $y(x)$  — шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій  $\{\Phi_i(x)\}$  та числова множина  $\{\gamma_i\}, i = \overline{1, m}$  — відомі. До рівняння (1) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, у випадку сталого запізнення  $\Delta, h(x) = x - \Delta$ .

Задачу (1)–(3) будемо вважати сумісною, якщо існує така функція  $y(x)$ , яка є розв'язком рівняння (1), що задовольняє умову (2) та обмеження (3).

**Основна частина.** Розглянемо випадок, коли функції  $K(x, t), H(x, t)$  в квадраті  $[a, b]^2$  задовольняють умови:



$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt = K^2 < \infty, \quad (4)$$

$$\int_a^b \int_a^b H^2(x, t) dx dt = H^2 < \infty, \quad (5)$$

функція  $h(x)$  є неперервною разом із своєю похідною на  $[a, b]$  і справджуються нерівності

$$x - h(x) \geq \Delta > 0, \quad (6)$$

$$h'(x) \geq l > 0. \quad (7)$$

Покажемо, що рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (7) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Перепишемо другий інтеграл правої частини рівняння (1) з урахуванням умови (2) так

$$\begin{aligned} \int_a^b H(x, t) y(h(t)) dt &= \int_a^{h^{-1}(a)} H(x, t) y(h(t)) dt + \int_{h^{-1}(a)}^b H(x, t) y(h(t)) dt = \\ &= \int_a^{h^{-1}(a)} H(x, t) \psi(h(t)) dt + \int_{h^{-1}(a)}^b H(x, t) y(h(t)) dt = \\ &= \varphi(x) + \int_{h^{-1}(a)}^b H(x, t) y(h(t)) dt, \end{aligned}$$

де  $\varphi(x)$  — можна знайти.

В силу умови (7) неперервна функція  $s = h(t)$  буде зростаючою і для неї існуватиме обернена функція  $t = h^{-1}(s)$ ,  $dt = \frac{ds}{h'(h^{-1}(s))}$ . (Новами межами інтегрування будуть числа.) Тоді останній інтеграл буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \int_{h^{-1}(a)}^b H(x, t) y(h(t)) dt &= \int_a^{h(b)} \frac{H(x, h^{-1}(s))}{h'(h^{-1}(s))} y(s) ds = \int_a^b \tilde{H}(x, s) y(s) ds, \\ \tilde{H}(x, s) &= \begin{cases} \frac{H(x, h^{-1}(s))}{h'(h^{-1}(s))}, & s \in [a, h(b)], \\ 0, & s \in (h(b), b], x \in [a, b]. \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

Слід відмітити що оператор  $\tilde{H}$ , який визначається рівністю

$$(\tilde{H}v)(x) = \int_a^b \tilde{H}(x,t)v(t)dt, \forall v(x) \in L_2[a,b], \quad (9)$$

з виконанням умов (5)–(7) як і оператор  $K$ , який має вигляд

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x,t)v(t)dt, \forall v(x) \in L_2[a,b],$$

буде Фредгольмовим.

Дійсно,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \tilde{H}^2(x,s) dx ds &= \int_a^b \int_a^b \frac{H^2(x, h^{-1}(s))}{(h'(h^{-1}(s)))^2} dx ds \leq \int_a^b \int_a^b \frac{H^2(x, h^{-1}(s))}{h^2} dx ds = \\ &= \frac{1}{h^2} \int_a^b \int_a^b H^2(x, h^{-1}(s)) dx ds \leq \frac{H^2}{h^2} < \infty. \end{aligned}$$

З урахуванням приведених міркувань рівняння (1) з умовою (2) запишеться таким чином

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt + \varphi(x) + \int_a^b \tilde{H}(x,s)y(s)ds,$$

або

$$y(x) = f_1(x) + \int_a^b T(x,t)y(t)dt, \quad (10)$$

де

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(t) = f(t) + \int_a^{h^{-1}(a)} H(x,t)\psi(h(t))dt, \quad (11)$$

$$T(x,t) = K(x,t) + \tilde{H}(x,t), (x,t) \in [a,b]^2. \quad (12)$$

**Теорема 1.** Рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (4)–(7) зводиться до інтегрального рівняння (10) з цілком неперервним оператором  $T$ .

Це означає, що задача (1)–(3), в свою чергу, зводиться до аналогічної задачі (10), (3) для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду і з її сумісності впливає сумісність вихідної задачі і навпаки. Дослідженню умов сумісності задачі (10), (3) присвячена низка наукових праць, зокрема [2, 3]. Встановлений факт еквівалентності задач (1)–(3) та (10), (3) щодо їх сумісності дає можливість проводити подальші дослідження стосовно формулювання умов сумісності, безпосередньо, для задачі (1)–(3) та розгляду питання застосування до цієї задачі наближених методів.

**Задача з керуванням.** Розглянемо в просторі  $L_2[a, b]$  задачу

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \tilde{y}(t) dt + \int_a^b H(x, t) \tilde{y}(h(t)) dt, x \in [a, b], \quad (13)$$

$$\tilde{y}(x) = \psi(x), x \notin [a, b], \quad (14)$$

$$\int_a^b \Phi_i(x) \tilde{y}(x) dx = \gamma_i + \int_a^b \Phi_i(x) u(x) dx, i = \overline{1, m}, \quad (15)$$

де  $\tilde{y}(x)$  і  $u(x)$  — шукані функції, причому

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j(x), \quad (16)$$

$\{\xi_j(x)\}, j = \overline{1, m}$ , — деяка лінійно-незалежна система функцій і  $\xi_j(x) = 0$ , коли  $x \notin [a; b]$ .

Покажемо, що задача (13)–(15) еквівалентна деякому рівнянню без обмежень. Введемо заміну

$$\tilde{y}(x) = z(x) + \int_a^b K(x; t) u(t) dt + \int_a^b H(x; t) u(h(t)) dt, x \in [a; b], \quad (17)$$

яку будемо розглядати, як допоміжну задачу, вважаючи в ній функцію  $z(x)$  заданою, а функції  $\tilde{y}(x)$  та  $u(x)$  треба знайти. Підставляючи (16) в (17), а потім (16) та (17) в рівність (15), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi_i(x) \left\{ z(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left( \int_a^b K(x, t) \xi_j(t) dt + \int_a^b H(x, t) \xi_j(h(t)) dt \right) \right\} dx = \\ = \gamma_i + \int_a^b \Phi_i(x) \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j(x) \right) dx, i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

Перепишемо цю рівність так

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi_i(x) \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j \left( \xi_j(x) - \int_a^b K(x, t) \xi_j(t) dt - \int_a^b H(x, t) \xi_j(h(t)) dt \right) \right\} dx = \\ = \int_a^b \Phi_i(x) z(x) dx - \gamma_i, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Нехай

$$\eta_i(x) = \xi_j(x) - \int_a^b K(x, t) \xi_j(t) dt - \int_a^b H(x, t) \xi_j(h(t)) dt. \quad (18)$$

Позначивши

$$\int_a^b \Phi_i(x) \eta_i(x) dx = a_{ij}, b_i = \int_a^b \Phi_i(x) z(x) dx - \gamma_i, i, j = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Останню рівність запишемо так

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j = b_i, i = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо випадок, коли матриця цієї системи, яку позначимо через  $\Lambda$ , невироджена і нехай  $\Lambda^{-1} = (c_{ij}), i, j = \overline{1, m}$  — обернена матриця. Тоді

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} b_i, j = \overline{1, m}, \quad (21)$$

і розв'язки допоміжної задачі (17), (15) запишуться так

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_j(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} b_i \xi_j(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ij} \left( \int_a^b \Phi_i(t) z(t) dt - \gamma_i \right) \xi_j(x) = \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} b_i \xi_j(x) \Phi_i(t) z(t) dt - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ij} \gamma_i \xi_j(x). \end{aligned}$$

Тобто

$$u(x) = \int_a^b R(x, t) z(t) dt - w(x), \quad (22)$$

$$R(x, t) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ij} \xi_j(x) \Phi_i(t), \quad (23)$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^m \sigma_j \xi_j(x), \sigma_j = \sum_{i=1}^m c_{ji} \gamma_i, j = \overline{1, m}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \eta_j(x) = u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} b_i \eta_j(x) = \\ &= u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \left( \int_a^b \Phi_i(t) z(t) dt - \gamma_i \right) \eta_j(x) = \\ &= u(x) + z(x) - \int_a^b \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \Phi_i(t) \eta_j(t) dt - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \gamma_i \eta_j(x) = \\ &= u(x) + b(x) + \int_a^b G(x, t) z(t) dt, \end{aligned}$$

$$G(x, t) = \delta(x - t) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \eta_j(x) \Phi_i(t), \quad (25)$$

$$b(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \gamma_i \eta_j(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_i \eta_j(x). \quad (26)$$

Таким чином, має місце наступна теорема.

**Теорема 2.** Єдиний розв'язок допоміжної задачі (17), (15) має вигляд

$$u(x) = \int_a^b R(x, t) z(t) dt - w(x), \quad y(x) = u(x) + b(x) + \int_a^b G(x, t) z(t) dt.$$

Задача (1)–(3) сумісна лише тоді, коли розв'язок  $z^*(x)$  рівняння

$$z(x) = g(x) + \int_a^b M(x, t) z(t) dt, \quad (27)$$

задовольняє умову

$$\int_a^b G(x, t) z^*(t) dt = w(x), \quad (28)$$

де

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) z(t) dt + \int_a^b H(x, t) b(h(t)) dt, \quad (29)$$

$$M(x, t) = \int_a^b K(x, \xi) G(\xi, t) d\xi + \int_a^b H(x, \xi) G(h(\xi), t) dt. \quad (30)$$

Можна також показати, що умова (28) буде рівносильною умові

$$\int_a^b \Gamma_j(t) z^*(t) dt = \sigma_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (31)$$

де

$$\Gamma_j(t) = \sum_{i=1}^m c_{ji} \Phi_i(t). \quad (32)$$

**Ітераційний метод.** Ідея ітераційного методу стосовно задачі (1)–(3) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на підставі формул

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x; t) y_{k-1}(t) dt + \int_a^b H(x; t) y_{k-1}(h(t)) dt, \quad x \in [a; b], \quad (33)$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x), \quad x \notin [a; b], \quad (34)$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))dt, x \in [a;b], \quad (35)$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \xi_j(x), x \in [a;b], u_k(x) = 0, x \notin [a;b], \quad (36)$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)y_k(x)dx = \gamma_i, i = \overline{1,m}, y_k(x) = \tilde{y}_k(x) - u_k(x). \quad (37)$$

Для визначення невідомих параметрів  $\lambda_j^k, j = \overline{1,m}$ , отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Дійсно, на підставі наведених вище формул матимемо

$$y_k(x) = z_k(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \eta_j(x). \quad (38)$$

Якщо підставити цю функцію в першу з формул (37) і скористатись позначенням (19), то отримаємо

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j^k = b^k, i = \overline{1,m}, \quad (39)$$

де

$$b_i^k = \int_a^b \Phi_i(x)z_k(x)dx - \gamma_i, i = \overline{1,m}. \quad (40)$$

Зокрема, приходимо до висновку, що має місце наступна теорема.

**Теорема 3.** Метод (33)–(37) буде збіжним, якщо матриця  $\Lambda$  не-вироджена, задача (1)–(3) сумісна і  $\rho(M) < 1$ , причому послідовність  $\{y_k(x)\}$  збігатиметься до єдиного розв'язку  $y^*(x)$  задачі (1)–(3), а послідовність  $\{u_k(x)\}$  збігатиметься до нуля.

**Колокаційно-ітеративний метод.** Послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (1)–(2) знаходимо на підставі формул:

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)(y_{k-1}(t) + w_k(t))dt + \int_a^b H(x;t)(y_{k-1}(h(t)) + w_k(h(t)))dt, x \in [a;b], \quad (41)$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x), x \notin [a;b], \quad (42)$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))dt, x \in [a;b], \quad (43)$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \xi_j(x), x \in [a, b], u_k(x) = 0, x \notin [a, b], \quad (44)$$

$$w_k(x) = \sum_{s=1}^n a_s^k \varphi_s(x), \quad (45)$$

де  $\{\varphi_s(x)\}_{s=1}^n$  — деяка задана та лінійно-незалежна на  $[a, b]$  система функцій. Для визначення невідомих параметрів  $\lambda_j^k$ , як і раніше, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, а невідомі коефіцієнти  $a_s^k$  у формулі (45) знаходимо з умови

$$w_k(x_i) = z_k(x_i) - z_{k-i}(x_i) = 0, \quad (46)$$

де  $x_i \in [a, b], i = \overline{1, n}$  — вузли колокації.

**Висновки.** Можна показати, що справедливим є наступне твердження.

**Теорема 4.** У випадку сумісності задачі (1)–(3) послідовні наближення  $\{\tilde{y}_k(x)\}$ , побудовані згідно методу (41)–(46), будуть при деякому  $n$  збігатися до точного розв'язку цієї задачі, причому швидкість збіжності зростатиме із збільшенням  $n$ . При  $w_k(x) \equiv 0$ , як частковий випадок, отримаємо ітеративний метод (33)–(40).

#### Список використаних джерел:

1. Вайникко Г. М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г. М. Вайникко // Дифер. уравнения. — 1965. — Вып. 1, № 2. — С. 244–254.
2. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1980. — 264 с.
3. Лучка А. Ю. Интегральные уравнения и методы их решения / А. Ю. Лучка // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — № 3. — С. 82–96.
4. Поселюжна В. Б. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь / В. Б. Поселюжна, Л. М. Семчишин. — Тернопіль : ТНЕУ, 2013. — 203 с.

#### THE CLOCATION-ITERATIVE METHOD OF SOLVING INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH RESTRICTIONS

Integro-functional equations are widely used in various fields of science and science (in particular, to such equations with a deviation of the argument as a neutral type and with a delay).

In some cases, solving these equations is known additional information. Therefore, it is important not only the solution of this equation but also the establishment of compatibility conditions of the corresponding

problem, that is, one needs to find out if the desired solution of the problem with the additional conditions is consistent.

A set of scientific papers is devoted to the establishment of compatibility conditions of problems of this type with respect to different types of operator equations and the development of methods for constructing their solutions [1–4].

The article deals with one type of integro-functional equation with condition and restrictions on the desired function, which are integral in nature. The terms of the compatibility of the original problem are formulated. With regard to the values included in the given task, it is required that they satisfy a number of necessary conditions. It is shown that under these conditions the initial problem will be equivalent to some Fredholm integral equation of a second kind with a completely continuous operator and additional conditions on the desired solution.

In addition to the main task also considered ancillary task — a task with management, when in the case of compatibility, an additional, adjusting value is introduced. The terms of compatibility of the original problem are formulated and substantiated.

In the paper, the iterative and collocation-iterative methods of constructing approximate solutions of the original problem with constraints are also presented and grounded. The algorithm of these methods and sufficient conditions of their convergence are indicated. At the same time, we use the fact that the initial problem in the fulfillment of certain conditions is equivalent to an integral equation with constraints. The presented methods of constructing approximate solutions of the integro-functional equation with additional conditions can be successfully implemented on the computer by creating the corresponding programs.

**Key words:** *approximate solution, additional conditions, restrictions, compatibility conditions, auxiliary problem, integro-functional equations, integral equation, iterative method, collocation-iterative method, inverse operator.*

Отримано: 22.11.2018



УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.65-77

**У. В. Гудима**, канд. фіз.-мат. наук,

**В. О. Гнатюк**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **СПІВВІДНОШЕННЯ ДВОЇСТОСТІ ТА КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ДВОМА ОПУКЛИМИ МНОЖИНАМИ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ**

В середині XIX століття П. Л. Чебишов ввів у математичну науку поняття найкращого у розумінні рівномірної норми наближення неперервної на сегменті дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує заданого натурального числа.

Згодом поняття найкращого наближення було перенесено на випадок загальних лінійних нормованих просторів. Виявилось, що низка задач найкращого наближення є частинними випадками задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яку ще називають задачею відшукування відстані від заданого елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору.

Важливими питаннями дослідження цієї задачі є питання встановлення співвідношення двоїстості та критерію екстремальності її елемента, конкретизація цього співвідношення та критерію на окремі частинні випадки та їх застосування.

Загальні співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукування відстані від заданої точки лінійного нормованого простору до його опуклої множини та їх конкретизації встановлено М. П. Корнейчуком та В. М. Тихомировим.

Важливою задачею, частинним випадком якої є задача найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, є задача відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору, яка розглядається у даній роботі.

У статті для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору встановлено співвідношення двоїстості, яке зводить розглядувану задачу до задачі на обчислення верхньої межі в спряженому до лінійного нормованого простору просторі.

Вищеназване співвідношення покладене в основу доведення критерію екстремальності елемента для розглядуваної задачі.

Отримані результати конкретизовано на окремі випадки, застосовано для встановлення відстані між двома кулями та між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

**Ключові слова:** лінійний нормований простір, опукла множина, відстань між множинами, співвідношення двоїстості, критерій екстремальності елемента.

**Вступ.** У статті встановлено співвідношення двоїстості та оснований на ньому критерій екстремальності елемента для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору. Отримані результати конкретизовано на окремі частинні випадки та використано при дослідженні задач відшукування відстані між двома кулями та відстані між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

**Постановка задачі.** Нехай  $X$  — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір елементів  $x$  з нормою  $\|x\|$ ,  $A$  та  $B$  — опуклі множини простору  $X$ .

Задачею відшукування відстані (найкращої) між множинами  $A$  та  $B$  будемо називати задачу відшукування величини

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \quad (1)$$

(див., наприклад, [1, с. 65]).

Якщо існує елемент  $(x^*, y^*) \in A \times B$  такий, що

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \|x^* - y^*\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

**Актуальність теми.** Загальновідомо, що визначальною ідеєю в питаннях зв'язків математики з практикою є ідея наближення.

Однією з центральних галузей теорії наближення є теорія наближення функцій.

Низка задач теорії наближення функцій (задачі наближення функцій за допомогою алгебраїчних, тригонометричних поліномів тощо) в метриках різних просторів є частинними випадками задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яка полягає в наступному.

Нехай  $X$  — лінійний нормований простір,  $x \in X$ ,  $B$  — опукла множина простору  $X$ .

Ставиться задача відшукування величини

$$E(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\|. \quad (2)$$

Якщо для  $x \in X$  існує елемент  $y^* \in B$  такий, що

$$E(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\| = \|x - y^*\|,$$

то його називають елементом найкращого наближення елемента  $x$  множиною  $B$  або екстремальним елементом для величини (2).

Величина (2) вивчалася багатьма авторами. Основні результати цих досліджень підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [2], В. К. Дзядика [3], М. П. Корнейчука [4], П.-Ж. Лорана [5], О. І. Степанця [6, 7], В. М. Тихомирова [8] та ін.

Зрозуміло, що задача відшукування величини (2) є частинним випадком задачі відшукування величини (1). Вона отримується з (1) при  $A = \{x\}$ , де  $x$  — фіксований елемент простору  $X$ .

Отже, задача відшукування величини (2) та її екстремального елемента, всі інші вищезгадані задачі вкладаються у схему постановки задачі (1).

Тому дослідження задачі (1) дозволить з єдиних позицій розглянути результати дослідження цих задач, а також використати отримані результати дослідження задачі (1) для дослідження інших задач, які вкладаються у схему її постановки.

Такими задачами є, зокрема, задача відшукування відстані між двома кулями, між кулею та гіперплощиною, між двома гіперплощинами лінійного нормованого простору та інші.

Тому проблема дослідження задачі відшукування величини (1) є актуальною.

Оскільки отримання низки результатів при дослідженні екстремальних задач базується на співвідношеннях двоїстості та критеріях екстремальності їх елементів, то встановлення цих співвідношень та критеріїв є пріоритетним.

**Мета роботи.** Встановити співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору, застосувати отримані результати для дослідження задач про відшукування відстані між двома кулями та між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

**Співвідношення двоїстості для задачі відшукування величини (1).** Будемо позначати далі через  $X^*$  — простір, спряжений з  $X$ , а через  $S^* = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$  — кулю простору  $X^*$  з центром у точці 0 радіуса 1.

**Теорема 1.** Нехай  $A$  та  $B$  є опуклими множинами лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору  $X$ . Тоді

$$E(A, B) = \max_{f \in S^*} \left( \inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) \right). \quad (3)$$

**Доведення.** Маємо, що

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \inf_{\substack{y \in B, \\ x \in A}} \|0 - (y - x)\| = \inf_{u \in B-A} \|0 - u\| = E(0, B - A). \quad (4)$$

Оскільки  $B - A$  є опуклою множиною простору  $X$ , то згідно з [4, с. 28]

$$\begin{aligned} E(0, B - A) &= \max_{f \in S^*} \left( f(0) - \sup_{u \in B-A} f(u) \right) = \max_{f \in S^*} \left( - \sup_{u \in B-A} f(u) \right) = \\ &= \max_{f \in S^*} \left( - \sup_{\substack{y \in B, \\ x \in A}} (f(y) - f(x)) \right) = \max_{f \in S^*} \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} (f(x) - f(y)) = \quad (5) \\ &= \max_{f \in S^*} \left( \inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) \right). \end{aligned}$$

Зі співвідношень (4), (5) випливає справедливність співвідношення (3).

**Теорему доведено.**

**Наслідок 1.** Якщо в задачі відшукування величини (1)  $A$  є опуклою множиною простору  $X$ , а  $B$  — опуклим конусом цього простору з вершиною в точці  $0$ , то має місце рівність

$$E(A, B) = \max_{f \in S^*} \left( \inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) \right) = \max_{\substack{f \in S^*, \\ f \in (-B^*)}} \inf_{x \in A} f(x),$$

де  $B^* = \{f \in X^* : f(y) \geq 0, y \in B\}$  — конус, спряжений з  $B$ .

**Доведення.** Дійсно, якщо  $f \in X^*$  і  $f \notin -B^* = (-B)^*$ , то  $(-f) \notin B^*$ . Тому існує елемент  $y_0 \in B$ , для якого  $(-f)(y_0) < 0$ , а  $f(y_0) > 0$ . Звідси випливає, що  $\sup_{t>0} f(ty_0) = \sup_{t>0} (tf(y_0)) = +\infty$ . Оскільки  $ty_0 \in B$ ,  $t > 0$ , то

$$\sup_{y \in B} f(y) \geq \sup_{t>0} (f(ty_0)) = +\infty.$$

Тоді

$$\inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) = -\infty.$$

Це означає, що при обчисленні верхньої межі по  $f$  у співвідношенні (3) можна брати лише ті функціонали  $f$  із  $S^*$ , які одночасно належать до  $-B^*$ .

Але ж для цих функціоналів  $\sup_{y \in B} f(y) = 0$ . Тому в розглядуваному випадку

$$E(A, B) = \max_{f \in S^*} \left( \inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) \right) = \max_{\substack{f \in S^*, \\ f \in (-B^*)}} \inf_{x \in A} f(x).$$

**Наслідок доведено.**

**Наслідок 2.** Якщо в задачі відшукування величини (1)  $A$  є опуклим конусом з вершиною в точці  $0$ , а  $B$  — довільною опуклою множиною, то має місце рівність

$$E(A, B) = \max_{f \in S^*} \left( \inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) \right) = \max_{f \in A^*} \left( -\sup_{y \in B} f(y) \right),$$

де  $A^* = \{f \in X^* : f(x) \geq 0, x \in A\}$  — конус, спряжений з  $A$ .

**Наслідок 3.** Якщо в задачі відшукування величини (1)  $A$  є опуклою множиною, а  $B$  — підпростором простору  $X$ , то має місце рівність

$$E(A, B) = \max_{\substack{f \in S^*, x \in A \\ f \in B^\perp}} f(x),$$

де  $B^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0, y \in B\}$  — анулятор підпростору  $B$ .

**Наслідок 4.** Якщо в задачі відшукування величини (1)  $A$  є підпростором простору  $X$ , а  $B$  — опуклою множиною цього простору, то має місце рівність

$$E(A, B) = \max_{\substack{f \in S^*, \\ f \in A^\perp}} \left( -\sup_{y \in B} f(y) \right),$$

де  $A^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0, x \in A\}$  — анулятор підпростору  $A$ .

**Задача відшукування відстані між двома кулями лінійного нормованого простору.**

**Теорема 2.** Якщо  $A = \{x \in X : \|x - a\| \leq r_1\}$  — куля простору  $X$  з центром у точці  $a$  радіуса  $r_1$ , а  $B = \{y \in X : \|y - b\| \leq r_2\}$  — куля простору  $X$  з центром у точці  $b$  радіуса  $r_2$ , то

$$E(A, B) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \|a - b\| \leq r_1 + r_2, \\ \|a - b\| - (r_1 + r_2), & \text{якщо } \|a - b\| > r_1 + r_2. \end{cases}$$

**Доведення.** Оскільки  $A = \{x \in X : x = a + z, \|z\| \leq r_1\}$ , а  $B = \{y \in X : y = b + u, \|u\| \leq r_2\}$ , то згідно із співвідношенням двоїстості (3) в розглядуваному випадку

$$\begin{aligned}
 E(A, B) &= \max_{f \in S^*} \left( \inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) \right) = \\
 &= \max_{f \in S^*} \left( \inf_{\|z\| \leq r_1} f(a+z) - \sup_{\|u\| \leq r_2} f(b+u) \right) = \\
 &= \max_{f \in S^*} \left( f(a-b) + \inf_{\|z\| \leq r_1} f(z) - \sup_{\|u\| \leq r_2} f(u) \right) = \quad (6) \\
 &= \max_{f \in S^*} \left( f(a-b) - r_1 \sup_{\left\| \frac{z}{r_1} \right\| \leq 1} f\left( -\frac{z}{r_1} \right) - r_2 \sup_{\left\| \frac{u}{r_2} \right\| \leq 1} f\left( \frac{u}{r_2} \right) \right) = \\
 &= \max_{f \in S^*} (f(a-b) - (r_1 + r_2) \|f\|) = \\
 &= f^*(a-b) - (r_1 + r_2) \|f^*\| \geq 0,
 \end{aligned}$$

де  $f^* \in S^*$  ( $\|f^*\| \leq 1$ ).

Зі співвідношення (6) дістаємо нерівність

$$0 \leq E(A, B) = f^*(a-b) - (r_1 + r_2) \|f^*\| \leq \|f^*\| (\|a-b\| - (r_1 + r_2)). \quad (7)$$

Зрозуміло, що з нерівності (7) випливає рівність  $E(A, B) = 0$ , якщо  $\|a-b\| \leq r_1 + r_2$ , оскільки в цьому випадку  $\|f^*\| (\|a-b\| - (r_1 + r_2)) \leq 0$ .

Якщо ж  $\|a-b\| > r_1 + r_2$ , то існує функціонал  $\bar{f} \in X^*$  такий, що  $\|\bar{f}\| = 1$  і  $\bar{f}(a-b) = \|a-b\|$ . Тоді  $\bar{f} \in S^*$  та  $\bar{f}(a-b) - (r_1 + r_2) \|\bar{f}\| > 0$ .

Внаслідок цього та співвідношень (6), (7) можемо записати, що

$$\begin{aligned}
 0 \leq \bar{f}(a-b) - (r_1 + r_2) \|\bar{f}\| &= \|a-b\| - (r_1 + r_2) \leq \\
 &\leq E(A, B) \leq \|a-b\| - (r_1 + r_2).
 \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $E(A, B) = \|a-b\| - (r_1 + r_2)$ .

Отже,  $E(A, B) = 0$ , якщо  $\|a-b\| \leq r_1 + r_2$ , та  $E(A, B) = \|a-b\| - (r_1 + r_2)$ , якщо  $\|a-b\| > r_1 + r_2$ .

**Теорему доведено.**

Зауважимо, що без доведення у праці [9, с. 111] зазначено, що справедлива рівність

$$E(A, B) = \max \{0, \|a_1 - a_2\| - (r_1 + r_2)\}.$$

**Задача відшукування відстані між кулею та гіперплощиною лінійного нормованого простору.**

**Теорема 3.** Якщо  $A = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}$  — куля простору  $X$  з центром у точці  $a$  радіуса  $r$ , а  $B = \{y \in X : \varphi(y) = c\}$ , де  $\varphi \in X^*$ ,  $\varphi \neq 0$ ,  $c \in R$ , — замкнена гіперплощина простору  $X$ , то має місце рівність

$$E(A, B) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } A \cap B \neq \emptyset, \\ \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r, & \text{якщо } A \cap B = \emptyset. \end{cases}$$

**Доведення.** Оскільки  $A = \{x \in X : x = a + z, \|z\| \leq r\}$ , то

$$\begin{aligned} E(A, B) &= \max_{f \in S^*} \left( \inf_{x \in A} f(x) - \sup_{y \in B} f(y) \right) = \\ &= \max_{f \in S^*} \left( f(a) + \inf_{\|z\| \leq r} f(z) - \sup_{y \in B} f(y) \right) = \\ &= \max_{f \in S^*} \left( f(a) - r \|f\| - \sup_{y \in B} f(y) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Нехай  $y_0 \in X$  та  $\varphi(y_0) = c$ . Тоді

$$\begin{aligned} B &= \{y \in X : \varphi(y) = \varphi(y_0)\} = \{y \in X : \varphi(y - y_0) = 0\} = \\ &= \{y \in X : y = y_0 + z, \varphi(z) = 0\}. \end{aligned}$$

Тому для  $f \in X^*$

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B} f(y) &= \sup \{f(y) : y = y_0 + z, \varphi(z) = 0\} = \\ &= f(y_0) + \sup \{f(z) : \varphi(z) = 0\}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що коли існує  $z_0$  таке, що  $\varphi(z_0) = 0$ , а  $f(z_0) \neq 0$ , то  $\sup \{f(z) : \varphi(z) = 0\} = +\infty$ .

Якщо ж  $f(z) = 0$  для всіх  $z : \varphi(z) = 0$ , то в цьому випадку  $\sup \{f(z) : \varphi(z) = 0\} = 0$  та існує число  $\lambda$  таке, що  $f = \lambda\varphi$  (див., наприклад, [5, с. 44]).

Навпаки, якщо  $f = \lambda\varphi$ , де  $\lambda \in R$ , то  $\sup \{f(z) : \varphi(z) = 0\} = 0$ .

Позначимо через  $P = \{f \in X^* : f = \lambda\varphi, \lambda \in R\}$ .

З наведених вище міркувань випливає, що для  $f \in X^*$

$$\sup_{y \in B} f(y) = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } f \notin P, \\ f(y_0), & \text{якщо } f \in P. \end{cases}$$

Внаслідок цього та рівності (8) одержимо, що в розглядуваному випадку

$$\begin{aligned} 0 \leq E(A, B) &= \max \{ \lambda \varphi(a) - r |\lambda| \|\varphi\| - \lambda \varphi(y_0) : |\lambda| \|\varphi\| \leq 1 \} = \\ &= \max \left\{ \lambda (\varphi(a) - c) - r |\lambda| \|\varphi\| : |\lambda| \leq \frac{1}{\|\varphi\|} \right\} = \\ &= \lambda^* (\varphi(a) - c) - r |\lambda^*| \|\varphi\|, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $|\lambda^*| \leq \frac{1}{\|\varphi\|}$ .

Припустимо, що існує точка  $y_0 \in A \cap B$ , тобто  $\varphi(y_0) = c$  та  $\|y_0 - a\| \leq r$ . З урахуванням (9) в цьому випадку одержимо, що

$$0 \leq E(A, B) = \lambda^* \varphi(a - y_0) - r \|\lambda^* \varphi\| \leq \|\lambda^* \varphi\| (\|a - y_0\| - r) \leq 0.$$

Звідси випливає, що  $E(A, B) = 0$ , якщо  $A \cap B \neq \emptyset$ . Припустимо тепер, що  $A \cap B = \emptyset$ . Це означає, що  $\varphi(x) \neq c$  для всіх  $x \in A$ . Оскільки  $A$  є опуклою множиною, то  $\varphi(x) > c$  для всіх  $x \in A$  або  $\varphi(x) < c$  для всіх  $x \in A$ . Припустимо, що  $\varphi(x) > c$ ,  $x \in A$ . Звідси випливає, що

$$\varphi(a + z) = \varphi(a) + \varphi(z) > c, \quad z \in \{z \in X : \|z\| \leq r\}.$$

Тому

$$\inf_{\|z\| \leq r} \varphi(z) = -r \|\varphi\| \geq c - \varphi(a), \quad \text{а } \varphi(a) - c - r \|\varphi\| \geq 0.$$

З урахуванням цього одержимо, що  $\varphi(a) - c > 0$  і

$$\begin{aligned} &\frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r = \max_{|\lambda| \leq \frac{1}{\|\varphi\|}} (|\varphi(a) - c| - r \|\varphi\|) |\lambda| \geq \\ &\geq \max_{|\lambda| \leq \frac{1}{\|\varphi\|}} ((\varphi(a) - c) \lambda - |\lambda| r \|\varphi\|) \geq \max_{0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\|\varphi\|}} (\varphi(a) - c - r \|\varphi\|) \lambda = \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r. \end{aligned}$$

Тому у випадку, коли  $A \cap B = \emptyset$  та  $\varphi(x) > c$ ,  $x \in A$ , маємо, що

$$E(A, B) = \max_{|\lambda| \leq \frac{1}{\|\varphi\|}} ((\varphi(a) - c) \lambda - |\lambda| r \|\varphi\|) = \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r.$$



Нехай  $A \cap B = \emptyset$  та  $\varphi(x) < c, x \in A$ . Звідси випливає, що  $\varphi(a) + \varphi(z) < c, \|z\| \leq r; \varphi(a) + r\|\varphi\| \leq c, \varphi(a) - c \leq -r\|\varphi\|$ .

Тому  $\varphi(a) - c < 0, \varphi(a) - c + r\|\varphi\| \leq 0$ ,

$$c - \varphi(a) - r\|\varphi\| = |\varphi(a) - c| - r\|\varphi\| \geq 0$$

З урахуванням цього одержимо, що

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r &= \max_{|\lambda| \leq \frac{1}{\|\varphi\|}} (|\varphi(a) - c| - r\|\varphi\|)|\lambda| \geq \\ &\geq \max_{|\lambda| \leq \frac{1}{\|\varphi\|}} ((\varphi(a) - c)\lambda - |\lambda|r\|\varphi\|) \geq \max_{-\frac{1}{\|\varphi\|} \leq \lambda \leq 0} (\varphi(a) - c + r\|\varphi\|)\lambda = \\ &= \frac{-(\varphi(a) - c)}{\|\varphi\|} - r = \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $E(A, B) = \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r$  і у випадку, коли  $A \cap B = \emptyset$  та  $\varphi(x) < c, x \in A$ .

Отже, якщо  $A \cap B = \emptyset$ , то  $E(A, B) = \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r$ . Вище було встановлено, що  $E(A, B) = 0$ , якщо  $A \cap B \neq \emptyset$ .

**Теорему доведено.**

**Критерій екстремальності елемента для задачі відшукування величини (1).**

**Теорема 4.** Нехай  $X$  — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір,  $A, B$  — опуклі множини цього простору. Для того щоб елемент  $(x^*, y^*) \in A \times B$  був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо існування функціонала  $f^* \in X^*$  з такими властивостями:

- 1)  $\|f^*\| \leq 1$  ( $f^* \in S^*$ ),
- 2)  $f^*(x^* - y^*) = \|x^* - y^*\|$ ,
- 3)  $f^*(x^*) = \inf_{x \in A} f^*(x)$ ,
- 4)  $f^*(y^*) = \sup_{y \in B} f^*(y)$ .

**Доведення.** Нехай елемент  $(x^*, y^*) \in A \times B$  є екстремальним елементом для величини (1). Отже,

$$\|x^* - y^*\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\|. \quad (10)$$

Позначимо через  $f^*$  функціонал простору  $X^*$ , який реалізує точну верхню межу у співвідношенні двоїстості (3).

Тоді  $\|f^*\| \leq 1$  ( $f^* \in S^*$ ) і

$$\|x^* - y^*\| = \inf_{x \in A} f^*(x) - \sup_{y \in B} f^*(y). \quad (11)$$

Оскільки  $x^* \in A$ ,  $y^* \in B$ , то

$$\inf_{x \in A} f^*(x) \leq f^*(x^*), \quad \sup_{y \in B} f^*(y) \geq f^*(y^*).$$

З урахуванням (10), (11) звідси одержимо, що

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\| &\geq \|f^*\| \|x^* - y^*\| \geq f^*(x^* - y^*) = f^*(x^*) - f^*(y^*) \geq \\ &\geq \inf_{x \in A} f^*(x) - \sup_{y \in B} f^*(y) = \|x^* - y^*\|. \end{aligned}$$

Тому

$$f^*(x^* - y^*) = \|x^* - y^*\| \quad \text{та} \quad f^*(x^*) = \inf_{x \in A} f^*(x), \quad f^*(y^*) = \sup_{y \in B} f^*(y).$$

Отже, якщо  $(x^*, y^*)$  є екстремальним елементом для величини (1), то існує функціонал  $f^* \in X^*$ , який задовольняє умовам 1)–4).

Необхідність доведено.

*Достатність.* Нехай для елемента  $(x^*, y^*) \in A \times B$  існує функціонал  $f^* \in X^*$ , який задовольняє умовам 1)–4). Переконаємося, що  $(x^*, y^*)$  є екстремальним елементом для величини (1). З урахуванням 1)–4) для будь-яких  $x \in A$ ,  $y \in B$  будемо мати, що

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\| &= f^*(x^* - y^*) = f^*(x^*) - f^*(y^*) = \inf_{x \in A} f^*(x) - \sup_{y \in B} f^*(y) \leq \\ &\leq f^*(x) - f^*(y) = f^*(x - y) \leq \|f^*\| \|x - y\| \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Це й означає, що  $(x^*, y^*)$  є екстремальним елементом для величини (1).

Достатність доведено.

**Теорему доведено.**

**Наслідок 5.** Нехай в задачі відшукування величини (1)  $A$  є опуклою множиною, а  $B$  є опуклим конусом з вершиною в точці  $0$ . Для того щоб елемент  $(x^*, y^*)$  був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала  $f^* \in X^*$  такого, що

- 1)  $\|f^*\| \leq 1$  ( $f^* \in S^*$ ),
- 2)  $f^*(x^* - y^*) = \|x^* - y^*\|$ ,
- 3)  $f^*(x^*) = \inf_{x \in A} f^*(x)$ ,
- 4)  $f^*(y^*) = \sup_{y \in B} f^*(y) = 0$ .

**Доведення.** Необхідність. Нехай  $(x^*, y^*)$  є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 4 існує функціонал  $f^* \in X^*$ , який задовольняє умовам 1)–3) теореми та для якого

$$f^*(y^*) = \sup_{y \in B} f^*(y). \quad (12)$$

З урахування рівності (12) і того, що  $B$  є конусом з вершиною в точці  $0$ , робимо висновок, що  $f^*(y) \leq 0$ ,  $y \in B$ , а

$$f^*(y^*) = \sup_{y \in B} f^*(y) = 0.$$

Необхідність доведено.

Достатність умов наслідку для екстремальності елемента  $(x^*, y^*)$  безпосередньо випливає з умов 1)–4) та теореми 4.

**Наслідок 6.** Нехай в задачі відшукування величини (1)  $A$  є опуклим конусом з вершиною в точці  $0$ , а  $B$  є опуклою множиною. Для того щоб елемент  $(x^*, y^*)$  був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала  $f^* \in X^*$  такого, що

- 1)  $\|f^*\| \leq 1$  ( $f^* \in S^*$ ),
- 2)  $f^*(x^* - y^*) = \|x^* - y^*\|$ ,
- 3)  $f^*(x^*) = \inf_{x \in A} f^*(x) = 0$ ,

$$4) f^*(y^*) = \sup_{y \in B} f^*(y).$$

**Наслідок 7.** Нехай в задачі відшукування величини (1)  $A$  є опуклою множиною, а  $B$  є підпростором простору  $X$ . Для того щоб елемент  $(x^*, y^*)$  був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала  $f^* \in X^*$  такого, що

- 1)  $\|f^*\| \leq 1$  ( $f^* \in S^*$ ),
- 2)  $f^*(x^* - y^*) = \|x^* - y^*\|$ ,
- 3)  $f^*(x^*) = \inf_{x \in A} f^*(x)$ ,
- 4)  $f^*(y) = 0$ ,  $y \in B$ .

**Наслідок 8.** Нехай в задачі відшукування величини (1)  $A$  є підпростором простору  $X$ , а  $B$  є опуклою множиною. Для того щоб елемент  $(x^*, y^*) \in A \times B$  був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала  $f^* \in X^*$  такого, що

- 1)  $\|f^*\| \leq 1$  ( $f^* \in S^*$ ),
- 2)  $f^*(x^* - y^*) = \|x^* - y^*\|$ ,
- 3)  $f^*(x) = 0$ ,  $x \in A$ ,
- 4)  $f^*(y^*) = \sup_{y \in B} f^*(y)$ .

**Висновки.** Для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору встановлено співвідношення двійності та критерії екстремальності елемента, отримані результати використано для дослідження задач про відшукування відстані між двома кулями та між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

#### Список використаних джерел:

1. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 544 с.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 510 с.

4. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
6. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
7. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 468 с.
8. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.
9. Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу : учебное пособие / А.В. Арутюнов. — М. : Физматлит, 2014. — 184 с.

### **THE RELATION OF DUALITY AND THE CRITERION OF THE EXTREMALITY OF AN ELEMENT FOR THE PROBLEM OF FINDING THE DISTANCE BETWEEN TWO CONVEX SETS OF LINEAR NORMED SPACE**

P. L. Chebyshev started the conception of the best approximation of a continuous function on a segment using algebraic polynomials of some order at the middle of the XIX century.

Later, the notion of the best approximation was considered for the case of general linear normed spaces. Over time, it became clear that a many tasks of best approximation are partial consequence of the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set. This task is called the problem of finding the distance from the given element of the linear normed space to the convex plurality of this space as well. Important questions of the study of this problem are the establishment of the relation of duality and the criterion of the extremality of its element, the specification of this relation and the criterion for some partial cases and their application.

M. P. Korniiichuk and V. M. Tikhomirov established the general relation of duality and criterion of the extremality of an element for the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set based on the dual interrelation.

An important problem, the partial case of which is the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set of this space, is the problem of finding the distance between two convex sets of linear normed space, which is considered in this paper. In the article establishes the relation of duality for this problem, which reduces this problem to the problem of evaluating the upper bound in the conjugate space. The obtained relation is used to obtain the criterion of the extremality of an element. These results are used to find the distance between two bullets and between the bullet and the hyperplane of the linear normed space.

**Key words:** *the linear normed space, the convex set, the distance between sets, the relation of duality, the criterion of the extremality of an element.*

Отримано: 14.11.2018

УДК 004.94

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.78-85

**В. А. Іванюк\***, канд. техн. наук,**Н. Л. Костьян\*\***, канд. техн. наук

\* Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

\*\* Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

## ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ОБ'ЄКТІВ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У статті розглянуто метод отримання одновимірних інтегральних динамічних моделей систем із розподіленими параметрами в інтегральній формі на основі застосування диференціальних рівнянь з дробовими похідними, які отримуються шляхом перетворень ірраціональних передатних функцій. Такі передатні функції зустрічаються при описі задач теплопровідності, дифузії, коливальних процесів та інших задач, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними параболічного та гіперболічного типу. Типовими прикладами можуть бути передатні функції, які описують напівінтегральну або напівінерційну ланки, в яких змінна Лапласа знаходиться під коренем. Отримана задача Коші для звичайного диференціального рівняння з дробовими похідними подається у формі інтегрального рівняння Вольтерри II роду типу згортки. Застосування даного підходу розглянуто при розв'язанні різних диференціальних рівнянь: звичайного диференціального рівняння порядку  $0 < \alpha < 1$ , звичайного диференціального рівняння дробового порядку  $\alpha > 1$ , диференціального рівняння  $n$ -го порядку із дробовими похідними. Розв'язування останнього рівняння здійснюється на основі складання характеристичного рівняння, що призводить до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь порядку  $\alpha$ . Важливим прикладом є також розглянутий підхід до розв'язування системи диференціальних рівнянь із дробовими похідними. Завдяки переходу до еквівалентних інтегральних рівнянь розглянута задача може розв'язуватись різними наближеними методами, які будуються на основі квадратурних методів із застосуванням апроксимаційних моделей поліноміальної форми, зокрема, поліномів Чебишева. Запропонований підхід дозволяє будувати одновимірні інтегральні динамічні моделі систем взаємопов'язаних об'єктів із розподіленими параметрами, які можуть забезпечити високу точність та стійкість розв'язку.

**Ключові слова:** *об'єкти із розподіленими параметрами, диференціальні рівняння із дробовими похідними, інтегральне рівняння Вольтерри II роду.*

**Вступ.** Одним з поширених методів отримання одновимірних математичних моделей у вигляді передатних функцій, що описують лінійні об'єкти з розподіленими параметрами, є застосування перетворення Лапласа до вихідних диференціальних рівнянь з частинними похідними [4]. Для деяких класів об'єктів передатні функції містять дробові показники змінної  $p$  [5]. Прикладом є передатна функція від-

різка довгої лінії виду  $W(p) = \frac{a}{\sqrt{p+b}}$  ( $a, b$  — сталі). При моделю-

ванні скалярних об'єктів в часовій області достатньо знайти і реалізувати відповідний даній передатній функції інтегральний оператор. Однак такий підхід значно ускладнюється при дослідженні системи взаємопов'язаних об'єктів з розподіленими параметрами. У цьому випадку доцільно кожному елементу системи поставити у відповідність звичайне диференціальне рівняння з дробовими похідними, що отримується з його передатної функції [1]. Наприклад, для зазначеної вище передатної функції відповідне рівняння має вигляд:

$$u^{(\frac{1}{2})}(t) + bu(t) = af(t),$$

де  $u(t)$  — вихідний сигнал;  $f(t)$  — вхідний вплив об'єкта.

Таким чином, розгляду підлягатимуть одновимірні динамічні моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними або їх системи.

**Основна частина.** Розглянемо необхідні визначення. Оператором інтегрування дробового порядку  $\alpha > 0$  називається оператор виду

$$I_\alpha f(t) = (i_\alpha * f)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

де  $i_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ,  $f(t)$  — довільна неперервна функція. Інтеграл, що стоїть в правій частині (1), називається інтегралом Рімана-Ліувілля порядку  $\alpha$  [2].

Оператор диференціювання дробового порядку  $0 < \alpha < 1$  для будь-якої неперервної диференційованої функції  $\psi(t)$  визначається як оператор, обернений до оператора (1). Зокрема, він може бути записаний у формі дробової похідної Маршо в наступному вигляді [2]:

$$(D_\alpha \psi)(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left\{ \frac{\psi(t) - \psi(t-\tau)}{\tau^{1+\alpha}} \right\} d\tau. \quad (2)$$

Оператор диференціювання дробового порядку  $m < \alpha < m+1$ ,  $m \in N$ , для функції  $\psi \in C^{(k)}$ ,  $k \geq m$ , може бути визначений у вигляді суперпозиції [2]:

$$D_\alpha \psi = D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} \dots D_{\alpha_k} \psi, 0 < \alpha \leq 1, j = \overline{1, k}, \sum_{j=1}^k \alpha_j = \alpha,$$

де  $D_\alpha$  визначається за формулою (2), а при  $\alpha_j = 1$  — це звичайний оператор взяття першої похідної. Очевидно, що таке визначення оператора  $D_\alpha$  неоднозначне та істотно залежить від способу розбиття числа  $\alpha$  на складові  $\alpha_j, j = \overline{1, k}$ . Тому позначимо  $D_\alpha = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  і під  $\alpha$  маємо на увазі вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ . Суму ж  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  позначаємо  $|\alpha|$ .

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння з дробовими похідними виду:

$$\left[ \left( \sum_{m=1}^n a_m D_{\alpha_m} + a_0 \right) u \right] (t) = f(t), a_n = 1, \alpha_m = (r_m, 1, 1, \dots, 1), t \in [0, T], (3)$$

$$0 < r_m \leq 1, m = \overline{1, n}, |\alpha_n| > |\alpha_{n-1}| > \dots > |\alpha_1| > |\alpha_0| = 0, u^{(j)}(0) = u_j, j = \overline{0, k_n}.$$

Застосовуючи до рівняння (3) оператор Рімана-Ліувілья порядку  $|\alpha_n|$ , отримуємо інтегральне рівняння Вольтера II роду типу згортки:

$$u(t) + \int_0^t \sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{(t-\tau)^{|\alpha_n| - |\alpha_m| - 1}}{\Gamma(|\alpha_n| - |\alpha_m|)} u(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \frac{(t-\tau)^{|\alpha_n| - 1}}{\Gamma(|\alpha_n|)} d\tau + \sum_{j=0}^n u_j \frac{t^j}{j!} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sum_{j=1}^{k_m} u_j \frac{t^j + |\alpha_n| - |\alpha_m| - 1}{\Gamma(j + |\alpha_n| - |\alpha_m|)}. (4)$$

Записавши (4) в операторному вигляді, отримуємо

$$u + \gamma * u = \varphi,$$

де

$$\gamma = \sum_{m=0}^{n-1} a_m i_{|\alpha_n| - |\alpha_m|}, \varphi = f * i_{|\alpha_n|} + \sum_{j=0}^n u_j i_{j+1} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sum_{j=0}^{k_m} u_j i_{j + |\alpha_n| - |\alpha_m|}.$$

Для розв'язання рівняння (4) можуть бути застосовані відомі чисельні методи [3].

Розглянемо деякі найпростіші випадки [1, 2].

1. Задача Коші для рівняння

$$(D_\alpha - a)u(t) = f(t), 0 < \alpha < 1, t \in [0, T], u(0) = u_0. (5)$$

Звівши (5), як зазначено вище, до інтегрального рівняння, знайдемо його резольвенту

$$R(t) = \frac{d}{dt} E_{\frac{1}{\alpha}}(at^\alpha), (6)$$



де  $E_{\frac{1}{\alpha}}(W)$  — ціла функція Мітгаг-Леффлера, що визначається рядом [2]

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(W) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{W^m}{\Gamma(m\alpha + 1)}.$$

Тоді для розв'язання задачі (5) отримаємо формулу

$$u = u_0 + i_{\alpha} * f + R * [u_0 + i_{\alpha} * f],$$

або детальніше:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau + \int_0^t R(\tau) \left[ u_0 + \int_t^{t_0} f(s) \frac{(t-\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right] d\tau.$$

2. Задача Коші для рівняння

$$(D_{\alpha} - a)u(t) = f(t), \quad t \in [0, T],$$

де  $\alpha = (\underbrace{\alpha, 1, \dots, 1}_{m \text{ раз, } m > 0})$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,

$$u^{(j)}(0) = u_j, \quad j = \overline{0, m}.$$

Провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$u = u_0 R + u_1 R * i_1 + \dots + u_m R * i_m + R * f * i_{|\alpha| - 1},$$

тобто

$$u(t) = u_0 R(t) + u_1 \int_0^t R(\tau) d\tau + \dots + u_m \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} R(\tau) d\tau + \int_0^t R(t-\tau) \int_0^{\tau} f(s) \frac{(\tau-s)^{|\alpha|-2}}{\Gamma(|\alpha|-1)} ds d\tau,$$

де  $R$  визначається за формулою (6).

3. Задача Коші для рівняння

$$\left[ D_{n_{\alpha}} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k D_{k_{\alpha}} + a_0 \right] u(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

де

$$k_{\alpha} = (\underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_{k \text{ раз}}), \quad 0 < \alpha < 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad D_{j_{\alpha}} u(0) = u_j, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Щоб розв'язати (7), складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

і знайдемо всі його корені  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in C$ . Тоді оператор в лівій частині (7) перетвориться до виду

$$D_{n_a} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k D_{k_a} + a_0 = \prod_{m=1}^n (D_{\alpha} - \lambda_m).$$

Після цього розв'язок рівняння (7) зведеться до послідовного розв'язування рівнянь виду (5).

Тими ж засобами можна досліджувати і системи звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними. Розглянемо систему виду

$$(D_{\alpha_k} u_k)(t) + \sum_{i=1}^n a_{ki} u_i(t) = f_k(t), \quad 0 < \alpha_k < 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

або коротко

$$D_{[\alpha]} u - Au = f,$$

де

$$D_{[\alpha]} = \begin{pmatrix} D_{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

$$A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^n, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Будемо шукати розв'язок (8), який задовольняє початкові умови

$$u(0) = u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)^T.$$

Застосувавши до (8) оператор

$$I_{[\alpha]} = \begin{pmatrix} I_{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$u - I_{[\alpha]} Au = I_{[\alpha]} f + u^0. \quad (9)$$

Як бачимо остання рівність є системою лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду типу згортки

$$u_k(t) - \int_0^t i_{\alpha_k}(t-\tau) \sum_{i=1}^n a_{ki} u_i(\tau) d\tau = \int_0^t i_{\alpha_k}(t-\tau) f_k(\tau) d\tau + u_k^0, \quad k = \overline{1, n},$$

або більш детально

$$u_k(t) - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \sum_{i=1}^n a_{ki} u_i(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_k(\tau) d\tau + u_k^0, \quad k = \overline{1, n}$$

У випадку, коли  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ , можна побудувати резольвенту системи (9)

$$R(t) = \frac{d}{dt} E_{\frac{1}{\alpha}} (At^\alpha).$$

Розв'язок системи (9) при цьому запишеться у вигляді

$$u = I_{[\alpha]} f + u^0 + [I_{[\alpha]} f + u^0] * R,$$

або

$$u(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma([\alpha])} d\tau + u^0 + \int_0^t R(t-\tau) \left[ \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma([\alpha])} f(s) ds + u^0 \right] d\tau.$$

Розглянемо тепер узагальнюючу (7) задачу Коші:

$$D_{n_\alpha} u(t) + \sum_{k=1}^{n-1} (D_{k_\alpha} a_k u)(t) + a_0(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$(D_{i_\alpha} u)(0) = u_j, \quad j = \overline{0, n-1},$$

в припущенні, що  $a_k(t)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , і  $f(t)$  — поліноми за степенями  $t^\alpha$ . Зведемо (10) до еквівалентного інтегрального рівняння шляхом послідовного застосування оператора  $I_\alpha$ :

$$u(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)ds = F(t), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} K(t,s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-s)^{(n-k)\alpha-1}}{\Gamma((n-k)\alpha)} a_k(s), \\ F(t) &= \int_t^{t_0} \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} f(s) ds + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t \frac{(t-s)^{(n-k)\alpha-1}}{\Gamma((n-k)\alpha)} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(D_{m\alpha} a_k u)(0)}{\Gamma(m\alpha+1)} s^{m\alpha} ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Значення  $(D_{m\alpha} a_k u)(0)$  в (12) можуть бути визначені через початкові значення  $u_j$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ . Дійсно,

$$a_k(t) = \sum_{j=0}^k C_j^{(k)} t^{j\alpha}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

тоді

$$(D_{m\alpha} a_k u)(0) = \sum_{j=0}^{\min\{k,m\}} C_j^{(k)} \frac{y_{m-j} \Gamma(m_\alpha + 1)}{\Gamma((m-j)\alpha + 1)}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad m = \overline{0, n-2}.$$

Завдяки переходу до еквівалентних інтегральних рівнянь до розглянутої задачі можуть застосовуватись різні наближені методи. Згідно схеми [3] апроксимаційного методу розв'язок (11) шукаємо у вигляді

$$u_N(t) = \sum_{i=0}^N \gamma_i t^{i\alpha},$$

а рівняння (11) замінимо наближеним рівнянням

$$u_N(t) + \int_0^t K(t,s)u_N(s)ds = F(t) - \sum_{j=N+1}^{N+M} \tau_j P_j(t^\alpha), \quad (13)$$

де  $\gamma_j, j = \overline{0, N}$  — невизначені коефіцієнти;  $P_j(t^\alpha), j = \overline{N+1, N+M}$  — деякі фіксовані алгебраїчні многочлени степеня  $j$ ;  $\tau_j, j = \overline{N+1, N+M}$  — невизначені коефіцієнти;  $M$  — параметр, який  $\geq n$ .

Замінивши в (13) інтеграл квадратурною сумою і прирівнюючи в обох частинах коефіцієнти при однакових степенях  $t$ , отримуємо для невідомих  $\gamma_i, i = \overline{0, N}$  і  $\tau_i, j = \overline{N+1, N+M}$  систему, яка містить  $N+M+1$  лінійних рівнянь.

Якщо в якості  $P_j(s), j = \overline{N+1, N+M}$ , вибрати змішані многочлени Чебишева  $T_j(s) = \cos j \arccos(2s-1)$ , які найменше відмінні від нуля на відрізку  $[0,1]$ , то можна розраховувати на високу точність наближення.

**Висновки.** Запропонований підхід дозволяє будувати одновимірні інтегральні динамічні моделі систем із розподіленими параметрами та на їх основі обчислювальні алгоритми, які можуть забезпечити високу точність та стійкість розв'язків.

### Список використаних джерел:

1. Miller K. S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K. S. Miller, B. Ross. — New York : John Wiley and Sons, 1993. — 366 p.
2. Samko S.G. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — Gordon and Breach Science Publishers, 1993. — 976 p.
3. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 544 с.
4. Верлань А. Ф. Комп'ютерне моделювання в задачах динаміки електромеханічних систем / А. Ф. Верлань, В. А. Федорчук, В. А. Іванюк. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — 204 с.

5. Іванюк В. А. Інтегральні моделі ірраціональних та трансцендентних ланок / В. А. Іванюк, В. О. Тихоход, С. О. Протасов // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 101–109.

## AN INTEGRAL METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE MODELING OF OBJECTS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

The article deals with the method of obtaining one-dimensional integral dynamic models of systems with distributed parameters in the integral form on the basis of applying the differential equations with fractional derivatives obtained by transformations of irrational transfer functions. Such transfer functions occur in the description of the problems of heat conductivity, diffusion, oscillatory processes and other problems, which are described by differential equations with partial derivatives of a parabolic and hyperbolic type. Transfer functions that describe the semi-integral or semi-inertial links in which the Laplace variable is under the root may be the typical examples. The received Cauchy problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives is given in the form of the Volterra integral equation of the second kind of convolution type. The applying of this approach is considered in solving various differential equations: the ordinary differential equation of the order  $0 < \alpha < 1$ , the ordinary differential equation of the fractional order  $\alpha > 1$ , the differential equation of the  $n$ -th order with fractional derivatives. Solving of the last equation is based on the compilation of the characteristic equation, which leads to solving of ordinary differential equations of order  $\alpha$ . An important example is the researched approach to solving a system of differential equations with fractional derivatives. Due to the transition to equivalent integral equations, the researched problem can be solved by various approximate methods, which are based on quadrature methods with applying the approximation models of polynomial form, in particular, Chebyshev polynomials. The suggested approach makes it possible to construct one-dimensional integral dynamic models of systems of interconnected objects with distributed parameters that can provide high accuracy and stability of solving.

**Key words:** *objects with distributed parameters, differential equations with fractional derivatives, Volterra equation of the II kind.*

Отримано: 23.11.2018

УДК 517.946

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.86-99

**І. М. Конет**, д-р фіз.-мат. наук, професор,**Т. М. Пилипюк**, канд. фіз.-мат. наукКам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПРОСТОРІ З ПОРОЖНИНОЮ

У пропонованій статті методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному за радіальною змінною клиновидному за кутовою змінною циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов Діріхле і Неймана та їх можливих комбінацій (Діріхле–Неймана, Неймана–Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних задач застосовано скіченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної, інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо аплікатної змінної та гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі з  $n$  точками спряження щодо радіальної змінної.

Послідовне застосування інтегральних перетворень дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Застосування обернених інтегральних перетворень відновлює в явному вигляді розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

**Ключові слова:** *параболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

**Вступ.** Теорія крайових і початково-крайових (мішаних) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в наш час інтенсивно розвивається.

Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моде-

лей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для рівнянь параболічного типу одержано у відомих працях Городецького В. В. [2], Житарашу М. В., Ейдельмана С. Д. [6], Загорського Т. Я. [7], Івасишена С. Д. [8], Ладиженської О. А., Солоннікова В. А., Уральцевої Н. М. [13], Ландіса Є. М. [14], Матійчука М. І. [15], Пукальського І. Д. [17], Фрідмана А. [21], Ейдельмана С. Д. [23] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових і мішаних задач суттєво залежить як від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливальних приводів до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [4, 5, 18].

Відомо, що крім методу відокремлення змінних та його узагальнень, одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в однорідних середовищах є метод інтегральних перетворень, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки задач через їх інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних задач у кусково-однорідних середовищах ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 9-12].

У цій статті за допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків по-

будовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} = +\infty;$$

$$\varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty)\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [16]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (3)$$

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad (4)$$

одними з крайових умов на гранях клина [11]

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

та умовами спряження [12]

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad (9)$$

$$j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n},$$



де  $a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$  — деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0; \quad \alpha_{11}^0 \leq 0, \quad \beta_{11}^0 \geq 0;$$

$$\left| \alpha_{11}^0 \right| + \beta_{11}^0 \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\};$$

$$g(r, \varphi, z) = \{g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}(r, \varphi, z)\};$$

$$g_0(t, \varphi, z), \quad g_{pj}(t, r, z), \quad w_{pj}(t, r, z); \quad (p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1})$$

— задані обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}$$

— шукана неперервно диференційовна за змінною  $t$  і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними  $(r, \varphi, z)$  функція.

Зауважимо, що:

- 1) у випадку  $\chi_j \equiv 0$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ) рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
- 2) якщо  $\alpha_{11}^k = 0, \quad \beta_{11}^k = 1; \quad \alpha_{12}^k = 0, \quad \beta_{12}^k = 1; \quad \alpha_{21}^k = \lambda_1^k, \quad \beta_{21}^k = 0; \quad \alpha_{22}^k = \lambda_2^k, \quad \beta_{22}^k = 0$ , де  $\lambda_1^k, \lambda_2^k$  — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;
- 3) якщо  $\alpha_{11}^k = b_k, \quad \beta_{11}^k = 1; \quad \alpha_{12}^k = 0, \quad \beta_{12}^k = 1; \quad \alpha_{21}^k = \lambda_1^k, \quad \beta_{21}^k = 0; \quad \alpha_{22}^k = \lambda_2^k, \quad \beta_{22}^k = 0$ , де  $b_k$  — коефіцієнт термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною.

**Основна частина.** Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [12, 19, 20].

Згідно з [20] визначимо скінченні пряме  $F_{m,ik}$  та обернене  $F_{m,ik}^{-1}$  інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної  $\varphi \in (0; \varphi_0)$  за формулами:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} U_{m,11}(\varphi) &= \sin(\beta_{m,11}\varphi); \quad \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}; \\ U_{m,12}(\varphi) &= \sin(\beta_{m,12}\varphi); \quad \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}; \\ U_{m,21}(\varphi) &= \cos(\beta_{m,21}\varphi); \quad \beta_{m,21} = \beta_{m,12}; \\ U_{m,22}(\varphi) &= \cos(\beta_{m,22}\varphi); \quad \beta_{m,22} = \beta_{m,11}; \\ \varepsilon_0^{ik} &= 0; \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21; \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ \varepsilon_0^{22} &= \frac{1}{2}; \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

При цьому для інтегрального оператора  $F_{m,ik}$  виконується тотожність

$$F_{m,ik} \left[ \frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{m,11} &= \frac{\pi m}{\varphi_0} \left[ f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0) \right]; \\ \Phi_{m,12} &= \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}; \\ \Phi_{m,21} &= - \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0); \\ \Phi_{m,22} &= - \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} + (-1)^m \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}. \end{aligned}$$

Інтегральний оператор  $F_{m,ik}$ , який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D' = \left\{ (t, r, z); t > 0; r \in I_n^+; z \in (-\infty; +\infty) \right\}$  класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = \quad (13)$$

$$= G_{jm,ik}(t, r, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t, r, z) \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}(r, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (14)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (15)$$

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = g_{0m,ik}(t, z); \quad \frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad (16)$$

$$s = 0, 1$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0; \quad (17)$$

$$j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n},$$

де  $v_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}$ ;

$$G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{m,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z).$$

Застосуємо до двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі  $(-\infty; +\infty)$  щодо змінної  $z$  [19]:

$$F[g(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \exp(-i\sigma z) dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (18)$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) \exp(i\sigma z) d\sigma \equiv g(z), \quad (19)$$

$$F \left[ \frac{d^2 g}{dz^2} \right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (20)$$

Інтегральний оператор  $F$ , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) крайовій задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D^n = \{(t, r); t > 0; r \in I_n^+\}$  класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь  $B$ -параболічного типу 2-го порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{v_{jm,ik}} [\tilde{u}_{jm,ik}] + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm,ik} = \\ = \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (21)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = \tilde{g}_{0m,ik}(r, \sigma); \quad \frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1,m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad (23)$$

$$s = 0, 1$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) \tilde{u}_{pm,ik} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) \tilde{u}_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_0} = 0; \quad (24)$$

$$j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n},$$

де  $B_{v_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2}$  — класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі  $I_n^+(R_0 > 0)$  з  $n$  точками спряження щодо радіальної змінної  $r$  [12]:

$$M_{(n)}[f(r)] = \int_{R_0}^{+\infty} f(r) V(r, \lambda) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda), \quad (25)$$

$$M_{(n)}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) V(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \equiv f(r), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} M_{(n)}[B_{(m,ik)}[f(r)]] = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda) \sigma_k r dr - \\ - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \left( \alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11}^0 f \right) \Big|_{r=R_0}. \end{aligned} \quad (27)$$

У формулах (25)–(27) беруть участь, виписані в [12], спектральна на функція  $V(r, \lambda)$ , вагова функція  $\sigma(r)$ , спектральна щільність  $\Omega(\lambda)$  та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^n a_j^2 \theta(r - R_{j-1}) \theta(R_j - r) B_{v_{jm,ik}} + a_{n+1}^2 \theta(r - R_n) B_{v_{n+1,m,ik}},$$

де  $\theta(x)$  — одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{V_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{V_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{V_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right) \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де  $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ .

Інтегральний оператор  $M_{(n)}$ , який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{(n)}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{R_1} \dots V_1(r, \lambda) \sigma_1 r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda) \sigma_2 r dr \\ \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda) \sigma_n r dr & \int_{R_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda) \sigma_{n+1} r dr \end{bmatrix} \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left( \frac{d}{dt} + \lambda^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma), \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda, \sigma), \quad (32)$$

$$\text{де } \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr;$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{g}_{jm,ik}(\lambda, \sigma) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}.\end{aligned}$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що  $\max \{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \dots, q_{n+1}^2(\sigma)\} = q_1^2(\sigma)$  і покладемо всюди  $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma)$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ . Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{u}_{m,ik}}{dt} + \Delta^2(\lambda, \sigma) \tilde{u}_{m,ik} = \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma), \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma); \quad \tilde{G}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma); \\ \tilde{g}_{m,ik}(\lambda, \sigma) &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda, \sigma); \quad \Delta^2(\lambda, \sigma) = \lambda^2 + q_{z1}^2 \sigma^2 + \chi_1^2.\end{aligned}$$

Легко перевірити, що єдиним розв'язком задачі Коші (33), (34) є функція

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) &= N(t, \lambda, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}(\lambda, \sigma) + \int_0^t N(t - \tau, \lambda, \sigma) \times \\ &\times \left[ \tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda, \sigma) - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) \right] d\tau,\end{aligned} \quad (35)$$

де розв'язуюча функція (функція Коші)  $N(t, \lambda, \sigma) = \exp(-\Delta^2(\lambda, \sigma)t)$ .

Оскільки суперпозиція операторів  $M_{(n)}$  та  $M_{(n)}^{-1}$  є одиничним оператором, то оператор  $M_{(n)}^{-1}$ , як обернений до оператора, визначеного за формулою (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{(n)}^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \dots V_1(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \\ \int_0^{+\infty} \dots V_2(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \\ \dots \dots \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \end{bmatrix} \quad (36)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента  $\left[ \tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) \right]$ , де функція  $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma)$  визначена формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) = & \int_0^{+\infty} N(t, \lambda, \sigma) \tilde{g}_{m,ik}(\lambda, \sigma) V_j(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda + \\ & + \int_0^t \int_0^{+\infty} N(t-\tau, \lambda, \sigma) \left[ \tilde{G}_{m,ik}(\tau, \lambda, \sigma) - \right. \\ & \left. - \frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma) \right] \times V_j(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma)$ , визначених формулами (37), обернені оператори  $F^{-1}$  та  $F_{m,ik}^{-1}$ , і виконавши елементарні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ & \times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{jr,ik}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z-\xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (38)$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях  $ik$  (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = \frac{2}{\pi \varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha) \quad (39)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$\begin{aligned} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = & \frac{2}{\pi \varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \times \\ & \times \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi) \end{aligned} \quad (40)$$

та компоненти  $W_{jr,ik}(t, r, \varphi, \alpha, z) = -\frac{a_1^2 R_0 \sigma_1}{\alpha_{11}^0} E_{j1}^{ik}(t, r, R_0, \varphi, \alpha, z)$  радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} N(t, \lambda, \sigma) V_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) \cos(\sigma z) d\lambda d\sigma.$$

Проаналізуємо формули (38) в залежності від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного циліндрично-кругового простору з циліндричною порожниною. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (5). У цьому випадку функції Гріна

$$Q_{jp}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} m K_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \times \\ \times \left[ g_{1p}(\tau, \rho, \xi) + (-1)^{m+1} \omega_{1p}(\tau, \rho, \xi) \right] \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0}.$$

Якщо визначити тангенціальні функції Гріна

$$W_{jp,1}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} m K_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} K_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z - \xi) \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

то розв'язок параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (5), (9) можна записати у вигляді

$$u_{j,11}(t, r, \varphi, z) = \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{11}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z - \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ \times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{p=1}^{n+1} a_p^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_{jp,1}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) g_{1p}(\tau, \rho, \xi) + \\ + W_{jp,2}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \omega_{1p}(\tau, \rho, \xi)] \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{jr,11}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z - \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу  $E_{jp}^{11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$  і функцій Гріна  $W_{jp,s}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ , ( $s = 1, 2$ ),  $W_{jr,11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$  безпосередньо перевіряється, що функції  $u_{j,11}(t, r, \varphi, z)$ , визначені формулами (41), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (5) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Єдиність розв'язку (41) впливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та



функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (5), (9).

Методами з [1, 22] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (41) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

**Теорема.** Якщо функції  $f_j(t, r, \varphi, z)$ ,  $g_j(r, \varphi, z)$ ,  $g_{1j}(t, r, z)$ ,  $\omega_{1j}(t, r, z)$ , ( $j = \overline{1, n+1}$ ) задовольняють умови:

- 1) неперервно диференційовні за змінною  $t$  і двічі неперервно диференційовані за геометричними змінними;
- 2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
- 3) абсолютно сумовні за змінною  $z$  на  $(-\infty; +\infty)$ ;
- 4) абсолютно сумовні з ваговою функцією  $r\sigma(r)$  за змінною  $r$  на кусково-однорідній полярній осі  $I_n^+$ ;
- 5) справджують умови спряження, а функція  $g_0(t, \varphi, z)$  також задовольняє умови 1)–3), то параболічна початково-крайова задача спряження (1)–(4), (5), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (41).

Випадки крайових умов (6), (7) чи (8) на гранях клина  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  аналізуються аналогічно.

**Зауваження 1.** У випадку  $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$  формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною.

**Зауваження 2.** Випадок зміни  $\varphi$  в межах від  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$  зводиться до розглянутого заміною  $\varphi' = \varphi - \varphi_1$  ( $\varphi_0 \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ ).

**Зауваження 3.** Параметри  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$  дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні  $r = R_0$  крайових умов 1-го роду, 2-го роду та 3-го роду.

**Зауваження 4.** Аналіз формул (38) в залежності від аналітичного виразу функцій  $f_j(t, r, \varphi, z)$ ,  $g_j(r, \varphi, z)$ ,  $g_{kj}(t, r, z)$ ,  $\omega_{kj}(t, r, z)$ ,  $j = \overline{1, n+1}$ ,  $k = \overline{1, 4}$ ,  $g_0(t, \varphi, z)$  проводиться безпосередньо із загальних структур.

**Висновки.** За допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах.

### Список використаних джерел:

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
2. Городецкий В. В. Граничные свойства гладких у шаре развязков равнянь параболічного типу / В. В. Городецкий. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
4. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 606 с.
5. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
6. Житарашу Н. В. Параболические граничные задачи / Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман. — Кишинев : Штиинца, 1992. — 327 с.
7. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа / Т. Я. Загорский. — Львов : Изд-во ЛГУ, 1961. — 115 с.
8. Ивасишин С. Д. Матрица Грина параболических задач / С. Д. Ивасишин. — К. : Вища школа, 1990. — 199 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.
11. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
12. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 80 с.
13. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.

14. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
15. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
16. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
17. Пукальський І. Д. Крайові задачі для нерівномірно параболических та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями / І. Д. Пукальський. — Чернівці : Рута, 2008. — 253 с.
18. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
19. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
20. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
21. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 428 с.
22. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

## **PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN A PIECEWISE HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED CYLINDRICAL-CIRCULAR SPACE WITH A CAVITY**

By the method of integral and hybrid integral transforms, in combination with the method of main solutions (matrices of influence and Green matrices) the only exact analytical solutions of the parabolic boundary value problems of mathematical physics in a piecewise homogeneous wedge-shaped cylindrical circular space with a cylindrical cavity were constructed for the first time.

The cases of the Dirichlet and Neumann boundary conditions and their possible combinations (Dirichlet-Neumann, Neumann-Dirichlet) on the edges of the wedge are considered.

The finite integral Fourier transform relative to the angular variable, Fourier integral transform on the Cartesian axis relative to the variable  $z$  and Weber-type hybrid integral transform on the polar axis with  $n$  conjugation points relative to the radial variable are used to construct solutions.

The sequential application of integral transforms allows us to reduce the three-dimensional initial-boundary value problems to the Cauchy problem for the ordinary linear non-uniform differential equation of the 1st order, the only solution of which is written in a closed form.

The use of inverse integral transforms restores the solutions of the considered problems in explicit form through their integral image.

**Key words:** *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, main solutions.*

Отримано: 12.11.2018

УДК 519.1

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.100-105

**С. О. Кріль\***, канд. фіз.-мат. наук,

**М. М. Зегельман\*\***

\* Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

\*\* Кам'янець-Подільський ліцей, м. Кам'янець-Подільський

## **КОМБІНАТОРНА ГРА — «ЗВ'ЯЗНА НЕЗВ'ЯЗНІСТЬ»**

Комбінаторна теорія ігор — це математична теорія, що вивчає ігри двох осіб, де у кожен момент часу є позиція, яку гравці по черго змінюють певним чином, щоб досягти певного виграшу. Комбінаторні ігри можуть бути інтерпретовані як ігри на графах.

У роботі розглядається комбінаторна гра на неорієнтованому графі «Зв'язна незв'язність», яка може бути використаною при моделюванні процесів конкурентної боротьби. Для розв'язання цієї задачі розроблено власний метод фінальних графів, який полягає в аналізі ситуації, яка утворилась за крок до завершення гри. В роботі доводиться оптимальність стратегії, результатом якої є повне розв'язання задачі для довільної кількості вершин. При дослідженні гри встановлено перемогу в залежності від остачі, яку дає кількість вершин при діленні на чотири.

Актуальність теми визначається надзвичайно широким спектром застосування теорії графів при моделюванні різних процесів підприємницької діяльності, тощо. Комбінаторна теорія ігор на графах може бути застосована в задачах кластеризації, а також при моделюванні конфліктних ситуацій. Відмінність комбінаторних ігор від ігор, які зазвичай вивчаються в класичній («економічній») теорії ігор полягає в тому, що в них гравці виконують ходи по черзі, а не одночасно (класична теорія ігор висвітлюється в безлічі книг, у назві яких фігурують слова «теорія ігор» або «дослідження операцій»).

Міркування комбінаторної теорії ігор з повною інформацією з'явилися ще в давні часи, наприклад в книзі Сунь Цзи «Мистецтво війни»: якщо можна прорахувати, кому дістанеться перемога, а власне саму війну не затівати.

Ця стаття може бути корисною усім, хто цікавиться комбінаторною теорією ігор, теорією графів. Результати даного дослідження мають різне прикладне застосування. Тема є перспективною для подальшого продовження роботи в цьому напрямку.

**Ключові слова:** *комбінаторна теорія ігор, теорія графів, метод фінальних графів, комбінаторні ігри на графах.*

**Вступ.** Комбінаторні ігри можуть бути інтерпретовані як ігри на графах [1]. Теорія ігор розглядає моделювання ринкової економіки,

прийняття рішень в умовах жорсткої конкурентної боротьби [2]. Комбінаторні ігри розглядались в [3].

**Означення 1.** Графом називається така впорядкована пара множин  $G = (V, E)$ , де  $V$  — множина вершин, а  $E$  — множина ребер, підмножина  $V \times V$  [4, с. 35].

**Означення 2.** Двочастковим графом називається граф, множина вершин якого може бути розбита на дві підмножини так, що кожне ребро графа має одну вершину з першої підмножини і одну з другої [5, с. 25].

**Означення 3.** Зв'язний граф — граф що містить рівно одну компоненту зв'язності [5, с. 11].

**Означення 4.** Компонента зв'язності — це підграф, в якому будь-які дві вершини зв'язані одна з одною шляхами, і вони не зв'язані з ніякими додатковими вершинами [5, с. 13].

**Означення 5.** Нехай граф  $G$ , який утворився під час гри, такий, що додавання до нього будь-якого ребра приводить до програшу. Назвемо такий граф  $G$  — фінальним.

**Основна частина.** Розглянемо ситуацію, яка могла скластися в стародавньому Римі. Є два претенденти стати імператором та  $n$  трибунів, (посада в стародавньому Римі) які не дружать. Два претендента по черзі вибирають пару трибунів, які не дружать та роблять їх друзями. Претендент, який зробив таку ситуацію, всі трибуни дружать (можливо через інших друзів) програє, а інший претендент стає імператором.

Розглянемо математичну модель цієї задачі у термінах графів.

Задача «Зв'язна незв'язність». Два гравці по черзі додають ребра до неорієнтованого графа, який на початку гри порожній та містить  $n$  вершин,  $n \geq 5$ . Гравець, який одержав зв'язний граф програв. Хто виграв за правильної гри в залежності від  $n$ ?

**Теорема.** Перший гравець виграв тоді і тільки тоді, коли  $n = 4k + 2$  або  $n = 4k + 3$ .

**Доведення.** Фінальний граф буде складатися з двох компонент зв'язності, кожна з яких є повним підграфом. Оскільки при додаванні до графа ребер кількість компонент зв'язності може зменшитися або залишитися сталою, тому коли залишиться дві компоненти зв'язності гравці, щоб запобігти програшу будуть додавати ребра всередині кожної компоненти. Після того як кожна компонента стане повним підграфом додавання кожного ребра призводитиме до програшу, тому одержаний граф є фінальним. Зауважимо, що якщо компоненти зв'язності складаються з  $m$  та  $k$  вершин, то фінальний граф містить

$C_m^2 + C_k^2 = \frac{m(m-1) + k(k-1)}{2}$  ребер. Коли це число парне, то виграв

другий гравець, а якщо не парне, то перший. Зрозуміло, що під час гри важлива кількість компонент зв'язності, кількість ребер в кожній компоненті та неважливо, які саме вершини з'єднані в компонентах зв'язності. Позначимо  $G_{m,k}$  — граф, який містить дві компоненти зв'язності, які складаються  $m$  та  $k$  вершин.

**Лема 1.** Графи  $G_{n-2z, 2z}$  є виграшними для першого гравця при  $n = 4k + 2$  та  $n = 4k + 3$ , а для другого при  $n = 4k$  та  $n = 4k + 1$ .

**Доведення.** Граф  $G_{n-2z, 2z}$  може містити не більше ніж

$$C_{n-2z}^2 + C_{2z}^2 = \frac{(n-2z)(n-2z-1) + 2z(2z-1)}{2}.$$

Підставимо  $n = 4k$  та отримаємо:

$$\begin{aligned} C_{4k-2z}^2 + C_{2z}^2 &= \frac{(4k-2z)(4k-1-2z) + 2z(2z-1)}{2} = \\ &= (2k-z)(4k-2z-1) + z(2z-1) = 8k^2 - 2k - 8kz + 4z^2 \end{aligned}$$

— парне.

Аналогічно при  $n = 4k + 1$ :

$$\begin{aligned} C_{4k+1-2z}^2 + C_{2z}^2 &= \frac{(4k+1-2z)(4k-2z) + 2z(2z-1)}{2} = \\ &= (4k+1-2z)(2k-z) + z(2z-1) = 8k^2 + 2k - 8kz + 4z^2 - 2z \end{aligned}$$

— парне.

При  $n = 4k + 2$ :

$$\begin{aligned} C_{4k+2-2z}^2 + C_{2z}^2 &= \frac{(4k+2-2z)(4k+1-2z) + 2z(2z-1)}{2} = \\ &= (2k+1-z)(4k+1-2z) + z(2z-1) = 8k^2 + 6k - 8kz + 4z^2 - 4z + 1 \end{aligned}$$

— непарне.

При  $n = 4k + 3$ :

$$\begin{aligned} C_{4k+3-2z}^2 + C_{2z}^2 &= \frac{(4k+3-2z)(4k+2-2z) + 2z(2z-1)}{2} = \\ &= (4k+3-2z)(2k+1-z) + z(2z-1) = 8k^2 + 10k - 8kz + 4z^2 - 6z + 3 \end{aligned}$$

— непарне.

Отже при  $n = 4k + 2$  та  $n = 4k + 3$  виграє перший гравець, а при  $n = 4k$  та  $n = 4k + 1$  — другий. Лема 1 доведена.

Відомо, що зв'язний граф з  $k$  вершинами містить не менше ніж  $k - 1$  ребро, назвемо  $k - 1$  ребро (які утворюють дерево) основними, а інші ребра допоміжними.

Компоненти зв'язності, які не містять ребра, тобто складаються лише з однієї ізольованої вершини будемо називати порожньою.

**Лема 2.** Граф, який містить  $n = 4k + 1$  вершину завжди є виграшним для другого гравця, а граф який містить  $n = 4k + 3$  вершину завжди є виграшним для першого гравця (за будь-якої гри).

**Доведення.** Нехай в грі ми отримали фінальний граф  $G_{m,p}$ , оскільки  $m + p = 4k + 1$ , то одне з чисел  $m$  або  $p$  — парне (якщо припустити, що  $m$  та  $p$  непарні, то їхня сума буде парною, отримали протиріччя). Отже одна з компонент зв'язності фінального графа складається з парної кількості вершин, тому за лемою 1 при  $n = 4k + 1$  виграє другий гравець, а при  $n = 4k + 3$  — перший. Лема 2 доведена.

**Лема 3.** Граф, який містить  $n = 4k$  вершин є виграшним для другого гравця.

**Доведення.** Для цього другий гравець об'єднує дві компоненти зв'язності, які мають найбільшу кількість вершин до моменту коли в компоненті буде  $n - 4$  або  $n - 3$  вершини. Другий гравець завжди цього зможе досягти, оскільки при таких діях в графі — не більше двох не порожніх компонент зв'язності, менша з яких складається не більше ніж з двох вершин. Тому при об'єднанні двох компонент зв'язності кількість вершин у найбільшій компоненті збільшується на один або на два. Оскільки  $n - 4$  та  $n - 3$  два натуральних числа підряд то після ходу другого гравця найбільша компонента зв'язності буде складатися з  $n - 4$  або  $n - 3$  вершин. Розглянемо два варіанта.

*Варіант 1.* Після ходу другого гравця утворився граф  $G_{n-4,1,1,1,1}$ .

Перший гравець може перейти в граф  $G_{n-3,1,1,1}$ , тоді другий гравець передає хід (додає допоміжні ребра всередині компоненти зв'язності). Він завжди зможе це зробити, оскільки максимальна кількість допоміжних ребер складає: 
$$\frac{(n-3)(n-4) - 2(n-4)}{2}$$
 — парне,

оскільки  $n = 4k$ . В ситуації  $G_{n-3,1,1,1}$  другий гравець може передати хід, оскільки перед його ходом кількість допоміжних ребер, які можна додати, є непарною (всього допоміжних ребер — парна кількість, а вже додано непарну кількість). Також перший гравець може перейти в граф  $G_{n-4,2,1,1}$ . Тоді другий гравець  $G_{n-4,2,2}$ , після цього перший гравець може утворити фінальні графи  $G_{n-4,4}$  або  $G_{n-2,2}$  та за лемою 1 програє. Перший гравець може перейти в граф  $G_{n-4,1,1,1,1}$  (додавши допоміжні ребра в найбільшій компоненті), тоді другий гравець переходить в граф  $G_{n-3,1,1,1}$  (розглядається в варіанті 2).

*Варіант 2.* Після ходу другого гравця утворився граф.  $G_{n-3,1,1,1,1}$ .

Перший гравець може перейти в граф  $G_{n-2,1,1}$ . Тоді другий гравець переходить в граф  $G_{n-2,2}$  та за лемою 1 виграє. Перший гравець може перейти в граф  $G_{n-3,2}$ . Тоді другий гравець переходить в граф  $G_{n-2,2}$  та за лемою 1 виграє. Зауважимо, що перший гравець в графі  $G_{n-3,1,1,1}$  не може передати хід, оскільки в найбільшій компоненті зв'язності (всього допоміжних ребер — парна кількість, а вже додано парну кількість). Лема 3 доведена.

**Лема 4.** Граф, який містить  $n = 4k + 2$  вершин є виграшним для першого гравця.

**Доведення.** Для цього перший гравець грає за алгоритмом гри описаним в лемі 3 для другого гравця. Тобто він збільшує найбільшу компоненту зв'язності до  $n - 3$  або  $n - 4$ . Зауважимо, що в графі  $G_{n-3, 1, 1, 1}$  перший гравець може передати хід (додавши допоміжні ребра всередині компоненти зв'язності, оскільки максимальна кількість допоміжних ребер складає:  $\frac{(n-3)(n-4)-2(n-4)}{2}$  — непарне,

оскільки  $n = 4k + 2$ . Перед його ходом кількість допоміжних ребер, які можна додати, є непарною (всього допоміжних ребер — непарна кількість, а вже додано парну кількість). Лема 4 доведена.

З лем 2–4 випливає правильність теореми. **Теорема доведена.**

**Висновки:** комбінаторна гра «Зв'язна незв'язність» є моделюванням процесів конкурентної боротьби двох сторін. При дослідженні гри встановлено:

- 1) при  $n = 4k$  за правильної гри виграє другий гравець;
- 2) при  $n = 4k + 1$  за будь-якої гри виграє другий гравець;
- 3) при  $n = 4k + 2$  за правильної гри виграє перший гравець;
- 4) при  $n = 4k + 3$  за будь-якої гри виграє перший гравець.

#### Список використаних джерел:

1. Деорнуа П. Комбінаторная теория игр / П. Деорнуа. — М. : Издательство МЦНМО, 2017. — 40 с.
2. Шиян А. А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті : навч. посіб. / А. А. Шиян. — Вінниця : ВНТУ, 2009. — 164 с.
3. Aaron NSiegel. Combinatorial Game Theory / AaronNSiegel // American Mathematical Society, 2013. — 525 p.
4. Спекторський І. Я. Дискретна математика. Збірник задач / І. Я. Спекторський, О. В. Стусь, В. М. Статкевич. — К. : НТУУ «КПІ», 2015. — С. 35–38.
5. Трохимчук Р. М. Теорія графів. Навчальний посібник для студентів факультету кібернетики / Р. М. Трохимчук. — К. : РВЦ «Київський університет», 1998. — 43 с.

### COMBINATORIAL GAME — «CONNECTIVE INCOMPATIBILITY»

The combinatorial theory of games is a mathematical theory that examines the games of two persons, where at each moment of time there is a position that players in turn change in a certain way in order to achieve a certain gain. Combination games can be interpreted as games on graphs.

In this paper we consider a combinatorial game on a non-oriented graph «Connective incompatibility», which can be used in the simulation of competitive struggle. To solve this problem, an own method of final graphs has been developed, which consists in analyzing the situation that was formed one step before the end of the game. The optimality of the strategy, which results in the



complete solution of the problem for an arbitrary number of vertices, is presented in the paper. In the study of the game set the winner, depending on the remainder, this gives the number of vertices when dividing by four.

The urgency of this topic is determined by an extremely wide spectrum of the theory of graphs in the modeling of various processes of entrepreneurial activity, etc. The combinatorial theory of games on graphs can be applied in clustering tasks, as well as in the simulation of conflict situations. The difference between combinatorial games from games, which are usually studied in the classical («economic») game theory, is that players play in turns in turn, and not simultaneously (the classical game theory is covered in a multitude of books, which include the words «theory games «or» research operations»).

Considerations of the combinatorial theory of games with full information have appeared, even in ancient times, for example, in Sun Tzu's book «The Art of War»: if one can calculate who will win, and not actually fight the war itself.

This article can be useful to anyone interested in the combinatorial theory of games, graph theory. The results of this study have different application applications. The topic is promising for further continuation of work in this direction.

**Key words:** *combinatorial game theory, graph theory, method of final graphs, combinatorial games on graphs*

Отримано: 23.11.2018

УДК 517.9

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.105-112

**В. А. Літовченко**, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет  
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

## **ГЛАДКІ РОЗВ'ЯЗКИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ЗА ШИЛОВИМ СИСТЕМ**

Для широкого класу гіперболічних за Шиловим лінійних систем рівнянь із частинними похідними, який охоплює клас Петровського гіперболічних систем зі сталими коефіцієнтами і містить клас рівнянь Гордінга, розглядається питання знаходження гладких класичних розв'язків, які є стосовно просторової змінної фінітними або швидко спадними на нескінченності вектор-функціями. Дослідження проводяться методом перетворення Фур'є у поєднанні з теорією просторів типу  $S$  і  $S'$  Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. основних і узагальнених функцій. Належність компонент фундаментального розв'язку задачі Коші для таких систем до простору розподілів Дірака, а також, їх згортковість у певних просторах типу  $S$  основних функцій дозволило тут установити в класичному розумінні коректну розв'язність задачі Коші в кожному такому просторі Гельфанда і Шилова. Тобто, довести існування, єдиність та неперервну залежність від початкових даних класичного розв'язку гіперболічної системи у зазначеному просторі типу  $S$ , за умови, що його граничне значення на

початкової гіперплощини є елементом цього простору. При цьому, розв'язок прямує до початкової вектор-функції при наближенні часової змінної до нуля у сенсі топології цього простору. Цей результат, зокрема, дозволяє зробити важливий висновок про те, що еволюційні процеси з відсутнім зовнішнім впливом, які описуються гіперболічними за Шиловим системами, в рамках просторів типу  $S$  з плином часу, спроможні зберігати ті якісні характеристики стосовно просторової змінної, якими вони володіли на початковому етапі еволюції.

**Ключові слова:** гіперболічні за Шиловим системи, задача Коші, основні та узагальнені функції.

**Вступ.** Розглянемо систему диференціальних рівнянь  $p$ -го порядку вигляду

$$\partial_t u(t; x) = P(i\partial_x)u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi := (0; T] \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

де  $u := \text{col}(u_1, \dots, u_m)$ , а  $P(i\partial_x) = \left( P_{lj}(i\partial_x) \right)_{l,j=1}^m$  — матричний диференціальний вираз зі сталими коефіцієнтами. Вважатимемо, що система (1) гіперболічна за Шиловим на множині  $\Pi$  тобто така, що функція  $\Lambda(s) := \max_j \text{Re } \lambda_j(s), s \in \mathbb{C}^n$ , де  $\lambda_j(\cdot)$  — власні числа матричного символу  $P(\cdot)$ , задовольняє наступні умови [1]:

- 1) її степеневий порядок зростання у комплексному просторі  $\mathbb{C}^n$  не більший за 1:  $\Lambda(s) \leq a \|s\| + b$ ;
- 2) при дійсних значеннях  $s = \sigma \in \mathbb{R}^n$  ця функція обмежена:  $\Lambda(\sigma) \leq c$ .

У [1] обґрунтовано, що кожна гіперболічна за Петровським система (1), гіперболічна за Шиловим і кожне гіперболічне за Гордінгом рівняння зі сталими коефіцієнтами зводиться до гіперболічної за Шиловим системи (1); також наведено приклади гіперболічних за Шиловим систем (1), які не є гіперболічними за Петровським.

Умови з означення гіперболічності системи не забезпечують необхідного спадання на нескінченності функції Гріна системи (1), тому класичний метод перетворення Фур'є розв'язування (1), який проявив себе достатньо ефективно у випадку параболічних систем, виявився недієвим для гіперболічних систем. У зв'язку з цим, різними дослідниками розроблялися інші методи дослідження гіперболічних рівнянь і систем, зокрема, метод характеристик і метод відокремлення змінних, які дозволили одержати ряд важливих результатів про коректну розв'язність задач Коші та крайових задач у різних функціональних просторах, а також, дослідити властивості розв'язків [2–10].

Проте, з появою теорії узагальнених функцій метод перетворення Фур'є вдалось поширити і на випадок гіперболічних систем. У [1] тра-

ктуючи розв'язки системи (1) у слабкому розумінні встановлено, що простір  $S_0'$  розподілів Дірака є класом єдиності задачі Коші для гіперболічних за Шиловим систем (1), крім цього, поширено відомий результат І.Г. Петровського про коректну розв'язність задачі Коші для гіперболічних за Петровським систем [2] на випадок систем, гіперболічних за Шиловим: *задача Коші для гіперболічних систем (1), і лише для таких систем, коректно розв'язна з довільними достатньо гладкими початковими даними без будь-яких обмежень на їх зростання на нескінченності*. З огляду на цей результат, виникають природні питання про існування та знаходження класичних гладких розв'язків таких систем із певними властивостями, які так чи інакше прямують до свого граничного значення на початковій гіперплощині.

У роботі методом класичного перетворення Фур'є у поєднанні з теорією просторів типу  $S$  досліджується питання існування класичних нескінченно диференційовних за просторовою змінною  $x$  розв'язків гіперболічної системи (1), які є фінітними або швидко спадними на нескінченності вектор-функціями, і які «посилено» прямують до свого граничного значення при  $t \rightarrow +0$ .

**1. Попередні відомості, постановка задачі.** Нехай  $S$  — простір Л. Шварца спадних функцій на  $\mathbb{R}^n$ ; для  $\beta \geq 0$  покладемо [11]:

$$S_\beta := \left\{ \varphi(\cdot) \in S \mid \exists \delta > 0 \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_q > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : \left| \partial^q \varphi(x) \right| \leq c_q e^{-\delta \|x\|^{\beta/q}} \right\};$$

$$S^\beta :=$$

$$= \left\{ \varphi(\cdot) \in S \mid \exists B > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_k > 0 \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \forall x \in \mathbb{R}^n : \left| x^k \partial^q \varphi(x) \right| \leq c_k B^{|q|} q^{\beta q} \right\}.$$

З відповідними топологіями простори  $S_\beta$  і  $S^\beta$  є об'єднанням зліченнонормованих повних досконалих просторів, збіжність в яких характеризується наступним критерієм [11]: граничне співвідношення  $\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{\Phi} 0$  виконується тоді і лише тоді, коли:

$$I) \quad \forall K \subset \mathbb{R}^n \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+^n : \partial^q \varphi_\nu(x) \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{x \in K} 0 \quad (\text{тут йдеться про рівномірну}$$

збіжність стосовно  $x$  на компактi  $K$ );

$$II) \quad \text{послідовність } \varphi_\nu(\cdot) \text{ обмежена в просторі } \Phi, \text{ де } \Phi \in \{S_\beta, S^\beta\}.$$

При  $\beta = 0$  елементи простору  $S_0$  є фінітними нескінченно диференційовними на  $\mathbb{R}^n$  функціями; при  $\beta < 1$  кожен елемент простору  $S^\beta$  допускає аналітичне продовження у простір  $\mathbb{C}^n$  до цілої функції такої, що

$$\left| x^k \varphi(x + iy) \right| \leq c_k e^{\delta \|y\|^{\frac{1}{p}}} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_+^n).$$

Оператор перетворення Фур'є  $F$  між просторами  $S_\beta$  і  $S^\beta$  встановлює взаємно однозначну і неперервну відповідність, при цьому виконується топологічна рівність  $F[S_\beta] = S^\beta$ .

Нехай  $\Phi'$  — топологічно спряжений простір з  $\Phi$ , а  $F[\Phi]$  — простір Фур'є-образів елементів простору  $\Phi$ . Перетворення Фур'є узагальненої функції  $f \in \Phi'$  визначається так [11]:

$$\langle F[f], F[\varphi] \rangle = (2\pi)^n \langle f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \Phi;$$

$$\langle F^{-1}[g], F^{-1}[\varphi] \rangle = (2\pi)^{-n} \langle g, \varphi \rangle, \quad g \in F[\Phi'], \quad \varphi \in F[\Phi].$$

Методом перетворення Фур'є узагальнених функцій у [1] побудовано функцію Гріна гіперболічної системи (1) у вигляді  $G(t; \cdot) = F^{-1}[e^{tP(\xi)}](t; \cdot)$ ,  $t \in (0; T]$ , досліджено її властивості, зокрема, обґрунтовано належність її компонент до простору  $S'_0$  та доведено, що ці компоненти є згортувачами у просторі  $S_0$  основних функцій. При цьому, використовуючи умови з означення гіперболічності системи (1), застосовуючи послідовно твердження теорем 1', 2' з [11, с. 256, 258], встановлено оцінку

$$\left| e^{tP(\xi + i\eta)} \right| \leq c(1 + \|\xi\|)^{p(m-1)} e^{\delta \|\eta\|}, \quad \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n, \quad t \in (0; T], \quad (2)$$

в якій оціночні сталі  $c$  і  $\delta$  не залежать від  $t$  при  $t \in (0; 1)$  (у цьому переконаємось шляхом аналізу доведення зазначених тверджень 1', 2').

Перейдемо до постановки задачі. Зафіксуємо довільно  $\varphi(\cdot)$  із векторного простору  $\mathbf{S}_\beta$ , і для системи (1) задамо початкову умову

$$u(t; \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{S_\beta} \varphi(\cdot). \quad (3)$$

Задача полягає у знаходженні класичних розв'язків системи (1) у просторі  $\mathbf{S}_\beta$ ,  $\beta \in (0; 1)$ , які задовольняють початкову умову (3) й неперервно залежать від початкових даних.

**2. Основний результат.** Оскільки нас цікавлять розв'язки системи (1), які швидко спадають на нескінченності, то подіявши на (1) класичним перетворенням Фур'є, одержимо відповідну двоїсту систему

$$\partial_t v(t; \xi) = P(\xi)v(t; \xi), \quad (t; \xi) \in \Pi, \quad (4)$$

у якій  $v = F[u] \equiv \tilde{u}$ . Урахувавши зазначені властивості оператора  $F$  (див. п.1), приходимо до висновку, що питання про розв'язування

системи (1) у просторі  $S_\beta$ , рівносильне питанню про розв'язування (4) у  $S^\beta$ .

Розв'язавши систему (4) методом відокремлення змінних, одержимо такий її загальний розв'язок:  $v(t; \cdot) = e^{tP(\cdot)} c(\cdot)$ ,  $t \in (0; T]$ . Звідси вже, згідно з твердженням класичної теореми Коші, знаходимо, що функція

$$v(t; \cdot) = e^{tP(\cdot)} \tilde{\varphi}(\cdot), \quad t \in (0; T], \quad (5)$$

єдиний розв'язок системи (4), який задовольняє початкову умову  $v(t; \cdot)|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\cdot)$ . Урахувавши оцінку (2) й твердження теореми 3'' з [11, с. 263], знаходимо, що  $e^{tP(\cdot)}$  — мультиплікатор у просторі  $S^\beta$ ,  $\beta \in [0; 1)$ . Тоді функція  $v(t; \cdot)$ , що визначена рівністю (5), при кожному фіксованому  $t \in (0; T]$ , є елементом простору  $S^\beta$  і ця функція, як розв'язок системи (4), неперервно залежить від початкових даних у  $S^\beta$ .

Обгрунтуємо тепер виконання граничного співвідношення

$$v(t; \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{S^\beta} \tilde{\varphi}(\cdot), \quad \beta \in [0; 1). \quad (6)$$

Для цього, згідно з критерієм збіжності в просторі  $S^\beta$ , досить установити наступні твердження:

$$I) \quad \forall K \subset \mathbb{R}^n \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+^n : \partial_\xi^q v(t; \xi) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{\xi \in K} \partial_\xi^q \tilde{\varphi}(\xi);$$

$$II) \quad \exists B > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists c_k > 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in (0; 1) : \\ \left| \xi^k \partial_\xi^q v(t; \xi) \right| \leq c_k B^{|q|} q^{\beta q}.$$

Скориставшись формулою Лейбніца диференціювання добутку, дістанемо

$$\partial_\xi^q v(t; \xi) = e^{tP(\xi)} \partial_\xi^q \tilde{\varphi}(\xi) + \sum_{k < q} C_q^k \partial_\xi^{q-k} e^{tP(\xi)} \partial_\xi^k \tilde{\varphi}(\xi).$$

Звідси, урахувавши очевидні співвідношення

$$e^{tP(\xi)} \xrightarrow[t \rightarrow +0]{\xi \in K} E, \quad \sup_{t \in (0; 1) \xi \in K} \left\{ t^{-1} \left| \partial_\xi^{q-k} e^{tP(\xi)} \partial_\xi^k \tilde{\varphi}(\xi) \right| \right\} < +\infty \quad \text{при } k \neq q$$

(тут  $E$  — одинична матриця), приходимо до виконання твердження I).

Далі, оцінка (2) та належність  $\tilde{\varphi}(\cdot)$  до простору  $S^\beta$ ,  $\beta \in [0; 1)$ , забезпечують існування додатної сталої  $\delta_0$  і, для кожного  $k \in \mathbb{Z}_+^n$ , сталої  $\hat{c}_k > 0$ , з якими для всіх  $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n$  і  $t \in (0; 1)$  виконується нерівність

$$|\xi^k v(t; z)| \leq \hat{c}_k e^{\delta_0 \|\eta\|^\gamma}, \quad \gamma := \frac{1}{1-\beta} \geq 1. \quad (7)$$

Ця оцінка та незалежність оціночних величин від  $t$  при  $t \in (0; 1)$ , у свою чергу, гарантують правильність твердження II). Доведемо цей факт при  $n = 1$  (загальний випадок реалізується аналогічно). Розглянемо допоміжну функцію  $v_k(t; z) := z^k v(t; z)$ ,  $t \in (0; 1)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , для якої з (7) одержуємо

$$\begin{aligned} |v_k(t; z)| &= |z^k v(t; z)| \leq 2^k (|\xi|^k + |\eta|^k) |v(t; z)| \leq \\ &\leq 2^k (\hat{c}_k + \hat{c}_0 |\eta|^k) e^{\delta_0 \|\eta\|^\gamma} \leq c_k e^{\delta \|\eta\|^\gamma}, \quad t \in (0; 1), z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

де  $\delta := \delta_0 + \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ . Звідси, скориставшись інтегральною формулою Коші, знаходимо

$$|\partial_\xi^q v_k(t; \xi)| \leq \frac{q!}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{|v_k(t; z)|}{|z - \xi|^{q+1}} dz \leq q! c_k \frac{e^{\delta \|r\|^\gamma}}{r^q}, \quad t \in (0; 1), \xi \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Z}_+$$

(тут  $\Gamma_r$  — коло радіуса  $r$  з центром у т.  $\xi$ ). Поклавши тепер

$r = \left(\frac{q}{\delta\gamma}\right)^{1/\gamma}$  — це значення, при якому величина  $e^{\delta \|r\|^\gamma} / r^q$  досягає мінімуму, дістанемо оцінку

$$|\partial_\xi^q v_k(t; \xi)| \leq c_k B^q q^{\beta q}, \quad t \in (0; 1), \xi \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Z}_+, \quad (8)$$

у якій  $B = (\delta e\gamma)^{1/\gamma}$ . Однак

$$\partial_\xi^q v_k(t; \xi) = \partial_\xi^q (\xi^k v(t; \xi)) = \xi^k \partial_\xi^q v(t; \xi) + kq \xi^{k-q} \partial_\xi^{q-1} v(t; \xi) + \dots,$$

тоді

$$\xi^k \partial_\xi^q v(t; \xi) = \partial_\xi^q v_k(t; \xi) - (kq \xi^{k-q} \partial_\xi^{q-1} v(t; \xi) + \dots).$$

Виходячи із цього зображення, доведемо виконання оцінки з твердження II) методом математичної індукції. При  $k = 0$  ця оцінка збігається з одержаною нерівністю (8). У загальному випадку маємо:

$$\begin{aligned} |\xi^k \partial_\xi^q v(t; \xi)| &\leq |\partial_\xi^q v_k(t; \xi)| + kq |\xi^{k-1} \partial_\xi^{q-1} v(t; \xi)| + \\ &+ \frac{k(k-1)q(q-1)}{2!} |\xi^{k-2} \partial_\xi^{q-2} v(t; \xi)| + \dots \leq c_k B^q q^{\beta q} + kqc_{k-1} B^{q-1} \times \\ &\times (q-1)^{\beta(q-1)} + \frac{k(k-1)q(q-1)}{2!} c_{k-2} B^{q-2} (q-2)^{\beta(q-2)} + \\ &+ \dots \leq c'_k B^q q^{\beta q} \left( 1 + q \frac{(q-1)^{\beta(q-1)}}{q^{\beta q}} + \frac{1}{2!} q \frac{(q-1)^{\beta(q-1)}}{q^{\beta q}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times (q-1) \frac{(q-2)^{\beta(q-2)}}{(q-1)^{\beta(q-1)}} + \dots \Big) &\leq c'_k B^q q^{\beta q} \left( 1 + a_q + \frac{1}{2!} a_q a_{q-1} + \dots \right) \leq \\ &\leq c'_k B^q \left( e^{q^{1-\beta}} \right)^2 q^{\beta q}, \quad t \in (0;1), \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тут використано оцінку  $1 + a_q + \frac{1}{2!} a_q a_{q-1} + \dots \leq \left( e^{q^{1-\beta}} \right)^2$  із [11, с. 262], у якій  $a_q := q \frac{(q-1)^{\beta(q-1)}}{q^{\beta q}}$ .

Звідси, врахувавши, що  $\left( e^{q^{1-\beta}} \right)^2 = \left( e^{\frac{2}{q^\beta}} \right)^q \leq e^{2q}$ ,  $\beta \geq 0$ , приходимо до твердження II).

Отже, доведено коректну розв'язність задачі Коші (4), (6) у просторі  $S^\beta$ ,  $\beta \in [0;1)$ , а відтак, правильність наступного твердження.

**Теорема.** Нехай  $\varphi(\cdot) \in S_\beta$ ,  $\beta \in [0;1)$ , тоді відповідна задача Коші (1), (3) на множині  $\Pi$  коректно розв'язна. Її розв'язок  $u$  зображується формулою  $u(t; x) = G(t; x) * \varphi(x)$ ,  $(t; x) \in \Pi$ , і при кожному фіксованому  $t \in (0; T]$  є елементом простору  $S_\beta$ .

**Висновок.** Розв'язки гіперболічних систем (1) у просторах  $S_\beta$ ,  $\beta \in [0;1)$ , стосовно просторової змінної зберігають властивості, які вони мали на початковій гіперплощині.

### Список використаних джерел:

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. — Москва : Физматгиз, 1958. — 274 с.
2. Петровский И. Г. О задаче Коши для уравнений в частных производных / И. Г. Петровский // Мат. сб. — 1937. — Т. 2, №5. — С. 815–870.
3. Leray J. Hyperbolic differential equations / J. Leray. — Princeton, 1952. — 238 p.
4. Ладыженская О. А. Смешанная задача Коши для гиперболических уравнений / О. А. Ладыженская. — Москва : Гостехиздат, 1953. — 279 с.
5. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. — Москва : ИЛ, 1961. — 122 с.
6. Лере Ж. Задача Коши / Ж. Лере, Л. Гординг, Т. Котакке. — Москва : Мир, 1967. — 152 с.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — Москва : Наука, 1988. — 333 с.
8. Каленюк П. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П. Каленюк, З. Нитребич. — Львів : Львівська політехніка, 2002. — 292 с.

9. Firman T. Mixed problem for countable hyperbolic system of linear equation / T. Firman, V. Kyrylych // Azerbaijan Journal of Mathematics. — 2015. — Vol. 5. — № 2. — P. 47–60.
10. Derevianko T. O. Optimal control of quasihyperbolic system of linear equations of the first order with infinite planning horizon / T. O. Derevianko, V. M. Kyrylych // Ukrain. Mat. Journal. — 2015. — Vol. 67. — № 2. — P. 185–201.
11. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — Москва : Физматгиз, 1958. — 307 с.

## SMOOTH SOLUTIONS TO HYPERBOLIC BY SHILOV SYSTEMS

We consider a wide class of linear partial differential equations hyperbolic by Shilov, which covers the class of hyperbolic by Petrovsky systems with constant coefficients, and also the class of Gording equations. For such systems, the problem of finding smooth classical solutions, which are vector functions with compact support or rapidly decreasing at infinity, is investigated. Studies are carried out by the Fourier transform method in combination with the theory of spaces of the type  $S$  and  $S'$  Gelfand I. M. and Shilov G.E. basic and generalized functions. The components of the fundamental solution of the Cauchy problem for such systems belong to the Dirac space of generalized functions, and also are convolvers in some spaces of the main Gelfand and Shilov functions. This made it possible to establish in the classical sense the correct solvability of the Cauchy problem in each such space of basic functions. That is, to prove the existence, uniqueness and continuous dependence on the initial data of the classical solution of a hyperbolic system in space of basic functions, provided that its boundary value on the initial hyperplane is an element of this space. At the same time, the solution tends to the initial vector of the function as the time variable approaches zero in the sense of the topology of this space. This result, in particular, makes it possible to draw the important conclusion that within the framework of a space of the  $S$  type, evolutionary processes with no external influence, which are described by Shilov hyperbolic system, may, over time, retain those qualitative characteristics that they owned at the initial stage of evolution.

**Key words:** *hyperbolic by Shilov systems, Cauchy problem, basic and generalized functions.*

Отримано: 15.11.2018



УДК 519.63:532.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.113-125

**О. Р. Подгорний**, аспірант

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

## **ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ У НЕОДНОРІДНОМУ ҐРУНТІ**

Розглядається задача теорії стаціонарної фільтрації в ізотропному неоднорідному ґрунті у припущенні, що виконується закон Дарсі. Математичною моделлю цієї задачі є еліптичне рівняння для функції течії, доповнене крайовими умовами другого роду на ділянках межі, доповнене крайовими умовами першого роду на ділянках межі, що є непроникними для рідини. При цьому, в постановку задачі входить невідоме значення повних витрат рідини, для знаходження котрого формулюється додаткове інтегральне співвідношення. Для її чисельного аналізу пропонується використати структурно-варіаційний метод (метод R-функцій), що дозволить найбільш повно урахувати в обчислювальному алгоритмі всю геометричну та аналітичну інформацію, яка входить у постановку задачі. Від вихідної задачі здійснено перехід до крайової задачі з відомими крайовими умовами. Згідно з методом R-функцій для побудованої структури розв'язку, яка точно враховує всі крайові умови отриманої задачі, обґрунтовано використання варіаційного методу Рітца для апроксимації невизначеної компоненти. Після цього, з додаткового інтегрального співвідношення знайдено наближене значення невідомих витрат рідини і наближений розв'язок вихідної задачі. Було проведено обчислювальний експеримент для різних значень коефіцієнтів фільтрації в області, яка має вигляд нижньої половини кільця, з умовою, що координатні функції були побудовані на основі поліномів Лежандра. У випадку сталого коефіцієнта фільтрації наближений розв'язок задачі було порівняно з точним розв'язком. Виявлено, що похибка значення повних витрат рідини та наближеного розв'язку задачі зменшується зі збільшенням кількості координатних функцій. Також було розглянуто випадки, де коефіцієнт фільтрації збільшується з глибиною. Встановлено, що зі збільшенням кількості координатних функцій значення повних витрат має тенденцію до збігу. Отже, запропонований метод чисельного аналізу довів свою ефективність і може бути використаний для розв'язку практичних задач. Перевагами розробленого методу є отримання розв'язку крайової задачі у вигляді єдиного аналітичного виразу і точне задоволення всіх крайових умов задачі.

**Ключові слова:** *фільтраційна течія, задача напірної фільтрації, функція течії, метод R-функцій, метод Рітца.*

**Вступ.** Фільтраційною течією називається просочування у пористому середовищі рідин, нафти та газу, газованої [12]. До розгляду таких

течій призводять процеси осушення і зрошення, втікання морської води в прісну, обтікання гідротехнічних споруд, просочування води крізь земляні дамби тощо. Математичними моделями цих процесів зазвичай є крайові та початково-крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. Точні розв'язки задач фільтрації у деяких випадках можна отримати методами теорії функцій комплексної змінної [7], але більш універсальними для практичних застосувань є чисельні методи. Серед чисельних методів теорії фільтрації можна зазначити метод сіток, метод скінченних елементів, метод мажорантних областей, метод суматорних подань, метод фіктивних областей тощо [3–6, 8, 9]. До загальних недоліків існуючих чисельних методів можна віднести те, що при розгляді задач у областях складної геометрії межа області у обчислювальному алгоритмі враховується лише наближено, наприклад, як масив точок у сіткових методах чи як ламана у методі скінченних елементів. Точно врахувати геометричну та аналітичну інформацію, що міститься у постановці крайової чи початково-крайової задачі математичної фізики, дозволяє структурно-варіаційний метод  $R$ -функцій [13]. У чисельному аналізі фільтраційних течій метод  $R$ -функцій було застосовано у [1, 2, 15], але в них було розглянуто лише задачі фільтрації під гідротехнічними спорудами і вважалося, що фільтраційні витрати рідини є заданими.

Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу фільтраційних течій на основі використання методу  $R$ -функцій є актуальною науковою задачею.

**Метою роботи** є розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу плоских стаціонарних фільтраційних течій на основі математичної моделі напірної фільтрації у термінах «функція течії». Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [11].

**1. Постановка задачі.** Розглянемо стаціонарну задачу напірної фільтрації [11]. Нехай маємо фільтраційний потік води, схема якого наведена на рис. 1.

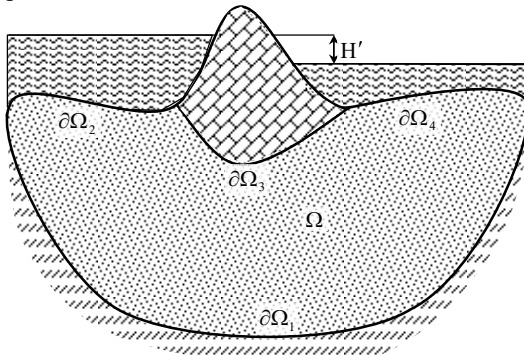


Рис. 1. Схема фільтраційного потоку води

На рис. 1 область фільтрації  $\Omega$  обмежена непроникними межами  $\partial\Omega_1$  і  $\partial\Omega_3$  (вони є лініями течії) та двома межами водойми  $\partial\Omega_2$  і  $\partial\Omega_4$  (вони є потенціальними лініями). Позначимо через  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  вектор швидкості фільтраційного потоку. Вважатимемо, що виконується закон Дарсі, який означає, що втрати напору при фільтрації пропорційні швидкості фільтрації.

Уводячи у розгляд за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1)$$

функцію течії  $\psi$ , отримаємо таку задачу:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{у } \Omega, \quad (2)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_3} = Q, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_4} = 0, \quad (4)$$

де  $\kappa = \kappa(x, y)$  — коефіцієнт фільтрації,  $n$  — зовнішня нормаль до відповідних ділянок межі,  $H'$  — діючий напір,  $Q$  — повни витрати рідини, які є заздалегідь невідомими і визначаються інтегральним співвідношенням

$$\int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial n} ds = -H'. \quad (5)$$

**2. Метод чисельного аналізу.** Розглянемо допоміжну задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{у } \Omega, \quad (6)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad u|_{\partial\Omega_3} = 1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_4} = 0. \quad (8)$$

Нехай функції  $\omega(x, y)$ ,  $\omega_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , побудовані користуючись конструктивним апаратом теорії  $R$ -функцій [13] є такими, що:

$$\omega(x, y) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad \omega(x, y) > 0 \quad \text{у } \Omega; \quad \frac{\partial\omega}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = -1,$$

$$\omega_i(x, y) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_i; \quad \omega_i(x, y) > 0 \quad \text{у } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_i);$$

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_i} = -1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

У [11] було доведено, що жмуток функцій

$$u = f - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} f + \omega_{1-3} \Phi - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \Phi), \quad (9)$$

де  $\Phi = \Phi(x, y)$  — невизначена компонента, а

$$f(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)}{\omega_1(x, y) + \omega_3(x, y)},$$

$$D_1^{(2-4)} g = \frac{\partial \omega_{2-4}}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{2-4}}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\omega_{2-4}(x, y) = \omega_2(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_4(x, y), \quad \omega_{1-3}(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_3(x, y),$$

є структурою розв'язку крайової задачі (6)–(8), тобто при будь-якому виборі невизначеної компоненти  $\Phi$  функція вигляду (9) точно задовольняє крайові умови (7), (8).

У задачі (6)–(8) зробимо заміну

$$u = \varphi + v,$$

де  $\varphi = f - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} f$ , а  $v$  — нова невідома функція. Тоді

функція  $v$  буде розв'язком крайової задачі

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F \text{ у } \Omega, \quad (10)$$

$$v|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0, \quad (11)$$

$$\text{де } F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

З задачею (10), (11) пов'яжемо оператор  $A$  цієї крайової задачі, який діє у просторі  $L_2(\Omega)$  за правилом

$$Av = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (12)$$

Вважатимемо, що область визначення  $D_A$  оператора  $A$  вигляду (12) складається з тих функцій з  $L_2(\Omega)$ , які належать множині  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  та задовольняють крайові умови (11). Зрозуміло, що  $D_A$  — лінеал.

Дослідимо властивості оператора  $A$  вигляду (12). Очевидно, що  $A$  — лінійний оператор. Розглянемо тепер скалярний добуток  $(Av_1, v_2)$ , де  $v_1, v_2 \in D_A$ . Застосовуючи першу формулу Гріна [10], отримаємо, що

$$\begin{aligned} (Av_1, v_2) &= \iint_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right] v_2 dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial n} v_2 ds . \end{aligned}$$

Інтеграл за  $\partial\Omega$  дорівнюватиме нулеві, оскільки  $v_1, v_2 \in D_A$ , а отже,  $v_2|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0$ ,  $\frac{\partial v_1}{\partial n}|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0$ , і

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial n} v_2 ds = \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial n} v_2 ds + \int_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial n} v_2 ds .$$

Тоді

$$(Av_1, v_2) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx dy \quad (13)$$

і  $(Av_1, v_2) - (v_1, Av_2) = (Av_1, v_2) - (Av_2, v_1) = 0$ , тобто  $A$  — симетричний оператор.

Додатність оператора  $A$  випливає з того, що для всіх  $v \in D_A$

$$(Av, v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq 0 ,$$

причому через умови (11) рівність  $(Av, v) = 0$  можлива лише, якщо  $v = 0$ .

Доведемо тепер додатну означеність оператора  $A$  вигляду (12). Як відомо [14], для функцій  $u$  з простору Соболева  $W_2^1(\Omega)$  матиме місце нерівність

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq c \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_1} u^2 ds \right\} , \quad (14)$$

де  $\Omega$  — область з межею Липшиця  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma_1$  — відкрита частина межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  додатної міри Лебега,  $c > 0$  — стала, залежна тільки від області  $\Omega$  і від  $\Gamma_1$ .

Оскільки

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} \left[ u^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy ,$$

то з нерівності (14) випливає оцінка

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} u^2 dx dy \leq c \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_1} u^2 ds \right\}. \quad (15)$$

Нехай коефіцієнт фільтрації задовольняє для всіх  $(x, y) \in \Omega$  нерівності  $0 < \kappa_1 \leq \kappa(x, y) \leq \kappa_2$ . Тоді для всіх  $v \in D_A$

$$(Av, v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \frac{1}{\kappa_2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Обираючи далі у (15)  $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3$  і враховуючи, що  $v|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0$  для функцій  $v \in D_A$ , отримуємо нерівність

$$(Av, v) \geq (c\kappa_2)^{-1} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

яка означає, що  $A$  — додатно означений оператор.

Введемо на  $D_A$  енергетичний добуток  $[v_1, v_2]$ , поклавши відповідно до (13) для будь-яких  $v_1, v_2 \in D_A$

$$[v_1, v_2] = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16)$$

Поповнюючи  $D_A$  у сенсі збіжності за енергетичною нормою

$$\|v\|_A = \sqrt{[v, v]} = \sqrt{\iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}, \quad (17)$$

породженою скалярним добутком (16), отримаємо енергетичний простір  $H_A$  оператора  $A$  вигляду (12).

Отже, відповідно до теореми про функціонал енергії [10] задача (10), (11) за умови  $F \in L_2(\Omega)$  має у  $H_A$  єдиний (узагальнений) розв'язок  $v^*$ , який є точкою мінімуму у  $H_A$  функціонала енергії

$$J[v] = \|v\|_A^2 - 2(F, v) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - 2Fv \right] dx dy.$$

Наближений розв'язок екстремальної задачі  $J[v] \rightarrow \inf_{v \in H_A}$  відповідно до методу Рітца шукатимемо у вигляді

$$v_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k.$$

Відповідно до структури (9) координатну послідовність  $\{\varphi_k\}$  складемо з функцій

$$\varphi_k = \omega_{1-3} \tau_k - \frac{\omega_{1-3} \omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \tau_k),$$

де  $\{\tau_k\}$  — будь-яка повна у  $L_2(\Omega)$  система функцій (степеневі чи тригонометричні поліноми, сплайни тощо).

Тоді для визначення сталих  $c_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (систему Рітца)

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j] c_k = (F, \varphi_j), \quad j=1, 2, \dots, n,$$

де

$$[\varphi_k, \varphi_j] = \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$(F, \varphi_j) = \int_{\Omega} F \cdot \varphi_j dx dy, \quad k, j=1, 2, \dots, n.$$

Із загальних теорем збіжності метода Рітца [10] впливає збіжність  $\{v_n\}$  до  $v^*$  як у нормі (17), так і у нормі  $L_2(\Omega)$ .

Тоді функцію  $u^* = \varphi + v^*$  можна розглядати як узагальнений розв'язок задачі (6)–(8), до якого у нормі  $L_2(\Omega)$  збігатиметься послідовність наближених розв'язків  $\{u_n\}$  цієї задачі, яка формується за правилом  $u_n = \varphi + v_n$ .

Зрозуміло, якщо  $u^*$  — розв'язок задачі (6)–(8), то функція  $\psi^* = Q^* u^*$ , де відповідно до (5)

$$Q^* = -H' \cdot \left( \int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial n} ds \right)^{-1},$$

є розв'язком вихідної задачі (2)–(4).

Отже, справджується така теорема.

**Теорема.** Нехай  $F \in L_2(\Omega)$ . Тоді послідовність

$$\psi_n = Q_n u_n,$$

де

$$Q_n = -H' \cdot \left( \int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial n} ds \right)^{-1}, \quad u_n = \varphi + v_n,$$

збігається у  $L_2(\Omega)$  до узагальненого розв'язку задачі (2)–(4).

Зазначимо, що умова  $F \in L_2(\Omega)$  як раз і є умовою застосовності до розв'язання задачі метод  $R$ -функцій.

Зазначимо також, що умова  $\left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0$  є природною, а отже,

при виборі координатної послідовності  $\{\varphi_k\}$  їй можна не задовольняти.

**3. Результати обчислювального експерименту.** Обчислювальний експеримент у задачі (2)–(4) було проведено у області  $\Omega$ , зображеній на рис. 2. Межа  $\partial\Omega$  цієї області складається з зовнішнього кола радіуса  $R$ , внутрішнього кола радіуса  $r$  ( $r < R$ ) та двох відрізків горизонтальної прямої  $y = 0$ . Для області  $\Omega$  функції  $\omega_1(x, y)$ ,  $\omega_2(x, y)$ ,  $\omega_3(x, y)$ ,  $\omega_4(x, y)$  обираємо у вигляді:

$$\omega_1(x, y) = \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2), \quad \omega_2(x, y) = -y,$$

$$\omega_3(x, y) = \frac{1}{2r}(r^2 - x^2 - y^2), \quad \omega_4(x, y) = -y.$$

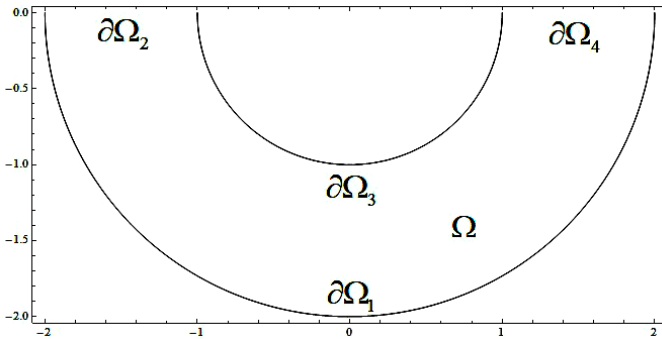


Рис. 2. Область  $\Omega$

Для обчислювального експерименту було обрано такі коефіцієнти фільтрації [8]:

$$\kappa_0 = 0,391, \quad \kappa_1 = 1,593e^{2y}, \quad \kappa_2 = 0,811 \text{ ch}^{-2} y.$$

Відомо [8], що у ґрунтах з коефіцієнтами фільтрації, які зменшуються з глибиною, напір більше на понур і менше на підшову флютбету, ніж в однорідному ґрунті. При цьому, чим швидше зменшується коефіцієнт фільтрації з глибиною, тим більший перерозподіл тиску відбувається між понурою та підшовою флютбету.

За функції  $\{\tau_k\}$  було обрано поліноми Лежандра. Точний розв'язок задачі (2)–(4) для сталого коефіцієнта фільтрації має вигляд:

$$\psi^* = Q^* \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\ln \frac{r}{R}},$$

$$\text{де } Q^* = -\frac{H'\kappa_0}{\pi} \ln \frac{r}{R}.$$



Для сталого коефіцієнту фільтрації  $\kappa_0 = 0,391$  маємо  $Q^* = 0,0863$ , а, отже, точний розв'язок

$$\psi^* = -0,1245 \ln \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В таблиці 1 наведено порівняння точного та наближеного розв'язків задачі в залежності від кількості координатних функцій.

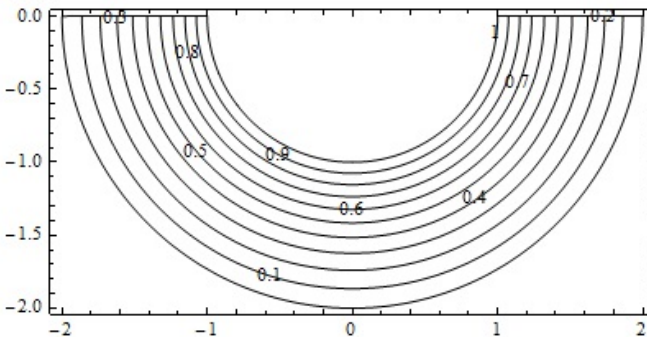
Таблиця 1

*Порівняння точного та наближеного розв'язків для сталого коефіцієнту фільтрації  $\kappa_0$  в залежності від кількості координатних функцій  $n$*

$n$	6	10	15	21	28
$Q_n$	0,0931	0,0926	0,0922	0,0918	0,0914
$\frac{ Q_n - Q^* }{ Q^* }$	7,97%	7,41%	6,90%	6,46%	6,03%
$\frac{\ \psi_n - \psi^*\ _{L_2(\Omega)}}{\ \psi^*\ _{L_2(\Omega)}}$	8,61%	7,91%	7,30%	6,81%	6,30%

З таблиці 1 бачимо, що зі зростанням кількості координатних функцій відносна похибка визначення величини  $Q$  та функції  $\psi$  зменшується. Це свідчить на користь хорошої якості запропонованого у роботі підходу.

На рисунку 3 наведено лінії рівня розв'язку задачі з коефіцієнтом фільтрації  $\kappa_0$ , а на рисунку 4 наведено векторне поле швидкостей фільтраційного потоку, який було відтворене за формулою (1).



**Рис. 3.** Лінії рівня функції  $\psi_{28}$  для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_0$

У таблиці 2 наведено залежність значення величини  $Q_n$  від кількості  $n$  координатних функцій для змінних коефіцієнтів фільтрації  $\kappa_1 = 1,593e^{2y}$ ,  $\kappa_2 = 0,811ch^{-2}y$ .

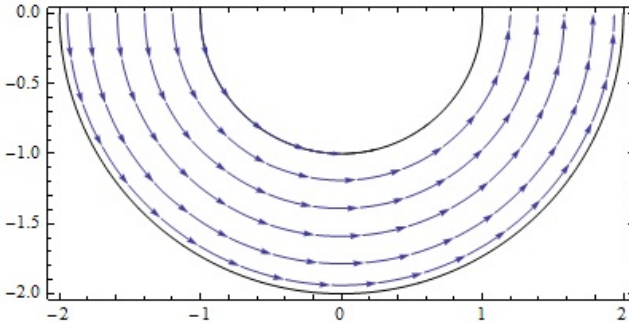


Рис. 4. Векторне поле швидкостей, відтворене за функцією  $\psi_{28}$ , для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_0$

Таблиця 2

Значення величини  $Q_n$  для змінних коефіцієнтів фільтрації  $\kappa_1$  та  $\kappa_2$  в залежності від кількості координатних функцій  $n$

$n$	6	10	15	21	28
$\kappa_1$	0,0819	0,0797	0,0778	0,0766	0,0752
$\kappa_2$	0,0108	0,0106	0,0104	0,0102	0,0101

Як бачимо з таблиці 2 зі збільшенням кількості координатних функцій  $n$  значення  $Q_n$  усталюються.

На рис. 5 та 7 приведені лінії рівня розв'язку задачі для коефіцієнтів фільтрації  $\kappa_1 = 1,593e^{2y}$ ,  $\kappa_2 = 0,811ch^{-2}y$  відповідно, а на рис. 6 та 8 наведено відповідне векторне поле швидкостей фільтраційного потоку.

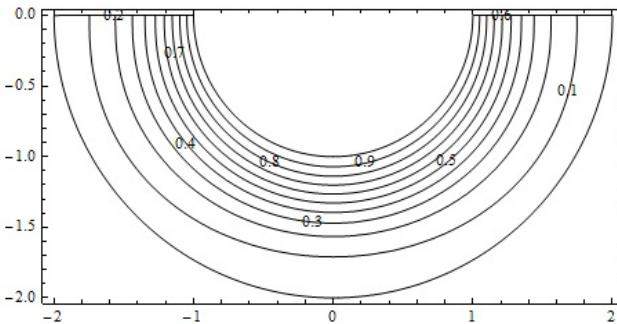
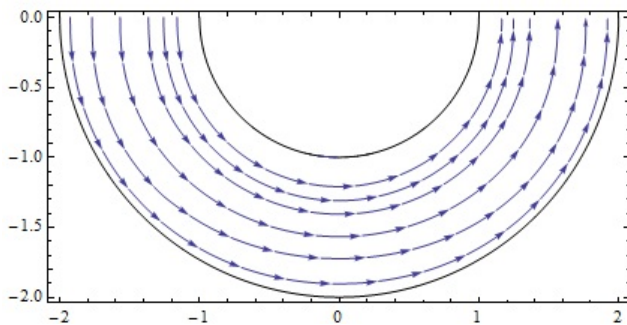
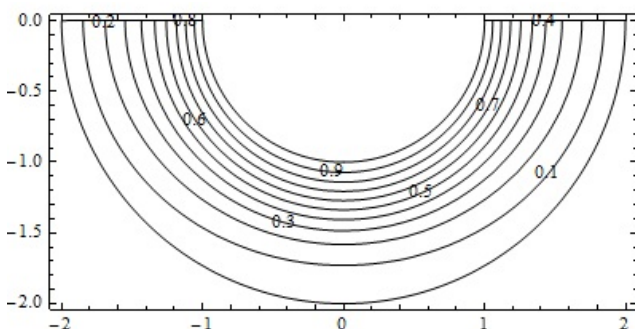


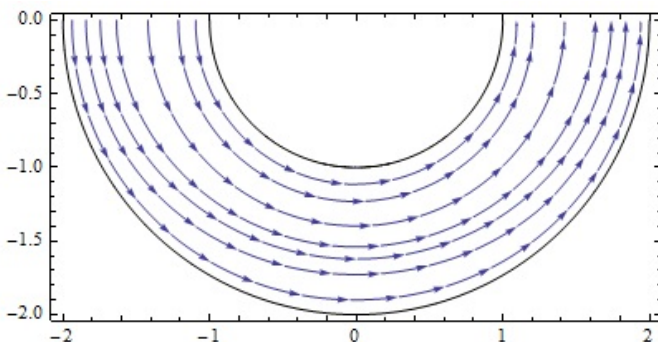
Рис. 5. Лінії рівня функції  $\psi_{28}$  для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_1$



*Рис. 6. Векторне поле швидкостей, відтворене за функцією  $\psi_{28}$ , для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_1$*



*Рис. 7. Лінії рівня функції  $\psi_{28}$  для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_2$*



*Рис. 8. Векторне поле швидкостей, відтворене за функцією  $\psi_{28}$ , для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_2$*

**Висновки.** В роботі вперше для отримання наближеного розв'язку задачі фільтрації за законом Дарсі запропоновано використати метод  $R$ -

функцій у комбінації з методом Рітца, при застосуванні яких загальні витрати рідини вважаються невідомими і визначаються у процесі розв'язання задачі. Обчислювальний експеримент, проведений для тестової задачі, продемонстрував можливості та ефективність цього метода. Результати можуть бути поширені на інші крайові задачі теорії фільтрації, а також знайти своє застосування у розв'язання прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фільтраційних течій. Це і визначає наукову новизну та практичну значимість отриманих у роботі результатів.

### Список використаних джерел:

1. Блишун А. П. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью / А. П. Блишун, М. В. Сидоров, И. Г. Яловега // Радиоэлектроника и информатика. — 2010. — № 2. — С. 40–46.
2. Блишун А. П. Применение метода R-функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями / А. П. Блишун, М. В. Сидоров, И. Г. Яловега // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2012. — № 1. — С. 50–56.
3. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський. — Київ : Наук. думка, 2007. — 292 с.
4. Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в математической физике / П. Н. Вабищевич. — Москва : Изд-во МГУ, 1991. — 156 с.
5. Венгерський П. Про задачу сумісного руху поверхневих і ґрунтових потоків на території водозбору / П. Венгерський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. — 2014. — Вип. 22. — С. 41–53.
6. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. — Л. : Судостроение, 1979. — 264 с.
7. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — Москва : Наука, 1973. — 736 с.
8. Ляшко И. И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, В. И. Лаврик, Г. Е. Мистецкий. — Киев : Наук. думка, 1974. — 202 с.
9. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. — Киев : Наук. думка, 1973. — 264 с.
10. Михлин С. Г. Вариационные методы решения задач математической физики / С. Г. Михлин. — Москва : Наука, 1970. — 512 с.
11. Подгорний О. Р. Математичні моделі фільтраційних течій та застосування методу R-функцій для їх чисельного аналізу / О. Р. Подгорний // Радиоэлектроника та информатика. — 2018. — № 1. — С. 40–47.
12. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — Москва : Наука, 1977. — 664 с.
13. Рвачёв В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения / В. Л. Рвачёв — Киев : Наук. думка, 1982. — 552 с.
14. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. — Москва : Мир, 1985. — 590 с.

15. Сидоров М. В. Математическое компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений / М. В. Сидоров, А. В. Стороженко // Радиоэлектроника и информатика. — 2004. — № 4. — С. 58–61.

### NUMERICAL ANALYSIS OF FILTRATION FLOWS IN INHOMOGENEOUS MEDIA USING THE R-FUNCTIONS METHOD

The problem of the stationary porous media flow theory in an isotropic inhomogeneous media is considered in the assumption that the Darcy law is fulfilled. The mathematical model of this problem is the elliptic equation for the stream function, supplemented by second kind boundary conditions at the reservoir boundaries, and the first kind boundary conditions in regions that are impenetrable to the liquid. At the same time, the unknown value of the full liquid flow enters the problem statement and for its finding an additional integral ratio was formulated. The structural-variational method (the R-functions method) is proposed to be used for numerical analysis and that will allow taking into account all the geometric and analytical information from the problem statement most fully. The transition from the original problem to a boundary value problem with known boundary conditions was made. According to the R-functions method for the constructed solution structure, which accurately takes into account all boundary conditions of the obtained problem, the use of the variational Ritz method for the approximation of an indefinite component is substantiated. After that, an approximate solution of the initial problem was found from an additional integral relation. A computational experiment was conducted for different values of filtration coefficients in an area that has the form of the lower half of the ring. Also, the coordinate functions were constructed on the bases of Legendre polynomials. The approximate solution of the problem was compared with the exact solution in the case of a stable filtration coefficient. It is found that the error of determining the full liquid flow and the approximate solution of the problem decreases with the increasing number of coordinate functions. Also, the cases, where the filtration coefficient increases with depth, were considered. It is established that with the increase in the number of coordinate functions, the value of total costs tends to converge. Consequently, the proposed method of numerical analysis proved its effectiveness and can be used for practical problems solving. The advantages of the developed method are obtaining a solution of the boundary value problem in the form of the single analytical expression and the exact satisfaction of all boundary conditions of the problem.

**Key words:** *flow in porous media process, pressure flow of fluid, R-functions method, Ritz method.*

Отримано: 14.11.2018

УДК 539.3

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.126-134

**Ю. В. Сачук\***, канд. фіз.-мат. наук,**О. В. Максимук\*\***, д-р. фіз.-мат. наук, професор\*Східноєвропейський національний університет  
імені Лесі Українки, м. Луцьк,

\*\* Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

## **КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ В ЗАДАЧАХ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ КАНОНІЧНИХ ШТАМПІВ З ПІВПЛОЩИНОЮ**

Для плоскої контактної задачі про взаємодію жорстких штампів канонічної форми (циліндричної, гіперболічної, параболічної, еліптичної) із півплощиною досліджено напружено-деформований стан в тілі. Для обчислення компонент напружень та оптимізації обчислень застосовано метод сіток із дзеркальним відображень результатів. Проаналізовано та підібрано програмні засоби для реалізації удосконалених методик розрахунку напруженого стану. Побудовано 3D-графіки напружень та відповідні їм лінії рівня для полегшення аналізу результатів. Побудову 3D-зображення кожної із компонент напружень було здійснено за допомогою наближеного обчислення інтегралу методом середніх прямокутників у кожній точці розбиття, в якій знаходилося значення еліптичного інтегралу третього роду, був був ряд інтегральних сум і числове значення інтегралу. Для визначення зон пружно-пластичної деформації проаналізовано різні теорії пластичності та для реалізації поставленої мети обрано теорію максимальних дотичних напружень для дослідження умов появи пружно-пластичних зон в тілі при різних областях контакту та геометричних і фізико-механічних параметрах.

У рамках цієї теорії проведено пошук нових конструкційних матеріалів із заданими всіма необхідними фізико-механічними параметрами. Для дослідження процесу появи областей пружно-пластичної деформації обрано нові титанові сплави із покращеними механічними властивостями. Встановлено нові механічні ефекти, що виникають в процесі взаємодії для різних штампів та досліджено умови, що приводять до їх появи. Отримані результати можна використати при побудові експериментально-числової методики для визначення умов появи пластичних зон у тілі для матеріалів з різними механічними властивостями. Розвинута методика дозволяє визначити величину областей текучості, їх межі та характер розподілу із використанням ліній рівня та визначити місця найбільшої концентрації напружень і визначити максимальні значення для різних штампів.

**Ключові слова:** *контактна взаємодія, пружно-пластичні зони, штампи канонічної форми, теорія максимальних дотичних напружень, пружна півплощина, інваріанти тензора напружень, лінії рівня, аналітико-числові методи, комп'ютерне моделювання, 3D-зображення, лінії рівня.*

**Вступ.** На сучасному етапі розвитку приладобудування та промисловості одним із найважливіших аспектів виробництва є забезпечення довговічності роботи основних конструкцій та елементів машин в процесі експлуатації. Одним із способів збільшення ресурсу роботи деталей та механізмів є використання нових конструкційних матеріалів та їх сплавів в залежності від їх фізико-механічних характеристик [11]. Досліджуючи та враховуючи пружно-пластичні деформації, можна знизити концентрацію напружень в конструкціях, підвищити спротив тіл до ударних навантажень, визначити запас міцності, жорсткості та стійкості і тим самим забезпечити раціональне функціонування та надійність конструкцій [4, 6].

Одним із перспективних напрямків таких досліджень є комп'ютерне моделювання із використанням апарату контактної механіки, зокрема взаємодії жорстких штампів з пружною півплощиною. Для реалізації таких моделей необхідно застосовувати та розвивати аналітико-числові методи розв'язування контактних задач [5, 12], будувати числові схеми для визначення контактної тиску на всьому діапазоні вхідних параметрів. Недостатньо дослідженими в інженерній практиці є умови появи пружно-пластичних зон для фрикційних пар при конкретних матеріалах із використанням універсальних методів фізико-математичного моделювання та їх чисельної реалізації із побудовою ілюстраційних 3D-графіків та ліній рівня у відповідних зонах.

**Напружено-деформований стан в півплощині.** Розрахунок компонент напружено-деформованого стану в півплощині визначається за формулами [3]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Для подальших числових розрахунків та побудови графіків введемо наступне позначення  $G_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E_*}$ . У формулах (1)  $p(s)$  — контактний

тиск,  $2a$  — область контакту. Варто зазначити, що для штампів циліндричної, еліптичної та гіперболічної форм знайдено аналітичний розв'язок контактної тиску у роботах [5, 12], який виражається через повні еліптичні інтеграли третього роду [10]. Важливим фактором при застосуванні чисельної методики обчислення еліптичних інтегралів є можливість обчислення їх значень при визначенні напружень в середині області (у півплощині) у заданих точках розбиття [10]. Особливістю таких обчислень є те, що для побудови 3D-зображення та ліній рівня потрібно якісно задати крок розбиття для сітки [13].

Побудову 3D-зображення кожної із компонент напружень (1) було здійснено за допомогою наближеного обчислення інтегралу методом середніх прямокутників у кожній точці розбиття, в якій знаходилося значення еліптичного інтегралу третього роду, будувався ряд інтегральних сум і числове значення інтегралу [10]. Проблемою в таких розрахунках є час отримання зображень, тому що у разі задання великої точності обчислень число операції сумування та добутку зростає в багато разів. Для оптимізації обчислювального процесу було враховано, що контактний тиск разом із підінтегральною функцією в компонентах напружень є парною функцією, та здійснено відображення точок зображення симетрично щодо осі ординат [8].

Для аналізу напружено-деформованого стану в півплощині та графічного відображення пластичних зон в ній засобами системи Matlab на основі 3D-графіків було побудовано ізолінії рівня із точністю результатів до  $10^{-5}$ . Можливість побудови таких зображень забезпечує функція  $\text{contour}(x, y, z)$  та  $\text{surf}(x, y, z)$ , де вхідні параметри — це масиви даних, отриманих на попередніх кроках [13].

В якості прикладу розрахунку наведено компоненти напружень для штампа гіперболічної форми при значній області контакту та великій кривизні штампа [12], що є справедливим для новий конструкційних матеріалів із покращеними механічними властивостями [1, 7]

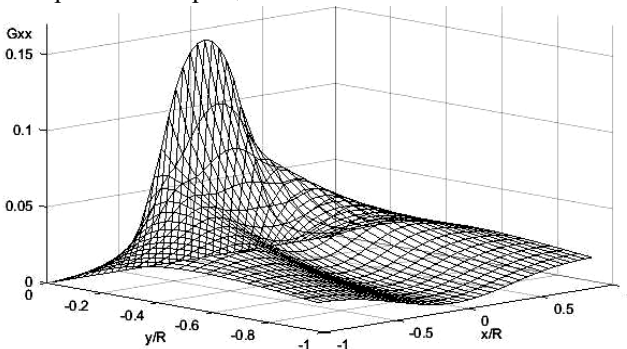
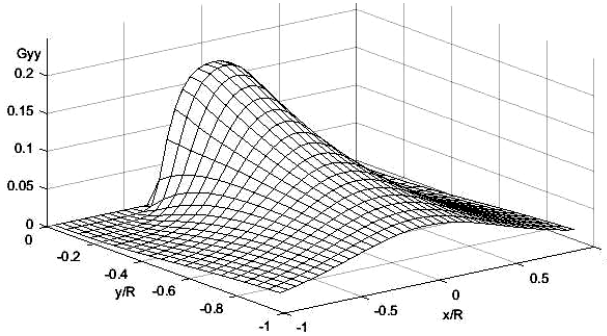
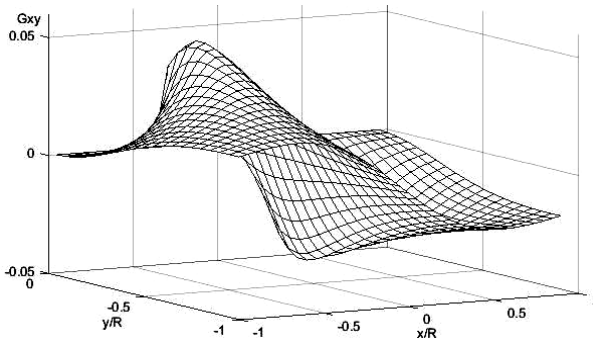


Рис. 1. Графік безрозмірного напруження  $G_{xx}$  для штампа гіперболічної форми при  $a/R = 0.35$  та  $\varepsilon = 0.1$





**Рис. 2.** Графік безрозмірного напруження  $G_{yy}$  для штампна гіперболічної форми при  $a/R = 0.35$  та  $\varepsilon = 0.1$



**Рис. 3.** Графік безрозмірного напруження  $G_{xy}$  для штампна гіперболічної форми при  $a/R = 0.35$  та  $\varepsilon = 0.1$

Для зручності обчислень згідно [5, 12] прийемо, що: для штампна еліптичної форми  $a, b$  — велика та мала півосі еліпса, для штампна гіперболічної форми  $a, b$  — величини дійсної та уявної півосей гіперболи та покладемо, що  $a = R, b = R(1 \pm \varepsilon)$  у штампнах еліптичної та гіперболічної форми.

**Умови переходу від пружної до пружно-пластичної деформації в тілі.** Згідно з роботою [1] приймаємо, що перехід з пружного стану в пластичний відбувається, якщо максимальне дотичне напруження досягає деякого граничного значення для даного матеріалу:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (2)$$

Варто зауважити, що для більшості пластичних матеріалів границі при розтязі та стисненні однакові, тому за цією теорією міцності можливо із високою ймовірністю передбачати початок процесу течучості матеріалу [1, 6].

Якщо прийняти, що матеріал після переходу в пластичний стан описується рівняннями ідеальної пластичності з константою межі текучості  $k$ , то значення  $\tau_{\max} = k$  визначає початок межі зони текучості, а лінії рівня дозволяють встановити їх величину і місце знаходження.

$$\text{Приймаємо [1, 3]} \quad \bar{\tau}_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{E_*} = \frac{\sigma_T}{2E_*}, \text{ де } \frac{1}{E_*} = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p} \text{ —}$$

приведений модуль пружності.

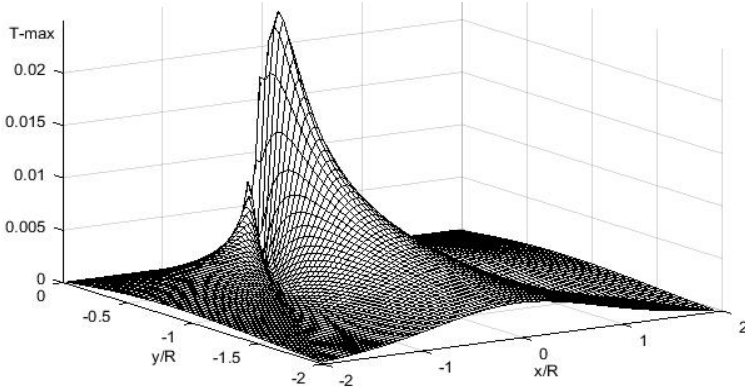
Дані таблиці 1 механічних властивостей матеріалів взяті з [1, 6, 7]

Таблиця 1

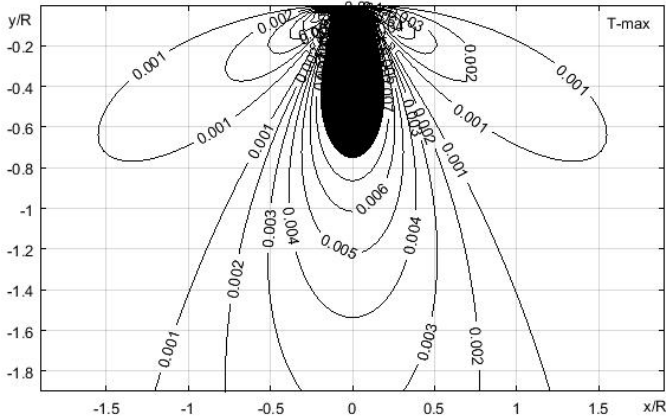
*Механічні властивості матеріалів*

Матеріал	Модуль пружності $E$ , МПа	Коефіцієнт Пуассона, $\nu$	Межа текучості, $\sigma_T$ , МПа
Титановий сплав (Ti-6Al-6V-2Sn) (штамп)	$1.15 \cdot 10^5$	0.32	1220
Титановий сплав (Ti-6Al-4V) (основа)	$1.12 \cdot 10^5$	0.32	930

**Числові результати та аналіз особливостей пружно-пластичних зон.** Процес побудови ізоліній рівня із областями пружно-пластичних деформацій умовно можна поділити на 2 етапи: перший етап — власне побудови ізоліній із використанням вищеописаних функцій, а другий — це автоматичне нанесення на лінії рівня межі пружно-пластичної деформації на основі константи текучості  $k$ .



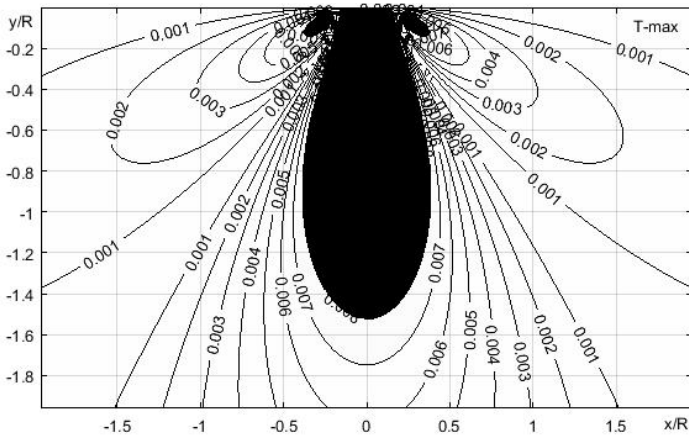
**Рис. 4.** Графік розподіл безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампа циліндричної форми при  $a/R = 0.15$



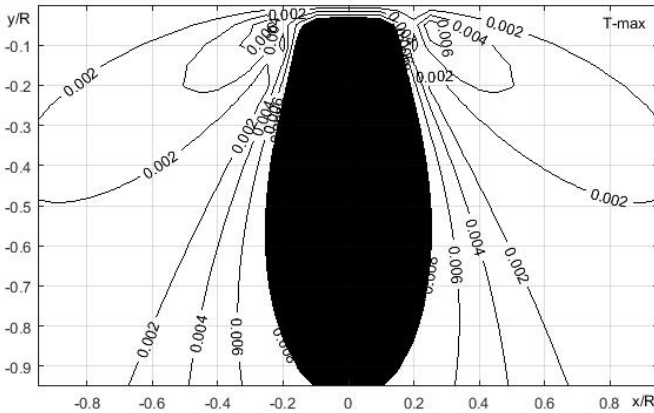
**Рис. 5.** Лінії рівня для розподілу безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампна циліндричної форми при  $a / R = 0.15$

На рис. 5 показано лінії рівня  $\max \bar{\tau}_{\max}$  із зоною пружно-пластичної деформації для відповідного 3D-графіка рис. 4 для  $k \approx 0,00735$  для матеріалів описаних в таблиці 1. Варто відмітити, що для всіх штампів канонічної форми при малих областях контакту розподіли компонент напружень і  $\bar{\tau}_{\max}$  практично співпадають.

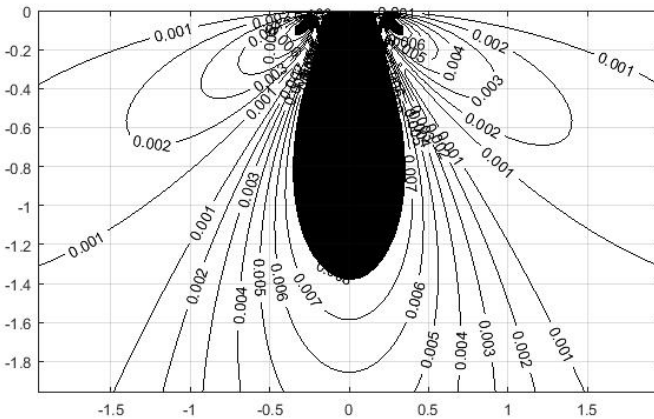
На наступних графіках наведено області зон пружно-пластичної деформації для пар описаних вище для різних штампів, при різних кривизні штампів.



**Рис. 6.** Лінії рівня для розподілу безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампна циліндричної форми при  $a / R = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.2$



**Рис. 7.** Лінії рівня для розподілу безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампів гіперболічної форми при  $a/R = 0.2$ ,  $\varepsilon = -0.2$



**Рис. 8.** Лінії рівня для розподілу безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампів циліндричної форми при  $a/R = 0.2$

Аналізуючи отримані числові результати та графіки рис. 6, рис. 7, рис. 8 встановлено, що для всіх форм штампів зберігається тенденція збільшення відстані від поверхні до точки максимуму  $\bar{\tau}_{\max}$  залежно від величини навантаження контактної пари. Також встановлено, що на величину області пружно-пластичної деформації значно впливає кривизна штампів та область контакту, опосередковано це доводять також рис. 6, рис. 7, рис. 8

**Висновок.** В статті досліджено напружено-деформований стан в середині півплощини для штампів гіперболічної, циліндричної, еліптич-

ної, параболічної форми для плоскої контактної задачі. Досліджено умови появи пружно-пластичних зон у півплощині для нових конструкційних матеріалів при різній кривизні штампів та різних областях контакту. Отримані результати можна використати при побудові експериментально-числової методики для визначення умов появи пластичних зон у тілі для матеріалів з різними механічними властивостями. Розвинута методика дозволяє визначити величину областей текучості, їх межі та характер розподілу із використанням ліній рівня та визначити місця найбільшої концентрації напружень для різних канонічних штампів.

### Список використаних джерел:

1. Горшков А. Г. Теория упругости и пластичности: учебник для вузов / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 416 с.
2. Григоренко Г. М. Структура и свойства проплавленного металла двухфазного титанового сплава с дисперсионным упрочнением при АДС / Г. М. Григоренко, С. В. Ахонин, О. М. Задорожнюк, И. Н. Ключков // Автоматическая сварка. — 2016. — № 11. — С. 11–19.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. — Москва : Мир, 1989. — 510 с.
4. Подскребко М. Д. Сопротивлени материалов. Основы теории упругости, пластичности, ползучести и механики разрушения : учеб. пособие. — Минск : Вышэйшая школа, 2009. — 669 с.
5. Сачук Ю. В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії / Ю. В. Сачук, О. В. Максимук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2014. — № 20. — С. 180–187.
6. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 384 с.
7. Фещенко В. Н. Справочник конструктора. Книга 1. Машины и механизмы / В. Н. Фещенко. — Москва : Инфра-Инженерия, 2016. — 400 с.
8. Шарый С. П. Курс вычислительных методов / С. П. Шарый. — Новосибирск : Институт вычислительных технологий СО РАН, 2014. — 501 с.
9. Frank W. J. NIST Handbook of Mathematical Functions / W. J. Frank. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 951 p.
10. Nelson H. F. Beebe the mathematical-function Computation / H. F. Nelson. — Salt Lake City : Springer International Publishing, 2017. — 1115 p.
11. Pawlus P. Experimental Investigation of a Hemisphere Contact with a Hard Flat / P. Pawlus, W. Zelasko, A. Dzierwa, S. Prucnal, M. Wieczorowski // Technical Gazette. — 2018. — Vol. 25, №1. — P. 40–46.
12. Sachuk Yu. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes / Yu. V. Sachuk, O. V. Maksymuk // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 220, №2. — P. 204–212.
13. Siau T. An Introduction to MATLAB Programming and Numerical Methods for Engineers / T. Siau, A. Bayen. — New York : Academic Press, 2014. — 311 p.

## COMPUTER MODELING OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION IN THE PROBLEMS OF CONTACT INTERACTION OF CANONICAL DIES WITH A HALF-PLANE

For a flat contact problem on the interaction of hard dies of a canonical form (cylindrical, hyperbolic, parabolic, elliptic) with a half-plane, the stress-strain state in the body was investigated. To calculate stress components and optimize computations, a method of grids with mirror reflection of results is used. The software tools for realization of advanced methods of calculation of the stressed state are analyzed and selected. 3D graphs of stresses and their corresponding level lines are constructed to facilitate analysis of the results. The construction of the 3D image of each of the stress components was carried out by means of the approximate computation of the integral by means of medium rectangles at each point of the partition, which contained the value of the elliptic integral of the third kind, constructed a series of integral sums and the numerical value of the integral. To determine the zones of elastic-plastic deformation various theories of plasticity have been analyzed and for the purpose of this goal the theory of maximum tangential stresses for the study of the conditions of the appearance of elastic-plastic zones in the body has been chosen for different areas of contact and geometric and physical-mechanical parameters.

In the framework of this theory, a search for new structural materials with all necessary physical and mechanical parameters was made. New titanium alloys with improved mechanical properties have been selected to study the process of the emergence of regions of elastic-plastic deformation. New mechanical effects that arise in the process of interaction for different stamps are established and the conditions leading up to their appearance are investigated. The obtained results can be used in constructing an experimental numerical technique for determining the conditions for the appearance of plastic zones in the body for materials with different mechanical properties. The developed technique allows to determine the magnitude of the yield regions, their boundaries and the character of the distribution using the level lines and to determine the places of the greatest concentration of stresses and to determine the maximum values for different dies.

**Key words:** *contact interaction, elastic-plastic zones, canonical shape stamps, the theory of maximum tensile stresses, elastic half-plane, stress tensor invariants, level lines, analytical-numerical methods, computer modeling, 3D-image, level lines.*

Отримано: 19.11.2018

UDC 519.615.7

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.135-145

V. Yu. Semenov, Ph. D.

Scientific and Production Enterprise «Delta SPE LLC», Kiev

## METHOD FOR THE MAXIMIZATION OF THE LIKELIHOOD FUNCTION OF SPEECH AUTOREGRESSIVE PARAMETERS BASED ON LINE SPECTRUM PAIRS

The paper considers the estimation of the parameters of autoregressive model at additive white noise background. The principle of maximum likelihood is used for this purpose. The main goal is to find the maximum of likelihood function depending on parameters of autoregressive model. Representation of likelihood function through line spectrum pairs and other alternative parameters is presented. This provided possibility of likelihood function maximization by KNITRO algorithm. The presence of multiple local minima of the considered likelihood function is shown. Experimental results including the comparison with widely used expectation-maximization (EM) method are presented for the real speech signals.

**Key words:** *likelihood function, autoregressive processes, line spectrum pairs.*

**Introduction.** Autoregressive models are widely used in the fields of audio and image processing, analysis of economical processes and other areas. They also obtained a wide implementation in digital speech processing [1]. The majority of contemporary digital speech processing methods are based the autoregressive (AR) model of speech

$$s(l) = -\sum_{k=1}^p a_k s(l-k) + gw(l), \quad (1)$$

where  $s(l)$  is a speech signal;  $w(l)$  is an excitation process modeling the air flow at the glottis;  $g$  is a gain;  $a_k, k = 1, \dots, p$  are the AR coefficients defining the shape of vocal tract. The order  $p$  is usually taken as 10.

When observation noise is absent, the coefficients  $a_k$  are usually found by a minimization of the criterion

$$\min_{a_1, \dots, a_p} \sum_{l=1}^L (s(l) + \sum_{k=1}^p a_k s(l-k))^2,$$

which leads to a system of  $p$  linear Yule-Walker equations [1].

The performance of speech processing systems based on AR model can significantly decrease at the presence of background noise, i.e. when the additive noise  $v(l)$  is present and we are given only noisy observations  $z(l)$ :

$$z(l) = s(l) + v(l). \quad (2)$$

The degradation of such systems is explained by the lack of efficient noise-robust methods of AR parameters estimation. A big amount of works are dedicated to this subject (see, e.g. review in [2]). Starting with the paper of Lim and Oppenheim, the most popular approach to identification of AR models (1) remains maximization of likelihood function (LF) of speech AR parameters [2]. A majority of existing methods are the modifications of Expectation-Maximization (EM) method which provides maximum likelihood estimation of speech AR parameters. The rigorous substantiation and implementation of this method was given in work of Gannot *et al.* [2] which can be considered as a reference point for other methods. The weak points of this approach are the necessity of good initial approximation and high computational expenses of Kalman smoothing.

For the maximization of likelihood function, we derive its alternative representations using auxiliary parameters such as line spectrum pairs (see, e.g. [3]). For the optimization of simplified likelihood function we employ KNITRO optimization algorithm which is now widely used for global optimization tasks [4, 5].

The structure of the paper is as follows. First, we define the likelihood function and its expression via the line spectrum pairs. We then show that the likelihood function of speech AR parameters may have multiple local minima. After introducing one more alternative representation of likelihood function, we show the results of implementation of proposed approach to the estimation of AR parameters of real speech signals.

**Likelihood function of AR parameters.** Consider speech frame which is a vector of  $L$  observations  $Z = [z(1), \dots, z(L)]$ , where the values  $z(l)$  are given by (2). The goal is to estimate AR coefficients  $a_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) and the gain  $g$  having the vector  $Z$ .

In speech coding applications,  $L$  is usually can taken as 200, which is equivalent to 25 ms when the sampling frequency is 8000 Hz (it is usually supposed that the parameters  $a_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) and  $g$  can be treated as constant during approximately 25 ms). In the following, we use values  $p = 10$  and  $L = 200$ .

The likelihood function of observation vector can be presented as:

$$f(Z | a_1, \dots, a_p, g) = \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi C}} \exp\left(-\frac{1}{2} Z^T C^{-1} Z\right), \quad (3)$$

which is a conditional Gaussian probability density of the observations vector  $Z$ . Here  $C$  denotes the covariance matrix of  $Z$ ; it depends on the gain and the AR coefficients. The principle of maximum likelihood states that given  $Z$ , the optimal parameters maximize the likelihood function (3) subject to some physical constraints.



**Line spectrum pairs formulation.** The direct computation of (3) based on the models (1) and (2) is complicated [2, 6]. A better representation based on the spectrum  $P_s(j)$  of the AR process  $s(n)$  is given by [6]:

$$P_s(j) = \frac{g^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-2\pi i k j / L}|^2} \quad (j = 1, \dots, L). \quad (4)$$

In terms of the spectrum, we may represent the negative logarithm of the likelihood as proposed in [6]:

$$f(Z | a_1, a_2, \dots, a_p, g) = \sum_{j=1}^L \log(P_s(j) + P(j)) + \sum_{j=1}^L \frac{|Z(j)|^2}{P_s(j) + P(j)}. \quad (5)$$

Here the  $Z(j)$  form the spectrum of the observations, i.e., the discrete Fourier transform of  $Z$ ;  $P(j)$  is the known spectrum of the observational noise  $v(l)$ , estimated from the frames which do not contain speech.

In order to incorporate the stability constraint, we use the spectral representation defined in [7], according to which the AR spectrum (4) can be written in the form

$$P_s(j) = \frac{\xi}{F_j(x)} \quad (j = 1, \dots, L), \quad (6)$$

where  $\xi = g^2 / 2^{p-1}$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  is the vector of ordered cosines of line spectrum pairs (LSP)  $x_k = \cos(\omega_{p-k})$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ), and

$$F_j(x) = (1 - c_j) \left( \prod_{k \leq p \text{ odd}} (c_j - x_k) \right)^2 + (1 + c_j) \left( \prod_{k \leq p \text{ even}} (c_j - x_k) \right)^2 \quad (7)$$

with the constants  $c_j = \cos(2\pi j / L)$ . The parameters  $x_k$  are ordered so that they satisfy the constraint

$$-1 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{p-1} < x_p < 1. \quad (8)$$

Thus, the spectrum (6) is determined by the spectral parameters  $x_1, x_2, \dots, x_p$  and the gain  $\xi$ .

**Simplification of the optimization problem.** To simplify the statement of the problem, first, we introduce the constants

$$Z_j = |Z(j)|^2$$

and the functions

$$Q_j(x, \xi) = F_j(x) / [P_j F_j(x) + \xi]. \quad (9)$$

So, we have to minimize the function

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p, \xi) = \sum_{j=1}^L (-\log Q_j(x, \xi) + Z_j Q_j(x, \xi)), \quad (10)$$

with  $Q_j(x)$  is defined by (9).

Our goal is to find the minimum of the function (10), taking into account the constraints (8) and  $\xi > 0$ . For this purpose, we do the transformations (simplifications) of the problem and apply the KNITRO [4, 5] optimization algorithm.

**Multiple local minima.** Consider the AR signal  $s(l)$  generated by the model (1) with  $g = 0.388$ , white noise excitation  $w(l)$  and AR coefficients

$a = [-1.195, 0.624, 0.017, -0.345, 0.259, 0.121, -0.239, 0.348, -0.210, -0.098]$ . (the coefficients correspond to a vowel sound «a» pronounced by a male speaker). These coefficients correspond to  $\xi = 2.95 \times 10^{-4}$  and line spectrum cosines

$$x_0 = [-0.941, -0.834, -0.473, -0.168, 0.092, 0.360, 0.493, 0.825, 0.878, 0.963].$$

The signal  $s(l)$  is then mixed according to the observation model (2) with white noise  $v(l)$  with constant spectrum  $P_j = 0.194$  ( $j = 1, \dots, L$ ), corresponding to a signal-to-noise ratio of  $SNR = 5$  dB.

The KNITRO solver, started from different initial approximations, found seven local minima of the function (10) with the constraint (8). These points are presented in Table 1. Note that minima 3, 4, 7 are *degenerate*, i.e., have  $x_k = x_{k+1}$  for some  $k$ . The minima are sorted by increasing of objective function values.

The last two rows of Table 1 present the spectral distortion (SD) and Itakura-Saito measures (IS) between the ideal parameters  $(x_0, \xi_0)$  and the parameters  $(x, \xi)$  of corresponding minimum. These measures are commonly used in the analysis of speech AR parameters (see, e.g. [6]). In our terms of  $F$ ,  $\xi$  these measures can be expressed as follows

$$SD(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left[ 10 \log_{10} \frac{F_j(x_1)}{F_j(x_2)} \right]^2},$$

(note that the SD is usually calculated as gain-independent [6]; hence there is no factor  $\xi_1 / \xi_2$ ).

$$IS(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left[ \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{F_j(x_2)}{F_j(x_1)} - \log \left( \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{F_j(x_2)}{F_j(x_1)} \right) - 1 \right].$$

The data in Table 1 show that the global minimizer fits the best by both criteria.

Table 1

*Several local minima of function (10)*

	Min.1	Min.2	Min.3	Min.4	Min.5	Min.6	Min.7
$x_1$	-0.991	-0.499	-0.994	-0.235	-0.997	-0.988	-0.908
$x_2$	-0.499	-0.468	-0.469	0.009	-0.294	-0.977	-0.908
$x_3$	-0.453	-0.347	-0.469	0.009	-0.187	0.026	-0.565
$x_4$	-0.116	-0.012	-0.016	0.332	-0.033	0.399	0.299
$x_5$	0.076	0.144	0.236	0.45	0.22	0.460	0.422
$x_6$	0.433	0.499	0.47	0.613	0.486	0.626	0.565
$x_7$	0.622	0.647	0.647	0.744	0.653	0.739	0.709
$x_8$	0.829	0.841	0.836	0.861	0.84	0.860	0.852
$x_9$	0.875	0.878	0.877	0.888	0.878	0.886	0.883
$x_{10}$	0.955	0.962	0.959	0.978	0.962	0.977	0.97
$\xi$	$1.1 \times 10^{-4}$	$4.0 \times 10^{-5}$	$6.2 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-6}$	$3.9 \times 10^{-5}$	$4.7 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-5}$
$f$	24.224	24.352	24.445	25.785	26.004	28.96	29.134
$\ x - x_0\ $	0.37	0.64	0.46	1.39	0.67	0.93	0.66
$SD$	7.0	12.1	8.3	22.2	10.1	15.8	10.7
$IS$	7.4	221.0	23.4	$6.5 \times 10^4$	78.9	$1.2 \times 10^3$	124.3

**Alternative formulation.** Let's introduce another set of parameters related with LSP. This formulation is mathematically identical to our initial formulation, however:

- (i) The formulation is based on more physical quantities. Unlike  $\log F_j$ , the quantities  $\log G_j = -\log P_s(j)$  have a direct physical interpretation.
- (ii) In particular, positive lower bounds on the new variables  $x'_j$  imply the nondegeneracy of the spectrum.
- (iii) The interval analysis may also improve since the dependence structure is different.

Thus, we introduce the new set of variables

$$z_{p+1} := \xi^{-1/p}, \quad z_i := z_{p+1} x_i \quad (i = 1, \dots, p),$$

so that

$$x_i = z_i / z_{p+1}, \quad \xi = z_{p+1}^{-p}.$$

Then

$$G_j(z) = P_s(j)^{-1} = F_j / \xi$$

is still polynomial:

$$G_j(z) = (1 - c_j) \left( \prod_{k \leq p, \text{ odd}} (z_{p+1} c_j - z_k) \right)^2 + \left( 1 + c_j \right) \left( \prod_{k \leq p, \text{ even}} (z_{p+1} c_j - z_k) \right)^2.$$

Besides,

$$Q_j(x, \xi) = R_j(x, \xi)^{-1},$$

where

$$R_j(x, \xi) := P_j + G_j(z)^{-1}.$$

Therefore, the objective function (10) becomes

$$f(z) = \sum_j \left( \log R_j + \frac{Z_j}{R_j} \right),$$

and the constraint (8) is now

$$-z_{p+1} = z_0 < z_1 < \dots < z_p < z_{p+1}.$$

By introducing the positive variables

$$x'_i = z_i - z_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p+1),$$

we get

$$z_i = \frac{1}{2} \sum_j \varepsilon_{ij} x'_j,$$

where  $\varepsilon_{ij} = 1$  if  $j \leq i$  and  $\varepsilon_{ij} = -1$  otherwise.

The a priori ranges for  $x'_j, j = 1, \dots, p+1$ , estimated from clean speech data, are given in Table 2 (to compute statistical quantities representative for speech, we used  $N = 23294$  frames of clean speech).

Table 2

*Bounds for the variables  $x'_j$*

	$x'_1$	$x'_2$	$x'_3$	$x'_4$	$x'_5$	$x'_6$	$x'_7$	$x'_8$	$x'_9$	$x'_{10}$	$x'_{11}$
Lower	0.02	0.03	0.03	0.049	0.080	0.064	0.074	0.049	0.033	0.006	0.002
Upper	0.869	0.972	1.860	2.128	2.377	2.392	2.444	2.025	1.542	0.784	0.209

Thus we have a bound-constrained problem in the  $x'_j$ . We need to minimize function

$$f_{alt}(x') = \sum_j \left( \log R_j(x') + \frac{Z_j}{R_j(x')} \right) \quad (11)$$

where

$$R_j(x') = P_j + G_j(x')^{-1}$$

and  $G_j(x')$  is given by

$$G_j(x') = 2^{-p}[(1-c_j)(\prod_{k \leq p \text{ odd}} [(c_j - 1)\sum_{j=1}^k x'_k + (c_j + 1)\sum_{j=k+1}^{p+1} x'_k])^2 + (1+c_j)(\prod_{k \leq p \text{ even}} [(c_j - 1)\sum_{j=1}^k x'_k + (c_j + 1)\sum_{j=k+1}^{p+1} x'_k])^2].$$

This optimization problem is subject to the constraints

$$\underline{x}' \leq x' \leq \overline{x}' \tag{12}$$

with the bounds as defined in Table 2.

**Multiple local minima (alternative formulation).** Consider the example from Section 3.2 in  $x'$ -domain. The parameters  $\xi = 2.95 \times 10^{-4}$  and  $x_0$  correspond to

$x'_0 = [0.132, 0.243, 0.812, 0.689, 0.586, 0.603, 0.300, 0.750, 0.119, 0.192, 0.083]$  (this point satisfies the constraint (12)).

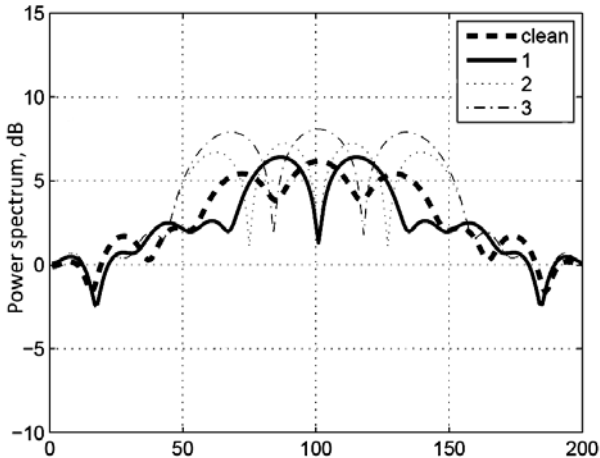
The KNITRO solver, started from different initial approximations, found three local minima of the function (11) with the constraint (12). To compare with Table 1, we transformed these points to  $x$ -domain. They are presented in Table 3.

Table 3

*Minima 1–3 of function (11) with constraint (12)*

	Min.1	Min.2	Min.3
$x_1$	-0.989	-0.991	-0.871
$x_2$	-0.580	-0.692	-0.858
$x_3$	-0.457	-0.670	-0.504
$x_4$	-0.196	0.069	0.160
$x_5$	0.027	0.261	0.281
$x_6$	0.403	0.480	0.516
$x_7$	0.600	0.654	0.667
$x_8$	0.824	0.837	0.843
$x_9$	0.874	0.878	0.879
$x_{10}$	0.951	0.960	0.964
$\xi$	1.7e-4	6.7e-5	4.1e-5
$f$	25.17	28.03	29.38
$\ x - x_0\ $	0.3	0.4	0.5
$SD$	5.5	7.4	7.9
$IS$	2.4	11.9	22.1

Comparing Tables 1 and 3, we see that the «alternative» global minimizer provides better values of quality criterions (especially Itakura-Saito measure). The  $G$ -plots are present at the Figure 1. All minima quite well approximate the clean spectrum at the lower frequencies while the global one gives the closest approximation for the middle and upper frequencies.

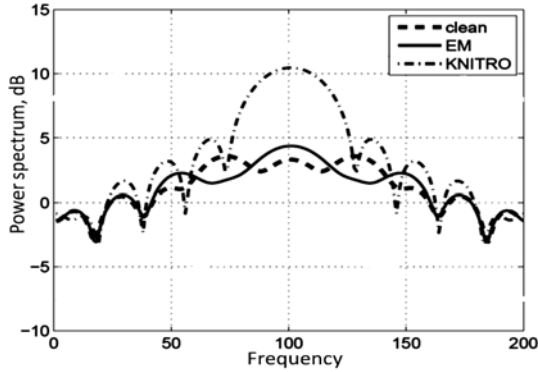


*Fig. 1. Spectra  $\log G_j$  ( $j = 1, \dots, L$ ) for the clean spectrum and three local minima of the function (11)*

Here arises a question: why there are just three local minima? What about the other minima from Table 1? The answer is that those minima does not satisfy constraint (12). From the previous experience, additional minima may arise due to the introduction of additional constraints.

It was also noted that for the alternative formulation the KNITRO algorithm works faster (i.e. it required lesser number of iterations) as compared with initial one (probably, since the problem is bound constrained).

**Experimental results.** Consider a fragment of real speech signal pronounced by male speaker. The duration of fragment is 40 frames (8000 samples, i.e., 1 sec). White noise with signal-to-noise ratio of 5 dB was used. We compared KNITRO with widely used Expectation-Maximization (EM) method which provides the local maximization of likelihood function [2, 6]. The application of EM method to the estimation of speech AR parameters in frequency domain was shown in [3]. It does not require the computation of derivatives and has a simple realization. The KNITRO algorithm was initialized by the estimate from the previous frame. The constraints (12) were used. The number of iterations was limited to 25. The first results showed the effect of the «narrow peaks». The typical situation is shown at the Figure 2.



**Fig. 2.** *Speech example 1: Spectra  $\log G_j$  ( $j = 1, \dots, L$ ) for the clean spectrum, EM spectrum and KNITRO spectrum for the real speech frame*

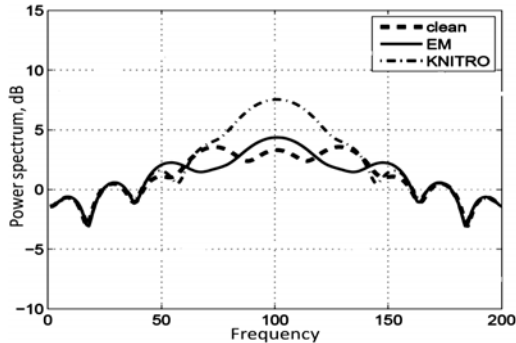
Since the narrow peaks are explained by the small differences of variables  $x'_i$ , we shortened the range used in (12). The 90% percentile limits are shown in Table 4. It allowed to improve the situation. The example is shown at the Figure 3 (all the data are the same as for the Figure 2). It can be seen that speech resonances at the lower frequencies are now reproduced much more accurately.

The average values of Spectral Distortion and Itakura-Saito measures for 40 frames are given in Table 5.

Table 4

*Stricter bounds for the variables  $x_j$  (90% percentile limits)*

	$x_{1'}$	$x_{2'}$	$x_{3'}$	$x_{4'}$	$x_{5'}$	$x_{6'}$	$x_{7'}$	$x_{8'}$	$x_{9'}$	$x_{10'}$	$x_{11'}$
Lower	0.15	0.16	0.24	0.29	0.46	0.45	0.41	0.35	0.11	0.02	0.02
Upper	0.45	0.61	0.72	1.09	1.36	1.36	1.25	1.05	0.61	0.23	0.09



**Fig. 3.** *Speech example 1: Spectra  $\log G_j$  ( $j = 1, \dots, L$ ) for the clean spectrum, EM spectrum and KNITRO spectrum for the real speech frame with 90%-constraints on  $x'_j$*

Table 5

*Speech quality criteria for the EM and KNITRO methods*

	<b>EM</b>	<b>KNITRO</b>
<i>SD</i>	5.5	5.8
<i>IS</i>	14.7	5.4

The results from Table 5 show that both EM and KNITRO algorithms provide comparable mean spectral distortion value (5.5 and 5.8 respectively), while the value of Itakura-Saito measure is much less for the KNITRO algorithm. This can be explained by more precise estimation of gain coefficient by proposed approach while the general form of spectrum for both methods is approximately the same.

**Conclusions.** In this paper we considered estimation of parameters of autoregressive model at noise background. At first, we introduced representation of likelihood function via line spectrum pairs and additional equivalent set of parameters. We have shown the presence of multiple local minima of likelihood function for speech autoregressive parameters. For the optimization of objective function the KNITRO algorithm was implemented. The preliminary experimental results show that the proposed approach provides better performance in comparison with widely used expectation-maximization (EM) in terms of Itakura-Saito measure while mean spectral distortion value is approximately the same. This can be explained by more precise estimation of gain coefficient by proposed approach while the general form of spectrum for both methods is approximately the same.

**Acknowledgement.** The author expresses gratitude to professor Arnold Neumaier from the University of Vienna for many fruitful suggestions during this investigation.

**References:**

1. Rabiner L. R. Theory and Applications of Digital Speech Processing / L. R. Rabiner, R. W. Schafer. — N.-J. : Prentice-Hall, 2011.
2. Gannot S. Iterative and sequential Kalman filter-based speech enhancement algorithms / S. Gannot, D. Burnstein, E. Weinstein // Transactions Speech Audio Processing. — 1998. — Vol. 6. — P. 373–385.
3. Semenov V. A novel approach to calculation of line spectral frequencies based on inter-frame ordering property / V. Semenov // Proc. IEEE Conf. ICASSP. — 1998. — Vol. 6. — P. 1072–1075.
4. Domes F. The optimization test environment / F. Domes, M. Fuchs, H. Schichl, A. Neumaier // Optimization and Engineering. — 2014. — Vol. 15. — P. 443–468.
5. Byrd R. Large-Scale Nonlinear Optimization, chapter KNITRO: An Integrated Package for Nonlinear Optimization / R. Byrd, J. Nocedal, R. Waltz. — Springer, 2006. — P. 35–59.



6. Kalyuzhny A. Ya. A method for identification of speech autoregressive parameters in frequency domain / A. Ya. Kalyuzhny, A. A. Kovtonyuk, V. Yu. Semenov // Acoustic bulletin. — 2010. — Vol. 13. — №2. — P. 20–27.
7. McLoughlin I. V. Line Spectral Pairs / I. V. McLoughlin // Signal Proces. — 2008. — Vol. 88. — P. 448–467.

### **МЕТОД МАКСИМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ АВТОРЕГРЕСИВНИХ ПАРАМЕТРІВ МОВНОГО СИГНАЛУ, ЗАСНОВАНИЙ НА ВИКОРИСТАННІ ЛІНІЙНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ПАР**

У статті розглянуто задачу оцінювання параметрів авторегресивної моделі за наявності адитивного білого шуму. Для цього застосовано принцип максимальної правдоподібності. Головним завданням є знаходження глобального максимуму функції правдоподібності, що залежить від параметрів авторегресивної моделі. Отримано вираз функції правдоподібності через лінійні спектральні пари та інший альтернативний набір параметрів. Це надало можливість ефективної максимізації функції правдоподібності за допомогою алгоритму KNITRO. Показано наявність багатьох локальних мінімумів функції правдоподібності для авторегресивних параметрів мовних сигналів. Також представлені експериментальні результати, що включають порівняння із загальновикористовуваним методом expectation-maximization (EM) для реальних мовних сигналів.

**Ключові слова:** *функція правдоподібності, авторегресивний процес, лінійні спектральні пари.*

Отримано: 23.11.2018

УДК 517.988:519.632

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.146-161

**М. В. Сидоров**, канд. фіз.-мат. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

## **ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КВАЗИФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ДЛЯ ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ**

Проблема математичного моделювання нелінійних стаціонарних процесів теплопровідності приводить до необхідності ефективного розв'язання крайових задач для еліптичного рівняння з коефіцієнтом, нелінійно залежним від температури. У роботі розглянуто задачу Діріхле для рівняння теплопровідності зі степеневим залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності та нелінійною функцією потужності теплових джерел. Додатний розв'язок розглядуваної задачі запропоновано знаходити, використовуючи метод двобічних наближень, побудованих на основі застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова. Для цього було зроблено заміну невідомої функції з метою отримати нелінійну задачу для рівняння з оператором Лапласа. Ця задача за допомогою квазіфункції Гріна-Рвачова була замінена еквівалентним інтегральним рівнянням Урисона. Дослідження цього рівняння було проведено методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах, зокрема, використовуючи теорію гетеротонних операторів В. І. Опойцева. Інтегральний оператор, що входить у рівняння Урисона, розглянуто як гетеротонний оператор, що діє у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Це дозволило з'ясувати умови існування єдиного додатного розв'язку розглядуваної задачі та побудувати для його знаходження двобічний ітераційний процес. Цей процес розпочинається з кінців сильно інваріантного для гетеротонного оператора конусного відрізка і дозволяє будувати дві послідовності функцій, які наближають шуканий розв'язок знизу та зверху. Перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є наявність зручної апостеріорної оцінки похибки наближеного розв'язку на кожній ітерації. Ефективність розробленого методу було проілюстровано обчислювальним експериментом у одиничному квадраті для випадку експоненціальної залежності потужності теплових джерел від температури. Результати експерименту наведено у вигляді графічної (лінії рівня та поверхня наближеного розв'язку) та числової (значення наближеного розв'язку у деяких точках області) інформації.

**Ключові слова:** *нелінійна теплопровідність, додатний розв'язок, квазіфункція Гріна-Рвачова, двобічний ітераційний метод, рівняння з гетеротонним оператором.*

**Вступ.** Проблема математичного моделювання процесів, що протікають у нелінійних середовищах, призводить до необхідності чисельного дослідження крайових та початково-крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними [16]. Для цього зазвичай використовуються сіткові методи [10], метод скінченних елементів [13, 15] або ітераційні методи з двобічним характером збіжності [1–4, 11]. При застосуванні двобічних ітераційних методів будується дві функціональні послідовності, які зверху та знизу наближають шуканий розв'язок. Тому на кожній ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки, а отже, і критерій закінчення ітерацій. Це робить, на нашу думку, саме двобічні методи найбільш привабливими для застосувань у прикладних дослідженнях.

Побудова методів двобічних наближень ґрунтується на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [5, 6] і зазвичай потребує переходу від вихідної нелінійної крайової задачі до еквівалентного інтегрального рівняння, ядром якого є функція Гріна відповідного диференціального оператора [1–4, 11]. Це значно звужує коло областей, для яких метод може бути практично реалізований, до областей, у яких є відомим аналітичний вираз для функції Гріна [7]. Усунути цей недолік можна завдяки використанню замість точної функції Гріна відповідної квазіфункції Гріна-Рвачова [8, 11].

**Метою роботи** є розробка двобічних ітераційних методів розв'язання задачі Діріхле для рівняння теплопровідності зі степеневозалежним від температури коефіцієнтом теплопровідності та нелінійною функцією потужності теплових джерел.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [12], і поширює їх результати на області, геометрія яких може бути описана методом  $R$ -функцій.

**1. Постановка задачі.** Розглядатимемо нелінійну крайову задачу

$$-\operatorname{div}(k(T)\operatorname{grad}T) = f(x, T) \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$T > 0 \text{ у } \Omega, \quad (3)$$

де  $\Omega \subset R^m$  — обмежена область з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$ ,  $f(x, T)$  — неперервна за сукупністю змінних  $x$ ,  $T$  та невід'ємна, якщо  $x \in \Omega$ ,  $T > 0$ , функція,  $k(T) = k_0 T^\sigma$ ,  $\sigma > 0$  — параметри нелінійності середовища.

Задача (1), (2) є математичною моделлю процесу стаціонарної теплопровідності для випадку, коли коефіцієнт теплопровідності степеневозалежить від температури, а в області  $\Omega$  наявні джерела тепловиділення за нелінійним законом  $f(x, T)$ .

Аналітичне дослідження задач нелінійної теплопровідності проведено, наприклад, у [9].

Зробимо у задачі (1)–(3) заміну  $T = \left[ \frac{\sigma + 1}{k_0} u \right]^{1+\sigma}$ , де  $u(x)$  — нова невідома функція. Тоді для функції  $u$  отримаємо задачу

$$-\Delta u = F(x, u) \text{ у } \Omega, \quad (4)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

$$u > 0, \quad (6)$$

$$\text{де } F(x, u) = f \left( x, \left[ \frac{\sigma + 1}{k_0} u \right]^{1+\sigma} \right).$$

Відмітимо, що функція  $F(x, u)$  є неперервною за сукупністю змінних  $x$ ,  $u$ , та невід'ємною, якщо  $x \in \Omega$ ,  $u > 0$ , оскільки такі властивості має функція  $f(x, T)$ .

**2. Побудова двобічних наближень.** Виділимо у банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$  неперервних у  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  функцій з нормою  $\|u\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$  конус  $K_+$  невід'ємних функцій. Відомо [5, 6], що конус  $K_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть, гострим).

Введемо у просторі  $C(\bar{\Omega})$  за допомогою конуса  $K_+$  напівопорядкованість за правилом: для  $u, v \in C(\bar{\Omega})$   $u \leq v$ , якщо  $v - u \in K_+$ , тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(x) \leq v(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}.$$

Нехай межа  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  складається зі скінченної кількості кусків ліній  $\sigma_i(x) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , де кожна  $\sigma_i(x)$  — елементарна функція. Тоді за допомогою методу  $R$ -функцій [8] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію  $\omega(x)$ , що описує геометрію області  $\Omega$ , тобто має властивості:

- а)  $\omega(x) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(x) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla \omega(x)| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Про таку функцію  $\omega(x)$  казатимемо, що вона описує геометрію області  $\Omega$ .

Також функція  $\omega(x)$  може мати певні властивості диференційованості, завдяки використанню різних достатньо повних систем  $R$ -функцій [8].

Задача (4)–(6) у конусі  $K_+$  еквівалентна інтегральному рівнянню Урисуна [8, 11]

$$u(x) = \int_{\Omega} P(x, s, u(s)) ds, \quad (7)$$

де

$$P(x, s, u(s)) = K(x, s)u(s) + G_{quasi}(x, s)F(s, u(s)),$$

$$K(x, s) = -\Delta_s q(x, s).$$

Тут  $G_{quasi}(x, s)$  — квазіфункція Гріна-Рвачова, яка визначається формулою

$$G_{quasi}(x, s) = g(r) - \tilde{g}(x, s),$$

у якій  $g(r)$  — фундаментальний розв'язок рівняння  $-\Delta u = 0$  у  $R^m$ ,

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad s = (s_1, \dots, s_m), \quad r = |x - s| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - s_i)^2},$$

$$\tilde{g}(x, s) = g\left(\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}\right),$$

$\omega(x)$  — функція, що описує геометрію області  $\Omega$ .

Фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа  $-\Delta u = 0$  мають вигляд

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad \text{у } R^2,$$

$$g(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{у } R^3,$$

$$g(r) = \frac{1}{|S_1|(m-2)} \cdot \frac{1}{r^{m-2}} \quad \text{у } R^m \quad (m > 3),$$

де  $|S_1|$  — площа одиничної сфери у  $R^m$ .

Отже, матимемо такі вирази для квазіфункції Гріна-Рвачова

$$G_{quasi}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(x)\omega(s)}{r^2}} \quad \text{у } R^2,$$

$$G_{quasi}(x, s) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)} - r}{r\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}} \quad \text{у } R^3,$$

$$G_{quasi}(x, s) = \frac{1}{|S_1|(m-2)} \cdot \frac{(r^2 + 4\omega(x)\omega(s))^{\frac{m}{2}-1} - r^{m-2}}{r^{m-2}(r^2 + 4\omega(x)\omega(s))^{\frac{m}{2}-1}} \quad \text{у } R^m \quad (m > 3).$$

Узагальненим розв'язком задачі (4)–(6) називатимемо функцію  $u^* \in K_+$ , яка є розв'язком рівняння (7). Отже, розв'язком (узагальненим) вихідної задачі (1)–(3) вважатимемо функцію

$$T^* = \left[ \frac{\sigma + 1}{k_0} u^* \right]^{1+\sigma}. \quad (8)$$

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $T$ , який діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом, яке визначається правою частиною інтегрального рівняння (7):

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} P(x, s, u(s)) ds. \quad (9)$$

Позначимо

$$K^+(x, s) = \max\{0, K(x, s)\}, \quad K^-(x, s) = \max\{0, -K(x, s)\}.$$

Тоді  $K^+(x, s) \geq 0$ ,  $K^-(x, s) \geq 0$  при  $x, s \in \Omega$  ( $x \neq s$ ), причому

$$K(x, s) = K^+(x, s) - K^-(x, s), \quad |K(x, s)| = K^+(x, s) + K^-(x, s),$$

і оператор  $T$  вигляду (9) набуде вигляду

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)u(s) ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)u(s) ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)F(s, u(s)) ds. \quad (10)$$

Нехай функція  $F(x, u)$  дозволяє діагональне подання  $F(x, u) = \Phi(x, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $x, v, w$  функція  $\Phi(x, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $x \in \Omega$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (10) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\begin{aligned} \hat{T}(v, w) = & \int_{\Omega} K^+(x, s)v(s) ds - \\ & - \int_{\Omega} K^-(x, s)w(s) ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)\Phi(s, v(s), w(s)) ds \end{aligned} \quad (11)$$

Зрозуміло, що оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними.

Для гетеротонного оператора  $T$  виділимо у конусі  $K_+$  сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  умовами

$$\hat{T}(v^0, w^0) \geq v^0, \quad \hat{T}(w^0, v^0) \leq w^0,$$

які для оператора  $\hat{T}$ , що визначається формулою (11), набудуть вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} K^+(x, s)v^0(s) ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w^0(s) ds + \\ & + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)\Phi(s, v^0(s), w^0(s)) ds \geq v^0(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} K^+(x, s)w^0(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v^0(s)ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)\Phi(s, w^0(s), v^0(s))ds \leq w^0(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}. \quad (13)$$

Далі сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ v^{(0)} = v^0, \quad w^{(0)} = w^0,$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)v^{(k)}(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w^{(k)}(s)ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)\Phi(s, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s))ds, \quad (14)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)w^{(k)}(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v^{(k)}(s)ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)\Phi(s, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds, \quad (15)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(x) = v^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w^0(x). \quad (16)$$

Оскільки конусний відрізок  $\langle v^0, w^0 \rangle$  є сильно інваріантним, а оператор  $T$  є гетеротонним, то послідовність  $\{v^{(k)}(x)\}$  не спадає за конусом  $K_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(x)\}$  не зростає за конусом  $K_+$ . Далі, з нормальності конуса  $K_+$  і повної неперервності оператора  $\hat{T}$  впливає існування границь  $v^*(x)$  і  $w^*(x)$  цих послідовностей. При цьому для послідовних наближень  $\{v^{(k)}(x)\}$ ,  $\{w^{(k)}(x)\}$  справджується такий ланцюг нерівностей:

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

Функції  $v^*$  і  $w^*$  є розв'язком системи рівнянь

$$v^* = \hat{T}(v^*, w^*), \quad w^* = \hat{T}(w^*, v^*),$$

тобто системи

$$v(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)v(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w(s)ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)\Phi(s, v(s), w(s))ds, \quad (17)$$

$$w(x) = \int_{\Omega} K^+(x, s)w(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)v(s)ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)\Phi(s, w(s), v(s))ds. \quad (18)$$

Як відомо [6], умовою виконання рівності  $v^* = w^*$  є те, що система (17), (18) не має на сильно інваріантному конусному відрізку  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв'язків  $(v, w)$  таких, що  $v \neq w$ . Тоді інтегральне рівняння (9) (а отже, і крайова задача (1)-(3)) має єдиний додатний розв'язок, до якого двобічно збігається ітераційний процес (14)-(16). Отже, справджується така теорема.

**Теорема 1.** Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  — сильно інваріантний конусний відрізок для гетерогонного оператора  $T$  вигляду (10) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (11) і система рівнянь (17), (18) не має на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  розв'язків таких, що  $v \neq w$ . Тоді ітераційний процес (14)–(16) збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (4)–(6), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0. \quad (19)$$

Зауважимо, що ланцюг нерівностей (19) як раз і характеризує ітераційний процес (14)–(16) як метод двобічних наближень.

Умовою, яка забезпечить рівність  $v^* = w^*$ , є умова існування такого  $\gamma \in (0; 1)$ , що

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \gamma \|v - w\|$$

для всіх  $v, w \in \langle v^0, w^0 \rangle$  [14].

Нехай існує таке число  $L > 0$ , що функція  $\Phi(x, v, w)$  для всіх чисел  $v, w$  таких, що  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \max_{x \in \bar{\Omega}} w^0(x)$ , і для всіх  $x \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$|\Phi(x, w, v) - \Phi(x, v, w)| \leq L |w - v|. \quad (20)$$

Розглянемо різницю  $\hat{T}(v, w)(x) - \hat{T}(w, v)(x)$ :

$$\begin{aligned} \hat{T}(w, v)(x) - \hat{T}(v, w)(x) &= \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)][w(s) - v(s)]ds + \\ &+ \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)[\Phi(s, w(s), v(s)) - \Phi(s, v(s), w(s))]ds. \end{aligned}$$

Тоді з урахуванням нерівності (20) отримаємо оцінку



$$\begin{aligned} \left\| \hat{T}(w, v) - \hat{T}(v, w) \right\| &= \max_{x \in \Omega} \left| \hat{T}(w, v)(x) - \hat{T}(v, w)(x) \right| \leq \\ &\leq (M_1 + LM) \cdot \max_{x \in \Omega} |w(x) - v(x)| = (M_1 + LM) \|w - v\|, \end{aligned}$$

де

$$M = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) ds, \quad (21)$$

$$M_1 = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)] ds. \quad (22)$$

Отже,

$$\left\| \hat{T}(w, v) - \hat{T}(v, w) \right\| \leq \gamma \|w - v\|,$$

де  $\gamma = M_1 + LM$ .

Тоді рівність  $v^* = w^*$  матиме місце, якщо  $\gamma = M_1 + LM < 1$ , і справджується теорема.

**Теорема 2.** Нехай  $\langle v^0, w^0 \rangle$  — сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора  $T$  вигляду (10) з супровідним оператором  $\hat{T}$  вигляду (11) і має місце умова (20), причому  $\gamma = M_1 + LM < 1$ , де сталі  $M$  і  $M_1$  визначаються рівностями (21), (22) відповідно. Тоді ітераційний процес (14)–(16) двобічно збігається у нормі простору  $C(\bar{\Omega})$  до єдиного на  $\langle v^0, w^0 \rangle$  неперервного додатного розв'язку  $u^*$  крайової задачі (4)–(6).

Якщо виконано  $k$  ітерацій, то за наближений розв'язок крайової задачі (4)–(6) слід взяти функцію

$$u^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \quad (23)$$

Тоді для похибки наближеного розв'язку (23) ми матимемо апостеріорну оцінку:

$$\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in \Omega} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)). \quad (24)$$

Наявність оцінки вигляду (24) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in \Omega} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$$

і тоді з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$ .

Отже, за виконання умов теореми 1 чи теореми 2 вихідна крайова задача (1)–(3) також має єдиний додатний розв'язок, який за функ-

цією  $u^*(x)$  визначається рівністю (8). Тоді, якщо з точністю  $\varepsilon$   $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$ , то

$$T^*(x) \approx \left[ \frac{\sigma+1}{k_0} u^{(k)}(x) \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}.$$

**3. Результати обчислювального експерименту.** Для обчислювального експерименту оберемо у (1)–(3)  $f(x, T) = e^{T\sqrt{T}} + 3e^{-T\sqrt{T}}$ ,

$k_0 = 1$ ,  $\sigma = \frac{1}{2}$ , тобто розглянемо задачу

$$-\operatorname{div}(\sqrt{T} \operatorname{grad} T) = e^{T\sqrt{T}} + 3e^{-T\sqrt{T}} \text{ у } \Omega, \quad (25)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad (26)$$

$$T > 0 \text{ у } \Omega, \quad (27)$$

у одиничному квадраті ( $m = 2$ )

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}.$$

У задачі (25)–(27) зробимо заміну, де — нова невідома функція. Це призведе до задачі

$$-\Delta u = e^{\frac{3}{2}u} + 3e^{-\frac{3}{2}u} \text{ у } \Omega, \quad (28)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (29)$$

$$u > 0 \text{ у } \Omega. \quad (30)$$

У задачі (25)–(27) зробимо заміну  $T = \sqrt[3]{\frac{9}{4}u^2}$ , де  $u$  — нова невідома функція. Це призведе до задачі

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x, s)u(s)ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) \left[ e^{\frac{3}{2}u(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}u(s)} \right] ds, \quad (31)$$

де

$$G_{quasi}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(x)\omega(s)}{r^2}},$$

$$K(x, s) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}(x, s) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}(x, s),$$

$$\tilde{g}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(s)}},$$

$$\omega(x) = [x_1(1-x_1)] \wedge_0 [x_2(1-x_2)] \equiv$$

$$\equiv x_1(1-x_1) + x_2(1-x_2) - \sqrt{x_1^2(1-x_1)^2 + x_2^2(1-x_2)^2}.$$

Функції  $F(x, u) = e^{\frac{3}{2}u} + 3e^{-\frac{3}{2}u}$  додатна та неперервна за сукупністю змінних, якщо  $u > 0$ , і дозволяє діагональне подання за допомогою функції

$$\Phi(x, v, w) = e^{\frac{3}{2}w} + 3e^{-\frac{3}{2}v}.$$

Тоді з рівнянням (31) пов'яжемо гетеротонний оператор

$$T(u)(x) = \int_{\Omega} K(x, s)u(s)ds + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) \left[ e^{\frac{3}{2}u(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}u(s)} \right] ds, \quad (32)$$

для якого супровідний оператор має вигляд

$$\begin{aligned} \hat{T}(v, w)(x) = & \int_{\Omega} K^+(x, s)v(s)ds - \int_{\Omega} K^-(x, s)w(s)ds + \\ & + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) \left[ e^{\frac{3}{2}v(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}w(s)} \right] ds, \end{aligned}$$

де

$$K^+(x, s) = \max\{0, K(x, s)\}, \quad K^-(x, s) = \max\{0, -K(x, s)\}.$$

Тепер для оператора  $T$  вигляду (32) сильно інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді  $\langle v^0, w^0 \rangle$ , де  $v^0(x) = \alpha u_0(x)$ ,  $w^0(x) = \beta u_0(x)$ ,  $0 < \alpha < \beta$ , а  $u_0(x) = \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s)ds$ .

Для обраних функцій  $v^0$ ,  $w^0$  система нерівностей (12), (13) призводить до наступної системи нерівностей для визначення сталих  $\alpha$ ,  $\beta$ : для всіх  $x \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} K^+(x, s)u_0(s)ds - \beta \int_{\Omega} K^-(x, s)u_0(s)ds + \\ & + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) \left[ e^{\frac{3}{2}\alpha u_0(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}\beta u_0(s)} \right] ds \geq \alpha u_0(x), \\ & \beta \int_{\Omega} K^+(x, s)u_0(s)ds - \alpha \int_{\Omega} K^-(x, s)u_0(s)ds + \\ & + \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) \left[ e^{\frac{3}{2}\beta u_0(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}\alpha u_0(s)} \right] ds \leq \beta u_0(x). \end{aligned}$$

Якщо  $0 < v, w < M_0$ , де  $M_0 = \beta \max_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x)$ , то

$$\begin{aligned}
 & \left| \Phi(x, v, w) - \Phi(x, w, v) \right| = \\
 & = \left| \left( e^{\frac{3}{2}v} + 3e^{-\frac{3}{2}w} \right) - \left( e^{\frac{3}{2}w} + 3e^{-\frac{3}{2}v} \right) \right| \leq \frac{3}{2} \left( 3 + e^{\frac{3}{2}M_0} \right) |v - w|.
 \end{aligned}$$

Ітераційний процес (14)–(16) для розглядуваної задачі має вигляд

$$\begin{aligned}
 v^{(k+1)}(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s) v^{(k)}(s) ds - \int_{\Omega} K^-(x, s) w^{(k)}(s) ds + \\
 &+ \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) \left[ e^{\frac{3}{2}v^{(k)}(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}w^{(k)}(s)} \right] ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 w^{(k+1)}(x) &= \int_{\Omega} K^+(x, s) w^{(k)}(s) ds - \int_{\Omega} K^-(x, s) v^{(k)}(s) ds + \\
 &+ \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) \left[ e^{\frac{3}{2}w^{(k)}(s)} + 3e^{-\frac{3}{2}v^{(k)}(s)} \right] ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$v^{(0)}(x) = \alpha u_0(x), \quad w^{(0)}(x) = \beta u_0(x). \tag{35}$$

Знайдено, що системі нерівностей для визначення сталих  $\alpha$ ,  $\beta$  задовольняють значення  $\alpha = 2, 2$ ,  $\beta = 8, 3$ . Далі знаходимо

$$\begin{aligned}
 M &= \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G_{quasi}(x, s) ds = 0,04093, \\
 M_1 &= \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} [K^+(x, s) + K^-(x, s)] ds = 0,70819, \\
 M_0 &= \beta \max_{x \in \Omega} u_0(x) = 0,33972, \\
 L &= \frac{3}{2} \left( 3 + e^{\frac{3}{2}M_0} \right) = 6,99690, \\
 \gamma &= M_1 + LM = 0,995.
 \end{aligned}$$

Отже,  $\gamma < 1$  і за теоремою 2 послідовні наближення, які формуються за схемою (33)–(35) двобічно збігаються до розв'язку задачі (28)–(30).

Оберемо  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Обрана точність була досягнута на п'ятнадцятій ітерації. В таблиці 1 наведено значення

$$\varepsilon^{(k)} = \max_{x \in \Omega} \frac{1}{2} \left| w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x) \right| \text{ оцінки похибки наближеного розв'язку}$$

$u^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 15$ . Розглядаючи відношення  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 14$ ,

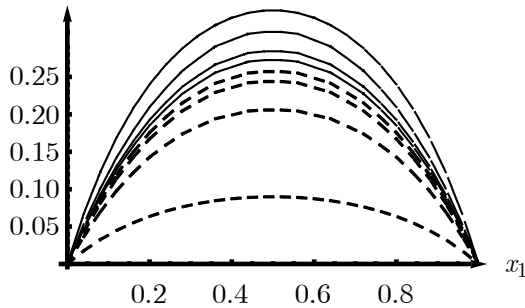
за даними табл. 1, отримаємо, що  $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,616$ , що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з відповідним показником. На рис. 1 наведено графіки перерізів верхніх  $w^{(k)}(x)$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(x)$  (штрихована лінія) наближень при  $x_2 = 0,5$  для  $k = 0, 2, 4, 6$ .

Таблиця 1

*Значення оцінки похибки наближеного розв'язку*

$k$	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon^{(k)}$	$0,12 \cdot 10^0$	$0,82 \cdot 10^{-1}$	$0,52 \cdot 10^{-1}$	$0,33 \cdot 10^{-1}$	$0,20 \cdot 10^{-1}$	$0,12 \cdot 10^{-1}$
$k$	6	7	8	9	10	11
$\varepsilon^{(k)}$	$0,77 \cdot 10^{-2}$	$0,47 \cdot 10^{-2}$	$0,29 \cdot 10^{-2}$	$0,18 \cdot 10^{-2}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,68 \cdot 10^{-3}$
$k$	12	13	14	15		
$\varepsilon^{(k)}$	$0,42 \cdot 10^{-3}$	$0,26 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,99 \cdot 10^{-4}$		

$w^{(k)}(x_1, 0,5), v^{(k)}(x_1, 0,5)$



**Рис. 1.** Графіки перерізів верхніх  $w^{(k)}(x)$  (суцільна лінія) та нижніх  $v^{(k)}(x)$  (штрихована лінія) наближень при  $x_2 = 0$  для  $k = 0, 2, 4, 6$

За наближений розв'язок задачі (28)–(30) візьмемо функцію  $u^{(15)}(x) = \frac{1}{2}(v^{(15)}(x) + w^{(15)}(x))$ . Тоді

$$T^* \approx T^{(15)} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \sqrt[3]{[u^{(15)}]^2}}.$$

На рис. 2 і 3 наведені поверхня та лінії рівня (з кроком 0,05) наближеного розв'язку  $T^{(15)}(x)$  відповідно, а у таблиці 2 значення  $T^{(15)}(x)$  в точках  $(0, 2i; 0, 2j)$ ,  $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

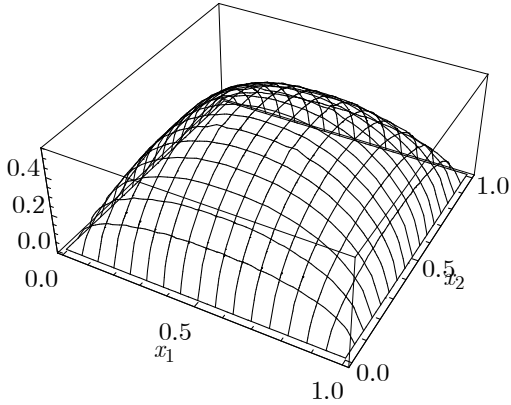


Рис. 2. Поверхня наближеного розв'язку  $T^{(15)}(x)$

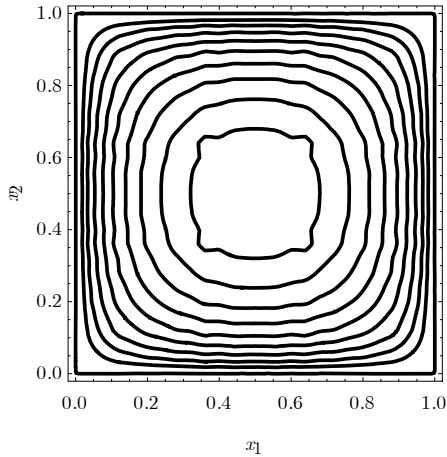


Рис. 3. Лінії рівня наближеного розв'язку  $T^{(15)}(x)$

Таблиця 2

Значення наближеного розв'язку в точках  $(0, 2i; 0, 2j)$ ,  $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$T^{(15)}(0, 2i, 0, 2j)$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$j = 0$	0	0	0	0	0	0
$j = 1$	0	0,3346	0,4093	0,4093	0,3346	0
$j = 2$	0	0,4093	0,5166	0,5166	0,4093	0
$j = 3$	0	0,4093	0,5166	0,5166	0,4093	0
$j = 4$	0	0,3346	0,4093	0,4093	0,3346	0
$j = 5$	0	0	0	0	0	0

**Висновки.** У роботі вперше для наближеного розв'язання задачі нелінійної теплопровідності з нелінійним коефіцієнтом теплопровідності, степеневозалежним від температури, та нелінійною функцією потужності теплових джерел застосовано метод двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова. Обчислювальний експеримент, проведений для тестової задачі, продемонстрував можливість та ефективність цього метода. Результати роботи можуть бути використані у математичному моделюванні процесів у нелінійних середовищах та розповсюджені на відповідні нестационарні задачі, завдяки комбінації запропонованого метода і метода прямих Роте.

### Список використаних джерел:

1. Колосов А. И. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений / А. И. Колосов, С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2012. — № 2. — С. 50–57.
2. Колосова С. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Ланге-Эмдена / С. В. Колосова, В. С. Луханин, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2015. — № 3. — С. 107–120.
3. Колосова С. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений / С. В. Колосова, В. С. Луханин, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2013. — № 1. — С. 35–42.
4. Колосова С. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью / С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Радиоелектроника и информатика. — 2013. — № 3 (62). — С. 28–31.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 394 с.
6. Опойцев В. И. Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе. — Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. — 246 с.
7. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. — М. : Физматлит, 2001. — 576 с.
8. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения / В. Л. Рвачев. — Киев : Наук. думка, 1982. — 552 с.
9. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. — Москва : Наука, 1987. — 480 с.
10. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — 2-е изд. — Москва : Научный мир, 2003. — 316 с.
11. Сидоров М. В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач / М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2017. — № 2. — С. 250–259.

12. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності / М. В. Сидоров // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — 2017. — Вип. 16. — С. 157–167.
13. Afrouzi G. A. A Numerical Method for Finding Positive Solution of Dirichlet Problem with a Weight Function / G. A. Afrouzi, S. Mahdavi, Z. Naghizadeh // Journal of Information and Computing Science. — 2006. — Vol. 1. — № 3. — P. 168–172.
14. Guo D. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications / D. Guo, V. Lakshmikantham // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 1987. — Vol. 11. — № 5. — P. 623–632.
15. Chen G. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations / G. Chen, J. Zhou, W.-M. Ni // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2000. — Vol. 10. — № 7. — P. 1565–1612.
16. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. — New York : Plenum Press, 1992. — 794 p.

### **THE APPLICATION OF THE GREEN-RVACHEV QUASIFUNCTION METHOD FOR CONSTRUCTING TWO-SIDED APPROXIMATIONS TO THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A NONLINEAR HEAT EQUATION**

The problem of mathematical modeling of nonlinear stationary heat conduction processes leads to the necessity for an effective solution of boundary value problems for an elliptic equation with a coefficient that is nonlinearly dependent on temperature. In this paper, the Dirichlet problem for the heat equation with a nonlinear function of power of heat sources and a heat conductivity coefficient with power law dependence on temperature, is considered. To find a positive solution of the problem under consideration it is proposed the using of the two-sided approximations method, constructed on the basis of the application of the Green-Rvachev's quasi-function method. For this, the unknown function was replaced in order to obtain a nonlinear problem for the equation with the Laplace operator. This problem was replaced by the equivalent Uryson integral equation using the Green-Rvachev's quasi-function. The investigation of this equation was carried out by methods of nonlinear analysis in semi-ordered spaces, in particular, using the theory of heterotone operators by V.I. Opoïcev. An integral operator entering the Uryson equation is considered as a heterotone operator acting in the space of continuous functions, which is semi-ordered by a cone of non-negative functions. This made it possible to find out the conditions for the existence of a unique positive solution of the problem under consideration and to construct a two-sided iterative process to search out it. This process begins at the ends of a strongly invariant for a heterotone operator cone segment and allows one to build two sequences of functions that approximate the desired solution from below and above. The advantage of the constructed two-sided iterative process is the availability of a convenient a posteriori error estimate for the approximate solution at



each iteration. The efficiency of the developed method was illustrated by a computational experiment in a unit square for the case of the exponential dependence of the power of thermal sources on temperature. The results of the experiment are presented in the form of graphical (contour lines and the surface of an approximate solution) and numerical (values of an approximate solution at some points in the area) information.

**Key words:** *nonlinear heat conductivity, positive solution, Green-Rvachev's quasi-function, two-sided iterative method, equation with heterotone operator.*

Отримано: 14.11.2018

УДК 517.944

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.161-172

**Н. Г. Хома\***, канд. фіз.-мат. наук,

**С. Г. Хома–Могильська\***, канд. фіз.-мат. наук,

**Л. Г. Хохлова\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\*Тернопільський національний економічний університет,  
м. Тернопіль,

\*\*Тернопільський національний педагогічний університет  
імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У СМУЗІ**

Крайові періодичні задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема гіперболічних рівнянь, є складним та неоднозначним об'єктом дослідження. Крайові задачі з даними на всій границі області, а також задачі з нелокальними (в тому числі інтегральними) умовами для гіперболічних рівнянь в обмежених областях є, взагалі кажучи, умовно коректними. Деякі автори пов'язують розв'язність таких задач із проблемою малих знаменників та використовують при розв'язанні методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи. Інші ж при дослідженні крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку використовують аналітичні методи та у своїх роботах будують інтегральні оператори і розв'язок шукають у спеціально визначених просторах неперервно диференційованих функцій для конкретних випадків періодичності.

У даній роботі знайдено аналітичну формулу функції  $v(x, t)$ , яка є розв'язком крайової  $2\pi$ -періодичної за часовою змінною задачі у класі непарних функцій, для яких виконується умова  $f(t) = -f(\pi - t)$ . Встановлені властивості даної функції

ції та наведені оцінки розв'язку крайової  $2\pi$ -періодичної за часовою змінною задачі.

Результати дослідження використовуються для математичного моделювання коливних процесів, що описуються гіперболічними рівняннями другого порядку.

На основі знайденої функції можна робити висновки про поведінку розв'язку незбуреного рівняння ( $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon$  — малий параметр) при дослідженні загального нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку асимптотичними методами.

**Ключові слова:** незбурене рівняння, крайова періодична задача, гіперболічне рівняння другого порядку, класичний розв'язок, клас функцій, малий параметр.

**Вступ.** Щоб дослідити асимптотичними методами Крилова-Боголюбова-Митропольського-Мосеєнкова [1, 2] таку крайову  $2\pi$ -періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x); \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in R, \quad (2)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in R. \quad (3)$$

де  $\varepsilon$  — малий параметр, потрібно знати поведінку розв'язку такої незбуреної задачі

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = f(t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R, \quad (4)$$

$$u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0, \quad t \in R, \quad (5)$$

$$u^0(x, t + 2\pi) = u^0(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in R. \quad (6)$$

Дослідженню задачі (4)–(6) присвячена дана робота, при цьому використані такі умовні позначення:  $C_R^0$  — простір функцій однієї змінної  $t$ , неперервних і обмежених на всій числовій осі  $R$ .  $C_\pi$  — простір функцій двох змінних  $x$  і  $t$ , неперервних і обмежених на множині  $[0, \pi] \times R$ .  $G_{Rt}^0$  — простір функцій однієї змінної  $t$ , неперервних і обмежених на  $R$  разом із похідною по  $t$ .  $G_{\pi t}$  — простір функцій  $g(x, t)$  двох змінних  $x$  і  $t$ , неперервних і обмежених на  $[0, \pi] \times R$  разом із похідною по  $t$ .  $C_\pi^{k,l}$  — простір функцій  $g(x, t) \in C_\pi$  таких, що  $D_t^k D_x^l g \in C_\pi$ .  $L(X, Y)$  — простір лінійних і обмежених відображень  $X$  в  $Y$ .  $\mathcal{Q}_{2\pi}^0$  — простір функцій  $f(t)$ , які задовольняють на  $R$  співвідношення  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

$$B_{23}^- = \{f : f(t) = -f(\pi - t) = -f(-t)\}.$$

$R$  — множина дійсних чисел.

**Основні результати.** Розглянемо таку функцію

$$v(x, t) = (\bar{S}f)(x, t) \equiv -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Доведемо, що при  $f \in G_{Rt}^0 \cap B_{23}^-$  функція  $v(x, t) = (\bar{S}f)(x, t)$  є класичним розв'язком задачі (4)–(6).

Спочатку доведемо таке твердження:

**Лема 1.** Якщо  $f \in B_{23}^-$ , то  $f(t)$  є  $2\pi$ -періодичною по  $t$ , тобто  $f \in Q_{2\pi}^0$ .

**Доведення.** Справді,

$$\begin{aligned} f(t + 2\pi) &= f(t + \pi + \pi) = f(\pi - (-t - \pi)) = -f(-\pi - t) = \\ &= f(\pi + t) = f(\pi - (-t)) = -f(-t) = f(t), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Таким чином, ми показали, що якщо  $f \in B_{23}^-$ , то  $f(t)$  є  $2\pi$ -періодичною по  $t$ .

**Основна теорема.** Якщо  $f \in G_{Rt}^0 \cap B_{23}^-$ , то функція

$$v(x, t) = (\bar{S}f)(x, t),$$

визначена формулою (7), є класичним розв'язком задачі (4)–(6). Крім цього

$$\begin{aligned} \bar{S} &\in L(C_R^0 \cap B_{23}^-, C_\pi^{1,1} \cap B_{23}^-); \\ \bar{S} &\in L(G_{Rt} \cap B_{23}^-, C_\pi^{2,2} \cap B_{23}^-), \end{aligned}$$

при цьому

$$\begin{aligned} \|(\bar{S}f)(x, t)\|_{C_\pi} &\leq \frac{\pi^2}{4} \|f(t)\|_R; \\ \|(\bar{S}f)'_x(x, t)\|_{C_\pi} &\leq \frac{\pi}{2} \|f(t)\|_R; \\ \|(\bar{S}f)'_t(x, t)\|_{C_\pi} &\leq \frac{\pi}{2} \|f(t)\|_R. \end{aligned}$$

**Доведення.** Спочатку покажемо виконання умови

$$v(x, t + 2\pi) = v(x, t) \quad (8)$$

Враховуючи означення (7) функції  $v(x, t)$ , маємо

$$v(x, t + 2\pi) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t+2\pi-x+\xi}^{t+2\pi+x-\xi} f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+2\pi+x-\xi}^{t+2\pi-x+\xi} f(\tau) d\tau. \quad (9)$$

У внутрішніх інтегралах проведемо заміну змінної  $\tau = 2\pi + \theta$ ,  $d\tau = d\theta$ ,  $t - x + \xi \leq \theta \leq t + x - \xi$  для першого внутрішнього інтеграла, а  $t + x - \xi \leq \theta \leq t - x + \xi$  для другого внутрішнього інтеграла.

З формули (9) знаходимо

$$v(x, t + 2\pi) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(2\pi + \theta) d\theta - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(2\pi + \theta) d\theta.$$

Використовуючи умову теореми, що  $f \in B_{23}^-$  на основі твердження леми 1, маємо з останньої рівності

$$v(x, t + 2\pi) = v(x, t),$$

тобто розв'язок  $v(x, t)$  задовольняє умову періодичності (6).

Тепер доведемо виконання крайових умов

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0.$$

Із формули (7) знайдемо

$$v(0, t) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} f(\tau) d\tau,$$

та обчислимо похідну  $v'(0, t)$ , яка має вигляд

$$\begin{aligned} v'(0, t) &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi (f(t+\xi) - f(t-\xi)) d\xi \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{4} \int_0^\pi f(t+\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_0^\pi f(t-\xi) d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

У другому інтегралі проведемо заміну змінної  $\xi = \pi - \theta$ ,  $d\xi = -d\theta$ ,  $\pi \leq \theta \leq 0$ . Тоді з формули (10) маємо

$$\begin{aligned} v'(0, t) &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi f(t+\xi) d\xi - \frac{1}{4} \int_\pi^0 f(t-(\pi-\theta)) d\theta = \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi f(t+\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_\pi^0 f(-t+\pi-\theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi f(t+\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_\pi^0 f(\pi-(t+\theta)) d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} f(t+\xi) d\xi - \frac{1}{4} \int_{\pi}^0 f(t+\theta) d\theta = \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} f(t+\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} f(t+\theta) d\theta \equiv 0, \quad \forall t \in R.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $v(0, t) \equiv C = \text{const}$ . Оскільки за умови непарності функції  $f(t)$  маємо  $v(0, 0) = 0$ , то це означає, що виконується умова

$$v(0, t) = 0, \quad \forall t \in R. \quad (11)$$

Розглянемо тепер значення функції  $v(\pi, t)$ . З формули (7) випливає, що

$$v(\pi, t) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} f(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Аналогічно попередньому доведенню для функції  $v(0, t)$  з формули (12) одержуємо, що

$$v(\pi, t) = 0, \quad \forall t \in R. \quad (13)$$

Отже, функція  $v(x, t) = (\bar{S}f)(x, t)$  задовольняє крайові умови (5) задачі (4)–(6).

Тепер покажемо, що функція  $v(x, t) = (\bar{S}f)(x, t)$  є класичним розв'язком рівняння (4).

Обчислимо перші та другі частинні похідні від функції  $v(x, t)$  по  $x$  та  $t$ , яка визначена формулою (7). Одержимо рівності

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{4} \int_0^x (f(t+x-\xi) + f(t-x+\xi)) d\xi - \\
&\quad -\frac{1}{4} \int_x^{\pi} (-f(t-x+\xi) - f(t+x-\xi)) d\xi; \\
\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4} \int_0^x \left( \frac{\partial f(\alpha(x, t, \xi))}{\partial \alpha} \cdot 1 + \frac{\partial f(\beta(x, t, \xi))}{\partial \beta} \cdot (-1) \right) d\xi - \frac{1}{2} f(t) - \\
&\quad -\frac{1}{4} \int_x^{\pi} \left( -\frac{\partial f(\beta(x, t, \xi))}{\partial \beta} - \frac{\partial f(\alpha(x, t, \xi))}{\partial \alpha} \right) d\xi - \frac{1}{2} f(t) \equiv \\
&\equiv -\frac{1}{4} \int_0^x \left( \frac{\partial f(\alpha(x, t, \xi))}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(\beta(x, t, \xi))}{\partial \beta} \right) d\xi -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4} \int_x^\pi \left( \frac{\partial f(\beta(x,t,\xi))}{\partial \beta} - \frac{\partial f(\alpha(x,t,\xi))}{\partial \alpha} \right) d\xi - f(t);$$

де  $\alpha(x,t,\xi) = t+x-\xi$ ,  $\beta(x,t,\xi) = t-x+\xi$ .

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{4} \int_0^x (f(t+x-\xi) - f(t-x+\xi)) d\xi -$$

$$-\frac{1}{4} \int_x^\pi (f(t-x+\xi) - f(t+x-\xi)) d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{4} \int_0^x \left( \frac{\partial f(\alpha(x,t,\xi))}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(\beta(x,t,\xi))}{\partial \beta} \right) d\xi -$$

$$-\frac{1}{4} \int_x^\pi \left( \frac{\partial f(\beta(x,t,\xi))}{\partial \beta} - \frac{\partial f(\alpha(x,t,\xi))}{\partial \alpha} \right) d\xi,$$

де  $\alpha(x,t,\xi) = t+x-\xi$ ,  $\beta(x,t,\xi) = t-x+\xi$ .

Отже,

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = f(t),$$

що й потрібно було довести. А це означає, що функція  $v(x,t) = (\bar{S}f)(x,t)$  є класичним розв'язком рівняння (4).

Основна теорема буде доведена повністю, якщо ми одержимо оцінки розв'язку та його похідних.

Запишемо формулу (7) так:

$$v(x,t) = (\bar{S}f)(x,t) \equiv \int_0^\pi Q(\xi) d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\tau) d\tau, \quad (14)$$

де

$$Q(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{4}, & 0 \leq \xi \leq x \\ \frac{1}{4}, & x \leq \xi \leq \pi. \end{cases} \quad (15)$$

Введемо норму функцій  $(\bar{S}f)(x,t)$  та  $f(t)$  таким чином:

$$\|(\bar{S}f)(x,t)\|_C = \sup_{(x,t) \in [0,\pi] \times R} |(\bar{S}f)(x,t)|, \quad \|f(t)\|_R = \sup_{t \in R} |f(t)|.$$

На основі записів (14) та (15) знаходимо, що

$$\begin{aligned} |(\bar{S}f)(x,t)| &\leq \frac{1}{2} \|f(t)\|_R \int_0^\pi |x-\xi| d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \|f(t)\|_R \left( \int_0^x (x-\xi) d\xi - \int_x^\pi (x-\xi) d\xi \right) = \frac{1}{2} \|f(t)\|_R \left( \frac{x^2}{2} + \frac{(\pi-x)^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Дослідимо функцію  $p(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{(\pi-x)^2}{2}$  на  $\max$  на  $[0, \pi]$ . Маємо  $p'(x) = x - \pi + x$  або  $p'(x) = 2x - \pi$ . Прирівнявши її до нуля, одержуємо  $p'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \pi = 0$ .

Отже, коренем цього рівняння є точка екстремуму  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ . Тепер знайдемо значення функції  $p(x)$  у точках відрізка  $[0, \pi]$ , тобто  $p(0)$ ,  $p(\pi)$ , а також  $p\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Маємо

$$p(0) = \frac{\pi^2}{2}; \quad p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}; \quad p(\pi) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Значить,

$$\max_{[0,\pi]} p(x) = p(0) = p(\pi) = \frac{\pi^2}{2}. \quad (17)$$

Враховуючи (16) та (17), одержуємо оцінку розв'язку

$$\left\| (\bar{S}f)(x,t) \right\|_{C_x} \leq \frac{\pi^2}{4} \|f(t)\|_R. \quad (18)$$

Запишемо частинні похідні від розв'язку  $v(x,t) = (\bar{S}f)(x,t)$  таким чином:

$$\left( \bar{S}f \right)'_x(x,t) \equiv \int_0^\pi Q(\xi) (f(t+x-\xi) + f(t-x+\xi)) d\xi; \quad (19)$$

$$\left( \bar{S}f \right)'_t(x,t) \equiv \int_0^\pi Q(\xi) (f(t+x-\xi) - f(t-x+\xi)) d\xi. \quad (20)$$

Враховуючи (19) та (20), знаходимо

$$\left\| \left( \bar{S}f \right)'_x(x,t) \right\|_{C_x} \leq \frac{\pi}{2} \|f(t)\|_R; \quad (21)$$

$$\left\| \left( \bar{S}f \right)'_t(x,t) \right\|_{C_x} \leq \frac{\pi}{2} \|f(t)\|_R. \quad (22)$$

Таким чином, нами доведено всі твердження і оцінки основної теореми. Основну теорему доведено.

**Зауваження 1.** Тепер, використовуючи основну теорему, можна досліджувати крайову  $2\pi$ -періодичну задачу (4)–(6) за допомогою аналітичного розв'язку (7).

Значимо основні властивості функції  $v(x, t) = (\bar{S}f)(x, t)$ , визначеної формулою (7).

$$1^0. (\bar{S}f)(\pi - x, t) = (\bar{S}f)(x, t)$$

$$(\bar{S}f)(\pi - x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi-x} d\xi \int_{t-\pi+x+\xi}^{t+\pi-x-\xi} f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_{\pi-x}^{\pi} d\xi \int_{t+\pi-x-\xi}^{t-\pi+x+\xi} f(\tau) d\tau =$$

1. Заміна  $\xi = \pi - \eta$ ,  $d\xi = -d\eta$ ,  $\pi \leq \theta \leq x$ , для першого інтеграла.
2. Заміна  $\xi = \pi - \eta$ ,  $d\xi = -d\eta$ ,  $x \leq \theta \leq 0$ , для другого інтеграла.

$$= \frac{1}{4} \int_{\pi}^x d\eta \int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta} f(\tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_x^0 d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\tau) d\tau =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^x d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^{\pi} d\eta \int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta} f(\tau) d\tau \equiv (\bar{S}f)(x, t),$$

що підтверджує справедливості властивості  $1^0$ .

$$2^0. (\bar{S}f)(x, \pi - t) = -(\bar{S}f)(x, t).$$

Враховуючи формулу (7), одержуємо

$$(\bar{S}f)(x, \pi - t) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{\pi-t-x+\xi}^{\pi-t+x-\xi} f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^{\pi} d\xi \int_{\pi-t+x-\xi}^{\pi-t-x+\xi} f(\tau) d\tau =$$

1. Заміна  $\tau = \pi - \theta$ ,  $d\tau = -d\theta$ ,  $t + x - \xi \leq \theta \leq t - x + \xi$ , для першого інтеграла.
2. Заміна  $\tau = \pi - \theta$ ,  $d\tau = -d\theta$ ,  $t - x + \xi \leq \theta \leq t + x - \xi$ , для другого інтеграла.

$$= \frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\pi - \theta) d\theta + \frac{1}{4} \int_x^{\pi} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\pi - \theta) d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\theta) d\theta - \frac{1}{4} \int_x^{\pi} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{4} \int_x^{\pi} d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\theta) d\theta =$$



$$= - \left( -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\theta) d\theta - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\theta) d\theta \right) = -(\bar{S}f)(x, t).$$

$$3^0. (\bar{S}f)(x, -t) = -(\bar{S}f)(x, t).$$

На основі формули (7) одержуємо

$$(\bar{S}f)(x, -t) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{-t-x+\xi}^{-t+x-\xi} f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{-t+x-\xi}^{-t-x+\xi} f(\tau) d\tau =$$

1. Заміна  $\tau = -\theta$ ,  $d\tau = -d\theta$ ,  $t+x-\xi \leq \theta \leq t-x+\xi$ , для першого інтеграла.
2. Заміна  $\tau = -\theta$ ,  $d\tau = -d\theta$ ,  $t-x+\xi \leq \theta \leq t+x-\xi$ , для другого інтеграла.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t-x+\xi} f(-\theta) d\theta + \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t-x+\xi}^{t-x+\xi} f(-\theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\theta) d\theta - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\tau) d\tau = \\ &= - \left( -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\tau) d\tau \right) = -(\bar{S}f)(x, t). \end{aligned}$$

Властивість  $3^0$  доведена.

Введемо новий простір для функцій  $g(x, t)$  — функцій двох змінних  $x$  і  $t$  таким чином:

$$B_{22}^- = \{g : g(x, t) = g(\pi - x, t) = -g(x, \pi - t) = -g(x, -t)\}.$$

З властивостей  $1^0$ – $3^0$  одержуємо, що оператор  $\bar{S}$  відображає простір  $B_{22}^-$  самого в себе:  $B_{22}^- \xrightarrow{\bar{S}} B_{22}^-$ .

**Зауваження 2.** Беручи до уваги те, що оператор  $\bar{S}$  переводить непарну функцію  $f(t)$ , тобто  $f(-t) = -f(t)$ , — непарну функцію  $v(x, t) = (\bar{S}f)(x, t)$  (властивість  $3^0$ ), і враховуючи властивість тригонометричних рядів Фур'є, доведемо, що розв'язок  $v(x, t) = (\bar{S}f)(x, t)$  крайової  $2\pi$ -періодичної задачі (4)–(6) розкладається лише по синусах, тобто при певних умовах він зображується рядом

$$v(x, t) \equiv (\bar{S} f)(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin kx .$$

Окрім цього, враховуючи формулу обчислення коефіцієнтів Фур'є, тобто формулу

$$b_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\bar{S} f)(x, t) \sin kx \, dx, \quad k \in N, \quad (23)$$

переконуємося у справедливості такого твердження:

**Лема 2.** Якщо  $f \in G_{\pi t}^0 \cap B_{23}^-$ , то  $b_{2n}(t) = 0, n \in N$ .

**Доведення.** Справді, на твердженні основної теореми та формули (23) при  $f \in G_{\pi t}^0 \cap B_{23}^-$  маємо, що  $(\bar{S} f)(x, t) \in C_{\pi}^{2,2} \cap B_{23}^-$  і

$$\begin{aligned} b_k(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\bar{S} f)(x, t) \sin kx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\bar{S} f)(x, t) \sin kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\bar{S} f)(x, t) \sin kx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\bar{S} f)(\pi - \eta, t) \sin k(\pi - \eta) \, d\eta = \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\bar{S} f)(x, t) \sin kx, & k = 2n - 1, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } (\bar{S} f)(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{2s-1}(t) \sin(2s-1)x .$$

### Висновки.

1. У роботі знайдено аналітичну формулу функції

$$v(x, t) = (\bar{S} f)(x, t) \equiv -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^{\pi} d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\tau) d\tau ,$$

яка є розв'язком у класі функцій

$$B_{23}^- = \{f : f(t) = -f(\pi - t) = -f(-t)\}$$

такої крайової  $2\pi$ -періодичної задачі

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = f(t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R,$$

$$u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0, \quad t \in R,$$

$$u^0(x, t + 2\pi) = u^0(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in R.$$

2. На основі знайденої функції  $v(x, t) = (\bar{S} f)(x, t)$  можна робити висновки про поведінку розв'язку незбуреного рівняння ( $\varepsilon = 0$ )

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = f(t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in R,$$

при дослідженні загального нелінійного рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x),$$

де  $\varepsilon$  — малий параметр, асимптотичними методами.

### Список використаних джерел:

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — Москва : Наука, 1974. — 501с.
2. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков. — Київ : Вища школа, 1976. — 590 с.
3. Артемьев Н. А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных / Н. А. Артемьев // Изв. АН СССР. Серия Математика. — 1937. — № 1. — С. 15–50.
4. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. — Киев : Наук. думка, 1991. — 232 с.
5. Митропольский Ю. О. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю. О. Митропольський, С. Г. Хома-Могильська // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 7. — С. 912–921.
6. Самойленко А. М. Окремий випадок існування  $2\pi$ -періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку / А. М. Самойленко, Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська // Доп. НАН України. — 2012. — № 2. — С. 25–29.

## MATHEMATICAL MODELLING OF OSCILLATING PROCESSES IN STRIP

The boundary-value periodic problem for differential equations in partial derivatives, including hyperbolic equations, are complicated and controversial subject to study. Boundary-value problems with data throughout the border region as well as the problem of non-local (including integrated) conditions for hyperbolic equations in limited areas are, generally speaking, relatively correct. Many authors link the solvability of such problems with the problem of small denominators and use the methods of nonlinear functional analysis, the theory of implicit functions, variation methods. Another authors use the analytical methods in the research of periodic boundary-value problems for the second order hyperbolic equations. They construct integral operators and search the solutions in specially defined spaces of continuously differentiated functions for specific cases of periodicity.

In this paper we find an analytic formula of the function  $v(x, t)$ , which is a solution of the boundary-value  $2\pi$ -periodic time-varying problem in the class of odd functions for which  $f(t) = -f(\pi - t)$ .

The properties of this function are established and the estimates of the solution of the boundary-value  $2\pi$ -periodic problem are given.

The results of the study are used for mathematical modeling of oscillating processes described by the second order hyperbolic equations.

On the basis of the found function  $v(x, t)$  we can draw conclusions about the behavior of the solution of the undisturbed equation ( $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon$  is a small parameter) in the study of the general nonlinear the second order hyperbolic equation by the asymptotic methods.

**Key words:** *undisturbed equation, boundary-value periodic problem, second order hyperbolic equation, classical solution, class of functions, small parameter.*

Отримано: 23.11.2018

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Бак Сергій Миколайович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, [Sergiy.bak@gmail.com](mailto:Sergiy.bak@gmail.com)

**Бойчура Михайло Володимирович** — науковий співробітник кафедри інформатики та прикладної математики, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне, [mboichura@gmail.com](mailto:mboichura@gmail.com)

**Бомба Андрій Ярославович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне, [abomba@ukr.net](mailto:abomba@ukr.net)

**Верлань Анатолій Федорович** — доктор технічних наук, професор, член кореспондент НАПН України, Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ, [a.f.verlan@gmail.com](mailto:a.f.verlan@gmail.com)

**Верлань Андрій Анатолійович** — доктор філософії, доцент, Норвезький університет науки і технології, NTNU, м. Йовік, Норвегія, [andriy.verlan@ntnu.no](mailto:andriy.verlan@ntnu.no)

**Геселева Катерина Григорівна** — аспірант Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, [geseval1702@gmail.com](mailto:geseval1702@gmail.com)

**Гнатюк Василь Олексійович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

**Гудима Уляна Василівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

**Дячук Олександр Анатолійович** — кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ, [oadyachuk@ukr.net](mailto:oadyachuk@ukr.net)

**Зегельман Марк Михайлович** — учень 11 класу Кам'янець-Подільського ліцею, м. Кам'янець-Подільський, zemark2012@gmail.com

**Іванюк Віталій Анатолійович** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, wivanyuk@gmail.com

**Ковтонюк Галина Миколаївна** — кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Galyna.kovtonyuk@gmail.com

**Конет Іван Михайлович** — доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, konet51@ukr.net

**Костьян Наталія Леонідівна** — кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобілів та технології їх експлуатації Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, 438knl@gmail.com

**Кріль Сергій Олександрович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

**Літовченко Владислав Антонович** — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, v.litovchenko@chnu.edu.ua

**Максимук Олександр Васильович** — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, ov.maksymuk@gmail.com

**Палагін Володимир Васильович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри радіотехніки, телекомунікаційних і робототехнічних систем Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, palahin@ukr.net

**Палагіна Олена Анатоліївна** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, palahina@ukr.net

**Печериця Іван Володимирович** — магістрант кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Ivan.pecheritsya12@gmail.com

**Пилипюк Тетяна Михайлівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

**Подгорний Олексій Русланович** — аспірант кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, м. Харків, oleksii.podhornyi@nure.ua

**Положаснко Сергій Анатолійович** — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих систем управління Одеського національного політехнічного університету, м. Одеса, sanp277@gmail.com

**Протасов Сергій Юрійович** — кандидат технічних наук, Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси, protasov\_sergey@mail.ru

**Сачук Юрій Володимирович** — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри національної безпеки Східноєвропейського університету імені Лесі Українки, м. Луцьк, sachyura@gmail.com

**Семенов Василь Юрійович** — кандидат фізико-математичних наук, завідувач науково-дослідного відділу алгоритмів ТОВ «Дельта СПЕ», м. Київ, vasyi.delta@gmail.com

**Сидоров Максим Вікторович** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, м. Харків, maxim.sidorov@nure.ua

**Фуртат Юрій Олегович** — кандидат технічних наук, науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ, saodhar@ipme.kiev.ua

**Хома Надія Григорівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету, м. Тернопіль, [nadiiakhoma@gmail.com](mailto:nadiiakhoma@gmail.com)

**Хома–Могильська Світлана Григорівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Тернопільського національного економічного університету, м. Тернопіль, [sv\\_khoma@ukr.net](mailto:sv_khoma@ukr.net)

**Хохлова Лариса Григорівна** — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, [larysa\\_khokhlova@ukr.net](mailto:larysa_khokhlova@ukr.net)



## АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

<b>Б</b>		<b>Л</b>	
Бак С. М.	5	Літовченко В. А.	105
Бойчура М. В.	14		
Бомба А. Я.	14	<b>М</b>	
		Максимук О. В.	126
<b>В</b>			
Верлань А. Ф.	25, 31	<b>П</b>	
Верлань А. А.	39	Палагін В. В.	39
		Палагіна О. А.	39
<b>Г</b>		Печериця І. В.	5
Геселева К. Г.	55	Пилипюк Т. М.	86
Гнатюк В. О.	65	Подгорний О. Р.	113
Гудима У. В.	65	Положаєнко С. А.	25
		Протасов С. Ю.	25
<b>Д</b>			
Дячук О. А.	39	<b>С</b>	
		Сачук Ю. В.	126
<b>З</b>		Семенов В. Ю.	135
Зегельман М. М.	100	Сидоров М. В.	146
<b>І</b>		<b>Ф</b>	
Іванюк В. А.	78	Фуртат Ю. О.	31
<b>К</b>		<b>Х</b>	
Ковтонюк Г. М.	5	Хома Н. Г.	161
Конет І. М.	86	Хома–Могильська С. Г.	161
Костьян Н. Л.	78	Хохлова Л. Г.	161
Кріль С. О.	100		

**ЗМІСТ**

**Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В.**  
 Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці ..... 5

**Bomba A. Ya., Voichura M. V.**  
 Numerical Complex Analysis Method for Parameters Identification of Anisotropic Media Using Applied Quasipotential Tomographic Data. Part 1: Problem Statement and its Approximation..... 14

**Верлань А. Ф., Положаєнко С. А., Протасов С. Ю.**  
 Идентификационный метод оперативного контроля процесса численного решения дифференциальных уравнений..... 25

**Верлань А. Ф., Фуртат Ю. О.**  
 Метод решения сингулярной динамической задачи в форме интегрального уравнения ..... 31

**Верлань А. А., Дячук О. А., Палагіна Е. А. Палагин В. В.**  
 Параметрическая редукция математических моделей динамических систем..... 39

**Геселева К. Г.**  
 Колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями ..... 55

**Гудима У. В., Гнатюк В. О.**  
 Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукування відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору..... 65

**Іванюк В. А., Костьян Н. Л.**  
 Інтегральний метод розв'язування диференціальних рівнянь при моделюванні об'єктів із розподіленими параметрами ..... 78

**Конет І. М., Пилипюк Т. М.**  
 Параболічні крайові задачі в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною ..... 86

**Кріль С. О., Зегельман М. М.**  
 Комбінаторна гра — «Зв'язна незв'язність» ..... 100

**Літовченко В. А.**  
 Гладкі розв'язки гіперболічних за Шиловим систем..... 105

**Подгорний О. Р.**  
 Чисельний аналіз методом  $R$ -функцій фільтраційних течій у неоднорідному ґрунті..... 113

**Сачук Ю. В., Максимук О. В.**

Комп'ютерне моделювання пружно-пластичної деформації в задачах контактної взаємодії канонічних штампів з півплощиною ..... 126

**Seменов V. Yu.**

Method for the Maximization of the Likelihood Function of Speech Autoregressive Parameters Based on Line Spectrum Pairs ..... 135

**Сидоров М. В.**

Застосування методу квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних наближень до розв'язку задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності ..... 146

**Хома Н. Г., Хома–Могильська С. Г., Хохлова Л. Г.**

Математичне моделювання коливних процесів у смузі ..... 161

**Відомості про авторів** ..... 173

**Алфавітний покажчик авторів** ..... 177

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

## МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 18

---

---

Підписано до друку 18.12.2018 р. Гарнітура «Таймс».  
Папір офісний. Друк різнографічний.  
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 10,5. Обл.-вид. арк. 11,4.  
Тираж 60. Зам. № 839.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному  
університеті імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.