

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 22

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2021

УДК 519.6:519.7
ББК 22
М34

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник включено до Переліку наукових фахових видань України категорії Б галузь «Фізико-математичні» (спеціальність: 111 «Математика», 113 «Прикладна математика») наказ Міністерства освіти і науки України № 409 від 17.03.2020 р.

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка,
протокол №14 від 25 листопада 2021 року.

Редакційна колегія:

- О. М. Хіміч**, академік НАНУ,
доктор фізико-математичних наук, професор (*відповідальний редактор*);
А. Ф. Верлянь, член-кореспондент НАПНУ,
доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);
І. Б. Ковальська, кандидат фізико-математичних наук, доцент
(*відповідальний секретар*);
В. К. Задірака, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;
І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор;
М. О. Перестюк, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор;
А. С. Сердюк, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
В. М. Старков, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
Ю. В. Теплінський, доктор фізико-математичних наук, професор;
М. К. Усаров, доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник, Узбекистан;
А. О. Чикрій, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор.

Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка; [редкол.: О. М. Хіміч (відп. ред.) та ін.]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип. 22. 116 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7
ББК 22

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of National Academy of Sciences of Ukraine
Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

Series: Physical and mathematical sciences

Scientific journal

ISSUE 22

Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University
2021

Editorial board:

O. Himich, Academician of the NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

A. Verlan, Corresponding Member NAPS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

I. Kovalska, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Docent (*Responsible Secretary*);

V. Zadiraka, Academician NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

I. Konet, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

M. Perestjuk, Academician NAS of Ukraine,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

A. Serdyuk, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher;

V. Starkov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher;

Yu. Teplinsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

M. Usarov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Scientific Researcher, Uzbekistan;

A. Chikriy, Academician NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences: scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University; [Editorial Board: O. Himich (Executive Editor) and others]. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University, 2021. ISSUE 22. 116 p.

There are printed results of investigation of national and foreign scientists that concern to problems of practice mathematical models in different spheres of human activity.

For scientific and technical staff, postgraduate students.

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of NAS of Ukraine, 2021

© Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko
National University, 2021

ISSN 2308-5878

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22

УДК 517.97

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.5-19

С. М. Бак, д-р фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ КЛЕЙНА-ГОРДОНА ІЗ НАСИЧУВАНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Стаття присвячена вивченню дискретних рівнянь типу Клейна-Гордона, які описують динаміку нескінченних ланцюгів лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Такі рівняння представляють собою нескінченні системи звичайних диференціальних рівнянь. Вивчаються такого типу рівняння із насичуваними нелінійностями. Для таких рівнянь одержано результати про існування розв'язків у вигляді стоячих хвиль. Після підстановки в дану систему анзаца у вигляді стоячої хвилі одержується система алгебраїчних рівнянь для амплітуди стоячої хвилі. Вивчаються два види розв'язків: періодичні (з періодом k) і локалізовані (збігаються до нуля на нескінченності). Дані рівняння мають варіаційну структуру. Тому показано, що k -періодичні і локалізовані розв'язки можна побудувати як критичні точки двох деяких функціоналів у відповідних просторах двохсторонніх послідовностей. Далі розглянуто многовиди Нехарі для відповідних варіаційних задач. Ці многовиди містять нетривіальні критичні точки даних функціоналів. Показано, що многовиди Нехарі непорожні і замкнені підмноговиди відповідних просторів двохсторонніх послідовностей. Крім того, розглянуто відповідні задачі мінімізації даних функціоналів. Показано, що на многовиді Нехарі для першого функціоналу відповідна задача мінімізації за певних умов має розв'язок. А отже, за цих умов вихідне рівняння має нетривіальні k -періодичні розв'язки. У випадку локалізованих розв'язків довести, що відповідна задача мінімізації має розв'язок на відповідному многовиді Нехарі складно. Тому у цьому випадку використано метод періодичних апроксимацій, тобто критичні точки функціоналу, який відповідає локалізованим розв'язкам, будуються за допомогою граничного переходу (при періоді k прямує до нескінченності) в критичних точках функціоналу, який відповідає k -періодичним розв'язкам. Одержані локалізовані розв'язки і є розв'язками відповідної задачі мінімізації.

Ключові слова: *дискретні рівняння типу Клейна-Гордона, стоячі хвилі, критичні точки, многовид Нехарі.*

Вступ. Дискретні нескінченновимірні динамічні системи широко використовуються для моделювання складних квантових і оптичних явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи типу

Фермі–Пасти–Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна-Гордона.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують розв'язки у вигляді біжучих і стоячих хвиль. В статтях [1; 4; 6-8; 13; 14; 17; 18] для рівнянь типу Клейна-Гордона досліджено питання існування біжучих хвиль різних видів. В статтях [2; 10-12; 15; 16] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера. В той же час для рівнянь типу Клейна-Гордона відомі декілька праць [5; 9], в яких вивчалось питання стійкості стоячих хвиль.

Метою статті є одержання умов існування стоячих хвиль для дискретних рівнянь типу Клейна-Гордона із насичуваними нелінійностями.

1. Постановка задачі. Основні припущення. У цій статті вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Клейна-Гордона, які описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних осциляторів:

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n + f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

де $q_n = q_n(t)$ — узагальнена координата n -го осцилятора в момент часу t , $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ — одновимірний дискретний оператор Лапласа, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ калібровно інваріантна функція, тобто

$$f(e^{i\omega t} z) = e^{i\omega t} f(z)$$

для всіх $\omega \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Ця стаття присвячена *насичуваним* нелінійностям $f(z)$. Це означає, що на нескінченності $f(z)$ росте як $const \cdot |z|$. Прикладом таких нелінійностей є

$$f(u) = \frac{\nu |u|^p}{1 + \mu |u|^p} u, \quad \mu > 0, \nu > 0, p > 1.$$

Будемо шукати розв'язки системи (1) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

де $(u_n) \subset \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ — частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами.

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1), одержуємо систему

$$(Lu)_n + \omega^2 u_n = f(u_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

де $(Lu)_n = (\Delta u)_n - m^2 u_n$.

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з k -періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$u_{n+k} = u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

де k — деяке натуральне число, то

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_n = 0 \quad (5)$$

відповідно.

Нехай $F(t)$ первісна функція для функції $f(t)$, тобто

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds. \quad \text{Тоді всюди далі припустимо, що виконуються такі}$$

умови:

$$(i) \quad f(t) = o(t), \quad t \rightarrow 0;$$

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(t)}{t} = l < \infty;$$

$$(iii) \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ і } f(t)t < f'(t)t^2, \quad t \neq 0;$$

$$(iv) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{2} f(t)t - F(t) \right) = \infty.$$

2. Варіаційне формулювання задачі. З системою (3) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2} (Lu + \omega^2 u, u) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(u_n),$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ зі скалярним добутком

$(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_n$ та нормою $\|u\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Зазначимо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (5).

Нехай $k \geq 2$ — натуральне число. Тоді через l_k^2 позначимо простір всіх k -періодичних послідовностей $\{u_n\}$, які задовольняють умову (4).

Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком $(u, v)_k = \sum_{n \in Q_k} u_n v_n$

та нормою $\|u\|_k = \left(\sum_{n \in Q_k} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, де $Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{k}{2} \right] \leq n \leq k - \left[\frac{k}{2} \right] - 1 \right\}$,

$\left[\frac{k}{2} \right]$ — ціла частина $\frac{k}{2}$. На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2} (L_k u + \omega^2 u, u)_k - \sum_{n \in Q_k} F(u_n),$$

де L_k — оператор L , який діє в просторі l_k^2 .

Іноді ми також будемо розглядати простори l^p та l_k^p ($1 \leq p \leq \infty$) з нормами

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{l_k^p} = \left(\sum_{n \in Q_k} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

з відомою зміною при $p = \infty$. Нагадаємо, що при $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|u\|_{l^q} \leq \|u\|_{l^p}, \quad \|u\|_{l_k^q} \leq \|u\|_{l_k^p}. \quad (6)$$

Зауваження 1. Оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2 , а його спектр збігається з відрізком $[-m^2 - 4, -m^2]$ і є абсолютно неперервним. Причому за виконання умов (i), (ii) функція $\frac{f(t)}{|t|}$ строго зростаюча, тоді як функція $\frac{1}{2} f(t)t - F(t)$ строго зростає при $t \geq 0$ і строго спадає при $t \leq 0$, а отже, є невід'ємною.

Безпосереднім обчисленням одержуємо:

Лема 1. За зроблених припущень функціонали J_k та J належать класу C^1 , а їх похідні визначаються формулами

$$\langle J'_k(u), h \rangle = (L_k u + \omega^2 u, h)_k - \sum_{n \in Q_k} f(u_n) h_n, \quad u, h \in l_k^2, \quad (7)$$

$$\langle J'(u), h \rangle = (Lu + \omega^2 u, h) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(u_n) h_n, \quad u, h \in l^2. \quad (8)$$

Крім того, критичні точки J_k та J є розв'язками рівняння (3), що задовольняють відповідно умови (4) та (5).

3. Многовиди Нехарі. Попередні леми. Для функціоналів J_k та J означимо відповідні *многовиди Нехарі*

$$N_k := \{u \in l_k^2 \mid \langle J'_k(u), u \rangle = 0, u \neq 0\} \subset l_k^2$$

$$N := \left\{ u \in l^2 \mid \langle J'(u), u \rangle = 0, u \neq 0 \right\} \subset l^2.$$

Введемо позначення $I_k(u) := \langle J'_k(u), u \rangle$ та $I(u) := \langle J'(u), u \rangle$.

Це C^1 -функціонали, похідні яких визначаються формулами

$$\langle I'_k(u), h \rangle = 2(L_k u + \omega^2 u, h)_k - \sum_{n \in Q_k} (f(u_n) + f'(u_n)u_n)h_n, \quad (9)$$

$$\langle I'(u), h \rangle = 2(Lu + \omega^2 u, h) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f(u_n) + f'(u_n)u_n)h_n. \quad (10)$$

Лема 2. Нехай виконуються умови (i)–(iii), $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді множини N_k та N є непорожніми замкненими C^1 -підмноговидами відповідно у просторах l_k^2 та l^2 , на яких $I'_k(u) \neq 0$ та $I'(u) \neq 0$. Крім того, існує $\beta_0 > 0$, яке не залежить від k і таке, що $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$, та $\|u\| \geq \beta_0$, $u \in N$.

Доведення. Розглянемо випадок N_k (інший випадок аналогічний). Спочатку покажемо, що многовид N_k непорожній. Нехай $\delta \in (\omega^2, l + m^2 + 4)$ і E_δ — спектральний підпростір оператора $L_k + \omega^2$ в просторі l_k^2 , що відповідає відрізку $[0, \delta]$. Оскільки $\omega^2 \in \sigma(L_k + \omega^2)$, то $E_\delta \neq \{0\}$. Нехай $v \in E_\delta \setminus \{0\}$. За умовою (i)

$$\begin{aligned} \langle J'_k(tv), tv \rangle &= t^2 (L_k v + \omega^2 v, v)_k - \sum_{n \in Q_k} f(tv_n)tv_n = \\ &= t^2 (L_k v + \omega^2 v, v)_k - o(t^2) > 0 \end{aligned}$$

для достатньо малих $t > 0$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} \langle J'_k(tv), tv \rangle &= t^2 (L_k v + \omega^2 v, v)_k - \sum_{n \in Q_k} f(tv_n)tv_n \leq \\ &\leq t^2 \left(\delta \|v\|_k^2 - \sum_{n \in Q_k} \frac{f(tv_n)v_n^2}{tv_n} \right). \end{aligned}$$

За умовою (ii) сума в дужках збігається до $l\|v\|_k^2$, а тому $\langle J'_k(tv), tv \rangle < 0$ для достатньо великих $t > 0$. Тоді існує $t^* > 0$ таке, що $\langle J'_k(t^*v), t^*v \rangle = 0$ і $t^*v \in N_k$. Отже, $N_k \neq \emptyset$.

Нехай $u \in N_k$, тоді з рівностей (7), (9) та означення N_k , одержуємо

$$\langle I'_k(u), u \rangle = \langle I'_k(u), u \rangle - 2I_k(u) = \sum_{n \in Q_k} (f(u_n)u_n - f'(u_n)u_n^2).$$

За умовою (iii) ця сума є від'ємною. Тому $I'_k(u) \neq 0$ і за теоремою про неявну функцію (див. [3], Теорема 4.2.1), $N_k \in C^1$ -підмноговином в просторі l_k^2 . Замкненість N_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай $\varphi(r) = \sup_{|t| \leq r} \frac{f(t)}{t}$.

Це зростаюча функція від $r \geq 0$ і, згідно (i), $\varphi(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Нехай $u \in N_k$. Зазначимо, що оператор $L_k + \omega^2$ додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівностей (6) маємо

$$\begin{aligned} \omega^2 \|u\|_k^2 &\leq (L_k u + \omega^2 u, u)_k = \sum_{n \in Q_k} f(u_n)u_n \leq \\ &\leq \varphi(\|u\|_k) \cdot \|u\|_k^2 \leq \varphi(\|u\|_k) \cdot \|u\|_k^2. \end{aligned}$$

А це означає, що $\varphi(\|u\|_k) \geq \omega^2$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$. **Лему доведено.**

З доведення леми 2 випливає:

Наслідок 1. Якщо $I_k(v) \leq 0$ (відповідно $I(v) \leq 0$), то існує єдине $t^* \in (0, 1]$ таке, що $t^*v \in N_k$ (відповідно $t^*v \in N$), а також існує таке $v \in E_k \setminus \{0\}$ (відповідно $v \in E \setminus \{0\}$), що $J_k(v) < 0$ (відповідно $J(v) < 0$).

З означень J_k та I_k випливає, що на N_k

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2}I_k(u) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n) \right). \quad (11)$$

За умовою (iii) $J_k(u) \geq 0$, $u \in N_k$. Аналогічно, з означень J та I випливає, що на N

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{2}I(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n) \right) \quad (12)$$

та $J(u) \geq 0$, $u \in N$.

Лема 3. Нехай виконуються умови (i)–(iii), $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді існує таке число $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$, що $J_k(u) \geq \alpha_0$ для всіх $u \in N_k$.

Доведення. Нехай $u \in N_k$, тоді має місце рівність (11). За ле-
мою 2, $\|u\|_k \geq \beta_0 > 0$. Отже, існують $n_0 \in Q_k$ (залежне від u) і
 $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$ (незалежне від u) такі, що $|u_{n_0}| \geq \delta_0$. Тоді, покла-
вши $\alpha_0 = \frac{1}{2} f(\delta_0) \delta_0 - F(\delta_0)$, за зауваженням 1 маємо, що $J_k(u) \geq \alpha_0$
для $u \in N_k$. **Лему доведено.**

Тепер розглянемо дві задачі мінімізації

$$\inf \{J_k(u) : u \in N_k\} =: m_k, \quad (13)$$

$$\inf \{J(u) : u \in N\} =: \bar{m}. \quad (14)$$

Виявляється, що розв'язки цих задач є розв'язками системи (3) у
відповідних просторах.

Лема 4. Нехай виконуються умови (i)–(iii), $\omega^2 > m^2 + 4$ та
 $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді розв'язки задач (13) і (14) є розв'язками рівнян-
ня (3) в просторах l_k^2 та l^2 відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок задачі (14), інший випадок ана-
логічний. Нехай $u \in N$ розв'язок задачі мінімізації (14). Згідно мето-
ду множників Лагранжа (див. [3]), існує $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$J'(u) + \lambda I'(u) = 0.$$

Оскільки $\langle J'(u), u \rangle = I(u) = 0$, то, враховуючи рівність (10), одер-
жуємо

$$0 = \lambda \langle I'(u), u \rangle = \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right).$$

За умовою (iii) сума в правій частині останньої рівності від'ємна
і, отже, $\lambda = 0$, що й доводить лему.

Лема 5. Нехай виконуються умови (i)–(iv), $\omega^2 > m^2 + 4$ та
 $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді задача (13) має розв'язок.

Доведення. Нехай $\{u^j\} \subset N_k$ — мінімізуюча послідовність для
 J_k , тобто $J_k(u^j) \rightarrow m_k$. З рівності (11) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n^j) u_n^j - F(u_n^j) \right). \quad (15)$$

Покажемо, що послідовність $\{u^j\}$ обмежена в l_k^2 . Припустимо
протилежне. Оскільки простір l_k^2 скінченновимірний, а l^∞ -норма

еквівалентна евклідовій нормі на l_k^2 , то, переходячи до підпослідовності, маємо, що $\|u^j\|_{l_k^2} \rightarrow \infty$. Тоді, для наступної підпослідовності, для якої збережемо теж саме позначення $\{u^j\}$, існує $n_0 \in Q_k$ таке, що $u_{n_0}^j \rightarrow \infty$. Тоді за рівністю (15), враховуючи умову (iv), це означає, що $J_k(u^j) \rightarrow \infty$. Отримали суперечність, оскільки $J_k(u^j) \rightarrow m_k$ і, отже, послідовність $\{u^j\}$ обмежена.

Оскільки l_k^2 скінченновимірний простір та $\{u^j\}$ обмежена послідовність, то, переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що $\{u^j\}$ збігається до $u \in l_k^2$. Але многовид Нехарі N_k замкнений і J_k неперервний функціонал, тому $u \in N_k$ і $J_k(u) = m_k$. **Лему доведено.**

4. Основні результати.

4.1. Існування періодичних розв'язків. Основним результатом цього пункту є теорема:

Теорема 1. Нехай виконуються умови (i)–(iv), $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді для будь-якого $k \geq 2$ рівняння (3) має нетривіальний k -періодичний розв'язок $u \in l_k^2$. Більше того, якщо функція f непарна, то рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in l_k^2$, один з яких невід'ємний.

Доведення. Існування нетривіального k -періодичного розв'язку $u \in l_k^2$ випливає з леми 5.

Нехай f непарна функція. Тоді F парна і очевидно, що рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in l_k^2$. Легко бачити, що

$$(L|u|, |u|)_k \leq (Lu, u)_k.$$

Крім того, $f(|t|)|t| = f(t)t$ та $F(|t|) = F(t)$. А це означає, що

$$I_k(|u|) \leq I_k(u) = 0.$$

З іншого боку,

$$\sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(|u_n|)|u_n| - F(|u_n|) \right) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right) = m_k.$$

За наслідком 1, існує $t^* \in (0, 1]$ таке, що $u^* = t^*|u| \in N_k$. Тоді за зауваженням 1 та рівністю (11), маємо

$$J_k(u^*) \leq \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) = m_k.$$

Таким чином, $J_k(u^*) = m_k$ та u^* невід'ємний розв'язок, і, отже, можна взяти $u = u^*$. **Теорему доведено.**

4.2. Існування локалізованих розв'язків. Аналогічну лему до леми 5 для задачі (14) довести складно. Тому для одержання l^2 -розв'язку рівняння (3) ми перейдемо до границі при $k \rightarrow \infty$. Для цього знадобиться лема:

Лема 6. Нехай виконуються умови (i)–(iv), $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. І нехай u^k — k -періодичний розв'язок задачі (13). Тоді послідовності $\{m_k\} = \{J_k(u^k)\}$ та $\{\|u^k\|_k\}$ обмежені.

Доведення. *Крок 1.* Спочатку нагадаємо, що спектр оператора L абсолютно неперервний і збігається з відрізком $[-m^2 - 4, -m^2]$. А отже, для будь-якого $\delta \in (\omega^2, l + m^2 + 4)$ спектральний підпростір оператора $L + \omega^2$ в просторі l^2 , що відповідає відрізьку $[0, \delta]$, ненульовий. Нехай $w \neq 0$ довільний вектор з цього підпростору. Тоді маємо

$$\begin{aligned} I(tw) &= \langle J'(tw), tw \rangle = t^2 \left(Lw + \omega^2 w, w \right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(tw_n) tw_n \leq \\ &\leq t^2 \left(\delta \|w\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(tw_n)}{tw_n} w_n^2 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

За умовами (i) та (ii) існує стала $C > 0$, яка не залежить від n і t , і така, що

$$\left| \frac{f(tw_n)}{tw_n} \right| \leq C$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $t \in \mathbb{R}$. Отже, ряд в правій частині нерівності (16) збігається рівномірно по відношенню до $t \in \mathbb{R}$. Тому, згідно умови (ii), сума цього ряду збігається до $l \|w\|^2$, і нерівність (16) означає, що $I(tw) < 0$ для всіх достатньо великих $t > 0$. Зафіксуємо довільне t з такою властивістю. Оскільки послідовності зі скінченим носієм щільні в l^2 , то існує вектор $\tilde{w} \in l^2$ зі скінченим носієм достатньо

близький до tw і такий, що $I(\tilde{w}) < 0$. За наслідком 1 існує $t^* \in (0, 1)$ таке, що $I(v) = 0$, де $v = t^* \tilde{w}$. Оскільки v має скінченний носій, то $\text{supp } v \subset Q_k$ для всіх достатньо великих k . Тоді для будь-якого такого k нехай $v^k \in l_k^2$ єдиний елемент такий, що $v_n^k = v_n$ для $n \in Q_k$. Легко бачити, що $I_k(v^k) = I(v) = 0$ та $m_k \leq J_k(v^k) = J(v)$. Отже, послідовність $\{m_k\}$ обмежена.

Крок 2. Методом від супротивного доведемо, що $\{\|u^k\|_k\}$ також обмежена. Припустимо, що $\{\|u^k\|_k\}$ необмежена. Тоді, переходячи до підпослідовності (яку будемо так само позначати), можна вважати, що $\|u^k\|_k \rightarrow \infty$. Візьмемо $v^k = \frac{u^k}{\|u^k\|_k}$, тоді $\|v^k\|_k = 1$ та виконується одна з таких двох умов:

- (a) послідовність $\{v^k\}$ задовольняє умову $\|v^k\|_{l_k^\infty} = \|u^k\|_{l_k^\infty} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;
- (b) існують такі $\delta > 0$ та $x_k \in \mathbb{Z}$, що $|v_{x_k}^k| \geq \delta$ для всіх k .

Розглянемо перший випадок (умова (a)). Оскільки оператор L невід'ємний та

$$0 = \frac{1}{\|u^k\|_k^2} I_k(u^k) = (L_k v^k + \omega^2 v^k, v^k)_k - \sum_{n \in Q_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2,$$

то

$$\omega^2 = \omega^2 \|v^k\|_k^2 \leq (L_k v^k + \omega^2 v^k, v^k)_k = \sum_{n \in Q_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2. \quad (17)$$

За умовою (i) існує $t_0 > 0$ таке, що $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{\omega^2}{2}$ при $t < |t_0|$. Нехай

$$A_k = \{n \in Q_k : |u_n^k| < t_0\},$$

$$B_k = \{n \in Q_k : |u_n^k| \geq t_0\}.$$

Тоді

$$\sum_{n \in A_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2 \leq \frac{\omega^2}{2} \sum_{n \in A_k} (v_n^k)^2 \leq \frac{\omega^2}{2} \|v^k\|_k^2 = \frac{\omega^2}{2}.$$

Звідси, враховуючи нерівність (17), одержуємо

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in B_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in B_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2 \geq \frac{\omega^2}{2}. \quad (18)$$

З іншого боку, $|f(t)| \leq C_0 |u|$ з деякою сталою $C_0 > 0$ і за нерівністю Гельдера

$$\sum_{n \in B_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k} (v_n^k)^2 \leq C_0 |B_k|^{\frac{p-2}{p}} \|v^k\|_{l_k^p}^{\frac{2}{p}} \quad (19)$$

для будь-якого $p > 2$, де $|B_k|$ — кількість елементів множини B_k . Легко перевірити, що

$$\|w\|_{l_k^p} \leq \|w\|_{l_k^{\infty}}^{\frac{p-2}{p}} \|w\|_{l_k^p}^{\frac{2}{p}}. \quad (20)$$

Тоді оскільки $\|v^k\|_{l_k^{\infty}} \rightarrow 0$, то нерівності (18), (19) і (20) показують, що $|B_k| \rightarrow \infty$. Нехай $\alpha_0 = \min \left\{ \frac{1}{2} f(\pm t_0)(\pm t_0) - F(\pm t_0) \right\}$. Тоді з рівності (12) та зауваження 1 маємо

$$m_k = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) \geq \sum_{n \in B_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) \geq \alpha_0 |B_k| \rightarrow \infty.$$

Отримали суперечність.

Розглянемо другий випадок (умова (b)). Згідно інваріантності рівняння (3) відносно дискретних зсувів, кратних k , можна вважати, що $x_k = 0$. Оскільки $\|v^k\|_k = 1$, то можна також вважати, що знайдеться елемент $v = \{v_n\}$ такий, що $v_n^k \rightarrow v_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ (переходячи до підпослідовності, якщо потрібно). Крім того, очевидно, що $v \in l^2$, $\|v\| \leq 1$ і $|v_0| \geq \delta$. Отже, $v \neq 0$.

Оскільки u^k — k -періодичний розв'язок рівняння (3), то

$$Lv_n^k - (l - \omega^2) v_n^k = \frac{g(u_n^k)}{\|u^k\|_k}, \quad (21)$$

де $g(t) = f(t) - lt$ і за умовою (ii) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{g(t)}{t} = 0$. Якщо $v_n \neq 0$ для деяких $n \in \mathbb{Z}$, то $|u_n^k| \rightarrow \infty$. Переходячи до границі в рівності (21) при $k \rightarrow \infty$, маємо

$$Lv_n - (l - \omega^2)v_n = 0,$$

тобто $v \in l^2$ — ненульовий власний вектор оператора L з власним значенням $l - \omega^2$. Але спектр оператора L в просторі l^2 є абсолютно неперервним. Знову отримали суперечність. Отже, послідовність $\{\|u^k\|_k\}$ обмежена. **Лемі доведено.**

Основним результатом цього пункту є теорема:

Теорема 2. Нехай виконуються умови (i)–(iv), $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді рівняння (3) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$. Більше того, якщо функція f непарна, то рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in l^2$, один з яких невід'ємний.

Доведення. Нехай $u^k \in l_k^2$ розв'язок рівняння (3). Тоді за лемою б послідовність $\{\|u^k\|_k\}$ обмежена та $\{u^k\}$ задовольняє одну з двох умов (a) або (b). В першому випадку нерівність (20) означає, що $\|u^k\|_{l_k^p} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для будь-якого $p > 2$. За умовою (i) для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $C_\varepsilon > 0$ таке, що

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t| + C_\varepsilon |t|^{p-1}.$$

Оскільки u^k — k -періодичний розв'язок рівняння (3), то

$$\omega^2 \|u^k\|_k^2 \leq (L_k u^k + \omega^2 u^k, u^k)_k = \sum_{n \in Q_k} f(u_n^k) u_n^k \leq \varepsilon \|u^k\|_k^2 + C_\varepsilon \|u^k\|_{l_k^p}^p.$$

Поклавши $\varepsilon = \frac{\omega^2}{2}$, одержуємо

$$\frac{\omega^2}{2} \|u^k\|_k^2 \leq C_\varepsilon \|u^k\|_{l_k^p}^p \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$. А це суперечить лемі 2 і, отже, виконання умови (a) неможливе.

Таким чином, виконується умова (b). Переходячи до підпослідовності і використовуючи інваріантність дискретних зсувів можна вважати, що $|u_0^k| \geq \delta$ з деяким $\delta > 0$. Переходячи знову до підпослідовності, ми також можемо вважати, що існує послідовність $u = \{u_n\}$ така, що $u_n^k \rightarrow u_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Легко бачити, що $u \in l^2$ та $u \neq 0$. Крім того, для рівняння (3) маємо поточкову збіжність і, отже, $u \in l^2$ — його нетривіальний розв'язок.

Друга частина теореми випливає з теореми 1. **Теорему доведено.**

Зауваження 2. Можна показати, що за виконання умов теореми 2, $m_k \rightarrow \bar{m}$. Крім того, розв'язок $u \in l^2$, одержаний у цій теоремі, є розв'язком задачі мінімізації (14), тобто $J(u) = \bar{m}$.

Висновки. У цій статті одержано результат про існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона із насичуваними нелінійністями.

Список використаних джерел:

1. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19-26.
2. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18-34.
3. Drabek P., Milota J. Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations. Basel: Birkhäuser, 2007. 568 p.
4. Friesecke G., Wattis J. A. D. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Commun. Math. Phys.* 1994. Vol. 161. P. 391-418.
5. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.* 2013. Vol. 33, № 6. P. 2389-2401.
6. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439-464.
7. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*. 2006. Vol. 216. P. 327-345.
8. Kreiner C. F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear pair interaction. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2009. Vol. 25, № 3 (November). P. 915-931.
9. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers. 2001. P. 205-211.
10. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*. 2006. Vol. 19. P. 27-40.

11. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A.* 2007. Vol. 19, № 2. P. 419-430.
12. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A.* 2008. Vol. 464. P. 3219-3236.
13. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії.* 2006. Т. 26, № 2. С. 140-153.
14. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2014. Т. 57, №3. С. 45-52.
15. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінґера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць.* 2017. Вип. 16. С. 21-29.
16. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінґера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії.* 2010. Т. 33, №1. С. 78-84.
17. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні \sin -Гордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць.* 2013. Вип. 9. С. 5-10.
18. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник.* 2010. Т. 7, № 2. С. 154-175.

STANDING WAVES IN DISCRETE KLEIN-GORDON TYPE EQUATIONS WITH SATURABLE NONLINEARITIES

This article is devoted to the study of discrete Klein-Gordon type equations that describe the dynamics of infinite chains of linearly coupled nonlinear oscillators. Such equations are infinite systems of ordinary differential equations. Equations of this type with saturable nonlinearities are studied. For such equations, results on the existence of solutions in the form of standing waves are obtained. After substituting the ansatz in the form of a standing wave into this system, a system of algebraic equations for the amplitude of a standing wave is obtained. Two types of solutions are studied: periodic (with a period k) and localized (converging to zero at infinity). These equations have a variational structure. Therefore, it is shown that k -periodic and localized solutions can be constructed as critical points of some two functionals in the corresponding spaces of two-sided sequences. Next, we consider the Nehari manifolds for the corresponding variational problems. These manifolds contain nontrivial critical points of these functionals. It is shown that the Nehari manifolds are non-empty and closed submanifolds of the corresponding spaces of two-sided sequences. In addition, the corresponding problems of minimizing these functionals are considered. It is shown that on the Nehari manifold for the first functional the corresponding minimization problem has a solution under certain conditions. Therefore, under these conditions, the original equation has nontrivial k -periodic solutions. In the case of localized solutions, it is difficult to prove that the corresponding minimization problem has a solution on the corresponding

Nehari manifold. Therefore, in this case, the method of periodic approximations is used, i.e., the critical points of the functional that corresponds to localized solutions are constructed using the passage to the limit (with a period k tending to infinity) at the critical points of the functional that corresponds to k -periodic solutions. The obtained localized solutions are the solutions of the corresponding minimization problem.

Key words: *discrete Klein-Gordon type equations, standing waves, critical points, Nehari manifold.*

Отримано: 19.10.2021

УДК 004.942:519.876.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.19-26

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,

В. А. Федорчук**, д-р техн. наук, професор

*Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. С. Пухова НАН України, м. Київ,

**Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ

Стаття присвячена проблемі отримання інтегральних математичних моделей теплових об'єктів з вихідного рівняння теплопровідності, що подано у диференціальній формі. Розглядається випадок оберненої задачі для рівняння теплопровідності, яка є некоректною. При розв'язуванні як прямих, так і обернених задач динаміки з використанням обчислювальних методів важливе значення має вибір форми математичного опису моделі. Навіть моделі, які отримані з вихідних моделей в результаті еквівалентних перетворень при числовій реалізації видають нееквівалентні розв'язки. Тому для розв'язування обернених задач динаміки доцільно використовувати інтегральні математичні моделі, які володіють високою обчислювальною стійкістю. В інтегральній постановці такі некоректні обернені задачі успішно розв'язуються за допомогою методів регуляризації. У статті розглянуто два варіанти оберненої задачі. В першому варіанті зворотна задача розглядається в постановці Діріхле, а в другому варіанті розглядається задача Неймана. В обох варіантах зворотні задачі, що подані в диференціальній формі шляхом еквівалентних перетворень подаються у вигляді інтегральних рівнянь першого роду. Для отриманих інтегральних моделей показано, що розв'язки рівнянь єдині. Перевагою отриманих інтегральних моделей є їх

відносна простота і широкий спектр розроблених методів їх числової реалізації на основі застосування різних квадратурних формул. Крім того, ядра отриманих інтегральних рівнянь можуть фізично інтерпретуватися як імпульсні перехідні характеристики теплопровідного середовища. Це дає змогу їх ідентифікації за перехідними характеристиками теплопровідного середовища, які можна отримати експериментальним шляхом.

Ключові слова: *теплопровідні об'єкти, функція розподілу, інтегральні моделі, перетворення моделі, зворотні задачі.*

Вступ. У практичних додатках значне місце займають задачі відновлення функцій джерел тепла при дослідженні процесів теплопровідності. Розв'язування таких задач є актуальним як в теорії і практиці теплових вимірювань, так і при пошуку керуючих впливів при керуванні різними видами теплопровідних об'єктів [1-3]. Складність розглянутих задач приводить до необхідності застосування кількісних методів і засобів. У зв'язку з цим істотного значення набуває пошук можливості спрощення моделі, що реалізується.

Постановка задачі. Розглядаються способи перетворення до інтегрального виду обернених задач для рівняння теплопровідності [4]

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta T + f, \quad a = \text{const} \quad (1)$$

в півплощині, які можна узагальнити на випадок n -мірного півпростору, причому

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \varphi(t) f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де $\varphi(t)$ — відома функція.

1-й варіант оберненої задачі. Визначається функція $f(x, y)$ із рівняння

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta T + \varphi(t) f_1 \quad (2)$$

в півплощині $y \geq 0$ при наступних умовах:

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) &= 0, \\ T(x, 0, t) &= h(x, t), \\ T(x, y_1, t) &= r(x, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо позначити

$$v(x, y, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} T(x, y, t) dt,$$

то в силу (2) і (3) функція $v(x, y, \lambda)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\Delta v - a^2 \lambda^2 v = -\psi(\lambda) f(x, y), \quad \psi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \varphi(t) dt. \quad (4)$$

Залежності (3) перетворюються при цьому до виду:

$$v(x, y_1, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} r(x, t) dt = r_1(x, \lambda),$$

$$v(x, 0, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} h(x, t) dt = h_1(x, \lambda).$$

Рівняння (4) має фундаментальний розв'язок у вигляді функції Ханкеля

$$\frac{1}{2\pi} H_0^{(1)}(ia\lambda r) = \frac{1}{2\pi} K_0(a\lambda r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

яка задовольняє цьому рівнянню всюди, крім точки $r = 0$.

Через фундаментальний розв'язок виражається функція Гріна першого роду

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} [K_0(a\lambda R_1) - K_0(a\lambda R_2)],$$

$$R_1 = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}, \quad R_2 = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}.$$

Тоді розв'язок рівняння (4) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} v(x, y, \lambda) &= \frac{a\lambda y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_0} K_1(a\lambda R_0) h_1(\xi, \lambda) d\xi + \\ &+ \psi(\lambda) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (5) \\ R_0 &= [(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Вважаючи в останній рівності $y = y_1$, отримаємо інтегральне рівняння першого роду відносно невідомої функції $f(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [K_0(a\lambda R_3) - K_0(a\lambda R_4)] f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= g(x, \lambda) \\ R_3 &= [(x - \xi)^2 + (\eta - y_1)^2]^{1/2}, \quad R_4 = [(x - \xi)^2 + (\eta + y_1)^2]^{1/2}, \quad (6) \\ g(x, \lambda) &= \frac{2}{\psi(\lambda)} [\pi r_1(x, \lambda) - a\lambda y_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} K_1(a\lambda R) h_1(\xi, \lambda) d\xi], \\ R &= [(x - \xi)^2 + y_1^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Праву частину $g(x, \lambda)$ рівняння (6) можна підпорядкувати такій умові, щоб це рівняння мало розв'язком деяку функцію $f(x, y)$, яка задовольняє вимогам:

- 1) $f(x, y) = 0$ при $y < y_1$, $y_1 > 0$;
- 2) $f(x, y) \in L_1(D)$, $D = (-\infty < x < \infty; 0 < y < \infty)$.

Застосовуючи перетворення Фур'є за змінною x до рівняння (6) і використовуючи рівність [5]

$$\int_0^{\infty} K_0[b(c^2 + t^2)^{1/2}] \cos Ttdt = \frac{\pi}{2\sqrt{b^2 + T^2}} e^{-|c|\sqrt{b^2 + T^2}}, \quad (7)$$

отримаємо

$$\int_0^{\infty} F(\omega, \eta) \{e^{-|\eta - y_1|\sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}} - e^{-|\eta + y_1|\sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}}\} d\eta = \frac{\sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, \lambda) e^{-i\omega x} dx,$$

$$F(\omega, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{-i\omega\xi} d\xi.$$

Враховуючи, що $f(x, y) = 0$ при $y < y_1$, останнє рівняння запишемо у вигляді

$$\int_0^{\infty} F(\omega, \eta) e^{-\eta\sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}} d\eta = Q(\omega, \lambda),$$

$$Q(\omega, \lambda) = \frac{\sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}}{2\pi \operatorname{sh} y_1 \sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}} G(\omega, \lambda), \quad (8)$$

$$G(\omega, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, \lambda) e^{-i\omega x} dx.$$

Покажемо, що при сформульованих вище припущеннях щодо функції $f(x, y)$ можна застосовувати перетворення Фур'є за змінною x до рівняння (6).

Дійсно, з рівності (7) випливає, що ядро інтегрального рівняння (6) є абсолютно інтегрованою функцією. Тоді з теореми про згортку двох абсолютно інтегрованих функцій випливає, що $g(x, \lambda)$ є також абсолютно інтегрована функція змінної x і, отже, $G(\omega, \lambda)$ існує. Для функції $G(\omega, \lambda)$ неважко отримати оцінку

$$|G(\omega, \lambda)| < \frac{2\pi \operatorname{sh} y_1 \sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}} e^{-y_1\sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}} \int_{y_1}^{\infty} |F(\omega, \eta)| d\eta. \quad (9)$$

Із умови $f(\xi, \eta) \in L_1(D)$ слідує:

$$|F(\omega, \eta)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi, \eta)| d\xi,$$

$$\int_{y_1}^{\infty} |F(\omega, \eta)| d\eta \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \alpha < \infty.$$

Підставляючи останню нерівність в (9), остаточно отримаємо

$$|G(\omega, \lambda)| < \frac{\alpha\pi}{\sqrt{a^2\lambda^2 + \omega^2}}. \quad (10)$$

Позначимо

$$t = \eta - y_1, \quad p^2 = a^2\lambda^2 + \omega^2, \quad F_1(\omega, t) = F(\omega, t + y_1) = F_{11}(\omega, t) + iF_{12}(\omega, t),$$

$$Q_1(\omega, p) = e^{y_1 p} Q(\omega, \frac{1}{a} \sqrt{p^2 - \omega^2}) = Q_{11}(\omega, p) + iQ_{12}(\omega, p).$$

Тоді рівняння (8) розпадається на два незалежних інтегральних рівняння Лапласа щодо невідомих функцій F_{11} і F_{12} :

$$\int_0^{\infty} F_{1i}(\omega, t) e^{-pt} dt = Q_{1i}(\omega, p), \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Очевидно, що функції F_{1i} , $i = 1, 2$, неперервні і обмежені, так як $f(\xi, \eta) \in L_1(D)$. Звідси, випливає, що кожне з рівнянь (11) має тільки один розв'язок, який можна подати за допомогою формули [5]

$$F_{1i}(\omega, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n}{z}\right)^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial p^n} Q_{1i}\left(\omega, \frac{n}{z}\right)}{n!}, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Оскільки відомо, що якщо перетворення Фур'є

$$F(\omega, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{-i\omega\xi} d\xi \quad (13)$$

функції $f(\xi, \eta)$, яка підсумовується (при фіксованому η) рівне нулю для всіх ω , то і $f(\xi, \eta) = 0$ майже всюди. Тому єдиний розв'язок рівняння (13) має такий вигляд:

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \eta) e^{i\omega\xi} d\omega.$$

Таким чином, сформульована вище зворотна задача для рівняння (2) може мати не більше одного розв'язку.

2-й варіант оберненої задачі. Обернена задача (2)-(3) зведена до інтегрального рівняння (8) за допомогою формули (5), яка дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння (4). Інтегральне рівняння, аналогічне рівнянню (8), можна отримати також, якщо розглянути задачу Неймана для того ж рівняння. Нехай функція $T(x, y, t)$ є розв'язком рівняння (2) в півплощині $y \geq 0$, якщо

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) &= 0, \\ T(x, 0, t) &= h(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial y} T(x, 0, t) &= r(x, t). \end{aligned} \tag{14}$$

Застосовуючи перетворення Лапласа по t до цього рівняння, отримаємо рівняння (4) для функції v .

Граничні умови (14) перейдуть при цьому в наступні:

$$\begin{aligned} v(x, 0, \lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} h(x, t) dt = \varphi_1(x, \lambda), \\ \frac{\partial}{\partial y} v(x, 0, \lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} r(x, t) dt = \varphi_2(x, \lambda). \end{aligned}$$

Легко перевірити, що функція

$$N(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} [K_0(a\lambda R_1) + K_0(a\lambda R_2)],$$

$$R_1 = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}, \quad R_2 = [(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2]^{1/2}$$

задовольняє диференціальному рівнянню (4) усюди, крім точки $x = \xi$, $y = \eta$, в якій вона має логарифмічну особливість. Нормальна похідна цієї функції на границі півплощини звертається в нуль. Отже, $N(x, y; \xi, \eta)$ є функцією Гріна другого роду для півплощини.

Тому розв'язок рівняння (4) можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} v(x, y, \lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(a\lambda R_0) \varphi_2(\xi, \lambda) d\xi + \\ &+ \psi(\lambda) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ R_0 &= [(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Вважаючи в (15) $y = 0$, для невідомої функції $f(\xi, \eta)$ отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K \{ a\lambda [(x - \xi)^2 + \eta^2]^{1/2} \} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, \lambda), \quad (16)$$

$$g(x, \lambda) = \frac{1}{\psi(\lambda)} \left[\pi \varphi_1(x, \lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} K_0(a\lambda |x - \xi|) \varphi_2(\xi, \lambda) d\xi \right],$$

яке після перетворення Фур'є по x перейде в наступне:

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta \sqrt{a\lambda^2 + \omega^2}} F(\omega, \eta) d\eta = \frac{1}{\pi} \sqrt{a\lambda^2 + \omega^2} G(\omega, \lambda), \quad (17)$$

$$G(\omega, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, \lambda) e^{-i\omega x} dx.$$

Позначимо

$$p^2 = a\lambda^2 + \omega^2,$$

$$\Phi(p, \omega) = \frac{1}{\pi} p G \left(\omega, \frac{1}{a} \sqrt{p^2 - \omega^2} \right) = \Phi_1(p, \omega) + i\Phi_2(p, \omega),$$

$$F(\omega, \eta) = F_1(\omega, \eta) + iF_2(\omega, \eta).$$

Відокремлюючи дійсну й уявну частини у рівнянні (17), отримаємо два незалежних інтегральних рівняння Лапласа відносно невідомих функцій F_1 і F_2 :

$$\int_0^{\infty} e^{-p\eta} F_i(\omega, \eta) d\eta = \Phi_i(\omega, p), \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

Для того щоб обґрунтувати застосування перетворення Фур'є по x до рівняння (15), можна $g(x, \lambda)$ підпорядкувати умові, щоб рівняння (14) мало розв'язком деяку функцію $f(x, y) \in L_1(D)$, $D = (-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty)$. Тоді єдиний розв'язок рівняння (17) представимо формулою (12). Звертаючи перетворення Фур'є (13), отримаємо єдиний розв'язок $f(x, y)$ оберненої задачі (2), (14).

Висновок. Таким чином, вихідні постановки обернених задач для рівнянь теплопровідності можуть бути зведені до більш простих моделей у вигляді інтегральних рівнянь, які допускають отримання чисельних розв'язків за допомогою квадратурних методів. Ядра інтегральних рівнянь при цьому можуть фізично інтерпретуватися як перехідні (передатні) характеристики теплопровідного середовища.

Список використаних джерел:

1. Thermal Conductivity: Theory, Properties, and Applications / ed. by Terry M. Tritt. Boston: Springer, 2004. 290 p.

2. Hans U. Fuchs. The Dynamics of Heat: A Unified Approach to Thermodynamics and Heat Transfer. New York: Springer, 2010. 734 p.
3. Thermoelectric handbook: macro to nano / ed. by D. M. Rowe. Boca Raton: CRC Press, 2010. 1014 p.
4. Николаенко Ю. Е. О получении интегральных моделей для обратной задачи теплопроводности. *Моделювання та інформаційні технології*. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2006. Вип. 38. С. 115-120.
5. Карташов Э. М., Кудинов В. А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. Москва: Либроком, 2012. 656 с.

MATHEMATICAL MODELS FOR THE PROBLEM OF RECOVERY OF THE HEAT SOURCE DISTRIBUTION FUNCTION

The article is devoted to the problem of obtaining mathematical models in integral form for thermal objects from the initial equation of thermal conductivity, given in differential form. The case of the inverse incorrect problem for the thermal conductivity equation is considered. When solving both direct and inverse dynamics problems using computational methods, it is important to choose the form of mathematical description of the model. Even models derived from the original models as a result of equivalent transformations in the numerical implementation give non-equivalent solutions. Therefore, it is recommended to use integral mathematical models that have high computational stability to solve inverse dynamics problems. In the integral formulation, such incorrect inverse problems are successfully solved using regularization methods. The article considers two variants of the inverse problem. In the first case, the inverse problem is considered as Dirichlet's task, and in the second case, as Neumann's problem is considered. In both cases, the inverse problems presented in differential form, by equivalent transformations are given in the form of integral equations of the first kind. For the obtained integral models it is shown that the solutions of the equations are unique. The advantage of the obtained integrated models is their relative simplicity and a wide range of developed methods of their numerical implementation based on the use of different quadrature formulas. In addition, the kernels of the obtained integral equations can be physically interpreted as impulse transition characteristics of the heat-conducting medium. This makes it possible to identify them by the transient characteristics of the heat-conducting medium, which can be obtained experimentally.

Key words: *thermally conductive objects, distribution function, integral models, model transformations, inverse problems.*

Отримано: 12.10.2021

УДК 519.245:004.94

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.27-38

Д. В. Гранкін, канд. фіз.-мат. наук,

М. В. Гранкін, аспірант,

В. П. Гранкін, д-р фіз.-мат. наук, професор

ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»,
м. Маріуполь

МЕТОД КЛІТИННИХ АВТОМАТІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-ХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА НАНОКАТАЛІЗАТОРІ

У роботі розглянуто новий підхід для опису динамічних фізико-хімічних процесів на нанокатализаторі. Зростаючі труднощі опису каталізу гетерогенної хімічної реакції нанокатализаторами обумовлені тим, що описувані явища нелінійні, дисипативні, в ряді випадків супроводжуються автоколивальним і стохастичним характером протікання і не можуть бути описані застосовуваними традиційними математичними моделями, наприклад, заснованими на системах диференціальних рівнянь. Для вирішення розглянутого в публікації завдання в роботі запропоновано застосовувати, як альтернативу диференціальним рівнянням для неперервної математики, дискретні моделі, які є розширеннями класичного клітинного автомата фон Неймана. В цьому випадку клітинний автомат розглядається як дискретний вираз просторово-часової функції і виконує ту ж задачу, що і диференціальні рівняння в часткових похідних. Розроблено стадійний механізм реакції, що враховує рекомбінацію атомів, утворення коливально-збуджених молекул, їх дифузії і релаксацію, а також клітинно-автоматну модель гетерогенної хімічної реакції на нанокатализаторі з системою просторово розподілених нанокластерів на поверхні. Наводяться результати КА-моделювання та показано, що розроблений в роботі асинхронний клітинний автомат дозволяє моделювати хімічну реакцію, в тому числі рекомбінації атомів, на поверхні нанокатализатора з просторово розподіленими нанокластерами на поверхні. Побудована КА-модель описує кінетику процесу в реальному фізичному часі і використовує фізичні перетини і константи взаємодії.

Ключові слова: *клітинний автомат фон Неймана, клітинно-автоматна модель, метод Монте-Карло, асинхронні клітинні автомати, нанокатализатор, дифузія.*

Вступ. Одним із завдань, що потребує вирішення, є розробка механізму каталізу гетерогенної хімічної реакції твердотільними катализаторами з просторово неоднорідною поверхнею. Складність завдання полягає в тому, що рівень розуміння картини протікання фізико-

хімічних процесів при взаємодії реакційно активних частинок газу з поверхнею каталізатора залишається поки недостатнім. Це пов'язано, зокрема, зі слабкістю застосовуваних традиційних математичних моделей, наприклад, заснованих на системах диференціальних рівнянь, які не здатні описувати складні явища при протіканні хімічних реакцій. Ці явища часто нелінійні, дисипативні, можуть супроводжуватися автоколивальним і стохастичним характером протікання [1].

У зв'язку з розвитком комп'ютерної техніки для вирішення розглянутого в публікації завдання в роботі [2] запропоновано застосовувати, як альтернативу диференціальним рівнянням для неперервної математики, дискретні моделі, які є розширеннями класичного клітинного автомату (КА) фон Неймана [3]. В цьому випадку КА розглядається як дискретний вираз просторово-часової функції. У всіх точках дискретного простору (клітинах) значення цієї функції (стан клітин) змінюється за одними й тими ж правилами, які виражаються у вигляді булевих функцій від стану клітин з деякого околу [4]. Всі клітини можуть перейти в новий стан в будь-якому порядку або одночасно. Це призводить до зміни глобального стану КА і імітує просторово розподілений процес. Тобто КА виконує ту ж задачу, що і диференціальні рівняння в часткових похідних.

Дискретний характер постадійного протікання процесів є характерним для фізичних і хімічних процесів, в тому числі — хімічних реакцій на каталізаторах. Це визначає потенційне використання клітинних автоматів для імітації епітаксialного зростання плівок, кристалів, нановіскерів й ін., а також моделювання реакції на каталізаторах [5]. Саме переривчастість протікання подій у часі (наприклад, адсорбції, десорбції, дифузії, реакційних зіткнень атомів і молекул на поверхні каталізатора) має дискретний характер правил переходів і дозволяє описати фізико-хімічні процеси безпосереднім чином за допомогою клітинних автоматів. Такі КА називаються дифузійно-реакційними [6]. Дифузійна складова включає імітацію просторових переміщень частинок, а реакційна складова — хімічні перетворення на поверхні каталізатора. У випадку з ймовірнісними правилами переходів в нові стани (саме такі процеси описуються в цій публікації) дифузійно-реакційні КА називаються асинхронними КА або методом Монте-Карло [6]. На відміну від КА фон Неймана, в цих клітинних автоматах допускаються ймовірнісні функції переходів над підмножинами станів клітин, а також асинхронні і змішані режими функціонування.

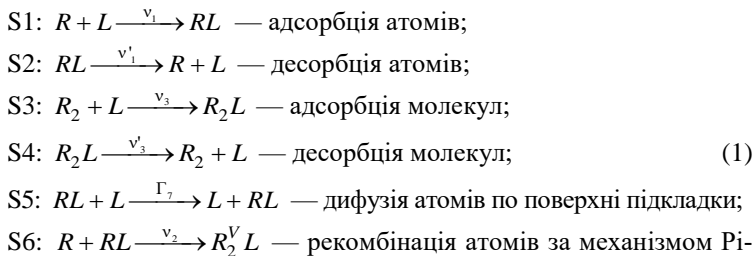
Постановка задачі. Необхідно промоделювати роботу нанокаталізатора, на поверхні якого протікає гетерогенна хімічна реакція рекомбінації атомів. Каталізатор має просторово розподілені нанокластери з металу на поверхні. Сумарна площа нанокластерів на кілька

порядків менше площі підкладки каталізатора. Підкладка і нанокластери виконують різні функції. На підкладці відбувається адсорбція і рекомбінація атомів з утворенням коливально-збуджених молекул (збуджених продуктів реакції). Ці збуджені («гарячі») молекули дифундують по поверхні і релаксують в результаті генерації фононів в підкладці в процесі руху, або в результаті передачі коливальної енергії електронам металу при зіткненні з нанокластерами. Останнє — це релаксація гарячої молекули за електронним каналом з утворенням продукту реакції (фізичний механізм каталізу).

Реакція може протікати за двома механізмами. Перший — це ударний механізм Ріділа-Ілі. За цим механізмом відбувається рекомбінація атома з газової фази з атомом на поверхні. Реакція за механізмом Ленгмюра-Гіншелвуда відбувається, коли рекомбінують адсорбовані атоми, які стикаються на поверхні в процесі дифузії. Швидкість реакції залежить від концентрації нанокластерів, їх діаметру, просторового розташування, дифузійної довжини пробігу частинок на поверхні, властивостей поверхні та ін. Такі задачі, що описують розподілені динамічні системи, принципово не можуть бути вирішені методами безперервної математики [6].

Поведінку аналізованої нелінійної динамічної системи, яка описує протікання реакції на мікрорівні на нанокаталізаторі, можна визначити простими локальними правилами в термінах клітинних автоматів. Динаміка гетерогенної рекомбінації атомів на нанокаталізаторі визначається взаємодією атомів і молекул на атомно-молекулярному рівні, впливом перенесення речовини і енергії реакції на швидкість реакції. Асинхронний ймовірнісний КА, який відомий також як кінетичний метод Монте-Карло, дозволяє вирішити поставлену задачу моделюючи взаємодію реальних атомів і молекул за допомогою дискретних правил переходів.

Опис механізму реакції. Стадійний механізм реакції, що враховує рекомбінацію атомів за двома механізмами, утворення коливально-збуджених молекул, їх дифузію і релаксацію за фононним (на підкладці) та електронним (на нанокластерах) механізмами має вигляд:



діла-Ілі;

S7: $RL + RL \xrightarrow{k_1} R_2^{V-k}L + L$ — рекомбінація атомів за механізмом Ленгмюра-Гіншелвуда;

S8: $R_2^V L \xrightarrow{\Gamma_1} R_2 L + ph$ — релаксація $R_2^V L$ за фононним каналом;

S9: $R_2^{V-k} L \xrightarrow{\Gamma_1'} R_2 L + ph$ — релаксація $R_2^{V-k} L$ за фононним каналом;

S10: $R_2^V L \xrightarrow{\mu_2} R + RL$ — нерівноважна дисоціація $R_2^V L$;

S11: $R_2^{V-k} L + L \xrightarrow{\mu_1} RL + RL$ — нерівноважна дисоціація $R_2^{V-k} L$;

S12: $R_2^V L + Me \xrightarrow{k_{21}} R_2 L + Me + (e - p)$ — релаксація $R_2^V L$ за електронним каналом на нанокластері;

S13: $R_2^{V-k} L + Me \xrightarrow{k_{21}'} R_2 L + Me + (e - p)$ — релаксація $R_2^{V-k} L$ за електронним каналом на нанокластері;

S14: $R_2^V L + L \xrightarrow{\Gamma_6} L + R_2^V L$ — дифузія $R_2^V L$ по поверхні;

S15: $R_2^{V-k} L + L \xrightarrow{\Gamma_6'} L + R_2^{V-k} L$ — дифузія $R_2^{V-k} L$ по поверхні.

Символ L означає вільний від атомів і молекул центр (клітинку) поверхні, R і R_2 — атом і молекула в газовій фазі, RL , R_2L — адсорбовані на поверхні атом і молекула, Me — нанокластер з металу — катализатору, $R_2^V L$ — утворена в реакції Ріділа-Ілі коливально-збуджена молекула на V -коливальному рівні, а $R_2^{V-k} L$ — утворена в реакції Ленгмюра-Гіншелвуда молекула на $v-k$ -коливальному рівні. Тут враховано, що енерговиділення в реакції Ріділа-Ілі більше, ніж в реакції Ленгмюра-Гіншелвуда. На одному центрі (клітці) може адсорбуватися тільки одна молекула або атом (одношарова адсорбція). Адсорбція на одному центрі не впливає на ймовірність адсорбції на сусідніх центрах поверхні катализатора. Центри поверхні, на яких відбувається адсорбція частинок або інші процеси, описувані стадіями S1-S6, вибираються випадковим чином. При цьому ймовірність тієї чи іншої стадії S1-S6 визначається відношенням відповідної описуваної стадії величини v_i , v_i' або Γ_i до сумарної ймовірності протікання процесів S1-S6. Стадія S7 — рекомбінація атомів, реалізується відразу ж після вибору стадії S5 — дифузія атомів. Це пов'язано з тим, що взаємодія між атомами, що опинилися на сусідніх центрах (в сусідніх клітках, а також між атомом на поверхні і атомом, що налетів на нього з газової фази) відбувається миттєво (в порівнянні з іншими процесами).

Клітинно-автоматна модель гетерогенної хімічної реакції на нанокатализаторі з системою просторово розподілених нанокласте-

рів на поверхні. Розглянуту реакцію можна моделювати за допомогою асинхронного КА. Він є єдиною можливим для представлення поведінки частинок на мікрорівні, коли описується їх взаємодія на просторово неоднорідній поверхні нанокаталізатора. Поверхні нанокаталізатора відповідає клітинний масив. Молекули і атоми, які беруть участь в реакції — це стани клітин. Елементарні стадії S_f описуються імовірнісними правилами переходів КА. Асинхронний режим роботи клітинного автомату передбачає випадковий вибір активних центрів поверхні (клітин), які беруть участь в даний момент часу в реакції.

Асинхронний КА визначається трійкою понять $N_\alpha = (A, X, \Theta)$, де A — це алфавіт станів клітин, X — безліч імен клітин, Θ — безліч локальних операторів клітин, α — позначає асинхронний режим функціонування КА [7].

Алфавіт станів обраний відповідно до реагентів, які беруть участь в реакції:

$$A = \{L, RL, R_2L, R_2^V L, R_2^{V-k} L, Me\}. \quad (2)$$

Символ L позначає вільний активний центр поверхні, RL, R_2L — атом і молекула водню, відповідно, адсорбовані на поверхні, $R_2^V L, R_2^{V-k} L$ — коливально-збуджені молекули водню на v і $v-k$ коливальних рівнях, Me — нанокластер з металу-каталізатору.

Множина імен $X = \{(i, j) : i = 1, \dots, M_i, j = 1, \dots, M_j\}$ визначається координатами клітин в дискретному просторі, відповідному поверхні нанокаталізатора. Клітиною називається пара $(u, (i, j))$, де $u \in A$ — це стан клітини, $(i, j) \in X$ — ім'я клітини. На множині імен X вводяться іменуючі функції $\varphi(i, j)$, що визначають імена сусідніх клітин для клітини (i, j) [7]. Кінцева множина $\varphi(i, j)$ називається шаблоном сусідства $T(i, j)$, що ставить у відповідність кожній клітині масиву її сусідів.

Для вирішення поставленого завдання застосовані стандартні [7] шаблони сусідства (рис. 1):

$$\begin{aligned}
 T_1(i, j) &= \{\varphi_0(i, j)\}, \\
 T_5(i, j) &= \{\varphi_0(i, j), \varphi_1(i, j), \dots, \varphi_4(i, j)\}, \\
 T_{13}(i, j) &= \{\varphi_0(i, j), \varphi_1(i, j), \dots, \varphi_{12}(i, j)\}.
 \end{aligned} \quad (3)$$

The diagram illustrates three neighborhood templates for a cellular automaton model. $T_1(i, j)$ is represented by a single square cell labeled i, j . $T_5(i, j)$ is represented by a cross-shaped arrangement of five cells: a central cell i, j with four adjacent cells labeled $i-1, j$, $i+1, j$, $i, j-1$, and $i, j+1$. $T_{13}(i, j)$ is represented by a larger cross-shaped arrangement of thirteen cells: a central cell i, j with four adjacent cells, four diagonal cells, and two cells further out along the vertical axis, labeled $i-2, j$, $i+2, j$, $i, j-2$, and $i, j+2$.

Рис. 1. Шаблони сусідства для КА-моделі гетерогенної хімічної реакції рекомбінації атомів H на нанокаталізаторі

Тут іменуючі функції представляються наступним чином, наприклад: $\{\varphi_0(i, j), \varphi_1(i, j), \dots, \varphi_4(i, j)\} = \{(i, j), (i, j - 1), (i + 1, j), (i, j + 1), (i - 1, j)\}$. Іменуюча функція для шаблону $T_{13}(i, j)$ має вигляд: $\{\varphi_0(i, j), \varphi_1(i, j), \dots, \varphi_{12}(i, j)\} = \{(i, j), (i, j - 1), (i + 1, j), (i, j + 1), (i - 1, j), (i - 1, j - 1), (i + 1, j - 1), (i + 1, j + 1), (i - 1, j + 1), (i, j - 2), (i + 2, j), (i, j + 2), (i - 2, j)\}$.

Локальний оператор $\Theta(i, j)$ визначає правила зміни станів клітин відповідно до стадій реакцій (1) і є складною комбінацією підстановок і суперпозицій підстановок:

$$\Theta(i, j) = \{\theta_{(1,7)}, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_{(5,7)}, \theta_{(6,8)}, \theta_{(6,10)}, \theta_{(6,12)}, \theta_{(6,14)}, \theta_{(7,9)}, \theta_{(7,11)}, \theta_{(7,13)}, \theta_{(7,15)}, \theta_{(14,8)}, \theta_{(14,10)}, \theta_{(14,12)}, \theta_{(14,14)}, \theta_{(15,9)}, \theta_{(15,11)}, \theta_{(15,13)}, \theta_{(15,15)}\} \quad (3)$$

де $\theta_f, f \in \{2, 3, 4\}$ — підстановки, відповідні стадіям реакції: $\theta_{(f, \gamma)} = \theta_\gamma(\theta_f), f \in \{1, 5\}$ — суперпозиція двох підстановок: θ_f та θ_γ ; $\theta_{(6, j)} = \theta_6(\theta_f), f \in \{8, 10, 12, 14\}$ — суперпозиція підстановок θ_6 та θ_f ; $\theta_{(14, f)} = \theta_{14}(\theta_f), f \in \{8, 10, 12, 14\}$ — суперпозиція підстановок θ_{14} та θ_f ; $\theta_{(7, j)} = \theta_7(\theta_f), f \in \{9, 11, 13, 15\}$ — суперпозиція підстановок θ_7 та θ_f ; $\theta_{(15, f)} = \theta_{15}(\theta_f), f \in \{9, 11, 13, 15\}$ — суперпозиція підстановок θ_{15} та θ_f .

У даній моделі клітинних автоматів для реакції рекомбінації атомів (водню) на нанокаталізаторі кожної елементарної стадії S_f відповідає підстановка θ_f . Підстановки і суперпозиція підстановок змінюють стан клітин в залежності від стану сусідніх клітин, які належать одному з розглянутих вище шаблонів моделювання (рис. 1). Підстановка $\theta_f, f \in 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10$ застосовується до однієї клітки, тому для них використовується шаблон $T_1(i, j)$. Для застосування підстановок $\theta_f, f \in 5, 11, 12, 13$ потрібен стан двох (i, j) та однієї з чотирьох сусідніх клітин $\varphi_k(i, j), k = 1, 2, 3, 4$. Тут сусідня клітина $\varphi_k(i, j)$ вибирається за шаблоном $T_5(i, j)$ з ймовірністю 0,25.

Суперпозиція підстановок $\theta_{(f, \gamma)} = \theta_\gamma(\theta_f), f \in \{1, 5\}$ передбачає застосування підстановки θ_γ до результату виконання $\theta_f, f = 1, 5$. Необхідність використання суперпозиції пов'язана з особливостями реалізації стадії S_7 . У цьому випадку спочатку здійснюється суперпозиція $\theta_{(f, \gamma)} = \theta_\gamma(\theta_f), f = 5$ до клітин з іменем (i, j) й застосовується підстановка θ_5 , яка за шаблоном $T_5(i, j)$ обирає одну з чотирьох сусідніх клітин $\varphi_k(i, j), k = 1, 2, 3, 4$. Відразу ж після застосування θ_5 до обраних клітин (i, j) та $\varphi_k(i, j)$ застосовується підстановка θ_7 , яка також за шаблоном $T_5(i, j)$ обирає одну з чотирьох сусідніх клітин. Об'єднання цих двох шаблонів призводить до необхідності використання шаблону $T_{13}(i, j)$. З іншого боку, при застосуванні суперпозиції $\theta_{(1, \gamma)} = \theta_\gamma(\theta_1)$ достатньо використовувати шаблон $T_5(i, j)$, так як підстановка θ_1 змінює стан тільки однієї клітини, а потім до цієї ж клітини застосо-

ується підстановка θ_7 , яка за шаблоном $T_5(i, j)$ обирає одну з чотирьох сусідніх клітин $\varphi_k(i, j)$.

Асинхронний КА, який використовується для вирішення поставленого завдання, працює так, щоб лінійний оператор $\Theta(i, j)$ застосовувався по черзі до випадково вибраних клітин масиву. Вибір клітини робиться за допомогою генератора випадкових чисел. При цьому обрана клітина миттєво змінює свій стан на новий, або залишається в колишньому стані. Це залежить від того, чи відбувся акт реакції на даній клітині чи ні. У свою чергу ймовірність цього процесу визначається вже константами швидкостей і перетинами відповідної стадії реакції.

Особливість даної реакції полягає в тому, що швидкості протікання окремих стадій реакції сильно розрізняються. Так час життя коливально-збуджених молекул на поверхні близько 10^{-12} секунди, тоді як час життя адсорбованих атомів в залежності від температури каталізатора становить секунди або доли секунд. Тобто відрізняється від 8 до 12 порядків величини.

Час в КА-моделі є дискретним і, як правило, є відносним і цілочисельним. Процес моделювання за допомогою КА розбивається на ітерації. У нашому випадку обов'язковим є отримання кінетики процесу. Тобто крім чисельних значень необхідно отримати залежності того, як змінюються концентрації реагентів, продукту реакції і швидкості реакції від часу. При цьому час має бути не відносним, а фізичним (в секундах). Константи швидкостей, ймовірності процесів і перетини взаємодій також не повинні бути відносними і безрозмірними, а реальними — фізичними. Так як лінійний оператор $\Theta(i, j)$ застосовувався по черзі до випадково вибраних клітин масиву, то час ітерації має визначатися найбільш швидкими процесами. Час ітерації в моделі з коливально-збудженими молекулами має бути на 8-12 порядків менше, ніж для моделі без $R_2^V L$. В цьому випадку час моделювання для моделі з $R_2^V L$ із часом ітерації, обумовленим процесами релаксації коливально-збуджених молекул, на 8-12 порядків буде більше, ніж в моделі без $R_2^V L$. Це пов'язано з тим, що в останньому випадку час ітерації на таку ж величину буде більше. Час ітерації близько 10^{-12} секунди призводить до неможливості моделювання таких процесів на реальних часових інтервалах протікання кінетики реакції (секунди, хвилини, години) навіть при дуже обмеженому клітинному масиві в КА.

Проблема, яка виникла, вирішується наступним чином. Щоб глобальні переходи в КА-моделі відбувалися коректно, не повинно бути жодної спроби змінити стан однієї й тієї ж клітини більш ніж один раз за час ітерації Δt . Для цього час ітерації обчислюється рівним часу між двома послідовними актами адсорбції атомів на клітинний масив Ω , який використовується в моделюванні. Наприклад, при

щільності потоку R -атомів $j = 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ на клітинний масив з 10^3 клітин величина $\Delta t = 10^{-5}$ секунди. У порівнянні з цією величиною час життя $R_2^V L$ (10^{-12} с) на 7 порядків менше. Тобто релаксація $R_2^V L$ відбувається практично миттєво, в порівнянні з Δt . Тому в КА-моделі при виникненні в інтервалі Δt в результаті реакції коливально-збудженої молекули $R_2^V L$ ($R_2^{V-k} L$) миттєво (без часу) здійснюються підстановки і суперпозиції підстановок, відповідні стадіям S8-S15 до тих пір, поки не відбудеться повна релаксація $R_2^V L$ ($R_2^{V-k} L$). Тобто процеси, відповідні стадіям S1-S7 і S8-S15, протікають паралельно. В цьому випадку практично не відбувається зменшення точності розрахунку, але на кілька порядків зростає швидкість моделювання кінетики.

За ітерацію клітинний масив Ω переходить з одного глобального стану $\Omega(t_m)$ до іншого $\Omega(t_m + \Delta t)$. Послідовність переходів з одного стану в інший, яка виходить в результаті ітеративного функціонування клітинного автомата, призводить до еволюції системи. У термінах реакції — це кінетика або залежність досліджуваної величини від фізичного часу. Число ітерацій в досліді розраховується за формулою $t / \Delta t$, де t — фізичний (реальний) час досліду.

Результати КА-моделювання гетерогенної хімічної реакції рекомбінації атомів H на нанокаталізаторі. Залежно від досліджуваної величини і необхідної точності обчислень комп'ютерне моделювання за допомогою послідовної реалізації асинхронного КА виконувалося на клітинних масивах розміром $M_i \times M_j = 100 \times 100$ до 1000×1000 клітин з періодичним розміщенням нанокластерів. Розмір клітини становив 0.5×0.5 нм, діаметр нанокластера змінювався від 0.5 нм до 30 нм, відстань між нанокластерами встановлювалася від 1 нм до 200 нм. Розрахунок часу ітерації для даної КА-моделі проводиться таким чином. Введемо нормований потік атомів $j_{\text{норм}} = j_H / N_0 \text{ с}^{-1}$ — потік атомів на один центр поверхні в секунду. Тут $N_0 = 10^{15} \text{ см}^{-2}$ число атомів на 1 квадратному сантиметрі твердого тіла (твердотільного каталізатора), j_H ($\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$) — щільність потоку атомів H на поверхню. Якщо поверхня нанокаталізатора в моделюванні містить N_0' клітин, то потік атомів на цю поверхню буде дорівнювати $j_{\text{норм}}' = \frac{j_H}{N_0} \cdot N_0'$ (число атомів, що впали на N_0' клітин за одну секунду). Тоді

$$\Delta t = \frac{1}{j_{\text{норм}}'} = \frac{N_0}{j_H \cdot N_0'} \text{ , с.}$$

Аналогічним чином переводяться в параметри асинхронного КА-методу і інші реальні фізичні константи і перетини взаємодії розглянутої кінетичної моделі. Ймовірності процесів розраховувалися за формулами, наприклад, v_1 — віднесена до одиниці часу ймовірність адсорбції атомів R :

$$v_1 = j_H \cdot \sigma_1 = j_H \cdot \sigma_{10} \cdot \exp\left(\frac{-E_1}{kT}\right),$$

де σ_1 — перетин адсорбції атома R , см²; E_1 — енергія активації адсорбції атомів; T — температура, К; k — постійна Больцмана.

Характеристиками КА-моделювання реакції рекомбінації атомів на нанокаталізаторі є такі величини: концентрації атомів і молекул на поверхні, швидкість реакції (загальна, за механізмом Ріділа-Ілі і Ленгмюра-Гіншелвуда), в тому числі обумовлена фононним і електронним каналом акомодатії коливальної енергії, довжина пробігу гарячої молекули по поверхні. При цьому, концентрація адсорбованих атомів і молекул на поверхні каталізатора обчислюється після кожної ітерації, як добуток N_0 і відношення кількості клітин, що знаходяться в стані, відповідному даному реагенту, до розміру клітинного масиву $M_i \times M_j$. Швидкість реакції обчислюється, як добуток $N_0 / \Delta t$ і відношення числа застосувань підстановок θ_8, θ_{12} , а також θ_9, θ_{13} або їх суми за ітерацію до розміру клітинного масиву $M_i \times M_j$. Довжина пробігу $R_2^V L$ дорівнює розміру клітини на число стрибків $R_2^V L$ по поверхні до повної релаксації коливально-збудженої молекули.

На рисунку 2 наведена кінетика адсорбції молекул водню на поверхні нанокаталізатора. Кінетика адсорбції молекул має досить плавний вигляд вже при розмірі клітинного масиву $M_i \times M_j = 10^4$. Для більш точного моделювання кінетики розмір клітинного масиву збільшувався. Для збільшення точності розрахунку чисельних величин крім збільшення клітинного масиву здійснювалося кілька моделювань і визначалося середнє значення величини. До збільшення точності також призводило збільшення числа ітерацій для розрахунку величини.

На рисунку 3 наведена розрахована залежність швидкості реакції рекомбінації атомів водню на нанокаталізаторі ZnS с нанокластерами Au діаметром 3 нм при різних конфігураціях нанокластерів на поверхні. При малих відстанях між нанокластерами l основний внесок в швидкість реакції $V_{реак}$ надає електронний канал акомодатії енергії реакції, тоді як при великих l основним є фононний канал. Зі зменшенням константи швидкості акомодатії енергії реакції за фононним каналом збільшувалася довжина пробігу коливально-збуджених молекул по поверхні ZnS .

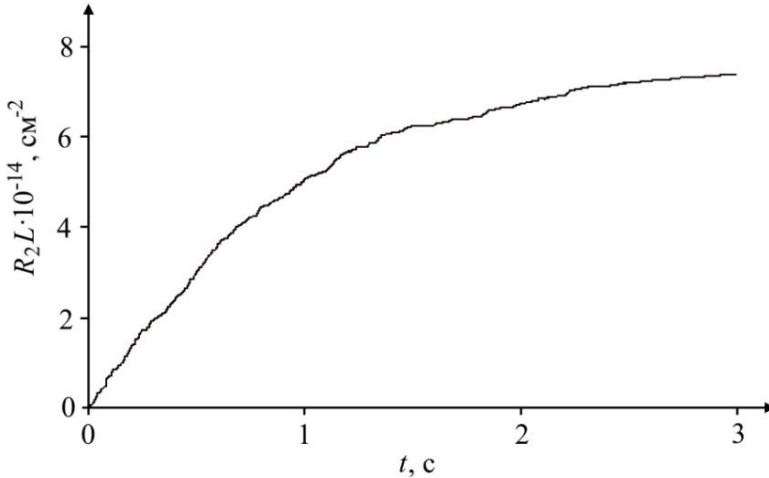


Рис. 2. Залежність від часу концентрації адсорбованих молекул водню на поверхні нанокаталізатора. $T = 300 \text{ K}$, $j_{\text{H}_2} = 1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-2} \text{ c}^{-1}$. Розрахунок

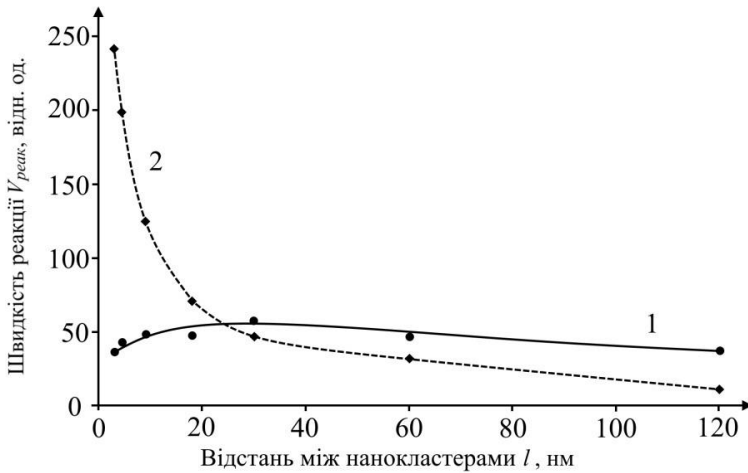


Рис. 3. Залежність швидкості реакції рекомбінації атомів водню на нанокаталізаторі ZnS с нанокластерами Au діаметром 3 нм, що визначається фононним (1) та електронним (2) каналами акомодатії енергії реакції від відстані між нанокластерами. $M_i \times M_j = 2.5 \cdot 10^5$, $T = 300 \text{ K}$, $j_{\text{H}} = 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2} \text{ c}^{-1}$, $j_{\text{H}_2} = 1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-2} \text{ c}^{-1}$. Розрахунок

Висновки. Розроблений в роботі асинхронний клітинний автомат дозволяє моделювати хімічну реакцію, в тому числі — рекомбінації атомів, на поверхні нанокаталізатору з просторово розподіленими нанокластерами на поверхні. Побудована КА-модель описує

кінетику процесу в реальному фізичному часі й використовує фізичні перетини і константи взаємодії. Це дозволяє моделювати не тільки власне реакцію, але і сам нанокаталізатор. Наприклад, визначити його оптимальні параметри (як для підкладки, так і нанокластерів) хімічний склад, структуру, конфігурацію, режими протікання реакції та ін., використовуючи реальні перетини і константи взаємодії з експериментів і літератури.

Список використаних джерел:

1. Grankin D. V., Styrov V. V., Simchenko S. V., Grankin V. P., Gural'nik O. A. Oxidation of Hydrogen on Palladium: Chemicurrents in the Schottky Nanodiode. *Russian Journal of Physical Chemistry A*. 2017. Vol. 91. № 2. P. 295-300.
2. Toffoli T. Cellular Automata as an Alternative to (rather than an Approximation of) Differential Equations in Modeling Physics. *Physica D*. 1984. Vol. 10. P. 117-127.
3. Фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Москва: Мир, 1971. 384 с.
4. Wolfram S. Statistical mechanics of Cellular automata. *Reviews of Modern Physics*. 1993. Vol. 35. P. 601-643.
5. Bandman O. Cellular Automata Composition Techniques for Spatial Dynamics Simulation. In A. G. Hoekstra, J. Kroc, P. M. A. Sloot (eds). *Simulating Complex Systems by Cellular Automata*. Berlin: Springer, 2010. P. 81-116.
6. Bandman O. L. Cellular-automata models of natural processes; implementation on supercomputers. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*. 2017. Vol. 35. P. 102-121.
7. Sharifulina A. E. Parallel implementation of catalytic reaction ($\text{CO} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$) by asynchronous cellular automata. *Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика*. 2012. № 47 (306). С. 112-126.

METHOD OF CELLULAR AUTOMATA FOR SIMULATION OF PHYSICO-CHEMICAL PROCESSES ON NANOCATALYST

The paper considers a new approach to describe dynamic physicochemical processes on a nanocatalyst. The growing difficulties in describing the catalysis of a heterogeneous chemical reaction by nanocatalysts are due to the fact that the described phenomena are nonlinear, dissipative, in some cases accompanied by self-oscillating and stochastic flow and cannot be described by traditional mathematical models, such as systems of differential equations. To solve the problem considered in the publication, it is proposed to use, as an alternative to differential equations for continuous mathematics, discrete models, which are extensions of the classical von Neumann's cellular automaton. In this case, the cellular automaton is considered as a discrete expression of the space-time function and performs the same task as the differential equations in partial derivatives. A stepwise reaction mechanism has been developed that takes into account the recombination of atoms, the formation of vibrationally excited molecules, their diffusion and relaxation, and a cellular automaton model of a heterogeneous chemical reaction on a nanocatalyst

with a system of spatially distributed nanoclusters on the surface. The results of CA-modeling are presented and it is shown that the asynchronous cellular automaton developed in the presented work allows modeling a chemical reaction, including recombination of atoms, on the surface of a nanocatalyst with spatially distributed nanoclusters on the surface. The constructed CA-model describes the kinetics of the process in real physical time and uses physical cross sections and interaction constants.

Key words: *Von Neumann cellular automaton, cellular automaton model, Monte Carlo method, asynchronous cellular automata, nanocatalyst, diffusion.*

Отримано: 29.10.2021

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.38-54

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ОДНОЧАСНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ОПУКЛИМ МНОГОГРАННИКОМ І СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ТА ДВОЇСТОЇ ДО НЕЇ ЗАДАЧІ

Відомо, що одним із напрямів математики, який найбільш інтенсивно розвивається в даний час, є теорія наближень, у тому числі теорія наближень функцій, яка має своїм початком задачу П. Л. Чебишова про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на відріжку дійснозначної функції множиною алгебраїчних многочленів степеня, що не перевищує n .

Пізніше розглядалась низка й інших постановок задач про найкраще наближення функцій, однією з яких є задача про рівномірне наближення неперервної на компактній функції скінченновимірним підпростором, породженим іншими неперервними на цьому компактній функціями.

Важливе місце в теорії наближення займає задача апроксимації фіксованого елемента лінійного нормованого простору елементами його скінченновимірного підпростору, частинними випадками якої є задачі, про які йшла мова вище.

Задачу апроксимації фіксованого елемента лінійного нормованого простору елементами його скінченновимірного підпростору можна розглядати як задачу відшукування найкращої відстані між фіксованою точкою та скінченновимірним підпростором.

Важливими питаннями розгляду цієї задачі є питання існування її екстремального елемента, встановлення співвідношення двоїстості та критерію екстремальності елемента, побудови чисельних методів відшукування цього елемента та величини найкращого наближення, які досліджувались багатьма математиками.

У статті розглядається задача відшукування відстані (найкращої) між опуклим многогранником і скінченновимірним підпростором лінійного нормованого простору, частинним випадком якої є задача найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору його скінченновимірним підпростором.

Для цієї задачі встановлено існування екстремального елемента, співвідношення двоїстості, критерій екстремальності елемента, побудовано збіжний чисельний метод одночасного розв'язування прямої та двоїстої задач, отримано двосторонні оцінки збіжності, які дозволяють знаходити відповідні величини з наперед заданою точністю.

Ключові слова: лінійний нормований простір, відстань між опуклим многогранником і скінченновимірним підпростором, двоїста задача, чисельний метод.

Вступ. У статті для задачі відшукування відстані (найкращої) між опуклим многогранником і скінченновимірним підпростором лінійного нормованого простору встановлено існування екстремального елемента, критерій екстремальності елемента, побудовано задачу, двоїсту до розглядуваної, розроблено збіжний чисельний метод розв'язування цих задач, оснований на ідеї методу січної площини розв'язування задачі опуклого програмування, отримано двосторонні оцінки збіжності.

Постановка задачі. Існування екстремального елемента. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір; X^* — простір, спряжений з X ; $B^* = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$; x_p , $p = \overline{1, r}$, — довільні елементи простору X ; $A = \text{co}\{x_1, \dots, x_r\}$ — опукла оболонка множини $\{x_1, \dots, x_r\}$ ($A = \left\{ \sum_{p=1}^r \alpha_p x_p : \sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r} \right\}$) — опуклий многогранник простору X ; y_1, \dots, y_n — лінійно незалежні елементи простору X , B — підпростір простору X , породжений цими елементами, тобто $B = \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i y_i : \beta_i \in R, i = \overline{1, n} \right\}$.

Задачею відшукування відстані (найкращої) між опуклим многогранником A та скінченновимірним підпростором B простору X будемо називати задачу відшукування величини

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \inf_{\substack{\sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0, p=1, r; \\ \beta_i \in R, i=1, n}} \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i y_i \right\| \quad (1)$$

(див., наприклад, [1, с. 65]).

Якщо існує елемент $(x^*, y^*) \in A \times B$ такий, що

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \|x^* - y^*\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Оскільки A є компактом простору X (див., наприклад, [2, с. 28]), а B є його скінченновимірним підпростором, то згідно з наслідком 3 [3] екстремальний елемент для задачі відшукування величини (1) існує.

Актуальність теми. Загальновідомо, що ідея наближення є визначальною ідеєю в питаннях зв'язків математики з практикою.

Центральною галуззю теорії наближення є теорія наближення функції, фундамент якої закладено у працях П. Л. Чебишова, який ще у 50-х роках 19 століття поставив задачу про найкраще рівномірне наближення неперервної на сегменті функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує деякого натурального числа.

З розвитком теорії лінійних нормованих просторів стало зрозумілим, що згадана вище задача П. Л. Чебишова та низка інших задач теорії наближення допускають загальну постановку в термінах нормованих просторів, якщо в якості міри відхилення розглядати норму простору.

Внаслідок цього було сформульовано, зокрема, задачу найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору скінченновимірним підпростором цього простору.

Ця задача є частинним випадком задачі (1), отримується з неї при $r = 1$ та має вигляд

$$E(x_1, B) = \inf_{y \in B} \|x_1 - y\| = \inf_{\beta_i \in R, i=1, n} \left\| x_1 - \sum_{i=1}^n \beta_i y_i \right\|. \quad (2)$$

Основні результати дослідження величини (2) підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [4], В. К. Дзядика [5], М. П. Корнейчука [6], О. І. Степанця [7, 8], В. М. Тихомирова [9] та ін.

Оскільки задача відшукування величини (2) є частковим випадком задачі відшукування величини (1), то становлять інтерес результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі (1), які можуть бути відправним пунктом для подальшого дослідження задачі (2) та інших задач, що включаються у схему постановки задачі (1).

Актуальним, зокрема, є питання встановлення співвідношення двоїстості для задачі (1), критерію її екстремального елемента, побудови збіжного чисельного методу розв'язування задачі (1) та двоїстої до неї задачі тощо.

Мета роботи. Встановити для задачі відшукування величини (1) існування її екстремального елемента, його критерій, співвідношення двоїстості; побудувати збіжний чисельний метод розв'язання задачі (1) та двоїстої до неї задачі.

Співвідношення двоїстості для задачі відшукування величини (1). Задача, двоїста до задачі відшукування величини (1).

Теорема 1. Має місце співвідношення двоїстості

$$E(A, B) = \max_{f \in B} \min_{f(y_i)=0, i=1, n, 1 \leq p \leq r} f(x_p). \quad (3)$$

Доведення. Згідно з наслідком 3 [10]

$$E(A, B) = \max_{f \in B^+, x \in A} \inf_{f \in B^+} f(x), \quad (4)$$

де $B^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0, y \in B\}$.

Оскільки A є компактом простору X , то для $f \in X^*$:
 $\inf_{x \in A} f(x) = \min_{x \in A} f(x)$.

З урахуванням цього та рівності (4) отримаємо, що

$$E(A, B) = \max_{f \in B^+, x \in A} \min_{f \in B^\perp} f(x). \quad (5)$$

Нехай $f \in B^\perp$. Оскільки $y_i \in B$, $i = \overline{1, n}$, то $f(y_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Тому

$$B^\perp \subset \{f \in X^* : f(y_i) = 0, i = \overline{1, n}\}. \quad (6)$$

Нехай тепер $f \in \{f \in X^* : f(y_i) = 0, i = \overline{1, n}\}$. Тоді для будь-якого

$$y = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i \in B, \beta_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n},$$

$$f(y) = f\left(\sum_{i=1}^n \beta_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n \beta_i f(y_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot 0 = 0.$$

Тому

$$\{f \in X^* : f(y_i) = 0, i = \overline{1, n}\} \subset B^\perp. \quad (7)$$

Зі співвідношень (6), (7) випливає, що

$$B^\perp = \left\{ f \in X^* : f(y_i) = 0, i = \overline{1, n} \right\}. \quad (8)$$

Крім того, для $x \in A$ маємо, що $x = \sum_{p=1}^r \alpha_p x_p$, $\sum_{p=1}^r \alpha_p = 1$, $\alpha_p \geq 0$, $p = \overline{1, r}$. Тому для $f \in X^*$

$$\begin{aligned} \min_{x \in A} f(x) &= \min_{\substack{\sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r}}} f \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p x_p \right) = \min_{\substack{\sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r}}} \sum_{p=1}^r \alpha_p f(x_p) \geq \\ &\geq \min_{\substack{\sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r}}} \sum_{p=1}^r \alpha_p \left(\min_{1 \leq p \leq r} f(x_p) \right) = \min_{1 \leq p \leq r} f(x_p). \end{aligned}$$

Отже,

$$\min_{x \in A} f(x) \geq \min_{1 \leq p \leq r} f(x_p), \quad f \in X^*. \quad (9)$$

З іншого боку, нехай для $f \in X^*$ $\min_{1 \leq p \leq r} f(x_p) = f(x_{p_f})$, де $p_f \in \{1, \dots, r\}$. Тоді

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq p \leq r} f(x_p) &= f(x_{p_f}) = f \left(\sum_{p=1}^r \bar{\alpha}_p x_p \right) \geq \\ &\geq \min_{\substack{\sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r}}} f \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p x_p \right) = \min_{x \in A} f(x), \end{aligned}$$

де $\bar{\alpha}_p = 0$, $p \neq p_f$; $\bar{\alpha}_{p_f} = 1$. Тому

$$\min_{1 \leq p \leq r} f(x_p) \geq \min_{x \in A} f(x). \quad (10)$$

Зі співвідношень (9), (10) випливає рівність

$$\min_{1 \leq p \leq r} f(x_p) = \min_{x \in A} f(x). \quad (11)$$

Рівності (5), (8), (11) дозволяють зробити висновок про справедливість рівності (3).

Задачу відшукування величини

$$\max_{\substack{f(y_i)=0, 1 \leq i \leq n, \\ f \in B^*}} \min_{1 \leq p \leq r} f(x_p) \quad (12)$$

назвемо задачею, двоїстою до задачі відшукування величини (1).

Критерій екстремальності елемента для задачі відшукування величини (1).

Теорема 2. Для того щоб елемент $(x^*, y^*) \in A \times B$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо існування функціонала $f^* \in X^*$ такого, що

- 1) $\|f^*\| \leq 1$ ($f^* \in B^*$),
- 2) $f^*(x^* - y^*) = \|x^* - y^*\|$,
- 3) $f^*(x^*) = \min_{1 \leq p \leq r} f^*(x_p)$,
- 4) $f^*(y_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Доведення. Необхідність. Нехай $(x^*, y^*) \in A \times B$ є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з наслідком 7 [10] існує функціонал $f^* \in X^*$, для якого виконуються умови 1), 2) та

- 3') $f^*(x^*) = \inf_{x \in A} f^*(x)$,
- 4') $f^*(y) = 0$, $y \in B$.

Зі співвідношень (11) маємо, що $\inf_{x \in A} f^*(x) = \min_{1 \leq p \leq r} f^*(x_p)$. Звідси і 3') випливає 3).

Внаслідок (8) і 4') робимо висновок, що $f^*(y_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$, тобто, що має місце 4).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для $(x^*, y^*) \in A \times B$ існує елемент $f^* \in X^*$, для якого справедливі співвідношення 1)-4). З рівностей 3) та (11) випливає 3'), а з 4) та (8) випливає 4'). Оскільки мають місце співвідношення 1), 2), 3'), 4'), то згідно з наслідком 7 [10] $(x^*, y^*) \in A \times B$ є екстремальним елементом для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Чисельний метод одночасного розв'язування задач відшукування величин (1) та (12). Перейдемо до описання методу одночасного розв'язування задачі відшукування величини (1) та двоїстої до неї

задачі відшукування величини (12). На попередньому кроці методу вибираємо функціонали $f_j \in B^*$, $j = \overline{1, m_1}$, для яких виконується умова:

$$\min \left\{ \max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \beta_i (-f_j(y_i)) : (\beta_1, \dots, \beta_n) \in R^n, \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 1 \right\} = \bar{\mu} > 0. \quad (13)$$

Існування таких функціоналів впливає із лінійної незалежності елементів y_1, \dots, y_n .

На k -му кроці ($k \geq 1$) будемо розв'язувати задачу лінійного програмування:

$$\inf \theta \quad (14)$$

$$\sum_{p=1}^r \alpha_p f_j(x_p) - \sum_{i=1}^n \beta_i f_j(y_i) - \theta \leq 0, \quad j = \overline{1, m_1 + k - 1}, \quad (15)$$

$$\sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \quad (16)$$

$$\alpha_p \geq 0, \quad p = \overline{1, r}; \quad \beta_i \in R, \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

та двоїсту до неї задачу лінійного програмування

$$\sup \gamma \quad (18)$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s f_s \right) (x_1) \geq \gamma, \quad (19)$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s f_s \right) (x_r) \geq \gamma,$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s f_s \right) (y_1) = 0, \quad (20)$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s f_s \right) (y_n) = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s = 1, \quad (21)$$

$$\gamma_s \geq 0, \quad s = \overline{1, m_1 + k - 1}. \quad (22)$$

Переконаємося, що задачі (14)-(17) та (18)-(22) мають оптимальні розв'язки. Дійсно, задача лінійного програмування (14)-(17) має допустимий розв'язок. Таким допустимим розв'язком, зокрема, буде вектор $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_r; \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n; \bar{\theta})$, де координати вектора $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_r) \in R^r$ вибрано

так, що $\sum_{p=1}^r \bar{\alpha}_p = 1$, $\bar{\alpha}_p \geq 0$, $p = \overline{1, r}$; координати вектора $(\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n) \in R^n$

вибрано довільно, а $\bar{\theta} = \max_{1 \leq j \leq m_1 + k - 1} \left(\sum_{p=1}^r \bar{\alpha}_p f_j(x_p) - \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i f_j(y_i) \right)$. Для

всіх допустимих розв'язків $(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_n; \theta)$ задачі (14)-(17) маємо, що

$$\theta \geq \sum_{p=1}^r \alpha_p f_j(x_p) + \sum_{i=1}^n \beta_i f_j(-y_i), \quad j = \overline{1, m_1}.$$

Звідси випливає, що при $(\beta_1, \dots, \beta_n) \neq 0$

$$\theta \geq \min_{1 \leq j \leq m_1} \min_{1 \leq p \leq r} f_j(x_p) + \sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}} f_j(-y_i),$$

$$j = \overline{1, m_1},$$

$$\theta \geq \min_{1 \leq j \leq m_1} \min_{1 \leq p \leq r} f_j(x_p) + \sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2} \max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}} f_j(-y_i). \quad (23)$$

Згідно з (13) $\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}} f_j(-y_i) \geq \bar{\mu} > 0$. З урахуванням цього

та нерівності (23) робимо висновок, що $\theta \geq \min_{1 \leq j \leq m_1} \min_{1 \leq p \leq r} f_j(x_p)$ для будь-

якого допустимого розв'язку $(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_n; \theta)$ задачі (14)-(17).

Це означає, що цільова функція θ задачі (14)-(17) лінійного програмування обмежена знизу на множині її допустимих розв'язків. Тому ця задача має оптимальний розв'язок (див., наприклад, [11, с. 134]). Тоді оптимальний розв'язок має також двоїста до неї задача (18)-(22) (див., наприклад, [11, с. 163]).

Теорема 3. Якщо $(\alpha^k, \beta^k, \theta^k) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_r^k; \beta_1^k, \dots, \beta_n^k; \theta^k)$ є оптимальним розв'язком задачі (14)-(17), то мають місце співвідношення

$$\theta^k \leq E(A, B) \leq \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p^k x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^k y_i \right\|. \quad (24)$$

Якщо для деякого натурального числа k $\theta^k = \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p^k x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^k y_i \right\|$,

то елемент (x^k, y^k) , де $x^k = \sum_{p=1}^r \alpha_p^k x_p \in A$, $y^k = \sum_{i=1}^n \beta_i^k y_i \in B$, є екстремальним елементом для величини (1) та справедлива рівність

$$\theta^k = E(A, B) = \|x^k - y^k\|. \quad (25)$$

Доведення. Оскільки вектор $(\alpha^k, \beta^k, \theta^k)$ є оптимальним розв'язком задачі (14)-(17), то

$$\begin{aligned} \theta^k &= \inf \left\{ \theta : f_j \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i y_i \right) \leq \theta, j = \overline{1, m_1 + k - 1}, \right. \\ &\quad \left. \sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r}, \beta_i \in R, i = \overline{1, n} \right\} = \\ &= \max_{1 \leq j \leq m_1 + k - 1} f_j \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p^k x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^k y_i \right) = \max_{1 \leq j \leq m_1 + k - 1} f_j(x^k - y^k) \leq \\ &\leq \inf \left\{ \theta : f \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i y_i \right) \leq \theta, f \in B^*, \sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \right. \\ &\quad \left. \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r}, \beta_i \in R, i = \overline{1, n} \right\} = \\ &= \inf \left\{ \max_{f \in B^*} f \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i y_i \right) : \sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r}, \beta_i \in R, i = \overline{1, n} \right\} = \\ &= \inf \left\{ \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i y_i \right\| : \sum_{p=1}^r \alpha_p = 1, \alpha_p \geq 0, p = \overline{1, r}, \beta_i \in R, i = \overline{1, n} \right\} = \\ &= \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = E(A, B) \leq \|x^k - y^k\|. \quad (26) \end{aligned}$$

З (26) випливає (24).

Якщо для деякого натурального числа k $\theta^k = \|x^k - y^k\| = \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p^k x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^k y_i \right\|$, то з (24) випливає рівність (25) та висновок, що (x^k, y^k) є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

З доведеної теореми одержуємо, що коли справедлива рівність $\theta^k = \|x^k - y^k\|$, то величина $E(A, B)$ дорівнює $\theta^k = \|x^k - y^k\|$, а (x^k, y^k) є екстремальним елементом для цієї величини.

Розглянемо випадок, коли $\theta^k < \|x^k - y^k\|$. Тоді знаходимо функціонал $f_{m_1+k} \in B^*$ такий, що

$$\|x^k - y^k\| = \max_{f \in B} f(x^k - y^k) = f_{m_1+k}(x^k - y^k) = f_{m_1+k} \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p^k x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^k y_i \right),$$

та до обмежень (15) задачі лінійного програмування (14)-(17) додаємо обмеження

$$\sum_{p=1}^r \alpha_p f_{m_1+k}(x_p) - \sum_{i=1}^n \beta_i f_{m_1+k}(y_i) - \theta \leq 0,$$

знаходимо оптимальний розв'язок

$$(\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}, \theta^{k+1}) = (\alpha_1^{k+1}, \dots, \alpha_r^{k+1}; \beta_1^{k+1}, \dots, \beta_n^{k+1}; \theta^{k+1})$$

одержаної внаслідок цього нової задачі лінійного програмування, розв'язуємо двоїсту до неї задачу і т.д.

Теорема 4. Послідовність $\{\theta^k\}_{k=1}^{\infty}$ є неспадною, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k$.

Послідовність $(\alpha^k, \beta^k) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_r^k; \beta_1^k, \dots, \beta_n^k)$, $k = 1, 2, \dots$, є обмеженою послідовністю простору R^{r+n} .

Для будь-якої часткової границі $(\alpha^*, \beta^*) = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*; \beta_1^*, \dots, \beta_n^*)$

послідовності (α^k, β^k) , $k = 1, 2, \dots$, елемент $(x^*, y^*) = \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p^* x_p, \sum_{i=1}^n \beta_i^* y_i \right) \in$

$A \times B$ є екстремальним елементом для величини (1).

Мають місце співвідношення

$$\theta^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k = E(A, B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\|,$$

де $x^k = \sum_{p=1}^r \alpha_p^k x_p$, $y^k = \sum_{i=1}^n \beta_i^k y_i$, $k = 1, 2, \dots$.

Доведення. Оскільки всі обмеження задачі лінійного програмування (14)-(17), яка розв'язується на k -му кроці, є серед обмежень задачі лінійного програмування, яка розв'язується на $k+1$ -му кроці методу, а цільові функції цих задач однакові (дорівнюють θ), то для відповідних

їх оптимальних розв'язків $(\alpha^k, \beta^k, \theta^k) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_r^k; \beta_1^k, \dots, \beta_n^k; \theta^k)$ та $(\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}, \theta^{k+1}) = (\alpha_1^{k+1}, \dots, \alpha_r^{k+1}; \beta_1^{k+1}, \dots, \beta_n^{k+1}; \theta^{k+1})$ виконується нерівність $\theta^k \leq \theta^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Відповідно до теореми 3 $\theta^k \leq E(A, B)$, $k = 1, 2, \dots$. Отже, послідовність $\{\theta^k\}_{k=1}^\infty$ є неспадною та обмеженою зверху. Тому існує

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k = \theta^* \leq E(A, B). \quad (27)$$

Переконаємося, що послідовність $\{\beta^k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою послідовністю простору R^n . Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність $\{\beta^{k_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ така, що $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\beta^{k_\nu}\| = +\infty$.

Оскільки $(\alpha_1^{k_\nu}, \dots, \alpha_r^{k_\nu}; \beta_1^{k_\nu}, \dots, \beta_n^{k_\nu}; \theta^{k_\nu})$ є оптимальним розв'язком задачі типу задачі (14)-(17), яка розв'язується на кроці k_ν , то для $\nu = 1, 2, \dots$ маємо, що

$$\sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_\nu} f_j(x_p) + \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_\nu} f_j(-y_i) - \theta^{k_\nu} \leq 0, \quad j = \overline{1, m_1},$$

$$\sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_\nu} = 1, \quad \alpha_p^{k_\nu} \geq 0, \quad p = \overline{1, r}, \quad \beta_i^{k_\nu} \in R, \quad i = \overline{1, n}.$$

Звідки

$$\sum_{p=1}^r \frac{\alpha_p^{k_\nu}}{\|\beta^{k_\nu}\|} f_j(x_p) + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^{k_\nu}}{\|\beta^{k_\nu}\|} f_j(-y_i) - \frac{1}{\|\beta^{k_\nu}\|} \theta^{k_\nu} \leq 0, \quad j = \overline{1, m_1}. \quad (28)$$

Оскільки $\left(\frac{\beta_1^{k_\nu}}{\|\beta^{k_\nu}\|}, \dots, \frac{\beta_n^{k_\nu}}{\|\beta^{k_\nu}\|} \right) \in S_{R^n} = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 1 \right\}$,

$\nu = 1, 2, \dots$, то з послідовності $\left\{ \left(\frac{\beta_1^{k_\nu}}{\|\beta^{k_\nu}\|}, \dots, \frac{\beta_n^{k_\nu}}{\|\beta^{k_\nu}\|} \right) \right\}_{\nu=1}^\infty$ можна вибрати

збіжну підпослідовність.

Без обмеження загальності будемо вважати, що сама ця послідовність є збіжною до $(\beta_1', \dots, \beta_n') \in S_{R^n}$.

З урахуванням обмеженості послідовностей $\left\{(\alpha_1^{k_\nu}, \dots, \alpha_r^{k_\nu})\right\}_{\nu=1}^\infty$, $\left\{\theta^{k_\nu}\right\}_{\nu=1}^\infty$ внаслідок переходу у співвідношенні (28) до границі при $\nu \rightarrow \infty$ одержуємо, що $\sum_{i=1}^n \beta_i' f_j(-y_i) \leq 0$, $j = \overline{1, m_1}$, причому $(\beta_1', \dots, \beta_n') \in S_{R^n}$.

Звідки $\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \beta_i' f_j(-y_i) \leq 0$, що суперечить (13). Отже, $\left\{\beta^k\right\}_{k=1}^\infty = \left\{(\beta_1^k, \dots, \beta_n^k)\right\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою послідовністю. Оскільки $\sum_{p=1}^r \alpha_p^k = 1$ та $\alpha_p^k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, то обмеженою є також послідовність $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^\infty$. З проведених міркувань випливає, що обмеженою буде послідовність $(\alpha^k, \beta^k) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_r^k; \beta_1^k, \dots, \beta_n^k)$, $k = 1, 2, \dots$. Нехай $(\alpha^*, \beta^*) = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*; \beta_1^*, \dots, \beta_n^*)$ є її частковою границею. Переконаємося, що елемент $(x^*, y^*) = \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p^* x_p, \sum_{i=1}^n \beta_i^* y_i\right)$ є екстремальним елементом для величини (1). Існує підпослідовність $(\alpha^{k_\nu}, \beta^{k_\nu}) = (\alpha_1^{k_\nu}, \dots, \alpha_r^{k_\nu}; \beta_1^{k_\nu}, \dots, \beta_n^{k_\nu})$, $\nu = 1, 2, \dots$, така, що

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\alpha^{k_\nu}, \beta^{k_\nu}) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\alpha_1^{k_\nu}, \dots, \alpha_r^{k_\nu}; \beta_1^{k_\nu}, \dots, \beta_n^{k_\nu}) = \\ &= (\alpha^*, \beta^*) = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*; \beta_1^*, \dots, \beta_n^*). \end{aligned} \quad (29)$$

До обмежень задачі лінійного програмування типу задачі (14)-(17), яка розв'язується на кроці k_ν , додано обмеження

$$\sum_{p=1}^r \alpha_p f_{m_1+k_\nu}(x_p) - \sum_{i=1}^n \beta_i f_{m_1+k_\nu}(y_i) - \theta \leq 0, \text{ де функціонал } f_{m_1+k_\nu} \in B^*$$

вибрано так, що

$$\begin{aligned} \|x^{k_\nu} - y^{k_\nu}\| &= \max_{f \in B^*} f(x^{k_\nu} - y^{k_\nu}) = \\ &= f_{m_1+k_\nu}(x^{k_\nu} - y^{k_\nu}) = f_{m_1+k_\nu} \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_\nu} x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_\nu} y_i \right), \end{aligned} \quad (30)$$

розв'язано отриману, внаслідок цього, нову задачу лінійного програмування і т.д.

Тому уже

$$\sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(x_p) - \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(y_i) - \theta^{k_{v+1}} \leq 0. \quad (31)$$

З урахуванням (30), (31) отримаємо, що

$$\begin{aligned} & \left\| \|x^{k_v} - y^{k_v}\| - \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(x_p) - \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(y_i) \right) \right\| = \\ & = \left| \sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_v} f_{m_1+k_v}(x_p) - \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_v} f_{m_1+k_v}(y_i) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(x_p) - \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(y_i) \right) \right| \leq \\ & \leq \sum_{p=1}^r \left| \alpha_p^{k_v} - \alpha_p^{k_{v+1}} \right| \left| f_{m_1+k_v}(x_p) \right| + \sum_{i=1}^n \left| \beta_i^{k_v} - \beta_i^{k_{v+1}} \right| \left| f_{m_1+k_v}(y_i) \right| \leq \\ & \leq \sum_{p=1}^r \left| \alpha_p^{k_v} - \alpha_p^{k_{v+1}} \right| \|x_p\| + \sum_{i=1}^n \left| \beta_i^{k_v} - \beta_i^{k_{v+1}} \right| \|y_i\|. \end{aligned}$$

З урахуванням (27), (29), (31) звідси одержуємо, що

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \|x^{k_v} - y^{k_v}\| &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_v} x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_v} y_i \right\| = \\ &= \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p^* x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^* y_i \right\| = \|x^* - y^*\| = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(x_p) - \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(y_i) \right) \leq \\ &\leq \lim_{v \rightarrow \infty} \theta^{k_{v+1}} = \theta^* \leq E(A, B) \leq \|x^* - y^*\|, \end{aligned} \quad (32)$$

оскільки $x^* \in A$, $y^* \in B$.

Зі співвідношення (32) випливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \theta^{k_{v+1}} &= \theta^* = E(A, B) = \|x^* - y^*\| = \lim_{v \rightarrow \infty} \|x^{k_v} - y^{k_v}\| = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p^{k_v} x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_v} y_i \right\| = \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p^* x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^* y_i \right\|. \end{aligned} \quad (33)$$

Оскільки (33) має місце для будь-якої граничної точки послідовності $(\alpha^k, \beta^k) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_r^k; \beta_1^k, \dots, \beta_n^k)$, то справедлива рівність

$$E(A, B) = \lim_{v \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\| \sum_{p=1}^r \alpha_p^k x_p - \sum_{i=1}^n \beta_i^k y_i \right\|. \quad (34)$$

Рівності (33), (34) дозволяють зробити висновок про справедливість теореми.

Теорему доведено.

Зауважимо, що з доведеної теореми випливає, що оцінки (24) можна використати для відшукування величини $E(A, B)$ з наперед заданою точністю.

Переконаємося, що з допомогою побудованого методу можна розв'язувати також задачу відшукування величини (12), двоїсту до задачі відшукування величини (1).

Теорема 5. Нехай $\gamma_k = (\gamma_1^k, \dots, \gamma_{m_1+k-1}^k, \gamma^k)$ є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (18)-(22), яка є двоїстою до задачі (14)-(17), що розв'язується на k -му кроці методу відшукування величини (1). Тоді послідовність $f^k = \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k f_s$, $k = 1, 2, \dots$, є мінімізуючою послідовністю для задачі відшукування величини (12).

Доведення. Оскільки γ_k , $k = 1, 2, \dots$, є оптимальним розв'язком задачі (18)-(22), то

$$\begin{aligned} \gamma^k &= \min_{1 \leq p \leq r} \left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k f_s \right) (x_p) = \min_{1 \leq p \leq r} f^k(x_p), \\ &\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k f_s \right) (y_i) = f^k(y_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \|f^k\| &= \left\| \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k f_s \right\| \leq \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \|\gamma_s^k f_s\| = \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k \|f_s\| \leq \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k = 1, \end{aligned}$$

оскільки $f_s \in B^*$, $\gamma_s^k \geq 0$, $s = \overline{1, m_1+k-1}$, $\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k = 1$.

Звідси випливає, що f^k є допустимим розв'язком задачі (12), для якого

$$\gamma^k = \min_{1 \leq p \leq r} f^k(x_p), \quad k = 1, 2, \dots \quad (35)$$

Оскільки θ^k є оптимальним значенням цільової функції θ задачі лінійного програмування (14)-(17), а γ^k є оптимальним значенням цільової функції γ задачі лінійного програмування (18)-(22), двоїстої до задачі (14)-(17), то згідно з першою теоремою двоїстості в лінійному програмуванні (див., наприклад, [11, с. 163])

$$\gamma_k = \theta^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (36)$$

При доведенні теореми 4 встановлено, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k = E(A, B)$. Звідси та із співвідношень (35), (36) випливає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{1 \leq p \leq r} f^k(x_p) = E(A, B)$.

Це й означає, що $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ є мінімізуючою послідовністю для задачі відшукування величини (12).

Теорему доведено.

Теорема 6. Якщо X — сепарабельний простір, то будь-який функціонал $f^* \in X^*$, який є граничною в розумінні слабкої збіжності послідовностей простору X^* точкою послідовності $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$, описаної в теоремі 5, є оптимальним розв'язком задачі (12), двоїстої до задачі (1).

Доведення. Оскільки X — сепарабельний простір, $\|f^k\| \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$, то існують граничні у розумінні слабкої збіжності точки послідовності $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ (див., наприклад, [1, с. 199, 200]).

Нехай f^* є однією із них. Тоді існує підпослідовність $\{f^{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$, яка слабо збігається до f^* . Оскільки $f^{k_l}(y_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$, $l = 1, 2, \dots$, то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{k_l}(y_i) = f^*(y_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (37)$$

Оскільки $\|f^{k_l}\| \leq 1$, $l = 1, 2, \dots$, а $\|f^*\| \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \|f^{k_l}\|$ (див., наприклад, [12, с. 168]), то

$$\|f^*\| \leq 1. \quad (38)$$

Зі співвідношень (37), (38) випливає, що f^* є допустимим розв'язком задачі (12). Згідно з теоремою 5

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{1 \leq p \leq r} f^{k_i}(x_p) = E(A, B).$$

Маємо, що $\left| \min_{1 \leq p \leq r} f^{k_i}(x_p) - \min_{1 \leq p \leq r} f^*(x_p) \right| \leq \max_{1 \leq p \leq r} |f^{k_i}(x_p) - f^*(x_p)|$ (див., наприклад, [6, с. 306]) та $\lim_{l \rightarrow \infty} f^{k_i}(x_p) = f^*(x_p)$, $p = \overline{1, r}$. Тому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \min_{1 \leq p \leq r} f^{k_i}(x_p) = \min_{1 \leq p \leq r} f^*(x_p) = E(A, B).$$

Оскільки, крім цього, f^* є допустимим розв'язком задачі (12), то f^* є її оптимальним розв'язком.

Теорему доведено.

Висновки. Встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукування величини (1), співвідношення двоїстості для цієї задачі, критерій екстремальності її елемента; розроблено збіжний чисельний метод розв'язування задачі відшукування величини (1) та двоїстої їй задачі (12); отримано двосторонні оцінки збіжності, що дозволяють відшукати величину (1) з наперед заданою точністю.

Список використаних джерел:

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 544 с.
2. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. Москва: Физматлит, 2004. 416 с.
3. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента для задачі відшукування відстані між двома множинами, єдиності екстремального елемента еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. Вип. 21. С. 13-25.*
4. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Москва: Наука, 1965. 407 с.
5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций. Москва: Наука, 1977. 510 с.
6. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. Москва: Наука, 1976. 320 с.
7. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
8. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. II. 468 с.
9. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 307 с.
10. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукування відстані між двома опукли-

ми множинами лінійного нормованого простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 65-77.*

11. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). Москва: Наука, 1969. 424 с.
12. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. Москва: Высш. школа, 1982. 271 с.

NUMERICAL METHOD OF SIMULTANEOUS SOLUTION THE PROBLEM OF FINDING THE DISTANCE (BEST) BETWEEN A CONVEX POLYHEDRON AND A FINITE-DIMENSIONAL SUBSPACE OF A LINEAR NORMED SPACE AND DUAL TASK

One of the most developing areas of mathematics is theory of approximations, including the theory of approximations of functions. It begins from of task of P. L. Chebyshev on the uniform (Chebyshev) approximation of a continuous on a segment of a real-valued function by a set of algebraic polynomials of degree not exceeding n .

Later, a number of other formulations of problems on the best approximation of functions were considered, one of which is the problem of uniform approximation of a function continuous on a compact set by a finite-dimensional subspace generated by other functions continuous on this compact set.

An important place in the theory of approximation is occupied by the problem of approximation of an element of linear normed space by the elements of its finite-dimensional subspace, partial cases of which are the problems discussed above.

An important question of this problem are general theorems of existence of an extremal element, duality theorems and criteria of an extremal element, construction of numerical methods for finding this element and the magnitude of the best approximation, which have been studied by many mathematicians.

The paper considers the problem of finding the distance (best) between a convex polyhedron and a finite-dimensional subspace of a linear normalized space, a partial case of which is the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by its finite-dimensional subspace.

For this problem the existence of an extremal element, the ratio of duality, the criterion of an extremal element are established. A convergent numerical method of simultaneous solution of direct and dual problems is constructed, bilateral estimates of convergence are obtained, which allow to find corresponding values with predetermined accuracy.

Key words: *the linear normed space, the distance between a convex polyhedron and a finite-dimensional subspace, the dual problems, the numerical method.*

Отримано: 18.10.2021

УДК 519.218.82

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.55-62

О. А. Дячук, канд. техн. наук

ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗВИТКУ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ

Робота присвячена математичному моделюванню процесу введення генеруючих потужностей різного типу при вирішенні задач стратегічного планування, в тому числі на довгострокову перспективу, і управління розвитком електроенергетичних систем. Актуальність роботи полягає в тому, що згідно останніх міжнародних досліджень та домовленостей задля обмеження зростання глобальної температури до $1,5^{\circ}\text{C}$ понад доіндустріальні рівні усі країни мають досягнути нетто-нульових викидів ПГ в 2050-2060 рр., що вимагатиме, в тому числі, суттєвих змін в управлінні та стратегічному плануванні розвитку електроенергетики, які мають базуватися на детальних розрахунках з використанням математичних моделей і комп'ютерних засобів.

У роботі запропоновано до застосування інтегральний метод моделювання з використанням інтегральних рівнянь типу Вольтера із змінними межами для розробки стратегії введення різних генеруючих потужностей електроенергетичних систем на досить віддалену перспективу з урахуванням обмежень на паливо і капітальних вкладень, строків експлуатації електростанцій, а також заміни застарілих технологій новими.

Метод може бути також застосований для інших практичних задач, таких як максимізація надійності електроенергетичних систем, оптимізація часу їх модернізації та ін.

Ключові слова: *електроенергетична система, розвиток, інтегральна модель, планування, управління.*

Вступ. На 26-й Конференції ООН зі зміни клімату (COP26) в листопаді 2021 року майже 200-ма країнами було підтверджено ціль Паризької угоди [1] щодо докладання спільних зусиль для обмеження зростання глобальної температури до $1,5^{\circ}\text{C}$ понад доіндустріальні рівні. Більшістю офіційних та неофіційних делегацій формально і неформально було оголошено, що в 2050-2060 рр. їхні країни мають досягнути нетто-нульових викидів ПГ. Це означає, що кількість викидів ПГ не має перевищувати рівень їх природнього (ліси, океани тощо) та технологічного (спеціальні технології вловлювання вуглецю в промислових процесах або безпосередньо з повітря, або інше) поглинання.

Україна офіційно на міжнародному рівні оголосила, що вітчизняна економіка досягне нетто-нульових викидів ПГ не пізніше

2060 року [2], що вимагатиме суттєвих структурних зрушень, зокрема, в електроенергетичному секторі. Згідно спільних модельних математичних розрахунків Міністерства захисту довкілля та природних ресурсів України та ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України», викиди парникових газів до 2030 року в секторі виробництва енергії та тепла повинні зменшитися приблизно на 26% від рівня 2019 року [3], що в свою чергу вимагає зміни управління та шляхів розвитку електроенергетичних комплексів з врахуванням сучасних глобальних трендів.

Напрями розв'язання проблеми. Для вирішення задач управління і оцінки наслідків вибору варіантів розвитку електроенергетичних комплексів в Україні використовуються різного роду математичні моделі і комп'ютерні засоби (наприклад, Plexos [4, 5], Optimal Dispatch Model [6], TIMES [7]) як системи підтримки розрахунку стратегій та планів введення в експлуатацію нових різних генеруючих потужностей електроенергетичної системи (ЕЕС) в довгостроковому періоді.

Перспективною для використання в цій сфері також може бути інтегральна модель введення нових потужностей в енергетичній системі. У змістовному плані нас будуть цікавити допустимі (або оптимальні в якомусь сенсі) стратегії введення різних генеруючих потужностей ЕЕС на досить віддалену перспективу з урахуванням обмежень на паливо і капітальних вкладень, строків експлуатації електростанцій, а також заміни застарілих технологій новими. Крім того, інтерес також становить представлення інтегральними моделями механізму напрацювання і складування вторинного ядерного палива.

Метод дослідження. Припустимо, що в складі ЕЕС функціонують 6 типів електростанцій: три типи станцій, які не використовують ядерного палива — базового навантаження на вугіллі, на нафтопродуктах і маневрені на газі, а також три типи атомних електростанцій — з реакторами на теплових нейтронах на урані, з реакторами на швидких і теплових нейтронах на плутонії. Будемо позначати їх номерами від 1 до 6 відповідно.

Для кожного типу електростанцій вважаються відомими наступні техніко-економічні характеристики:

- 1) $k_i(t)$ (грн./МВт) — питомі капітальні витрати в момент часу t ;
- 2) $b_i(t)$ (кг у.т./МВт·год) — питомі витрати палива в момент часу t ;
- 3) $\mu_i(t, s)$ — коефіцієнт інтенсивності використання в момент часу t одиниці потужності, введеної раніше в момент часу s ;
- 4) $c_i(t)$ — термін експлуатації електростанції як функція часу t ;
- 5) $\beta_i(t, s)$ — швидкість створення нових потужностей в момент часу t в розрахунку на одиницю потужності, введеної раніше в момент s

(функції β_i пов'язані з урахуванням впливу науково-технічного прогресу; стосовно економіки β_i відображають продуктивність праці або швидкість створення нових робочих місць [8, 9]).

Нехай $\varphi_i(t)$ потужність електростанції i -го типу, $i = \overline{1,6}$; $t \in [t_0, T]$, t_0 і T — відповідно початок і кінець прогнозного періоду, що вводиться в момент часу, t — момент введення самої старої електростанції, що розглядається в складі ЕЕС, функції $\varphi_i(t)$ на передісторії $t \in [t_0, T]$ вважаються відомими: $\varphi_i(t) = \varphi_i^0(t)$.

Якщо $E(t)$ — динаміка електроспоживання, що задається, $t \in [t_0, T]$, то з врахуванням введених позначень рівняння балансу енергії в системі має вигляд:

$$\sum_{i=1}^6 \int_{t-c_i(t)}^t \mu_i(t,s) \beta_i(t,s) \varphi_i(s) ds = E, \quad t \in [t_0, T]. \quad (1)$$

Нехай $\gamma(t)$ — частка маневрених потужностей від суми усіх введених до моменту t (зазвичай $\gamma(t) \approx 0.2$ або 20%), тоді:

$$\int_{t-c_3(t)}^t \mu_3(t,s) \beta_3(t,s) \varphi_3(s) ds = \gamma(t) E(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2)$$

При заданій динаміці капітальних витрат на розвиток ЕЕС $K(t)$ відповідні обмеження визначаються нерівністю:

$$\sum_{i=1}^6 k_i(t) \varphi_i(t) \leq K(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (3)$$

Залишилося описати обмеження по витратам палива. Для неатомних електростанцій ($i = 1, 2, 3$)

$$\sum_{i=1}^3 b_i(t) \int_{t-c_i(t)}^t \mu_i(t,s) \beta_i(t,s) \varphi_i(s) ds \leq B(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (4)$$

де $B(t)$ (кг у.п.) — задані сумарні витрати органічного палива.

Для АЕС на урані:

$$q_4 \varphi_4(t) + b_4(t) \int_{t-c_4(t)}^t \mu_4(t,s) \beta_4(t,s) \varphi_4(s) ds \leq B_U(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (5)$$

Тут q_4 — питоме критичне завантаження (кг у.п./кВт) ядерним паливом, необхідне для початкового запуску АЕС; $B_U(t)$ — задана динаміка видобутку природного урану.

Найбільш складним є врахування обмежень витрат плутонію, який є продуктом напрацювання вторинного ядерного палива в АЕС типів 4-6 (рис. 1).

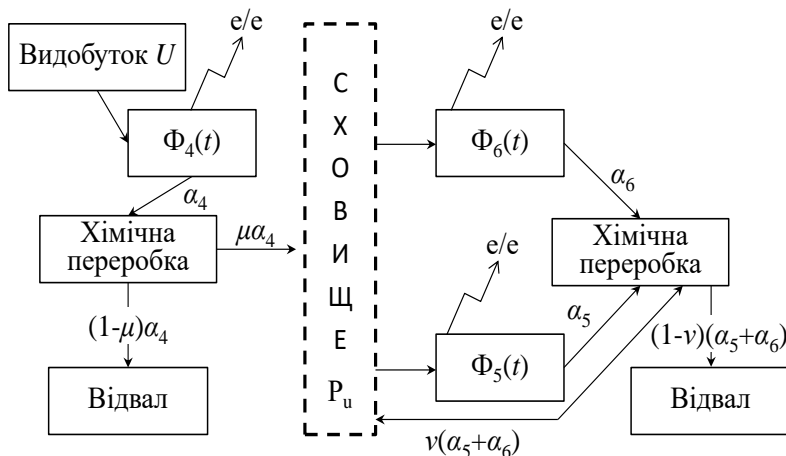


Рис. 1. Спрощена схема ядерного паливного циклу

На рис. 1 наведена спрощена схема ядерного паливного циклу, де введені наступні позначення: $\alpha_{4,6}$ — питоме вивантаження вторинного ядерного палива, μ і ν — частки вторинного ядерного палива, що надходить з АЕС типів 4 і 5, і відповідно, які йдуть на сховище плутонію після хімічної переробки; $\Phi_i(t)$, $i = \overline{4,6}$ — сумарна потужність АЕС i -го типу.

Оскільки в момент часу t витрати плутонію не можуть перевищувати його кількість, яка надійшла до цього часу на сховище після хімічної переробки, то:

$$\sum_{i=5}^6 \left[q_i \varphi_i(t) + b_i(t) \int_{t-c_i(t)}^t \mu_i(t,s) \beta_i(t,s) \varphi_i(s) ds \right] \leq$$

$$\leq \mu \alpha_4 \int_{t-c_4(t)}^{t-\tau_1} \mu_4(t,s) \beta_4(t,s) \varphi_4(s) ds +$$

$$+ \nu \sum_{i=5}^6 \alpha_i \int_{t-c_i(t)}^{t-\tau_2} \mu_i(t,s) \beta_i(t,s) \varphi_i(s) ds. \quad (6)$$

В нерівності (6) q_5 і q_6 мають той же зміст, що й q_4 , а τ_1 і τ_2 — час затримки надходження на сховище плутонію, напрацьованого АЕС 4-го або 5, 6-го типів.

Формули (1)-(6) разом з умовою:

$$\varphi_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1,6} \quad (7)$$

задають систему інтегро-функціональних лінійних співвідношень відносно шуканих функцій $\varphi_i(t)$, $t \in [t_0, T]$, що визначають траєкторію руху ЕЕС до точки в шестивимірному фазовому просторі.

При побудові моделі передбачалося, що вся вироблена електроенергія використовується зовнішньою по відношенню до ЕЕС системою, тобто електроенергія є продукт II роду [8, 9]. Цим пояснюється відсутність в моделі функцій $\lambda(t, s)$ і $a(t, s)$ в позначеннях [8, 9], за допомогою яких описується динаміка відтворення продуктів I роду — в даній моделі тієї частини електроенергії, яка витрачається на розвиток самої ЕЕС.

Припустимо для простоти, що протягом всього терміну експлуатації електростанцій вони використовуються на 100% ($\mu_i(t, s) \equiv 1$), а самі терміни їх експлуатації не залежать від t : $c_i(t) \equiv c_i$, при цьому функції $\beta_i(t, s)$ залежать лише від різниці аргументів. Переходячи в (1)-(6) від нерівностей до рівностей, отримуємо відносно $\varphi_i(t)$ замкнуту систему лінійних інтегро-функціональних рівнянь Вольтерра наступного виду:

$$\sum_{i=1}^6 \int_{t-c_i}^t \beta_i(t-s) \varphi_i(s) ds = E(t); \quad (1')$$

$$\sum_{i=1}^6 k_i \varphi_i(t) = K(t); \quad (2')$$

$$\sum_{i=1}^3 b_i(t) \int \beta_i(t-s) \varphi_i(s) ds = B(t) \quad (3')$$

$$\int_{t-c_3}^t \beta_3(t-s) \varphi_3(s) ds = v(t) E(t); \quad (4')$$

$$q_4 \varphi_4(t) + b_4(t) \int_{t-c_4}^t \beta_4(t-s) \varphi_4(s) ds = B_U(t); \quad (5')$$

$$\begin{aligned} & \mu \alpha_4 \int_{t-c_3}^{t-\tau_1} \beta_4(t-s) \varphi_4(s) ds + v \sum_{i=5}^6 \alpha_i \int_{t-c_i}^{t-\tau_2} \beta_i(t-s) \varphi_i(s) ds = \\ & = \sum_{i=5}^6 \left[q_i \varphi_i(t) + b_i(t) \int_{t-c_i}^t \beta_i(t-s) \varphi_i(s) ds \right], \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (6')$$

Якщо функції $E(t)$, $B(t)$, $\gamma(t)$, $b_i(t)$, $\beta_i(t)$ неперервно диференційовні на $[t_0, T]$, функції $K(t)$, $B_U(t)$, $k_i(t)$ неперервні на $[t_0, T]$, $\beta_3(0) = 0$ і, крім того, $\det A(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$, де

$$A(t) = \begin{bmatrix} \beta_1(0) & \beta_2(0) & \beta_5(0) & \beta_6(0) \\ k_1(t) & k_2(t) & k_5(t) & k_6(t) \\ b_1(t)\beta_1(0) & b_2(t)\beta_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & q_6 \end{bmatrix},$$

то система (1)-(6) має єдиний неперервний розв'язок $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_6(t))$, $t \in [t_0, T]$. Цей розв'язок, взагалі кажучи, не обов'язково задовольняє умові (7), порушення якої означає наявність в системі «вузьких місць». Їх виявлення можна здійснити, змінюючи вхідні дані та проводячи багатоваріантні розрахунки.

На базі даної моделі можлива постановка різноманітних оптимізаційних задач, що мають важливе прикладне значення [10-12].

Так, задача оптимізації зовнішньої функції системи [8, 9] стосовно ЕЕС може бути записана як задача максимізації функціоналу:

$$I = \int_{t_0}^T \left[\sum_{i=1}^6 \int_{t-c_i}^t \beta_i(t,s) \varphi(s) ds \right] dt \quad (8)$$

при обмеженнях (2)-(6) і додаткових обмеженнях:

$$\varphi_i(t) \geq \underline{\varphi}_i(t), \quad i = \overline{1,6}; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^6 \int_{t-c_i}^t \beta_i(t-s) \varphi_i(s) ds \geq \underline{E}(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (10)$$

Тут $\underline{\varphi}_i(t)$ і $\underline{E}(t)$ — границі мінімально допустимих норм функціонування ЕЕС.

Завдання деякого тимчасового кроку дискретизації h і апроксимація інтегралів будь-якою квадратурою зводять дану оптимізаційну задачу до задачі лінійного програмування.

Задачу оптимізації зовнішньої функції системи можна сформулювати й по іншому, якщо задати деяку «бажану» динаміку електроспоживання $E^*(t)$, $t \in [t_0, T]$ і мінімізувати функціонал:

$$\hat{I} = \int_{t_0}^T p(t) \left[\sum_{i=1}^6 \int_{t-c_i}^t \beta_i(t-s) \varphi_i(s) - E^*(t) \right]^2 dt, \quad (11)$$

де $p(t) \geq 0$ — вагова функція, розглядаючи тим самим замість задачі лінійного програмування відповідну задачу квадратичного програмування.

Мають прикладний інтерес й інші екстремальні задачі, наприклад, задача максимізації надійності роботи ЕЕС, задача на швидкість і ряд інших [8-12].

Висновки. Враховуючи складність структури та процесу функціонування електроенергетичних систем, проблему їх декарбонізації, що передбачає практично повну заміну генеруючих потужностей, неможливо ефективно вирішити без використання детальних математичних моделей. Враховуючи обсяги інвестиційних потреб які необхідні для декарбонізації електроенергетики (сотні мільярдів доларів США для України), адекватність та точність математичного моделювання має надважливе значення. Використання різного типу математичних моделей, в тому числі, запропонованої в даній статті інтегральної моделі, дозволяє суттєво підвищити ефективність прийняття рішень при стратегічному плануванні та оптимізації капіталовкладень розвитку електроенергетики.

Список використаних джерел:

1. Паризька угода / Організації Об'єднаних Націй, 2015. URL: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/995_161.
2. Оновлений національно визначений внесок України до Паризької угоди [англ.]. Рамкова конвенція Організації Об'єднаних Націй про зміну клімату, 2021. URL: https://www4.unfccc.int/sites/ndcstaging/PublishedDocuments/-Ukraine%20First/Ukraine%20NDC_July%2031.pdf.
3. Аналітичний огляд Оновленого національно визначеного внеску України до Паризької угоди // Міністерство захисту довкілля та природних ресурсів України, липень 2021 р. URL: https://mepr.gov.ua/files/docs/klimatychna_polityka/Аналітичний_огляд_HBV_липень_2021.pdf
4. Проект звіту з оцінки відповідності (достатності) генеруючих потужностей — 2020. Київ: НЕК «Укренерго», 2020. URL: <https://ua.energy/wp-content/uploads/2021/11/ERAA-UA-2021-v6.pdf> (дата звернення: 06.12.2021).
5. The optimal path forward for Ukraine's power system: White paper on power system optimization. Wärtsilä Corporation, 2020. URL: <https://www.wartsila.com/docs/default-source/power-plants-documents/downloads/white-papers/europe/the-optimal-path-forward-for-ukraine-s-power-system.pdf>
6. Meißner F. Optimal Dispatch Model: A model of the Ukrainian electricity system. *Low Carbon Ukraine Project*. Берлін, червень 2020. URL: <https://www.lowcarbonukraine.com/wp-content/uploads/ODM-Description.pdf>.
7. Petrovič S., Diachuk O., Podolets R., Semeniuk A., Bühler F., Grandal R., Boucenna M., Balyk O. Exploring the Long-Term Development of the Ukrainian Energy System. *Energies*. 2021. 14. 7731. <https://doi.org/10.3390/en14227731>
8. Глушков В. М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей. *Упр. системы и машины*. 1977. № 2. С. 3-6.
9. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. и др. О средствах моделирования развивающихся систем. Киев, 1980. 58 с. (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики; №80-37).
10. Апарцин А. С. Об интегральных уравнениях Вольтерра первого рода в теории развивающихся систем. *Численные методы оптимизации и анализа*. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992. С. 58-67.

11. Апарцин А. С., Тришечкин А. М. Применение моделей В. М. Глушкова для моделирования долгосрочных стратегий развития ЕЭЭС. *Тез. докл. Всесоюз. конф. «Курс-4»*. Рига, 1986. С. 17-19.
12. Яценко Ю. П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. Киев: Наук. думка, 1991. 218 с.

MODELING OF A PROCESS OF CAPACITY DEVELOPMENT IN POWER SYSTEMS

The paper is devoted to mathematical modeling of the process of installation of different types of electricity generating capacities for solving planning issues, including for the long term period, and management of development of power systems. The topicality of the work is that according to the latest international research and agreements to limit global temperature rise to 1.5 °C above pre-industrial levels, all countries must achieve net zero GHG emissions in 2050-2060, which will require, including, significant changes in the management and strategic planning of power sector development, which should be based on detailed calculations using mathematical models and computer tools.

This paper proposes the use of an integrated modeling method using integrated Voltaire-type equations with variable limits to develop a strategy for introducing different generating capacity of power systems in the long term periods, taking into account fuel and capital constraints, power plant life, and replacing obsolete technologies with new ones.

The method can be also applied to other practical issues, such as maximizing the reliability of power systems, optimizing the time of their modernization, etc.

Key words: *power system, developing, integrated model, planning, management.*

Отримано: 26.10.2021

УДК 519.1

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.63-74

О. О. Ємець, д-р фіз.-мат. наук, професор,

О. О. Черненко, канд. фіз.-мат. наук,

Т. В. Чілікіна, канд. фіз.-мат. наук,

О. В. Ольховська, канд. фіз.-мат. наук

Вищий навчальний заклад Укоопспілки

«Полтавський університет економіки і торгівлі», м. Полтава

ОГЛЯД ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИЗНАЧЕННЯ РЕНТАБЕЛЬНОСТІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ВИРОБНИЦТВА ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У роботі представлено огляд робіт полтавських дослідників присвячених математичному моделюванню задач на евклідових комбінаторних множинах. Викладено постановки практичних задач сільськогосподарського виробництва, а саме: задачі про забезпечення максимальної рентабельності виробництва; задачі про порядок засівання ділянок для отримання максимальної прибутковості; задачі про порядок засівання частини ділянок для максимального прибутку з урахуванням внесення добрив; задачі на знаходження оптимальних обсягів вирощування культур двома господарствами (різні модифікації). Побудовано моделі цих задач у вигляді задач евклідової комбінаторної оптимізації. Математична модель задачі про забезпечення максимальної рентабельності виробництва зводиться до умовної задачі з дробово-лінійною цільовою функцією на множині розміщень. Задача про порядок засівання ділянок для отримання максимальної прибутковості інтерпретована як повністю комбінаторна задача на множині переставлень. Для задачі про порядок засівання частини ділянок для максимального прибутку з урахуванням внесення добрив побудовано модель у вигляді частково комбінаторної задачі на переставній множині. Задачі на знаходження оптимальних обсягів вирощування культур двома господарствами розглядаються як задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями, що задають множину переставлень. Для розглянутих класів задач розроблено методи їх розв'язування. Для умовної задачі з дробово-лінійною цільовою функцією на комбінаторній множині розміщень запропоновано лінеаризацію функції та подальше застосування методу комбінаторного відсікання. Для умовних задач на вершинно розташованих множинах побудовано алгоритм комбінаторного відсікання, як для повністю, так і для частково комбінаторних задач, та модифікований метод гілок та меж. Задачі ігрового типу на переставних множинах розв'язуються різними ітераційними методами. Для

всіх типів задач проведено числові експерименти, що підтвердили ефективність алгоритмів та швидкодію.

Ключові слова: *задачі комбінаторної оптимізації, задача на вершинно розташованих множинах, задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу.*

Вступ. Дослідження задач дискретної оптимізації є передумовою успішного моделювання важливих економічних, соціальних та інших процесів. Велика кількість публікацій в області дискретної оптимізації свідчить про необхідність та важливість подібних досліджень. В Україні серед вчених, роботи яких присвячені різним напрямкам дискретної оптимізації, в першу чергу слід назвати Сергієнка І. В., Шора Н. З., Стояна Ю. Г., а також Гуляницького Л. Ф., Донця Г. П., Ємця О. О., Ляшенка І. М., Павлова О. А., Панішева А. В., Червака Ю. Ю., Шила В. П., Яковлева С. В. та керовані ними наукові колективи.

Важливий клас дискретних оптимізаційних задач складають оптимізаційні задачі комбінаторного типу, зокрема, задачі евклідової комбінаторної оптимізації. Задачі комбінаторної оптимізації все частіше зустрічаються на практиці і потребують дослідження та розв'язання [1-13].

Основні результати. Розглянемо задачу про порядок засівання частини ділянок для максимальної рентабельності. На η ділянках g_1, g_2, \dots, g_η із заданими площами засівається m культур ($m < \eta$). Визначено мінімально та максимально допустиму площу для кожної ділянки, засіяною цією культурою. Відомі необхідні витрати ресурсів кожного виду при вирощуванні однієї культури на 1 га площі ділянки для цієї культури. Відома врожайність культури та прибуток з 1 га ділянки. Заданий мінімально потрібний обсяг продукції, одержаної з j -ої культури. Відомі витрати на 1 га ділянки, засіяної цією культурою.

Необхідно визначити, які ділянки і як засівати, щоб забезпечити максимальну рентабельність виробництва, при умові, що кожна ділянка засівається лише однією культурою і одна культура може бути посіяна лише на одній ділянці.

Побудуємо математичну модель даної задачі у вигляді евклідової комбінаторної задачі на множині розміщень.

Нехай $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_\eta\}$ — мультимножина площ ділянок. Тоді всі можливі m -вибірки з мультимножини G утворюють загальну множину розміщень $E_\eta^m(G)$, де n — число різних елементів в G . Використаємо позначення: x_j — площа ділянки, засіяної j -ою культурою; $S_{j\min}, S_{j\max}$ — мінімально та максимально допустимі площі посіву j -ої

культури; ω_j — врожайність j -ої культури на 1 га ділянки; c_j — прибуток з 1 га ділянки, засіяної j -ою культурою; c_0 — прибуток, що не залежить від того, як засіваються ділянки; Q_j — мінімально потрібний обсяг продукції, одержаної з j -ої культури; d_j — витрати на 1 га ділянки, засіяної j -ою культурою; d_0 — витрати, що не залежать від того, як засіваються ділянки, r — кількість видів виробничих ресурсів; b_p — наявність виробничих ресурсів p -го виду; α_{pj} — затрати ресурсів p -го виду на 1 га ділянки, засіяної j -ою культурою.

Тоді математична модель набуває вигляду: знайти впорядковану пару $\langle F(x^*), x^* \rangle$ таку, що

$$F(x^*) = \max_{x \in R^m} \frac{\sum_{j=1}^m c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^m d_j x_j + d_0}, \quad x^* = \arg \max_{x \in R^m} \frac{\sum_{j=1}^m c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^m d_j x_j + d_0},$$

за комбінаторної умови

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_{\eta}^m(G) \subset R^m,$$

та додаткових лінійних обмеженнях:

на посівні площі

$$S_{j \min} \leq x_j \leq S_{j \max} \quad \forall j \in J_m;$$

на використання ресурсів

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{pj} x_j \leq b_p \quad \forall p \in J_r;$$

на обсяг одержуваної продукції

$$x_j \omega_j \geq Q_j \quad \forall j \in J_m.$$

Дана задача також розглядалася в роботах [6, 10] з дробово-лінійною функцією цілі на загальній множині переставлень.

Для розв'язування цієї задачі досліджено властивості, розроблено методи та проведено ряд числових експериментів, які підтвердили їх ефективність та швидкодію [9].

Розглянемо задачу про порядок засівання ділянок для отримання максимальної прибутковості, як повністю комбінаторну задачу на множині переставлень. На n ділянках із заданими площами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ засівається k видів культур ($n > k$). Відома врожайність j -ої культури

на i -му полі та її прибуток з 1 га ділянки. Визначено мінімально та максимально допустиму площу для кожної ділянки, яку засівають цією культурою. Відомі необхідні витрати ресурсів кожного виду при вирощуванні однієї культури на 1 га площі ділянки для цієї культури. Заданий мінімальний потрібний обсяг виробництва j -ої культури.

Необхідно визначити, які ділянки і як засівати, щоб забезпечити максимальну прибутковість виробництва, при умові, що кожна ділянка засівається лише однією культурою [11].

Побудуємо математичну модель даної задачі у вигляді евклідової комбінаторної задачі на множині переставлень.

Розглянемо мультимножину $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ площ полів, у якій n ненульових елементів, $\eta = n \cdot k$. Нехай є $\eta - n$ фіктивних полів, тобто полів із нульовими площами, $g_1 = g_2 = \dots = g_{s-n} = 0$, $g_{s-n+1} = \sigma_1$, $g_{s-n+2} = \sigma_2, \dots, g_{s-n+1} = \sigma_n$. Всі можливі k -вибірки з мультимножини G утворюють множину переставлень E_{η^v} , де v — число різних елементів в G (якщо всі поля різні, то $v = n + 1$). Використаємо позначення: x_{ij} — площа i -ої ділянки, засіяної j -ою культурою; $S_{j \min}, S_{j \max}$ — мінімально та максимально допустимі площі посіву j -ої культури; ω_j — врожайність j -ої культури з 1 га i -го поля; c_{ij} — прибуток культури j -го виду на i -му полі з 1 га ділянки; Q_j — мінімальний потрібний обсяг виробництва j -ої культури; r — кількість видів виробничих ресурсів; a_{pji} — затрати ресурсів p -го виду на 1 га i -го поля, засіяної j -ою культурою, b_p — наявність виробничих ресурсів p -го виду.

Тоді математична модель набуває вигляду: знайти впорядковану пару $\langle F(x^*), x^* \rangle$, таку, що

$$Z^* = \max_{x \in R^n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k c_{ij} x_{ij}, \quad x^* = \arg \max_{x \in R^n} Z^*,$$

за комбінаторної умови

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1k}, x_{21}, x_{2k}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nk}) \in E_{\eta^v}(G) \subset R^n,$$

та за додаткових лінійних обмежень:

на посівні площі

$$S_{j \min} \leq \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq S_{j \max} \quad \forall j \in J_k;$$

на використання ресурсів

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n a_{pji} x_{ij} \leq b_p \quad \forall p \in J_r ;$$

на обсяг одержуваної продукції

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \omega_{ij} \geq Q_j \quad \forall j \in J_k .$$

Зазначимо, що одержана модель — це повністю комбінаторна задача. Для розв'язання цієї задачі розроблено методи, які викладені в [11] та проведено ряд числових експериментів, що показали його ефективність.

Розглянемо задачу нелінійної оптимізації на переставленнях, одну із задач розподілу мінеральних добрив, у якій з урахуванням виконання обсягів продажу продукції відповідно до угод при наявності певних виробничих ресурсів і ресурсів мінеральних добрив необхідно отримати максимальний прибуток від урожаю сільськогосподарських культур.

Нехай у наявності в господарства є n полів площами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ відповідно, k видів культур, r видів виробничих ресурсів і m видів мінеральних добрив. Відома врожайність j -ої культури на i -му полі та її прибутковість з 1 га i -ої ділянки. Визначено мінімально та максимально допустиму площу для кожної ділянки, яку засівають певною культурою. Відомі витрати ресурсів кожного виду при вирощуванні певної культури на 1 га площі ділянки під цією культурою. Заданий мінімальний потрібний обсяг виробництва j -ої культури. Знайти, які поля і як треба засівати, щоб отримати максимальний прибуток за умови, що поле засівається однією культурою.

Розглянемо мультимножину $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$ площ полів, у якій n ненульових елементів, $\eta = n \cdot k$. Нехай введено у розгляд $\eta - n$ -фіктивних полів, тобто полів із нульовими площами, тоді: $g_1 = g_2 = \dots = g_{\eta-n} = 0$, $g_{\eta-n+1} = \sigma_1, g_{\eta-n+2} = \sigma_2, \dots, g_\eta = \sigma_n$. У цьому випадку кожний можливий набір площ полів $x = \{x_{11}, \dots, x_{1k}, x_{21}, x_{2k}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nk}\}$ є елементом множини переставлень з елементів мультимножини G , тобто $x \in E_{\eta\nu}(G)$, де ν — число різних в G елементів.

При побудові математичної моделі будемо вважати, що поле засівається тільки однією культурою. Введемо позначення: x_{ij} — площа в га під j -ою культурою на i -ому полі; y_{ijl} — обсяг добрив l -го виду, які вносять під j -ту культуру на i -ому полі в центнерах; c'_{ij} — прибуток,

який отримують від продажу 1 ц j -ої культури з 1 га i -ого поля; c_{ij}'' — витрати на збирання, транспортування 1 ц j -ої культури, зібраної з 1 га i -ого поля; v_{ij} — коефіцієнт підвищення врожайності j -ої культури на i -ому полі від внесення добрив; d_l — витрати на внесення добрив виду l -го виду на 1 ц; Y_l — обсяг добрив l -го виду, який отримує господарство; γ_l — вміст діючої речовини в добриві l -го виду; p_{ijl} — максимальна доза добрив l -го виду, які необхідно внести на 1 га площі під культуру j -го виду на i -му полі.

$S_{j \min}$, $S_{j \max}$, a_{pji} , b_p , r мають той же сенс, що і в задачі 1.

Величини c_{ij}' , c_{ij}'' , d_l — в одних грошових одиницях.

Z^* — прибуток, який отримується при виробництві при внесенні мінеральних добрив.

Задача приймає вигляд: знайти впорядковану пару $\langle Z^*, z^* \rangle$:

$$Z^* = \max_{x \in R^s, y \in R^m} \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k (c_{ij}' - c_{ij}'') x_{ij} v_{ij} \right) - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m d_l x_{ij} y_{ijl},$$

$$z^* = (x_{11}^*, \dots, x_{nk}^*, y_{111}^*, \dots, y_{nkm}^*) = \arg \max_{x \in R^s, y \in R^m} Z^*,$$

за комбінаторної умови:

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1k}, x_{21}, \dots, x_{2k}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nk}) \in E_{\eta\nu}(G) \subset R^n$$

та за додаткових лінійних обмежень:

на баланс ресурсів добрив

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m y_{ijl} \leq Y_l \quad \forall l \in J_m;$$

по максимально можливим дозам внесення добрив

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m \gamma_l x_{ij} y_{ijl} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m p_{ijl};$$

на посівні площі

$$S_{j \min} \leq \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq S_{j \max} \quad \forall j \in J_k;$$

на використання ресурсів

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n a_{pji} x_{ij} \leq b_p \quad \forall p \in J_r;$$

на обсяг одержуваної продукції

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \omega_{ij} \geq Q_j \quad \forall j \in J_k.$$

Зауважимо, що одержана модель — це частково комбінаторна задача: змінні x_{ij} — комбінаторні, а y_{ij} — неперервні.

Для розв'язування задачі запропоновано методи, які викладено в [11], доведено та обґрунтовано ефективність їх роботи.

Розглянемо економічні інтерпретації та математичні моделі задач сільського господарства, які є задачами комбінаторної оптимізації ігрового типу.

Нехай є два конкуруючі фермерські господарства, які займаються вирощування та збутом сільськогосподарської продукції. На кожному із власних m полів перше господарство вирощує m видів зернових. Оскільки площа кожного з полів різна, то від того на якому із полів буде посаджена сільськогосподарська культура залежить вирощена її кількість. Прибуток від реалізації обох господарств залежить від того, яку кількість продукції кожного виду виростить господарство. Необхідно розробити оптимальні плани вирощування зернових культур першого та другого фермерських господарств.

Припустимо, що у другого господарства відсутні обмеження на вирощування зернових, це можливо коли поля знаходяться поруч і виробник може дозволити собі вирощувати ту кількість кожної культури яку вважає найбільш прибутковою, то комбінаторні обмеження накладаються лише на стратегії першого гравця. Розглянемо математичну модель даної задачі.

Нехай елементи P_i^x мультимножини $P^x = \{P_1^x, \dots, P_m^x\}$
 $0 \leq P_i^x \leq 1$, $i \in J_m = \{1, 2, \dots, m\}$, сума їх $\sum_{i=1}^m P_i^x = 1$. У векторі

$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ елемент x_i — ймовірність застосування стратегії з номером i , належить P^x , $x_i \in P^x$, а сам вектор X належить множині $E_{mv}(P^x)$ m -перестановок з елементів мультимножини P^x , тобто

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_{mv}(P^x). \text{ Очевидно, що } \sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

Гра полягає в тому, що перший гравець обирає стратегію-вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_{mv}(P^x)$, а другий обирає стратегію-число $j \in J_n$. Ці стратегії назвемо чистими. При цьому другий гравець платить першому платежі a'_{1j}, \dots, a'_{mj} з ймовірностями x_1, \dots, x_m , де a'_{ij} — задані дійсні числа $\forall i \in J_m \quad \forall j \in J_n$.

Позначимо A' матрицю з елементами a'_{ij} . Середній платіж (математичне сподівання) другого гравця першому (при виборі стратегії $x' = (x'_{1i}, \dots, x'_{mi}) \in E_{mv}(P^x)$ і стратегії $j \in J_n$ відповідно першим та другим гравцями, $i \in J_k$) виражається функцією:

$$F(x', j) = \sum_{i=1}^m a'_{ij} x'_{it} = a_{ij}, \quad (1)$$

де $k = |E_{mv}(P^x)| = \frac{m!}{\eta_1! \dots \eta_v!}$.

Необхідно знайти стратегії гравців X^* і j^* , які дозволять першому гравцю максимізувати свій вигравш, а другому — мінімізувати програш:

$$X^* = \arg \max_{X \in E_{mv}(P^x)} \left(\min_{j \in J_n} F(X, j) \right),$$

$$j^* = \arg \min_{j \in J_n} \left(\max_{X \in E_{mv}(P^x)} F(X, j) \right)$$

де функція $F(X, j)$ має вигляд (1).

Якщо виконується умова

$$\min_{j \in J_n} \max_{X \in E_{mv}(P^x)} F(X, j) = \max_{X \in E_{mv}(P^x)} \min_{j \in J_n} F(X, j) = F(X^*, j^*), \quad (2)$$

то очевидно, що задача розв'язана з ціною гри $v = F(X^*, j^*)$ та оптимальними чистими стратегіями X^* , j^* першого та другого гравців відповідно. При цьому кажуть, що існує сідлова точка гри (X^*, j^*) .

Якщо умова (2) не виконується, то, очевидно, що використання кожним з гравців його фіксованої чистої стратегії дозволяють іншому отримувати переваги. З огляду на це, кожен з гравців для того, щоб при багатократному повторенні гри досягти своєї мети, повинен застосувати свої чисті стратегії з певною частотою (ймовірністю).

У цьому випадку для пошуку оптимальних стратегій, введемо поняття мішаних стратегій. Позначимо

$$S_k = \left\{ p = (p_1, p_2, \dots, p_k), \sum_{i=1}^k p_i = 1, p_i \geq 0 \quad \forall i \in J_n \right\},$$

$$S_n = \left\{ q = (q_1, \dots, q_n), \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0 \quad \forall j \in J_m \right\},$$

де k — кількість елементів в $E_{mv}(P^x)$, $p \in S_k$ — мішана стратегія першого гравця, $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Аналогічно, мішаною стратегією другого гравця є елемент $q \in S_n$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, $q_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n q_j = 1$. Числа p_i , q_j є ймовірностями застосування стратегій $x^i \in E_{mv}(P^x)$ та $j \in J_n$ першого та другого гравців відповідно.

Очікуваною платою другого гравця першому є величина $F(p, q)$ — математичне сподівання випадкової величини, яка реалізується при одночасному настанні випадкових подій: вибір стратегії x^i першим гравцем та вибір стратегії j — другим. Ця випадкова величина приймає значення $a_{ij} \forall i \in J_k, \forall j \in J_n$ з ймовірністю $p_i q_j$:

$$F(p, q) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \sum_{t=1}^m a'_{ij} x_{it} p_i q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k a_{ij} p_i q_j, \quad (3)$$

де p_i — ймовірність вибору $x^i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$, а q_j — ймовірність вибору j .

Природно, що очікуваний програш другого гравця обчислюється аналогічно відповідно формули (3), оскільки маємо гру з нульовою сумою.

Не важко бачити, що перший гравець може забезпечити собі ви-
граш не менше $\max_{p \in S_k} \min_{q \in S_n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k a_{ij} p_i q_j$, а другий гравець може забез-

печити собі програш не більше $\min_{p \in S_k} \max_{q \in S_n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k a_{ij} p_i q_j$. Якщо (p^*, q^*) -

сідлова точка функції $F(p, q)$, що визначається (2.3), тобто виконуються нерівності

$$F(p^*, q) \leq F(p^*, q^*) \leq F(p, q^*)$$

то p^* , q^* називають оптимальними мішаними стратегіями першого та другого гравців відповідно. У цьому випадку, як відомо,

$$v = F(p^*, q^*) = \min_{q \in S_n} \max_{p \in S_k} F(X, Y) = \max_{p \in S_k} \min_{q \in S_n} F(p, q).$$

При цьому будемо казати, що задача комбінаторної оптимізації ігрового типу на перестановках має розв'язок в мішаних стратегіях, а $F(p^*, q^*)$ — ціна гри.

Якщо ж у другого господарства є l полів, на яких вирощується l різних сільськогосподарських культур. У такій ситуації прибутки обох фермерів залежать від кількості кожної вирощеної культури господарством. Необхідно розробити оптимальні обсяги вирощення культур обома господарствами. Розглянута задача є задачею комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями-перестановками на стратегії обох гравців. Опишемо математичну модель даної задачі.

Розглянемо випадок, коли і на стратегії другого гравця накладаються обмеження, що визначені перестановками, тобто вектор $P^y = (P_1^y, P_2^y, \dots, P_l^y)$ — вектор, для якого виконується:

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_l) \in E_{L\mu}(P^y), \quad P_j^y \geq 0 \quad \forall j \in J_l; \quad \sum_{j=1}^l P_j^y = 1. \quad \text{Необхідно}$$

знайти стратегії гравців X^* і Y^* , які дозволять першому гравцю максимізувати свій вигравш, а другому — мінімізувати програш:

$$X^* = \arg \max_{X \in E_{mv}(P^x)} \left(\min_{Y \in E_{L\mu}(P^y)} F(X, Y) \right),$$

$$Y^* = \arg \min_{Y \in E_{L\mu}(P^y)} \left(\max_{X \in E_{mv}(P^x)} F(X, Y) \right),$$

де

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^k x_i \sum_{j=1}^l a_{ij}^y y_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_{ij}^y x_i y_j,$$

$$k = |E_{mv}(P^x)| = \frac{m!}{\eta_1! \dots \eta_v!}, \quad l = |E_{L\mu}(P^x)| = \frac{L!}{\lambda_1! \dots \lambda_v!}.$$

Ця математична модель описує задачу комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями-перестановками на стратегії обох гравців.

Для розв'язування описаних задач комбінаторної оптимізації розроблено методи, оцінена швидкість збіжності та складності роботи алгоритмів [12].

Висновки. Таким чином, в даній публікації розглянуті економічні інтерпретації та побудовано математичні моделі задач сільськогосподарського виробництва, які можуть використовуватись для моделювання задач більш складного змісту. Для розглянутих класів задач розроблено методи їх розв'язування.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Київ: Наук. думка, 1985. 382 с.; 2-е изд., доп. и перераб., 1988. 472 с.
2. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с.
3. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи: монографія. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с.
4. Хіміч О. М. Методи комп'ютерного дослідження математичних моделей з наближено заданими вихідними даними: автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.02. Київ, 2003. 30 с.
5. Гребеннік І. В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: спец. 01.05.02. Харків, 2006. 34 с.
6. Ємець О. О., Колечкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями: монографія / за заг. ред. І. В. Сергієнка. Київ: Наук. думка, 2005. 117 с.
7. Ємець О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях: монография / под общ. ред. И. В. Сергиенко. Київ: Наук. думка, 2008. 159 с.
8. Устьян Н. Ю. Задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу: автореф. дис.: 01.05.01. Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова, 2009. 20 с.
9. Ємець О. А., Черненко О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях: монография. Київ: Наукова думка, 2011. 154 с.
10. Ємець О. О., Черненко О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації: монографія. Полтава: РВЦ ПУЕТ, 2011. 204 с.
11. Чілікіна Т. В. Умовні задачі комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах та їх розв'язування: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.01 «Теоретичні основи інформатики та кібернетики». Київ, 2012. 30 с.
12. Ольховська О. В. Комбінаторні задачі ігрового типу на множині розміщень: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01. Київ, 2015. 20 с.
13. Барболина Т. М. Теорія і методи комбінаторної оптимізації на розміщеннях: детерміновані та стохастичні задачі: автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.01. Київ, 2020. 34 с.

OVERVIEW OF THE PROBLEMS OF COMBINATORY OPTIMIZATION OF DETERMINATION OF PROFITABILITY OF AGRICULTURAL PRODUCTION AND METHODS OF THEIR SOLUTION

The paper presents an overview of the works of Poltava researchers devoted to mathematical modeling of problems on Euclidean combinatorial sets. Statements of practical tasks of agricultural production are stated, namely: tasks on maintenance of the maximum profitability of production; tasks on the procedure for sowing plots to obtain maximum profitability; tasks on

the procedure for sowing part of the plots for maximum profit, taking into account the application of fertilizers; the task of finding the optimal amount of crops grown by two farms (various modifications). Models of these problems in the form of Euclidean combinatorial optimization problems are constructed. The mathematical model of the problem of ensuring maximum profitability of production is reduced to a conditional problem with a fractional-linear objective function on a set of placements. The problem of the order of sowing plots to obtain maximum profitability is interpreted as a completely combinatorial problem on a set of permutations.

For the problem of the order of sowing part of the plots for maximum profit, taking into account the application of fertilizers, a model was built in the form of a partially combinatorial problem on the permutable set. Problems for finding the optimal amount of cultivation of crops by two farms are considered as problems of combinatorial optimization of the game type with constraints that specify the set of permutations. Methods for solving them have been developed for the considered classes of problems. For a conditional problem with a fractional-linear objective function on a combinatorial set of placements, the linearization of the function and further application of the combinatorial clipping method are proposed.

For conditional problems on vertex-set sets, a combinatorial clipping algorithm is constructed, both for fully and partially combinatorial problems, and a modified method of branches and boundaries is constructed. Game-type problems on permutable sets are solved by various iterative methods. Numerical experiments were performed for all types of problems, which confirmed the efficiency of algorithms and speed.

Key words: *combinatorial optimization problems, the problem of vertically arranged sets, combinatorial game-type optimization problems.*

Отримано: 8.10.2021

УДК 519.1

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.75-80

О. В. Зеленський*, канд. фіз.-мат. наук,

В. М. Дармосюк**, канд. фіз.-мат. наук,

Р. В. Лобач***

* Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

** Миколаївський національний університет
імені В. О. Сухомлинського, м. Миколаїв,

*** Кам'янець-Подільський НВК № 14, м. Кам'янець-Подільський

ВІДНОВЛЕННЯ МАТРИЦЬ ВІДСТАНЕЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Матриці відстаней застосовуються в геометричному моделюванні та в задачах відновлення геометричних об'єктів, економії, біоінформатиці, програмуванні. Матриці відстаней застосовуються у машинному навчанні, наприклад, створюються програми, пов'язані з дорожнім трафіком, автобусними маршрутами, геолокацією зокрема компанія Yandex створила сервіс, у якому, за допомогою матриць відстаней прогнозується завантаженість доріг, на потрібний час у майбутньому. Таким чином, автомобілісти можуть запобігти потрапляння у затори. Distance Matrix API — це сервіс, який повідомляє відстань і час в дорозі між початком руху та точкою призначення. Сервіс повертає інформацію на основі запропонованого маршруту між початковою та кінцевою точками, обчисленого API картами Google, і складається із значень тривалості подорожі та відстані для кожної пари пунктів.

Також матриці відстаней можуть бути застосовані при створенні будь-якої статистики. У біоінформатиці матриці відстаней використовуються для представлення структур білків незалежним від координат чином, або для відновлення відстаней у ланцюгу ДНК.

У [4] автори розглядають фундаментальні властивості EDM, такі як ранг та не визначеність. У статті досліджують, як різні властивості EDM можуть бути використані для розробки алгоритмів для заповнення та зменшення шумів даних про відстані. Попутно автори демонструють застосування матриць відстаней для калібрування положення мікрофона та ультразвукової томографії.

В роботі знайдено критерій можливості відновлення матриці Евклідових відстаней на прямій, та між вершинами опуклого n -кутника на площині. Розроблено алгоритм передачі ключа к шифру з використанням матриць Евклідових відста-

ней на площині. Розроблено швидкий алгоритм відновлення матриці відстаней між об'єктами на прямій.

Ключові слова: *матриці відстаней, матриця Евклідових відстаней, граф, зв'язний граф, граф матриці відстаней, відновлення матриці відстаней.*

Вступ.

Означення 1. Матрицею відстаней називають квадратну матрицю типу «об'єкт-об'єкт» (порядку n), що містить відстані між об'єктами в метричному просторі в якості елементів [1].

В загальному ж вигляді матриця виглядає наступним чином:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & d_{1j} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{i1} & \cdots & d_{ij} & \cdots & d_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nj} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Властивості матриці відстаней:

1. Симетричність відносно діагоналі, тобто $d_{ij} = d_{ji}$.
2. Відображення властивості тотожності відстані $d_{ij} = 0 \leftrightarrow i = j$ в матриці відстаней всі елементи головної діагоналі рівні нулю.
3. Значення відстаней в матриці завжди невід'ємні.
4. Нерівність трикутника приймає форму $d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$ для всіх i, j та k .

1. Відновлення матриць Евклідових відстаней.

Означення 2. Евклідова метрика (евклідова відстань) — метрика в евклідовому просторі — відстань між двома точками евклідового простору, що обчислюється за теоремою Піфагора [2]. Для точок $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ і $q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ Евклідова відстань визначається наступним чином:

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (p_k - q_k)^2}.$$

Розглянемо задачу **відновлення матриці евклідових відстаней**.

Нехай задано n точок площині $A_k(x_k, y_k)$ між деякими з яких відстані відомі, а між деякими ні. Нехай $[D] = (d_{ij})$ — матриця квадратів евклідових відстаней, $d_{ij} = \|A_i, A_j\|^2$, або $d_{ij} = -1$, якщо відстань між об'єктами невідома. Матрицю $[D]$ в якій всі відстані відомі назива-

ють матрицю квадратів евклідових відстаней (*EDM*). Задача полягає в тому, що потрібно знайти координати всіх об'єктів, та всі невідомі відстані між об'єктами. Виникає питання, коли по деяким елементам матриці відстаней, можна відновити її повністю. Побудуємо по матриці $[D]$ неорієнтований граф $G = (V, E) = G(D)$ наступним чином $(i, j) \in E(G)$, якщо відстань $\rho(A_i, A_j)$ відома та $(i, j) \notin E(G)$ якщо відстань $\rho(A_i, A_j)$ невідома.

Будемо вважати, що точки між якими ми шукаємо відстані утворюють опуклий n -кутник.

З опуклості n -кутника випливає, що жодні три точки не лежать на одній прямій. Тобто виконується строга нерівність трикутника $d_{ij} + d_{jk} > d_{ik}$.

Твердження. Якщо відомо менше ніж $2n - 3$ відстані, то задача відновлення відстаней має безліч розв'язків.

Доведення. Нехай для $i \in [3 \dots n]$ відомі відстані d_{1i} , та d_{2i} тобто відомі $2n - 4$ відстані серед яких немає зайвих. Позначимо

$$M = \min_{i \in [3 \dots n]} \{d_{1i} + d_{2i}\}, m = \min_{i \in [3 \dots n]} \{|d_{1i} - d_{2i}|\}.$$

Для довільного $d \in (m, M)$ можна побудувати матрицю відстаней вважаючи $d_{12} = d$.

Оскільки дійсних чисел з інтервалу (m, M) є нескінченно багато, то їй задача відновлення матриці відстаней має безліч розв'язків.

Теорема 1. Якщо в графі $G(D)$ з n вершинами, $n \geq 3$ можна вибрати $2n - 3$ ребра, так, що будь-який підграф з $k \geq 3$ вершинами містить не більше $2k - 3$ вибраних ребер, то матрицю Евклідових відстаней на площині D можна відновити повністю.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

1. При $n = 3$, всі три відстані між трьома точками відомі, теорема виконується.
2. Припустимо, що твердження виконується при $n = k$.
3. Доведемо, що теорема виконується при $n = k + 1$.

Спочатку доведемо, що знайдеться точка для якої ми знаємо не більше трьох відстаней. Припустимо, що такої точки не існує, тобто для довільної точки ми знаємо не менше 4 відстаней. Тоді кількість

всіх відомих відстаней не менше за $\frac{4n}{2} = 2n$, але $2n \geq 2n - 3$, ми

отримали протиріччя, яке доводить, що знайдеться точка, для якої ми знаємо не більше трьох відстаней.

Розглянемо випадок, що існує точка для якої ми знаємо тільки дві відстані. (Очевидно, що якщо для точки ми знаємо тільки одну відстань, то матрицю відстаней відновити неможливо, оскільки точка може рухатися по колу).

Видалимо цю точку разом з двома відстанями. В нас залишається k точок, та $2k - 3$ відстані, тому за припущенням індукції матрицю відстаней з k точками можна відновити. (Тобто знайти координати вершин та всі відстані). Після чого знаючи дві відстані знаходимо координати видаленої точки та всі відстані.

Розглянемо випадок, що існує точка для якої ми знаємо рівно три відстані. Нехай це буде точка A_1 та відстані d_{12}, d_{13}, d_{14} . Відомо, що для 4 точок опуклого чотирикутника знаючи 5 відстаней, ми однозначно можемо знайти б, тому серед відстаней d_{23}, d_{24}, d_{34} принаймні одну відстань ми точно не знаємо, оскільки серед відстаней немає зайвих. Тобто, наприклад знаючи d_{23}, d_{24} , ми однозначно знаходимо d_{34} . Тому, використовуючи точку A_1 , ми можемо знайти одну відстань між точками A_2, A_3, A_4 . Видалимо точку A_1 разом з відстанями d_{12}, d_{13}, d_{14} .

Залишається k точок, $2k - 4$ відстані та одну відстань ми можемо знайти між точками. A_2, A_3, A_4 . Тобто всього ми знаємо $2k - 3$ відстаней, тому за припущенням індукції матрицю відстаней можна відновити, а потім додати до неї точку A_1 . Теорема доведена.

2. Відновлення матриці відстаней між об'єктами на прямій.

Розглянемо одновимірний випадок: об'єкти знаходяться на прямій тобто визначаються однією координатою. Будемо вважати, що $A_i(x_i)$, $x_1 = 0$, $x_j > x_i$ для $j > i$. Тобто об'єкти на прямій знаходяться в порядку зростання їх номерів та початок відріку координатної прямої співпадає з точкою A_1 .

Зрозуміло, що для того щоб відновити матрицю відстаней потрібно знайти $n - 1$ невідоме: x_2, x_3, \dots, x_n , а для цього потрібно $n - 1$ лінійно незалежних рівнянь.

Зауважимо, що розв'язувати задачу про відновлення матриці відстаней порядку $n \geq 10000$ методами лінійної алгебри є досить обчислювально складною задачею. Тому в статті створено алгоритм відновлення таких матриць відстаней.

Розв'яжемо задачу про відновлення відстаней D , та знайдемо критерій коли це можливо зробити.

Для цього ми за відомими відстанями побудуємо неорієнтований граф $G(D) = (V(G), E(G))$, де $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma_{ij} \in E(G) \Leftrightarrow d_{ij} \in D$

Тобто граф побудований за матрицею відстаней складається з n вершин, дві вершини « i » та « j » з'єднані ребром, якщо відома відстань d_{ij} , та дві вершини « i » та « j » не з'єднані ребром, якщо не відома відстань d_{ij} .

Теорема 2. Матрицю відстаней D можна відновити тоді і тільки тоді, коли граф $G(D)$ є зв'язним.

Доведення. Нехай граф $G(D)$ є зв'язним. Доведемо, що можливо відновити всі відстані матриці D . Для цього достатньо знайти координати x_i . Поділимо вершини графа G на декілька рівнів. Вершину «1» будемо вважати вершиною нульового рівня. Вершини суміжні з вершиною «1» — це вершини першого рівня. Якщо $A_i(x_i)$ — це точка, яка відповідає вершині першого рівня, то $x_i = d_{1i}$. До вершин другого рівня віднесемо вершини відстань від яких до вершини «1» в графі G дорівнює два. Тобто вершини другого рівня не є суміжними з вершиною «1», та є суміжними хоча б з однією вершиною першого рівня. Нехай вершині « i » першого рівня відповідає точка $A_i(x_i)$, вершині « j » другого рівня відповідає точка $A_j(x_j)$, та вершина « i » суміжна з вершиною « j ». Тоді координати x_j можна знайти за формулою:

$$x_j = \begin{cases} x_i + d_{ij}, & \text{якщо } j > i, \\ x_i - d_{ij}, & \text{якщо } j < i. \end{cases}$$

Продовжуючи алгоритм, знаючи координати точок, що відповідають вершинам другого рівня, однозначно визначаємо координати для третього рівня і так далі. Оскільки граф G зв'язний, то рівень кожної вершини є скінченим. Отже, для зв'язного графа G , можна знайти всі координати точок, тобто повністю відновити матрицю відстаней D .

Нехай граф $G(D)$ не є зв'язним. Доведемо, що неможливо відновити всі відстані матриці D . Розіб'ємо не зв'язний граф на компоненти зв'язності. Серед відстаней, які відомі немає жодної відстані між об'єктами з різних компонент. Нехай вершина «1» належить першій компоненті зв'язності. Збільшимо всі координати об'єктів з другої компоненти зв'язності на число t . При цьому відстані, які вже відомі не зміняться. Отже, число t може бути довільним, тому координати об'єктів з другої компоненти зв'язності та відстані між об'єктами з першої та другої компоненти зв'язності визначити неможливо. Отже, в цьому випадку матрицю D відновити неможливо.

Висновки. Матриці відстаней застосовуються в геометричному моделюванні. Важливою є задача відновлення матриць відстаней. В роботі доведено, що для відновлення матриці відстаней D між об'єктами на прямій необхідно та досить щоб граф $G(D)$ був зв'язним. Для відновлення матриці евклідових відстаней між об'єктами на площині, необхідно та досить знати $2n - 3$ незалежних відстаней. Знайдено застосування матриць відстаней в криптографії для передачі ключа шифру по відкритому каналу зв'язку, та розглянуто застосування в математиці при розв'язуванні задач, пов'язаних з цикломатичним числом площини.

Список використаних джерел:

1. Patwari N., Ash J. N., Kyperountas S., Hero A. O., Moses R. L., Correal N. S. Locating the Nodes: Cooperative Localization in Wireless Sensor Networks. *N IEEE Signal Process. Mag.* 2005. Vol. 22. № 4. P. 54-69.
2. Alfakih A., Khandani A., Wolkowicz H. Solving Euclidean Distance Matrix Completion Problems via Semidefinite Programming. *Comput. Optim. Appl.* 1999. Vol. 12. № 1-3. P. 13-30.
3. Doherty L., Pister K., El Ghaoui L. Convex Position Estimation in Wireless Sensor Networks. *Proc. IEEE INFOCOM.* 2001. Vol. 3. P. 1655-1663.
4. Dokmanic I., Parhizkar R., Ranieri J., Vetterli M. Euclidean Distance Matrices: Essential Theory, Algorithms and Application. *IEEE Signal Process. Mag.* 2015. Vol. 32. № 6. P. 12-30.

RECONSTRUCTION OF DISTANCE MATRIXES AND THEIR APPLICATION

Distance matrix are used in geometric modeling and in the restoration of geometric objects, economics, bioinformatics, and programming. Distance matrices are used in machine learning, for example, programs related to road traffic, bus routes, and geolocation. In particular, Yandex has created a service in which distance matrices predict road congestion at the right time in the future. In this way, motorists can prevent traffic jams. Distance matrices can also be used to create any statistics. In bioinformatics, distance matrices are used to represent protein structures in a coordinate-independent manner, or to reconstruct distances in the DNA chain. Distance Matrix API is a service that provides distance and time for the exit and destination matrix. The API returns information based on the suggested route between the start and end points calculated by the Google Maps API and consists of paths that include duration and distance values for each pair.

In [4] authors reviews the fundamental properties of EDMs, such as rank or (non)definiteness. Authors shows how various EDM properties can be used to design algorithms for completing and denoising distance data. Along the way, authors demonstrates applications to microphone position calibration, ultrasound tomography.

The paper finds a criterion for the possibility of restoring the matrix of Euclidean distances on a line and between the vertices of a convex n -gon on a plane. An algorithm for transferring a key to a cipher using Euclidean distance matrices on a plane has been developed. A fast algorithm for reconstructing the distance matrixes between objects on a straight line has been developed.

Key words: *distance matrix, Euclidean distance matrix, graph, connected graph, graph of distance matrix, reconstruction of distance matrix.*

Отримано: 19.10.2021

УДК 621.3.011.7

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.81-89

К. М. Ключка*, канд. техн. наук,

Л. О. Митько**, канд. фіз.-мат. наук

* Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси,

** Інститут проблем моделювання в енергетиці

імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

ПРОЦЕДУРА ЛОКАЛІЗАЦІЇ НЕСПРАВНОГО ЕЛЕМЕНТА В ЛІНІЙНОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ З ПАСИВНИМИ ДВОХПОЛЮСНИКАМИ

Станом на теперішній час, аналіз технічного стану електричних схем передбачає використання широких можливостей обчислювальної техніки. Важливою умовою при цьому є здатність діагностувальної системи здійснювати процес діагностування в режимі реального часу.

До окремого класу об'єктів діагностування можна віднести пасивні ланцюги, що складаються тільки з елементів з резистивною провідністю та не містять власних джерел енергії. Для подібних ланцюгів створені методи діагностування, які полягають у визначенні параметрів всіх елементів ланцюга і потребують доступу до всіх вузлів схеми, що перевіряється. При цьому процедура діагностування стає досить трудомісткою, оскільки визначаються параметри усіх без винятку елементів ланцюга.

Значно зменшити кількість обчислювальних операцій при проведенні діагностування, дозволяє алгоритм заснований на застосуванні методу навчальних та перевірочних характеристик. Вказаний метод, будучи заснованим на методі підсхем, був спочатку створений для діагностування неперервних систем автоматичного регулювання, а потім був поширений і на самі електричні кола. В якості підсхем, в схемах електричних кіл виділяються підсхеми, для яких перевіряються гіпотези. Сутність застосування методу полягає в тому, що на підставі значень навчальних характеристик, відповідно до гіпотези за формулою Фостера, визначаються значення параметрів несправних елементів. Потім, маючи значення параметрів всіх елементів ланцюга, визначається оцінка значень навчальних характеристик, при збігу яких із вимірними значеннями — гіпотеза приймається, інакше — гіпотеза відкидається.

В представленій статті, на конкретному прикладі показано, що застосування методу навчальних та перевірочних характеристик дозволяє суттєво знизити трудомісткість процедури діагностування як на етапі проведення вимірювань, так і на етапі обчислень.

Результати обчислювальних експериментів підтверджують ефективність застосування методу навчальних та перевірочних

характеристик, що в підсумку дає можливість більш ефективного використання засобів обчислювальної техніки.

Ключові слова: *лінійне електричне коло, об'єкт діагностування, пасивний двохполюсник, навчальні і перевірочні характеристики.*

Вступ. Дослідження процесів в електричних колах, зокрема проведення в них діагностичних процедур, є одним із досить важливих розділів електротехніки.

Знання дійсного технічного стану об'єкта перевірки є обов'язковим, як для його поточного функціонування, так і для подальшого прогнозу функціонування, тому розвиток методів технічного діагностування електротехнічних пристроїв є актуальним завданням в галузі теоретичної електротехніки.

В теперішній час аналіз технічного стану електричних кіл передбачає використання широких можливостей обчислювальної техніки. Тому, особливого значення набуває математичний опис об'єкту діагностики, вибір та побудова його вдалої математичної моделі, яка з найбільшою повнотою відображує реальні процеси чи явища, що протікають в компонентах електричних ланцюгів.

Сучасні види та методи діагностувальних процедур в електричних колах повинні враховувати зростаючу складність та все більш жорсткі вимоги до отримуваних результатів. Пошук оптимальних видів та ефективних методів діагностики, привів до створення цілого ряду методів, які отримали загальне визнання [1, 2].

Виклад основного матеріалу. До окремого класу об'єктів діагностування можна віднести пасивні ланцюги, що складаються тільки з резисторів і не містять власних джерел енергії. Для таких ланцюгів існують методи діагностування, які полягають у визначенні параметрів всіх елементів ланцюга і потребують доступу до всіх вузлів схеми, що перевіряється [3-5]. Оскільки власних джерел енергії пасивні ланцюги не містять, то виникає необхідність використання зовнішніх джерел ЕРС або струму. При цьому, для того, щоб уникнути вимірювань струмів у вітках схеми, необхідна кількість рівнянь набирається шляхом підключення зовнішніх джерел до різних вузлів ланцюга та вимірювання струмів, що споживаються від них та напруги у вузлах.

В [4, 6] наведено метод вузлових опорів, заснований на експериментальному визначенні матриці $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$, де \mathbf{Y} — матриця вузлових провідностей ланцюга. Якщо ланцюг, що описується методом вузлових опорів

$$\mathbf{Y} \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (1)$$

збуджується системою ортогональних векторів струмів $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$

виду $\mathbf{I}_k = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^T$, то k -й рядок дорівнює 1.

Можна скласти систему рівнянь виду

$$\mathbf{Y}[\mathbf{V}_1 \dot{\vdots} \mathbf{V}_2 \dot{\vdots} \dots \dot{\vdots} \mathbf{V}_n] = \mathbf{E}. \quad (2)$$

З (2) можна отримати

$$\mathbf{Y}[\mathbf{V}_1 \dot{\vdots} \mathbf{V}_2 \dot{\vdots} \dots \dot{\vdots} \mathbf{V}_n]^{-1}$$

звідки визначається матриця \mathbf{Y} , а з неї значення параметрів всіх елементів.

Обсяг обчислень можна зменшити, якщо врахувати, що ланцюг — взаємний та матриця \mathbf{Y} для неї симетрична. Якщо використувати одночасно кілька джерел енергії, можна ще більше скоротити обсяг роботи, використовуючи методи узагальнених вузлових опорів і вузлових провідностей [6].

В [3] наведено метод визначення параметрів всіх елементів пасивного ланцюга з використанням формули Фостера.

Позначимо: $\mathbf{Y} = [y_1 \dots y_0]^T$ — вектор провідностей віток ланцюга, $\mathbf{Z} = [Z_1 \dots Z_0]^T$ — вектор опорів, виміряних на кінцях кожної вітки. Тоді співвідношення

$$(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = n - 1, \quad (3)$$

де n — число вузлів ланцюга, називається формулою Фостера [7].

Необхідне число рівнянь для визначення вектора \mathbf{Z} [3] отримується шляхом підключення паралельно віткам ланцюга елементів з відомими параметрами. Якщо при i -тому варіанті підключення елемент з провідністю Y_{im}^0 буде підключений паралельно до m -ї вітки, то (3) набуде вигляду

$$\sum_{m=1}^p (Y_m + Y_{im}^0) \cdot Z_{im} = n - 1, \quad (4)$$

або

$$\sum_{m=1}^p Y_m Z_{im} = n - 1 - \sum_{m=1}^r Y_{im}^0 Z_{im},$$

де Z_{im} — опір, що виміряний на кінцях m -ї вітки при i -му варіанті підключення.

Якщо кількість варіантів підключення дорівнює p , то отримаємо систему рівнянь

$$\begin{bmatrix} Z_1^T \\ \vdots \\ Z_i^T \\ \vdots \\ Z_p^T \end{bmatrix} \mathbf{Y} = \mathbf{D}, \quad (5)$$

де $Z_i = [Z_{i1} Z_{i2} \dots Z_{ip}]^T$ — вектор опорів, що виміряні на кінцях віток, при i -му варіанті підключення зовнішніх елементів, $Y = [Y_1 Y_2 \dots Y_p]^T$ — вектор провідностей віток. Вектор D визначається наступним чином:

$$D = [d_1 d_2 \dots d_i \dots d_p]^T,$$

$$d_i = n - 1 - (Z_i, Y_i^0),$$

где Y_{im}^0 — вектор значень провідностей зовнішніх елементів при i -му варіанті їх підключення.

З рівняння (5) можна отримати вектор Y параметрів всіх елементів.

На практиці, одночасно несправним може бути лише невелика кількість елементів, що визначається кратністю несправності. І тут немає необхідності визначати параметри всіх елементів, а можна скористатися методом навчальних і перевірочних характеристик (НПХ) [8], перевіряючи гіпотези про групи несправних елементів.

Для застосування методу НПХ необхідно вибрати навчальні та перевірочні характеристики. Як навчальні характеристики слід вибрати значення опорів, виміряних між кінцями всіх віток, а як перевірочні характеристики — значення опорів між парами будь-яких вузлів ланцюга, що не увійшли в множину навчальних характеристик. Сутність застосування методу НПХ полягає в тому, що на підставі значень навчальних характеристик, відповідно до гіпотези за формулою Фостера, визначаються значення параметрів несправних елементів. Потім, маючи значення параметрів всіх елементів ланцюга, визначається оцінка значень навчальних характеристик, при збігу яких із виміряними значеннями — гіпотеза приймається, інакше — гіпотеза відкидається.

Значення параметрів передбачуваних несправних елементів визначають за формулою

$$\hat{Y}_k = Y_k + Z_k^{-1} A, \quad (6)$$

де \hat{Y}_k — l -мірний вектор значень параметрів елементів, які вважаються несправними у відповідності з гіпотезою H_k , Y_k — l -мірний вектор номінальних значень параметрів елементів, що перевіряються в гіпотезі H_k ,

$$Z_k = \begin{bmatrix} Z_1, m_1 \dots Z_1, m_l \\ Z_2, m_1 \dots Z_2, m_l \\ \dots \\ Z_l, m_1 \dots Z_l, m_l \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = [a_{i_1} \ a_{i_2} \ \dots \ a_{i_l}]^T, \quad (8)$$

$$a_i = n - 1 - \left((Y + Y_i^0), Z_i \right).$$

З (7) випливає, що кількість варіантів підключення зовнішніх елементів з відомими параметрами повинна бути не менше ніж кратність несправності l .

Для кожної гіпотези H_k з (6) визначається оцінка значень параметрів елементів \hat{Y}_k , включених до цієї гіпотези. Інші елементи вважаються справними, та їх параметрам присвоюються номінальні значення. Порівнюючи вимірне та розраховане значення навчальних характеристик, приймаються або відкидаються висунуті гіпотези.

Застосування методу НПХ дозволяє знизити трудомісткість діагностування як на етапі проведення вимірювань, так і на етапі обчислень.

При проведенні вимірювань з використанням методу НПХ, опору вимірюється для всіх віток і кожного варіанта підключення зовнішніх елементів, а число цих підключень дорівнює кратності несправності. При визначенні параметрів всіх елементів число підключень, а значить і вимірювань опорів для кожної вітки, дорівнює кількості віток схеми. Отже, при застосуванні методу НПХ знижується кількість вимірювань, що проводяться.

Після проведення вимірювань метод НПХ вимагає обчислення вектора \mathbf{A} , який розраховується один раз перед початком перевірки всіх гіпотез. Потім, залежно від методу діагностування, здійснюється розв'язання однієї системи рівнянь (5) для визначення параметрів всіх елементів або розв'язання декількох систем рівнянь (6) для перевірки гіпотез.

Порівняємо трудомісткості цього етапу за кількістю необхідних операцій множення. Розв'язання систем лінійних рівнянь (5) і (6) методом Гаусса з LU — розкладанням вимагає $n_{\text{множ}}$ операцій множення

$$n_{\text{множ}} = \frac{1}{6} (2n^3 - 3n^2 + n),$$

де n — кількість рівнянь у системі. Для великих схем [9] отримаємо

$$n_{\text{множ}} \approx \frac{n^3}{3}.$$

Враховуючи, що кількість віток дорівнює p , для системи (5) отримаємо

$$n'_{\text{множ}} \approx \frac{p^3}{3}.$$

Кількість систем рівнянь (6) дорівнює загальній кількості гіпотез про різні l -кратні несправності C_p^l . Таким чином отримаємо

$$n''_{\text{множ}} = C_p^l \cdot \frac{1}{6} (2l^3 - 3l^2 + l).$$

Наприклад, для електричного кола, що містить 100 віток, при перевірці гіпотез про дворазові несправності можна отримати:

$$n'_{\text{ум}} \approx \frac{(100)^3}{3} \approx 333 \cdot 10^3,$$

$$n''_{\text{ум}} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 6} (2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2) \approx 5 \cdot 10^3,$$

звідки слідує, що застосування методу НПХ значно знижує трудомісткість обчислень при малих кратностях несправності порівняно з випадком визначення значень параметрів всіх елементів.

Приклад. Розглянемо пасивний електричний ланцюг, наведений на рис. 1, елементи якого мають такі параметри

$$Y_1 = 1 \text{ См},$$

$$Y_2 = 0,5 \text{ См},$$

$$Y_3 = 0,333 \text{ См},$$

$$Y_4 = 0,2 \text{ См},$$

$$Y_5 = 0,2 \text{ См},$$

тобто $Y = (1 \ 0,5 \ 0,33 \ 0,25 \ 0,2)^T$.

Нехай у цьому ланцюзі можлива дворазова несправність, і в результаті несправності змінилися значення Y_2 і Y_5 таким чином, що вони набрали значення відповідно:

$$Y_2^f = 0,333, \quad Y_5^f = 0,25.$$

Як навчальні характеристики можна вибрати значення опорів, виміряні між кінцями всіх віток, а в якості перевірконої характеристики — величину опору, виміряного між вузлами 1 і 3 тобто $Z_{\text{пр}} = 1,412 \text{ Ом}$.

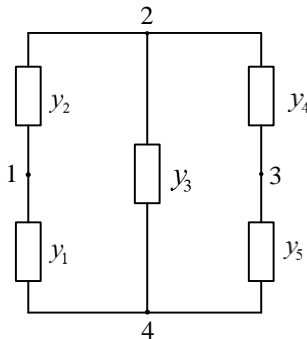


Рис 1. Пасивний електричний ланцюг

Оскільки кратність несправності дорівнює 2, то два зовнішні елементи з провідностями 0 і 1 по черзі підключаються паралельно Y_4

$$Y_1^0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T,$$

$$Y_2^0 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T.$$

Вимірюються опори між кінцями всіх віток схеми, що перевіряється, для обох варіантів підключення зовнішніх елементів

$$Z_{11} = 0,838 \text{ Ом}, \quad Z_{13} = 1,416 \text{ Ом},$$

$$Z_{12} = 1,545 \text{ Ом}, \quad Z_{14} = 2,353 \text{ Ом},$$

$$Z_{15} = 2,353 \text{ Ом},$$

$$Z_{21} = 0,829 \text{ Ом}, \quad Z_{23} = 1,264 \text{ Ом},$$

$$Z_{22} = 1,462 \text{ Ом}, \quad Z_{24} = 0,702 \text{ Ом},$$

$$Z_{25} = 1,544 \text{ Ом},$$

Таблиця 1

Результати розрахунків

№№ гіпотези	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Підозрілі вітки i, j	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	2, 3	2, 4	2, 5	3, 4	3, 5	4, 5
$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_i \\ \hat{Y}_j \end{bmatrix}$	0,071 0,911	0,487 0,533	0,785 0,267	0,731 0,235	0,016 0,759	0,375 0,272	0,333 0,249	0,184 0,280	0,556 0,125	0,339 0,051
$\hat{Z}_{np} = \begin{vmatrix} Z_{np} - \hat{Z}_{np} \end{vmatrix}$	1,961 0,549	1,123 0,289	1,329 0,083	1,331 0,081	1,129 0,283	1,386 0,027	1,412 0	1,577 0,165	1,028 0,384	1,408 0,004

Розраховуються значення елементів вектора A за виразом (8)

$$A = (-0,142 \ -0,168)^T.$$

Далі висувають гіпотези про несправності різних пар віток (всього розглядається $C_5^2 = 10$ гіпотез). Для кожної гіпотези розв'язується система рівнянь (6) і, в результаті, визначається вектор \hat{Y} . Результати розрахунків наведено у таблиці 1.

Як міру близькості перевірюваних характеристик можна вибрати величину $\begin{vmatrix} Z_{np} - \hat{Z}_{np} \end{vmatrix}$. Виходячи з даних таблиці 1, приймається гіпотеза 7 про несправність елементів 2 і 5, які мають значення відповід-

но 0,333 См і 0,249 См, що узгоджується з вихідними даними. Якщо враховувати обмежену точність вимірів і помилку обчислення, то гіпотези 7 і 10 маловідмінні. У цьому випадку слід прийняти обидві ці гіпотези, а фактично несправні елементи визначити шляхом розриву ланцюга та вимірювання його параметрів.

Висновок. З розглянутого в представленій роботі прикладу слідує, що застосування методу НПХ дає змогу значно знизити трудомісткість обчислень при малих кратностях несправності, порівняно з випадком визначення значень параметрів всіх елементів. Зокрема, для розглянутого прикладу, кількість необхідних операцій множення, завдяки застосуванню методу НПХ, вдалося зменшити більш ніж в 60 разів, що може свідчити про високу ефективність методу НПХ.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф., Добра И. Д., Игначенко А. А. Комплексная автоматизация процессов диагностирования объектов энергетики. *Тез. докл. Всесоюзн. науч.-техн. конф. «Математическое моделирование в энергетике»*. Киев: ИПМЭ АНУ, 1990. Ч. 1. С. 173-174.
2. Бондаренко В. М., Редковец С. Н., Кашпировский А. И. Методы, алгоритмы и программы диагностики электрических цепей. Киев, 1985. 53 с. (Препринт/АН УССР, Ин-т электродинамики; № 428).
3. Roytman L. M., Swamy M. N. S. Diagnosis of passive networks. *IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*. 1981. P. 291-292.
4. Roytman L. M., Swamy M. N. S. Some properties of orthonormal excitations of the circuit and the calculation of the circuit elements. *IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*. 1981. P. 289-291.
5. Tucker R. E., McNamee L. P. Coomputer aided design application to fault detection and isolation techniques. *IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*. P. 684-687.
6. Лозинський О. Ю., Марущак Я. Ю., Костробій П. П. Розрахунок надійності електроприводів. Львів: ДУ «Львівська політехніка», 1999. 234 с.
7. Foster R. An extension of a network theorem. *IRE Trans., CT-8*. 1961. P. 76-77.
8. Верлань А. А., Положаєнко С. А., Осман И. Х. Локалізація несправних електронних підсхем методом навчаючих і провєрочних характеристик. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. праць*. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка, 2008. Вип. 1. С. 140-144.
9. Чуа Л. О., Лин П.-М. Машинный анализ электронных схем: алгоритмы и вычислительные методы. Москва: Энергия, 1980. 640 с.

DETECTION PROCESS OF A FAULTY ELEMENT IN A LINEAR PASSIVE TWO-PORT NETWORK

Currently the analysis of a technical condition of electrical circuits involves the use of extensive capabilities of computer technology. An im-

portant condition is the ability of the diagnostic system to execute a real-time diagnostic process.

A specific class of diagnostic objects includes passive circuits built only of elements with resistive conductivity and do not contain their own energy sources. Diagnostic methods have been developed for such circuits; those methods are based on determining the parameters of all elements of the circuit and require access to all nodes of the circuit under test. In this case, the diagnostic procedure becomes quite time consuming, because the parameters of all elements of the circuit without exception are to be determined.

Alternatively, the algorithm based on the application of the training and verification characteristics method allows to significantly reduce the number of computational operations during the diagnosis. This method, being based on the method of subcircuits, was first developed to diagnose continuous automatic control systems, and then was extended to the circuits themselves. The mentioned subcircuits are allocated in electrical schemes subcircuits for which hypotheses are tested. The essence of the method is that based on the values of the training characteristics, according to the hypothesis by the Foster formula, the values of the parameters of faulty elements are determined. Then, having the values of the parameters of all elements of the circuit, the assessment of the values of training characteristics is executed; if the mentioned values match measured ones the hypothesis is accepted, otherwise the hypothesis is rejected.

In the article has been described, based on a specific example, that the application of the training and verification characteristics method allows to considerably reduce the complexity of diagnosing procedure both at a stage of executing measurements, and at a stage of calculations.

The results of computational experiments have shown the effectiveness of the training and verification characteristics method; which ultimately allows for more efficient use of computer technology.

Key words: *linear electric circuit, diagnostic object, passive two-port network, training and verification characteristics.*

Отримано: 11.10.2021

UDC 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.90-96

O. I. Radziyevska*, PhD,**I. B. Kovalska**** , PhD

*National University of Food Technology, Kyiv,

**Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University,
Kamianets-Podilskyi

ESTIMATION OF THE BEST APPROXIMATIONS FOR THE GENERALIZED DERIVATIVE IN BANACH SPACES

The main task of the theory of approximation is to establish the properties of the approximation characteristics of this function on the basis of its investigated properties. Functions with the same properties are grouped into classes, and then the facts established for a particular class apply to each of its representatives. This makes it possible to formulate new problems, in particular mathematical modeling problems for whole classes of functions that describe the studied processes.

If the statements allow on the basis of information about the generalized derivative of the element f to draw a conclusion about the rate of approach to zero of the sequence of the best approximations of this element by polynomials of degree n , then in the theory of approximations they are called direct theorems.

In the given article the inverse theorem is considered — per properties of sequence of the best approximations we draw a conclusion about properties of an element f of some Banach space B and its generalized derivatives. That is, according to a given sequence of the best approximations of the vector f by polynomials of degree n establish its differential characteristics.

The first inverse theorems were considered at the beginning of the last century by S. N. Bernstein. The main point of their proof is the inequalities between the norms of polynomials and their derivatives. Such inequalities are called Bernstein inequalities. As a partial case, they can be obtained from the theorem considered in the article.

Key words: *the best approximations, generalized derivatives, inverse theorems, Bernstein inequalities, differential characteristics, Banach space.*

Introduction. The main task of the theory of approximation is to establish the properties of the approximation characteristics of this function on the basis of its investigated properties. Functions with the same properties are grouped into classes, and then the facts established for a particular class apply to each of its representatives. This makes it possible to formu-

late new problems, in particular mathematical modeling problems for whole classes of functions that describe the studied processes.

Consider the problem of the properties of the best approximations for a generalized derivative in Banach spaces.

Problem statement. Suppose that in Banach space B a complete minimal system $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ is given, and $\{\varphi_{m=1}^*\}_{m=1}^{\infty}$ is its conjugate system belonging to B^* , $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ — a sequence of complex numbers.

Definition. If for the element $f \in B$ the sum of the series $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f, \varphi_m^*) \varphi_m$ is some element $g \in B$, then the vector g is called the derivative of the vector f and is denoted by $\partial_{\varphi}^{\lambda}$, namely

$$\partial_{\varphi}^{\lambda} f = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f, \varphi_m^*) \varphi_m. \quad (1)$$

The subset of all vectors $f \in B$ having $\partial_{\varphi}^{\lambda}$ — derivatives will be denoted by $V(\partial_{\varphi}^{\lambda})$.

Vector

$$T_n(\varphi) = \sum_{m=1}^n c_m \varphi_m, \quad (2)$$

where c_m are arbitrary complex numbers, let's call a polynomial of degree n according to the system $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$. Note that due to the minimality of the system $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, the coefficients c_m in (2) are uniquely determined by the vector $T_n(\varphi)$ and $c_l = (T_n(\varphi), \varphi_l^*)$.

We enter values

$$E_n(f, \varphi_m) = \inf_{T_n(\varphi)} \|f - T_n(\varphi)\|, n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

which are called the best approximations of the vector f by polynomials of degree n over the system $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$. We will consider $E_0(f) = \|f\|$.

It is obvious that $E_n(f) \geq E_{n+1}(f)$, $n = 0, 1, \dots$ and due to the completeness of the system $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ is a valid statement $E_n(f) \rightarrow 0$ if $n \rightarrow \infty$, ie $E_n(f) \downarrow 0, n \rightarrow \infty$.

If the statements allow on the basis of information about the generalized ∂_φ^λ -derivative of the element f to draw a conclusion about the rate of approach to zero of the sequence of the best approximations of this element by polynomials of degree n , then in the theory of approximations they are called direct theorems.

In the given article the inverse theorem is considered — per properties of sequence of the best approximations $E_n(f)$ we draw a conclusion about properties of an element $f \in B$ and its generalized ∂_φ^λ -derivatives. That is, according to a given sequence $E_n(f)$ of the best approximations of the vector f by polynomials of degree n according to the system $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, establish its differential characteristics.

The first inverse theorems were considered at the beginning of the last century by S. N. Bernstein [2]. The main point of their proof is the inequalities between the norms of polynomials and their derivatives. Such inequalities are called Bernstein inequalities. As a partial case, they can be obtained from the theorem considered in the article.

Due to the linear independence of vectors φ_m , steels exist

$$\mu_n(\partial_\varphi^\lambda) = \sup_{\|T_n(\varphi_n)\|=1} \left\| \partial_\varphi^\lambda T_n(\varphi_n) \right\|, n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

which we will call the Szego constants for the ∂_φ^λ -derivative (see [1, 3, 7]).

Obviously $\mu_{n+1}(\partial_\varphi^\lambda) \geq \mu_n(\partial_\varphi^\lambda) > 0$.

In the accepted designations the following statement takes place.

Theorem. Suppose that for some increasing sequence of natural numbers $\{n_l\}_{l=1}^\infty$ the series

$$\sum_{l=1}^\infty \mu_{n_{l+1}}(\partial_\varphi^\lambda) E_{n_l}(f, \varphi) \quad (5)$$

convergensts. Then $f \in V(\partial_\varphi^\lambda)$ and

$$E_{n_j}(\partial_\varphi^\lambda f, \varphi) \leq 2 \sum_{l=j}^\infty \mu_{n_{l+1}}(\partial_\varphi^\lambda) E_{n_l}(f, \varphi). \quad (6)$$

Proof. For an arbitrary $\varepsilon > 0$ we choose the polynomials $T_n(\varphi)$ for which

$$\|f - T_n(\varphi)\| \leq (1 + \varepsilon_n) E_n(f, \varphi) \quad (7)$$

and we show that the sequence $\partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_j}(\varphi)$ is fundamental.

Let $s > j$, then

$$\partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_s}(\varphi) - \partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_j}(\varphi) = \sum_{l=j}^{s-1} \partial_{\varphi}^{\lambda} (T_{n_{l+1}}(\varphi) - T_{n_l}(\varphi)), \quad (8)$$

where $T_{n_{l+1}}(\varphi) - T_{n_l}(\varphi)$ is a polynomial of degree n according to the system $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$. Then from (4) and (7) it follows that:

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{\varphi}^{\lambda} (T_{n_{l+1}}(\varphi) - T_{n_l}(\varphi)) \right\| &\leq \mu_{n_{l+1}}(\partial_{\varphi}^{\lambda}) \cdot \left\| T_{n_{l+1}}(\varphi) - T_{n_l}(\varphi) \right\| \leq \\ &\leq \mu_{n_{l+1}}(\partial_{\varphi}^{\lambda}) \cdot \left(\left\| f - T_{n_{l+1}}(\varphi) \right\| + \left\| f - T_{n_l}(\varphi) \right\| \right) \leq \\ &\leq \mu_{n_{l+1}}(\partial_{\varphi}^{\lambda}) (1 + \varepsilon) (E_{n_{l+1}}(f, \varphi) + E_{n_l}(f, \varphi)) \leq \\ &\leq 2\mu_{n_{l+1}}(\partial_{\varphi}^{\lambda}) (1 + \varepsilon) E_{n_l}(f, \varphi). \end{aligned}$$

Substituting the obtained inequality in (8), we have an estimate

$$\left\| \partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_s}(\varphi) - \partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_j}(\varphi) \right\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot 2 \sum_{l=j}^{s-1} \mu_{n_{l+1}}(\partial_{\varphi}^{\lambda}) E_{n_l}(f, \varphi). \quad (9)$$

Given the convergence of the series (5) and relation (9), we conclude that the sequence $\partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_j}(\varphi)$ is fundamental. Therefore, there is an element $g \in B$, for which $\left\| g - \partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_j}(\varphi) \right\| \rightarrow 0$, and which by definition is called a $\partial_{\varphi}^{\lambda}$ -derivative of the vector f .

Passaging to the limit in the inequality (9), when $s \rightarrow \infty$, we obtain:

$$\left\| \partial_{\varphi}^{\lambda} f - \partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_j}(\varphi) \right\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot 2 \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{n_{l+1}}(\partial_{\varphi}^{\lambda}) E_{n_l}(f, \varphi), \quad (10)$$

Since $\partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_j}(\varphi)$ is a polynomial of degree n_j according to the system $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, we have:

$$E_{n_j}(\partial_{\varphi}^{\lambda} f, \varphi) \leq \left\| \partial_{\varphi}^{\lambda} f - \partial_{\varphi}^{\lambda} T_{n_j}(\varphi) \right\| \leq 2 \cdot (1 + \varepsilon) \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{n_{l+1}}(\partial_{\varphi}^{\lambda}) E_{n_l}(f, \varphi).$$

Taking into account the arbitrariness of ε , we obtain the estimate (6).

Theorem proved.

If

$$B = L_p, \quad L_p = L_p[0; 2\pi], \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

$$\varphi_m(x) = e^{imx}, \quad m \in Z, \quad \lambda_m = e^{i\frac{\pi}{2}\beta \text{sign}m} \psi^{-1}(|m|),$$

here $\psi(|m|)$ — a sequence of nonnegative numbers, β is some real number, then the series (1) coincides with the Fourier series of the $(\psi; \beta)$ -derivative of the function f , introduced by Stepanets [4]. In this case, the set $V(\partial_\varphi^\lambda)$ becomes a class of functions L_β^ψ , and the vector $T_n(\varphi)$ (2) becomes a trigonometric polynomial

$$T_n(x) = \sum_{m=-n}^n c_m e^{imx}.$$

$E_n(f, \varphi_m)$ for this case will be the best approximation of the function f by trigonometric polynomials:

$$E_n(f) = \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_{n-1}(\cdot)\|_p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

here \mathcal{T}_{2n-1} — the set of trigonometric polynomials of degree not greater than $n-1$. From condition (4) it follows that

$$\partial_\varphi^\lambda T_n(\varphi_m) \leq \sup_{T_n(\varphi_m)=1} \partial_\varphi^\lambda T_n(\varphi_m) = \mu_n (\partial_\varphi^\lambda) T_n(\varphi).$$

In the above notations $\partial_\varphi^\lambda T_n(\varphi_m)$ coincides with the polynomials $T_n(\cdot)_\beta^\psi$ and for $\mu = O(1)\psi^{-1}(n)$, where $O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n , we have the inequality:

$$\|T_n(n)_\beta^\psi\|_p \leq O(1)\psi^{-1}(n)T_n(\cdot)_p \tag{11}$$

If inequality (11) holds for an arbitrary trigonometric polynomial $T_n(\cdot)$ of degree n , then we say, that the pair $(\psi; \beta)$ belongs to the set B_p ([5, p. 115]) If the space L_p is replaced by C , $\psi(k) = k^{-1}, k = 1, 2, \dots$, and $\beta = 1$, then relation (11) becomes a known inequality of S. N. Bernstein (in it the value of $O(1)$ can be replaced by 1).

And if the pair $(\psi; \beta)$ belongs to the set B_p , we can conclude that from the theorem, proved above, the statement 1) of Theorem 9.1 ([5, p. 120]) follows. This is the so-called inverse theorem, which establishes the differential characteristics of the function f with C or $L_p, 1 \leq p < \infty$ for a given sequence of best approximations of this function. Also from the theorem follows the corollary proved as a separate statement in [6].

Corollary. Let f belong to $L_p[0; 2\pi]$, $1 \leq p < \infty$ and $E_n(f)_p$ be the best approximation by trigonometric polynomials of degree not greater than $n-1$. Then, if the pair $(\psi; \beta) \in B_p$ and the series $\sum_{m=1}^{\infty} E_m(f)_p (\psi(m))^{-1}$ convergents, then in the function f there exists a $(\psi; \beta)$ -derivative f_β^ψ , belonging to L_p and for which there is an inequality

$$E_n(f_\beta^\psi)_p \leq K \sum_{m=n}^{\infty} E_m(f)_p (\psi(m))^{-1}, \quad n \in N,$$

here K is a value that may depend on $\psi(\cdot)$.

Conclusions. In the given article the inverse theorem is proved — per properties of sequence of the best approximations $E_n(f)$ we concluded about properties of an element $f \in B$ and its generalized ∂_φ^λ -derivatives. That is, according to a given sequence $E_n(f)$ of the best approximations of the vector f by polynomials of degree n according to the system $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, established its difference — differential characteristics. For separate values of the considered parameters, some results for $(\psi; \beta)$ -differentiated (according to Stepanets) functions follow from the theorem, as well as the known Bernstein inequality follows.

References:

1. Arestov V. V. On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives. *Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR. Series of mat.* 1981. T. 45. S. 3-22.
2. Bernshtein S. N. On the best approximation of continuous functions by means of polynomials of a given degree. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1952. No. 1. P. 11-104.
3. Sigmund A. Trigonometric series. Moscow: Mir, 1965. Vol. 1, 2.
4. Stepanets A. I. Methods of Approximation Theory. Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2002. Part I. 427 p.
5. Stepanets A. I. Methods of Approximation Theory Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2002. Part II. 468 s.
6. Stepanets A. I., Zhukina E. I. Inverse theorems of approximation of $(\psi; \beta)$ -differentiable functions. *Ukr. mat. zhurn.* 1989. Issue 41. № 86. S. 1106-1112.
7. Szego G. Uber einen satz des Herrn Serge Bernstein. *Schrift. Konigsberg. Gelehrten Gesellschaft.* 1928. Vol. 5. № 4. P. 59-70.

ОЦІНКА НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ПОХІДНОЇ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Основна задача теорії наближень полягає в тому, щоб, ґрунтуючись на досліджуваних властивостях даної функції, встановити властивості її апроксимаційних характеристик.

Функції з однаковими властивостями об'єднуються в класи, і тоді факти, встановлені для певного класу, відносяться і до кожного його представника. При цьому з'являється можливість формулювати нові задачі, зокрема, задачі математичного моделювання вже для цілих класів функцій, які описують досліджувані процеси.

Якщо твердження дають можливість зробити висновок про швидкість прямування до нуля послідовності найкращих наближень елемента f поліномами степеня n за інформацією про узагальнену похідну цього елемента, то їх в теорії наближень прийнято називати прямими теоремами.

У статті розглядається обернена теорема — за властивостями послідовності найкращих наближень робимо висновок про властивості самого елемента f деякого банахового простору B і його узагальнених похідних, тобто за заданою послідовністю найкращих наближень вектора f поліномами степеня n встановлюються його диференціально-різницьві характеристики.

Перші обернені теореми були розглянуті ще на початку минулого століття С. Н. Бернштейном. Основним моментом їх доведення є нерівності між нормами поліномів і їх похідних. Такі нерівності називаються нерівностями Бернштейна. Як частковий випадок, вони можуть бути отримані з теореми, розглянутої в статті.

Ключові слова: *найкращі наближення, узагальнені похідні, обернені теореми, нерівності Бернштейна, диференціальні характеристики, банахів простір.*

Отримано: 20.10.2021

УДК 517.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.97-109

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,

Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НОВІ АПРОКСИМАЦІЙНІ ЕФЕКТИ ЯДЕР ВЕЙЛЯ-НАДЯ

У рівномірній метриці задача отримання точних значень найкращих наближень на класах 2π -періодичних функцій, r -ті ($r \in \mathbb{N}$) похідні яких знаходяться в одиничній сфері простору суттєво обмежених функцій, була розв'язана в 1936 р. Ж. Фаваром [1]. Такі класи можна розглядати також як класи згорток, що породжені відомими в науковій літературі з теорії наближення ядрами Бернуллі. При розв'язанні задачі Ж. Фавар висунув гіпотезу, що аналогічну задачу при дробових значеннях параметра r теж можна реалізувати за запропованою схемою. В основі ідеї розв'язку задачі лежить теорема Ролля про співвідношення між числом нулів функції та числом нулів її похідної. В останній час до задач, для яких вірна теорема Ролля, підвищена увага математиків, і з її використанням вдалося знайти розв'язки багатьох задач теорії наближення. Над гіпотезою Ж. Фавара працювали багато видатних математиків: Н. І. Ахієзер, М. Г. Крейн, С. М. Нікольський, С. Б. Стечкін, Сунь Юншен та ін. Остаточні результати по розв'язанню задачі знаходження точних значень величин найкращих наближень на класах, що породжуються ядрами Вейля-Надя та які узагальнюють ядра Бернуллі, у метриках просторів неперервних і відповідно сумовних функцій, належать В. К. Дзядику [2].

Задачу сумісного наближення періодичних функцій та їх похідних в постановці, аналогічній до розглянутої в цій роботі, започатковано О. І. Степанцем. Знаходження точного значення величин найкращих наближень окремих, та найбільш важливих (за вдалою пропозицією О.І. Степанця [3]) лінійних комбінацій функцій із класів Вейля-Надя в рівномірній та інтегральній метриках детально досліджено у роботах авторів (див., зокрема, [4, 5]) з найкращого сумісного наближення функцій із класів, що задаються за допомогою згорток з фіксованими твірними ядрами. У випадку кількості доданків m лінійної комбінації рівною одиниці величини найкращого сумісного наближення та величини найкращих наближень співпадають. У статті, яка є логічним продовженням знаходження величин найкращого та найкращого сумісного наближення, досліджуються лінійні комбінації функцій класів Вейля-Надя у метриках просторів неперервних і відповідно сумовних функцій при значеннях параметрів

задачі, що доповнюють знайдені раніше. В ній знайдені умови на параметри задачі найкращого сумісного наближення, при яких ядра згортки задовольняють достатні умови Надея найкращого наближення в інтегральній метриці.

Ключові слова: класи Вейля-Надея, лінійні комбінації функцій та їх похідних, достатні умови найкращого наближення в інтегральній метриці Никольського та Надея.

Вступ. Усі відомі до цього часу точні значення величин найкращих наближень вигляду:

$$E_n(W_{\beta,\infty}^r)_C = \sup_{f \in W_{\beta,\infty}^r} \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C, \quad (1)$$

$$E_n(W_{\beta,1}^r)_L = \sup_{f \in W_{\beta,1}^r} \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_L, \quad (2)$$

а також величин найкращого сумісного наближення функцій із класів Вейля-Надея $W_{\beta,\infty}^r$ ($W_{\beta,1}^r$)

$$E_{n,m}(W_{\beta,\infty}^r)_C = \sup_{f \in W_{\beta,\infty}^r} \inf_{t_{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^m c_i^{(n)} f_{\beta_i}^{(r_i)} - t_{n-1} \right\|_C, \quad (3)$$

$$E_{n,m}(W_{\beta,1}^r)_L = \sup_{f \in W_{\beta,1}^r} \inf_{t_{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^m c_i^{(n)} f_{\beta_i}^{(r_i)} - t_{n-1} \right\|_L, \quad (4)$$

де $f_{\beta_i}^{(r_i)}(x) = f(x - (r_i, \beta_i))$ похідна функції $f(x) \in W_{\beta,\infty}^r(W_{\beta,1}^r)$, $i = \overline{1, m}$, були отримані для класів, породжених ядрами, що задовольняють умову Никольського A_n^* або навіть більш жорстку, ніж A_n^* , умову N_n^* (див., зокрема, [6, с. 949]). У даному повідомленні встановлено нові достатні умови, що забезпечують належність відповідних ядер згорток та їх лінійних комбінацій до множини N_n^* (а отже, і до A_n^*), на цій основі знайдено точні значення величин найкращих наближень на класах згортки із лінійними комбінаціями ядер Бернуллі. Поряд із цим, вказано значення параметрів, при яких умови N_n^* (A_n^*) не виконуються.

Постановка задачі. Клас $W_{\beta}^r \mathfrak{R}$, при довільних $r > 0$, $\beta \in R$ співпадає з множиною функцій $f(x)$, що записуються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\varphi \times B_{\beta}^r)(x), \text{ де } B_{\beta}^r(\cdot) \text{ — ядра Вейля-Надея вигляду}$$

$$B_{\beta}^r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}, \text{ а } \varphi \perp 1, \text{ та належать одиничним кулям дос-}$$

ліджуваних функціональних просторів. Задача Фавара зводиться до встановлення того факту, що ядро $B_\beta^r(\cdot)$ задовольняє умову A_n^* або навіть більш жорстку, ніж A_n^* , умову Надя N_n^* .

Означення 1. Говорять, що сумовна 2π -періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову A_n^* , $n \in \mathbb{N}$, ($K \in A_n^*$), якщо існують тригонометричний поліном $t_{n-1}^*(\cdot)$ степеня $n-1$ і довільне число $\lambda \leq \frac{\pi}{n}$ таке, що для функції $\varphi_*(t) = \text{sign}(K(t) - t_{n-1}^*(t))$ майже при всіх t виконується рівність $\varphi_*(t + \lambda) = -\varphi_*(t)$.

Означення 2. Говорять, що сумовна 2π -періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову N_n^* , $n \in \mathbb{N}$ ($K \in N_n^*$), якщо існують тригонометричний поліном $t_{n-1}^*(\cdot)$, степеня $n-1$ і точка $\xi = \xi_n \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ такі, що різниця $K(t) - t_{n-1}^*(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi]$ у точках $t_k = \xi + \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$, і тільки в них.

С. М. Нікольським [7, с. 228] було доведено, що включення ядра згортки $K \in A_n^*$ забезпечує виконання рівностей

$$E_n(W_\beta^r)_C = E_n(W_\beta^r)_L = \sup_{\substack{f \in W_{\beta, \infty}^r \\ f \perp t_{n-1}}} f_C = \sup_{\substack{f \in W_{\beta, 1}^r \\ f \perp t_{n-1}}} f_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L, \quad (5)$$

де $f \perp t_{n-1}$ означає, що $\int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin kt}{\cos kt} dt = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Цей факт, зокрема, дозволив відомі результати по найкращому наближенню на класах згорток у метриці простору C перенести на випадок, коли наближення розглядається у метриці простору L .

У запропонованій роботі досліджено апроксимативні властивості лінійної комбінації $F(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_{\beta_i}^{(r_i)}(t)$, де $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ m -

мірний числовий вектор, та обчислено точне значення її найкращих наближень у рівномірній та інтегральній метриках на класах Вейля-

Надя $W_{\beta, \infty}^r$ ($W_{\beta, 1}^r$), де $\alpha_i > 0$, $\beta - \beta_i = \frac{1}{2} + l_i$, $l_i \in Z$, тоді $K(t)$ — непарне ядро; або ж $\beta - \beta_i = l_i$, $l_i \in Z$, тоді $K(t)$ — парне.

У роботах В. К. Дзядика по розв'язуванню задачі знаходження точних значень величин (1) та (2) (див., зокрема [2]), у роботах авторів по відшукуванню відповідно величин (3) та (4) (див., напр. [4, 5]), встановлено, що довільний тригонометричний многочлен $t_{n-1}(t)$ степеня $n - 1$ може співпадати з ядром згортки $K(t)$ при відповідних значеннях параметрів задачі α_i , $r - r_i$, $\beta - \beta_i$ не більше ніж в $2n$ точках, враховуючи їх кратність, на періоді довжиною 2π . Будемо вважати далі, що тригонометричний многочлен $t_{n-1}(t)$, може співпадати з ядром $K(t)$ лінійної комбінації $F(t)$ не більше ніж в $2n + 2$ точках на періоді. Без втрати загальності можемо вважати також, що значення неперервної на $(0, 2\pi)$ функції $K(t)$ в точці 0_+ невід'ємне.

Розглянемо сукупність точок

$$\frac{\theta_n}{n}, \frac{\theta_n + \pi}{n}, \dots, \frac{\theta_n + (2n - 2)\pi}{n}, \quad (7)$$

де $\theta_n \in [0, 1]$ — корінь рівняння

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \left[(2\nu + 1)\theta_n \pi - \frac{\beta - \beta_i}{2} \pi \right]}{[(2\nu + 1)n]^{r - r_i}} = 0, \quad (8)$$

та позначимо через $\Delta_n(t) = \Delta_n(\bar{\alpha}, r - r_i, \beta - \beta_i) = K(t) - t_{n-1}(t)$.

Зауваження. У випадку, коли рівняння (8) коренів не має, приймаємо $\theta_n = 0$.

Приведемо один факт, що ґрунтується на твердженні М. Г. Крейна [7].

Лема 1. Нехай $K(t)$ — сумовна функція з періодом 2π , λ — довільне дійсне число, а $t_{n-1}(t)$ — тригонометричний многочлен степеня $n - 1$, що інтерполює $K(t)$ у точках вигляду (7).

Тоді для того, щоб функція $\Delta_n(t) = K(t) - t_{n-1}(t)$ перетворювалася в нуль і у точці $\left(\lambda + \left(\frac{2n - 1}{n} \right) \right) \pi$, необхідно і досить, виконання рівності

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu \Delta_n \left(\lambda \pi + \frac{\nu \pi}{n} \right) = 0.$$

Розглянемо суму $G(t) = \sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu \Delta_n \left(t + \frac{\nu \pi}{n} \right)$.

Використовуючи рівності

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu e^{ik \left(\frac{\nu \pi}{n} + t \right)} = \frac{e^{ik \frac{t}{n} (1 - e^{i2k\pi})}}{1 + e^{ik\pi/n}} = \begin{cases} 0, & k \neq (2j+1), j = 0, 1, 2, \dots, \\ 2ne^{i(2j+1)t}, & k = (2j+1)n, j = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

де k і n — довільні натуральні числа, одержимо

$$G(t) = 2n \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \left[(2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta - \beta_t}{2} \pi \right]}{\left[(2\nu+1)n \right]^{r-r_i}} - \sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu t_{n-1} \left(t + \frac{\nu \pi}{n} \right).$$

Із урахуванням рівності (8) та тотожності

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu t_{n-1} \left(t + \frac{\nu \pi}{n} \right) = 0 \text{ для довільного тригонометричного многоч-$$

лена $t_{n-1}(t)$ степеня $n-1$ із леми 1 при $\lambda = \frac{\theta_n}{n}$ маємо

$$K \left(\frac{\theta_n + (2n-1)\pi}{n} \right) = t_{n-1} \left(\frac{\theta_n + (2n-1)\pi}{n} \right).$$

Проілюструємо екстремальні властивості лінійних комбінацій ядер $K(t, \alpha)$ в (6) на прикладах.

Приклад 1.

$$K(t, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^3}, \alpha > 0. \tag{9}$$

Приклад 2.

$$K(t, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^4}, \alpha > 0. \tag{10}$$

Зауваження. Випадок $\alpha < 0$ міститься в роботі автора [4].

Використовуючи стандартні міркування, що базуються на теоремі Роля, аналогічно як це зроблено в монографії М. П. Корнейчука (див. [8, § 3,5]), легко встановити, що різниця $\Delta_n^*(t, \alpha) = K(t, \alpha) - t_{n-1}^*(t, \alpha)$ в (9) та (10) не може перетворюватися в нуль більше за $2n+1$ та $2n+2$ рази відповідно на проміжку довжиною 2π , враховуючи кратність нулів.

Побудуємо тригонометричні многочлени $t_{n-1}^*(t) = t_{n-1}^*(t, \alpha)$ що інтерполують ядра $K(t, \alpha)$ в (9), (10) в нулях функцій $y = \sin nt$ та $y = \cos nt$ відповідно.

У випадку (9) покладемо

$$t_{n-1}^*(t) = \sum_{k=1}^{n-1} K(\tau_k) \frac{\sin t (\cos t - \cos \tau_k)}{\sin \tau_k (\cos \tau_k - \cos \tau_1)} \dots \frac{(\cos t - \cos \tau_{k-1}) (\cos t - \cos \tau_{k+1}) \dots (\cos t - \cos \tau_{n-1})}{(\cos \tau_k - \cos \tau_{k-1}) (\cos \tau_k - \cos \tau_{k+1}) \dots (\cos \tau_k - \cos \tau_{n-1})}, \quad (11)$$

де $\tau_k = \frac{k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$).

Для парного ядра $K(t, \alpha)$ в (10) виберемо

$$t_{n-1}^*(t) = \sum_{k=1}^n K(\tau_k) \frac{(\cos t - \cos \tau_1)}{(\cos \tau_k - \cos \tau_1)} \dots \frac{(\cos t - \cos \tau_{k-1}) (\cos t - \cos \tau_{k+1}) \dots (\cos t - \cos \tau_n)}{(\cos \tau_k - \cos \tau_{k-1}) (\cos \tau_k - \cos \tau_{k+1}) \dots (\cos \tau_k - \cos \tau_n)}, \quad (12)$$

де $\tau_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Різниця $\Delta_n^*(t, \alpha)$ може перетворюватися в нуль у $2n-1$ -й, або ж $2n+1$ -й точках на періоді у випадку ядра $K(t, \alpha)$ з прикладу 1, та відповідно у $2n$, або $2n+2$ -х точках для ядра з прикладу 2. Число нулів різниці $\Delta_n^*(t, \alpha)$ можна встановити за знаком її похідної $\Delta_n^{*'}(t, \alpha)$ в точці π (П1) та значенням функції $\Delta_n^*(\pi, \alpha)$ (П2). Зокрема, у випадку прикладу 1 при n непарному та $\Delta_n^{*'}(\pi, \alpha) < 0$, або ж n парному та $\Delta_n^{*'}(\pi, \alpha) > 0$ різниця $\Delta_n^*(t, \alpha)$ матиме $2n-1$ нуль на періоді, тобто при $(-1)^n \Delta_n^{*'}(\pi, \alpha) > 0$. Для прикладу 2 при n непарному та $\Delta_n^*(\pi, \alpha) < 0$, або ж n парному та $\Delta_n^*(\pi, \alpha) > 0$ різниця $\Delta_n^*(t, \alpha)$ має $2n$ нулів на періоді, тобто при $(-1)^{n+1} \Delta_n^*(\pi, \alpha) > 0$.

В силу розвинень, (див. [8]), функції $K(t, \alpha)$ в наведених прикладах є алгебраїчними многочленами

$$K(t, \alpha) = \frac{\pi-t}{2} - \alpha \frac{t}{12} (t^2 - 3\pi t + 2\pi^2), \quad (П1)$$

$$K(t, \alpha) = \frac{1}{12} (3t^2 - 6\pi t + 2\pi^2) - \alpha \left(-\frac{t^4}{48} + \frac{\pi t^3}{12} - \frac{\pi^2 t^2}{12} + \frac{\pi^4}{90} \right) \quad (\text{П2})$$

Обчислюючи коефіцієнти многочленів $t_{n-1}^*(t)$, що забезпечують найкраще наближення $K(t, \alpha)$ в метриці L на випадок кількості точок інтерполяції ядра згортки $2n-1$ та $2n$ відповідно, за зразком підрахунків зроблених в [8, с. 66-69], отримуємо

$$t_k = \frac{1}{k} - 2k \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{4s^2 n^2 - k^2} + \frac{\alpha}{k^3} + \alpha \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2sn+k)^3} - \frac{1}{(2sn-k)^3} \right].$$

Многочлен $t_{n-1}^*(t)$ при цьому має вигляд $t_{n-1}^*(t) = \sum_{k=1}^{n-1} t_k \sin kt$ (П1).

На випадок прикладу 2 маємо

$$t_k = - \left[\frac{1}{k^2} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{(2sn+k)^2} + \frac{1}{(2sn-k)^2} \right) \right] - \\ - \alpha \left[\frac{1}{k^4} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{(2sn+k)^4} + \frac{1}{(2sn-k)^4} \right) \right], \\ k = 1, 2, \dots, n-1,$$

та

$$t_0 = -\frac{1}{2n^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^2} + \frac{\alpha}{8n^4} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^4}.$$

Відповідно многочлен $t_{n-1}^*(t) = \frac{t_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} t_k \cos kt$. Звідси знаходимо

значення похідної $\Delta_n^*(t, \alpha)$ в точці π $\Delta_n^*(\pi, \alpha) = -\frac{1}{2} + \alpha \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k kt_k$

та значення різниці в цій точці $\Delta_n^*(\pi, \alpha) = -\frac{\pi^2}{12} + \alpha \frac{7\pi^4}{720} - \frac{t_0}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t_k$.

Враховуючи прийняту домовленість $K(0_+, \alpha) > 0$, для того, щоб різниця $\Delta_n^*(t, \alpha)$ для функцій з прикладів П1 та П2 перетворювалася в нуль в $2n-1$ -й та відповідно $2n$ точках на періоді необхідно щоб знак похідної $(\Delta_n^*)'(\pi, \alpha)$ співпадав зі знаком $(-1)^n$ (П1) та знак $\Delta_n^*(\pi, \alpha)$ співпадав зі знаком $(-1)^{n+1}$ (П2). Виконання останніх нерівностей

залежить як від степеня n тригонометричного многочлена найкращого наближення, так і від параметра α функції $K(t, \alpha)$. Зокрема, наближаючи ядро $K(t, \alpha)$ в матриці L константою, маємо:

$$t_0^*(t) = K(\pi, \alpha) = 0 \quad (\text{П1}), \text{ та } t_0^*(t) = K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = -\frac{\pi^2}{48} + \alpha \frac{7\pi^4}{11520} \quad (\text{П2}).$$

Неважко переконатися, що $\Delta_1^*(t, \alpha) = K(t, \alpha) = (\pi - t) \frac{\alpha}{12} \left(t^2 - 2\pi t + \frac{6}{\alpha} \right) > 0$ для всіх $t \in (0, \pi)$ виконується при умові, що $t^2 - 2\pi t + \frac{6}{\alpha} > 0, t \in (0; \pi)$. Остання нерівність можлива, якщо $\alpha < \frac{6}{\pi^2}$. Різниця $\Delta_1^*(t, \alpha) = K(t, \alpha) - K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$ лише раз перетворюється в нуль в точці $t = \frac{\pi}{2}$, на проміжку $(0, \pi)$ при значеннях параметра $\alpha < \frac{48}{7\pi^2}$ (П2) (дійсно, оскільки $\Delta_1^{**}(t, \alpha) = (t - \pi) \frac{\alpha}{12} \left(t^2 - 2\pi t + \frac{6}{\alpha} \right)$, то при $\alpha \leq \frac{6}{\pi^2}$ $\Delta_1^*(t, \alpha) < 0$, якщо ж $\alpha > \frac{6}{\pi^2}$, то з умов $\Delta_1^*(0, \alpha) > 0$ та $\Delta_1^*(\pi, \alpha) \leq 0$ впливатиме наявність лише одного нуля для $\Delta_1^*(t, \alpha)$ на $(0; \pi)$. З умов $\Delta_1^*(0, \alpha) > 0$ та $\Delta_1^*(\pi, \alpha) \leq 0$ для прикладу 2 одержуємо, що $\alpha < \frac{48}{7\pi^2}$).

Якщо ж ми наближаємо ядро $K(t, \alpha)$ многочленом першого степеня $t_1^*(t) = b_1^* \sin t$, де b_1^* визначається із умови інтерполяції функції $K(t, \alpha)$ в точці $t = \frac{\pi}{2}$, тобто $K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = b_1^* = \frac{\pi}{4} \left(1 - \alpha \frac{\pi^2}{8} \right)$ (П1), то різниця $\Delta_2^*(t, \alpha)$ запишеться так: $\Delta_2^*(t, \alpha) = K(t, \alpha) - \frac{\pi}{4} \left(1 - \alpha \frac{\pi^2}{8} \right) \sin t$. Тоді похідна $(\Delta_2^*)'(t, \alpha) = -\frac{1}{2} - \alpha \left(\frac{t^2}{4} - \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) - \frac{\pi}{4} \left(1 - \alpha \frac{\pi^2}{8} \right) \cos t$ і її значення в точці π рівне $(\Delta_2^*)'(\pi, \alpha) = \frac{\pi - 2}{4} + \alpha \frac{\pi^2}{96} (8 - 3\pi)$. Звідки

$(\Delta_2^*)'(\pi, \alpha) > 0$, а, отже, різниця $\Delta_2^*(t, \alpha)$ має на $(0, 2\pi)$ 3 нулі (при $n = 2, 2n - 1 = 3$) у випадку $\alpha < \frac{24(\pi - 2)}{(3\pi - 8)\pi^2}$.

Як бачимо на даних прикладах для різниць непарних (парних) ядер Бернуллі умова $(-1)^n \text{sign} \Delta_n^*(\pi, \alpha) > 0$ ($(-1)^{n+1} \Delta_n^*(\pi, \alpha) > 0$) дозволяє встановити той факт, що інтерполюючий многочлен $t_{n-1}^*(t)$ є многочленом найкращого наближення.

Зауважимо, що при довільних натуральних значеннях r у ядрах Бернуллі умова наявності не більше ніж $2n+1$ та $2n+2$ нулів для різниці двох ядер Бернуллі автоматично виконується в силу теореми Ролля та результатів В. К. Дзядика.

Приведені тут апроксимаційні властивості многочленів найкращого наближення у випадку їх співпадання з ядром згортки не більше ніж в $2n$ точках на періоді, та проілюстровані на прикладах, знаходять своє відображення і у загальному випадку лінійних комбінацій ядер $K(t, \bar{\alpha})$ вигляду (6).

Лінійна комбінація ядер Вейля-Надя $K(t, \bar{\alpha})$ (див. напр., [4]) за-

писується у вигляді
$$K(t, \bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2}\right)}{k^{r-r_i}}$$
. Ми розг-

лядаємо тут лише непарні та парні лінійні комбінації ядер Вейля-Надя. Відповідно до (6) вони запишуться у такому вигляді

$$K(t) = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \sin \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^{r-r_i}} - \sum_{i=m_1+1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \sin \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^{r-r_i}}, \quad (14)$$

$$K(t) = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \cos \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^{r-r_i}} - \sum_{i=m_1+1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \cos \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^{r-r_i}}. \quad (15)$$

Проводячи міркування аналогічні до досліджень ядер з прикладів 1, 2 приходимо до справедливості твердженнь:

Теорема 1. Нехай ядро $K(t) = K(t, \bar{\alpha})$ вигляду (14) інтерполюється многочленом $t_{n-1}^*(t)$ степеня $n - 1$ не більше ніж в $2n + 1$ -й точці на періоді і

$$\text{sign}(\Delta_n^*(\pi, \bar{\alpha})) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^{m_1} \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \sin \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{r-r_i+1}} - \right.$$

$$- \sum_{i=m_1+1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \sin \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{r-r_i+1}} - (t_{n-1}^*)'(\pi) = (-1)^n.$$

Тоді для всіх $n \in N$ та $\alpha_i > 0$, для яких справджуються вказані обмеження, має місце включення $K(t, \bar{\alpha}) \in N_n^*$ та виконуються рівності

$$E_{n,m}(W_{\beta,\infty}^r)_C = E_{n,m}(W_{\beta,1}^r)_L = \left\| K(t, \bar{\alpha}) - t_{n-1}^*(t) \right\|_L =$$

$$= \frac{4}{\pi n^r} \left| \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} (-1)^{l_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{r-r_i+1}} - \sum_{i=m_1+1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} (-1)^{l_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{r-r_i+1}} \right|, \quad (16)$$

де $\beta - \beta_i = \frac{1}{2} + l_i$, $l_i \in Z$.

Теорема 2. Нехай ядро $K(t) = K(t, \bar{\alpha})$ вигляду (15) інтерполюється многочленом $t_{n-1}^*(t)$ степеня $n-1$ не більше ніж в $2n+2$ -х точках на періоді, при цьому

$$\text{sign}(\Delta_n^*(\pi, \alpha)) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \cos \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{r-r_i}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=m_1+1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \cos \frac{(\beta - \beta_i)\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{r-r_i}} t_{n-1}^*(\pi) \right) = (-1)^{n+1}.$$

Тоді для всіх $n \in N$ та $\alpha_i > 0$, для яких справджуються вказані обмеження, має місце включення $K(t, \bar{\alpha}) \in N_n^*$ та виконуються рівності

$$E_{n,m}(W_{\beta,\infty}^r)_C = E_{n,m}(W_{\beta,1}^r)_L = \left\| K(t, \alpha) - t_{n-1}^*(t) \right\|_L =$$

$$= \frac{4}{\pi n^r} \left| \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} (-1)^{l_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{r-r_i+1}} - \sum_{i=m_1+1}^m \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} (-1)^{l_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{r-r_i+1}} \right|, \quad (17)$$

де $\beta - \beta_i = l_i$, $l_i \in Z$.

Зауваження 1. Для тригонометричного многочлена $t_{n-1}^*(t)$ в теоремі 1 вигляду (11), а в теоремі 2 вигляду (12) за зразком підрахунків зроблених в [8, с. 66-69], можна обчислити коефіцієнти так, як це було зроблено для наведених прикладів.

Зауваження 2. Використовуючи класичні результати по найкращому наближенні Ж. Фавара, Н. І. Ахієзера, М. Г. Крейна, ми можемо отримати очевидні нерівності

$$E_{n,m}(W_{\beta,\infty}^r)_C \leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \right| E_n(W_{\beta-\beta_i,\infty}^r)_C$$

та відповідно

$$E_{n,m} \left(W_{\beta,1}^r \right)_L \leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\alpha_i}{n^{r_i}} \right| E_n \left(W_{\beta-\beta_i,1}^{r-r_i} \right)_L.$$

Так, зокрема, для наведеного прикладу 1 отримуємо: якщо функція $f(x) \in W_{r,\infty}^r \left(W_{r,1}^r \right)$ то її $r-1$, та $r-3$ похідні $f^{(r-1)}(x)$, та $f^{(r-3)}(x)$ будуть знаходитися відповідно в класах $W_{1,\infty}^1 \left(W_{1,1}^1 \right)$ та $W_{3,\infty}^3 \left(W_{3,1}^3 \right)$. І тоді при виконанні умови

$$\begin{aligned} & \text{sign} \left(\Delta_n^* (\pi, \alpha) \right) = \\ & = \text{sign} \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{n^{r-1}} + \frac{\alpha}{n^{r-3}} \frac{\pi^2}{12} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k kt_k \right) = \text{sign} (-1)^n \end{aligned}$$

будемо мати

$$\begin{aligned} E_{n,2} \left(W_{r,\infty}^r \right)_C &= E_{n,2} \left(W_{r,1}^r \right)_L = \left\| K(t, \bar{\alpha}) - t_{n-1}^*(t) \right\|_L = \\ &= \frac{4}{\pi n^r} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(2k+1)^4} \right| = \frac{4}{\pi n^r} \left| \frac{\pi^2}{8} - \frac{\alpha \pi^4}{96} \right| = \frac{1}{n^r} \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \pi^3}{24} \right|. \end{aligned}$$

В той же час із класичних результатів ми отримуємо таку оцінку

$$\begin{aligned} E_{n,2} \left(W_{r,\infty}^r \right)_C &\leq \frac{1}{n^{r-1}} E_n \left(W_{1,\infty}^1 \right)_C + \frac{|\alpha|}{n^{r-3}} E_n \left(W_{3,\infty}^3 \right)_C = \\ &= \frac{1}{n^{r-1}} \frac{\pi}{2n} + \frac{|\alpha|}{n^{r-3}} \frac{\pi^3}{24n^3} = \frac{1}{n^r} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{|\alpha| \pi^3}{24} \right), \end{aligned}$$

та

$$E_{n,2} \left(W_{r,1}^r \right)_L \leq \frac{1}{n^{r-1}} E_n \left(W_{1,1}^1 \right)_L + \frac{|\alpha|}{n^{r-3}} E_n \left(W_{3,1}^3 \right)_L = \frac{1}{n^r} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{|\alpha| \pi^3}{24} \right).$$

Аналогічно, якщо функція $f(x) \in W_{r,\infty}^r \left(W_{r,1}^r \right)$, тоді похідні $f^{(r-2)}(x)$ та $f^{(r-4)}(x)$ будуть знаходитися відповідно в класах $W_{2,\infty}^2 \left(W_{2,1}^2 \right)$ та $W_{4,\infty}^4 \left(W_{4,1}^4 \right)$. Тому

$$\begin{aligned} E_{n,2} \left(W_{r,\infty}^r \right)_C &= E_{n,2} \left(W_{r,1}^r \right)_L = \left\| K(t, \bar{\alpha}) - t_{n-1}^*(t) \right\|_L = \\ &= \frac{4}{\pi n^r} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} \right| = \frac{4}{\pi n^r} \left| \frac{\pi^3}{32} - \frac{5\alpha \pi^5}{64 \cdot 4!} \right| = \frac{1}{n^r} \left| \frac{\pi^2}{8} - \frac{5\alpha \pi^4}{384} \right|. \end{aligned}$$

Використовуючи ж класичні результати маємо

$$E_{n,2} \left(W_{r,\infty}^r \right)_C \leq \frac{1}{n^{r-2}} E_n \left(W_{2,\infty}^2 \right)_C + \frac{\alpha}{n^{r-4}} E_n \left(W_{4,\infty}^4 \right)_C = \\ = \frac{1}{n^{r-2}} \cdot \frac{\pi^2}{8n^2} + |\alpha| \frac{1}{n^{r-4}} \cdot \frac{5\pi^4}{384} = \frac{1}{n^r} \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{|\alpha|5\pi^4}{384} \right)$$

Висновки. З проведених у статті міркувань щодо апроксимативних властивостей ядер Бернуллі робимо висновок : в умовах теорем 1 та 2 ядро лінійної комбінації $K(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умову Надя N_n^* , ($K \in N_n^*$). Цікавими, та суттєво іншими апроксимативними властивостями наділені ядра, які умову N_n^* не задовольняють. Автори в майбутньому планують цей випадок дослідити.

Список використаних джерел:

1. Favard J. Sur l'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques. *C.r. Acad. Sci.* 1936. Vol. 203. P. 1122-1124.
2. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер. *Мат. заметки.* 1974. Вып. 16. №5. С. 691-701.
3. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. Киев: Наук. думка, 1987. 268 с.
4. Сорич В. А. Наилучшее совместное приближение функций и их производных. Киев, 1989. С.3-54. (Препринт / Ин-т математики АН УРСР; 89.19).
5. Сорич В. А., Сорич Н. М. Найкраще наближення лінійної комбінації ядер Пуассона. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: зб. наук. пр. за матеріалами всеукр. наук.- метод. конф. Кам'янець- Подільський: Кам'янець- Подільський держ. ун-т, 2004. С. 60-69.
6. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1946. Вып. 10. С. 207-256.
7. Крейн М. Г. К теории наилучшего приближения периодических функций. *Докл. АН СССР.* 1938. Вып. 18. № 4-5. С. 245-249.
8. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.

THE NEW APPROXIMATION EFFECTS OF WEYL-NAGY KERNELS

In a uniform metric, the problem of obtaining the exact values of the best approximations on classes 2π -periodic functions, r -th ($r > 0$) derivatives of which are in a single sphere of space of significantly limited functions, there was decided in 1936 by J. Favard [1]. Such classes can also be considered as classes of convolutions with known in the scientific literature on the theory of approximation Bernoulli kernels. In solving the problem J. Favard put forward the hypothesis that the similar problem with fractional values of the pa-

parameter r can also be solved according to the proposed scheme. The idea of solving the problem is based on Rolle's theorem on the relationship between the number of zeros of a function and the number of zeros of its derivative. Lately we have been seeing the increased attention of mathematics to the problems, for which Rolle's theorem is true, and as result of which it becomes possible to find solutions to many problems of the theory of approach. Many outstanding mathematicians worked on J. Favard's hypothesis: N. Akhiezer, M. Krein, S. Nikolsky, S. Stechkin, Sun Yon-shen and others. The final results for solving the problem of finding the exact values of the best approximations in the classes, generated by the Weyl-Nagy kernels and which generalize Bernoulli kernels, in the metrics of spaces of continuous and according of summary functions, belong to V. Dzyadyk [2].

The problem of joint approximation of periodic functions and their derivatives in the formulation, which is considered in this paper, was initiated by O. Stepanets. The finding the exact value of the sizes of the best approximations of the individual, and the most important (according to the successful proposal of O. Stepanets [3]) linear combinations functions from Weyl-Nagy classes in uniform and integral metrics was considered in the works of the authors in detail (see, in particular, [4, 5]). This works concern the best joint approximation of functions from classes of convolutions with fixed generating kernels. If the number of terms m in a linear combination is one, then the best joint approximation and value of the best approximations coincide. This article is a logical continuation of a problem of finding the values of the best joint approximation of linear combinations of functions from Weyl-Nagy classes in metrics of spaces of continuous and, accordingly, summary functions; the values of the parameters that complements the before considered cases is investigated in it. It found the conditions for parameters of the problem of the best joint approximation, in which the kernels of convolution satisfy Nagy sufficient conditions of best approximation in the integral metrics.

Key words: *Weyl-Nagy classes, linear combinations of functions and their derivatives, sufficient conditions of Nikolsky and of Nagy for the best approximation in the integral metric.*

Отримано: 6.10.2021

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Бак Сергій Миколайович — доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Sergiy.bak@gmail.com

Верлань Анатолій Федорович — доктор технічних наук, професор, член кореспондент НАПН України, Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ, a.f.verlan@gmail.com

Гнатюк Василь Олексійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Гранкін Віктор Павлович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформатики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, victor.grankin@gmail.com

Гранкін Денис Вікторович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформатики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, dr.grankin@gmail.com

Гранкін Михайло Вікторович — аспірант кафедри інформатики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, theflint@gmail.com

Гудима Уляна Василівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Дармосюк Валентина Миколаївна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та математики Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського, м. Миколаїв

Дячук Олександр Анатолійович — кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Державної установи «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ, oadyachuk@ukr.net

Ємець Олег Олексійович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», м. Полтава

Зеленський Олексій Віталійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Ключка Костянтин Миколайович — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електротехнічних систем Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси

Ковальська Ірина Борисівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Лобач Роман Вадимович — здобувач освіти Кам'янець-Подільський НВК № 14, м. Кам'янець-Подільський

Митько Лідія Олексіївна — кандидат фізико-математичних наук, Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

Ольховська Олена Володимирівна — кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», м. Полтава

Радзівська Олена Іванівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій, м. Київ

Сорич Віктор Андрійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Сорич Ніна Миколаївна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Федорчук Володимир Анатолійович — доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформатики Кам'янець-Подільського

льського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, fedvlad@ukr.net

Черненко Оксана Олексіївна — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», м. Полтава

Чілікіна Тетяна Василівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», м. Полтава

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

Б		Л	
Бак С. М.	5	Лобач Р. В.	75
В		М	
Верлань А. Ф.	19	Митько Л. О.	81
Г		О	
Гнатюк В. О.	38	Ольховська О. В.	63
Гранкін В. П.	27	Р	
Гранкін Д. В.	27	Радзієвська О. І.	90
Гранкін М. В.	27	С	
Гудима У. В.	38	Сорич В. А.	97
Д		Сорич Н. М.	97
Дармосюк В. М.	75	Ф	
Дячук О. А.	55	Федорчук В. А.	19
Є		Ч	
Ємець О. О.	63	Черненко О. О.	63
З		Чілікіна Т. В.	63
Зеленський О. В.	75		
К			
Ключка К. М.	81		
Ковальська І. Б.	90		

ЗМІСТ

Бак С. М.

Стоячі хвилі в дискретних
рівняннях типу Клейна-Гордона
із насичуваними нелінійностями 5

Верлань А. Ф., Федорчук В. А.

Математичні моделі для задачі відновлення
функції розподілу теплових джерел 19

Гранкін Д. В., Гранкін М. В., Гранкін В. П.

Метод клітинних автоматів
для моделювання фізико-хімічних процесів
на нанокаталізаторі 27

Гудима У. В., Гнатюк В. О.

Чисельний метод одночасного
розв'язування задачі відшукування відстані
між опуклим многогранником
і скінченновимірним підпростором
лінійного нормованого простору
та двоїстої до неї задачі 38

Дячук О. А.

Моделювання процесу розвитку потужностей
електроенергетичних систем 55

Ємець О. О., Черненко О. О.,

Чілікіна Т. В., Ольховська О. В.

Огляд задач комбінаторної оптимізації
визначення рентабельності сільськогосподарського
виробництва та методи їх розв'язування 63

Зеленський О. В., Дармосюк В. М., Лобач Р. В.

Відновлення матриць
відстаней та їх застосування 75

Ключка К. М., Митько Л. О.

Процедура локалізації несправного елемента
в лінійному електричному колі
з пасивними двохполюсниками 81

Radziyevska O. I., Kovalska I. B.

Estimation of the Best Approximations
for the Generalized Derivative in Banach Spaces90

Сорич В. А., Сорич Н. М.

Нові апроксимаційні ефекти ядер Вейля-Надя.....97

Відомості про авторів 110

Алфавітний покажчик авторів 113

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 22

Підписано до друку 29.11.2021 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 6,8. Обл.-вид. арк. 7,5.
Тираж 50. Зам. № 957.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.